

IV. ANALYSE DE RESEAUX SIMPLES – CELLULES R–C

IV.1. INTRODUCTION

On aborde la fabrication de modèles raccordables à travers une représentation nodale de problèmes de conduction thermique les plus simples.

Le premier système qui nous servira à introduire les objets génériques du formalisme est constitué par un modèle nodal de conduction thermique d'un mur mono-dimensionnel soumis sur une face à un flux connu, Φ sur l'autre à un puits thermodynamique à température constante T_c .

$\Phi(t)$ et T_c sont les deux grandeurs indépendantes (conditions aux limites) du problème. Le mur est décomposé en deux couples R–C (fig. IV.1).

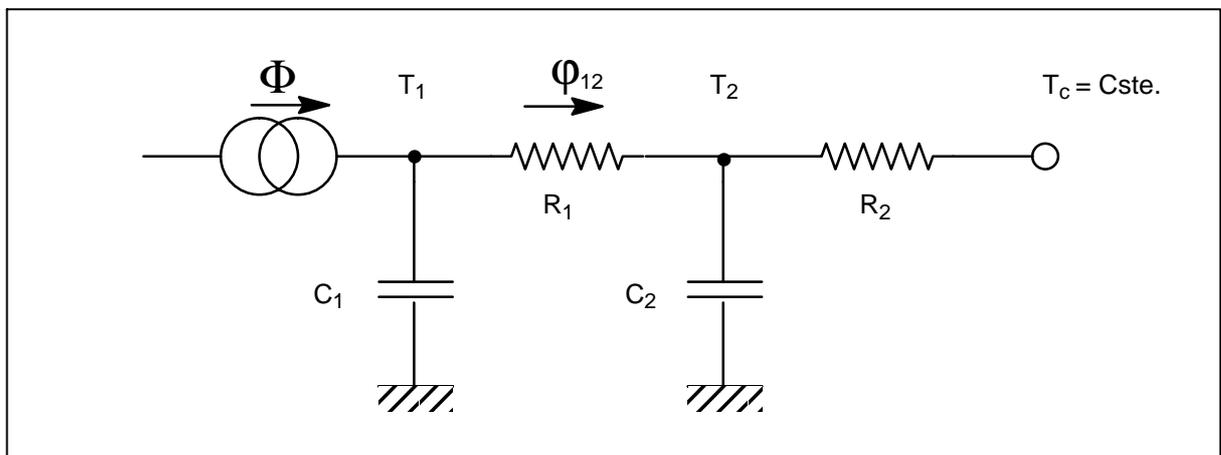


Figure IV.1

Les modèles classiquement utilisés pour l'étude des réseaux électriques sont ici de quatre sortes:

- un générateur de courant–flux Φ
- une source de potentiel T_c
- des capacités C_i
- des conductances h_i ($h_i = 1/R_i$)

Pour le TEF, on a trois sortes d'objets élémentaires:

- des conditions indépendantes: Φ, T_c
- des cellules : les modèles comportant une équation d'évolution (régie par des EDP en temps)
- des transferts: les modèles stationnaires dont les équations expriment des contraintes instantanées entre les grandeurs physiques «transférées» entre les cellules et les variables d'état des cellules connectées.

Ainsi, les objets «capacitances» ($C \frac{dT_j}{dt} = \sum_i \varphi_i$) sont des cellules, de variable d'état: T_j ; les conduc-

tances h sont des transferts : ($\varphi_{ji} = h \times (T_j - T_i)$). Ces définitions seront généralisées par la suite.

IV.2. MODELE SIMPLE DE CELLULE :

La cellule la plus simple que nous allons considérer comme exemple a des variables d'états qui évoluent selon une équation différentielle ordinaire du première ordre. C'est le cas de l'évolution de la tension à travers le condensateur dans un circuit R-C (fig. IV.2).

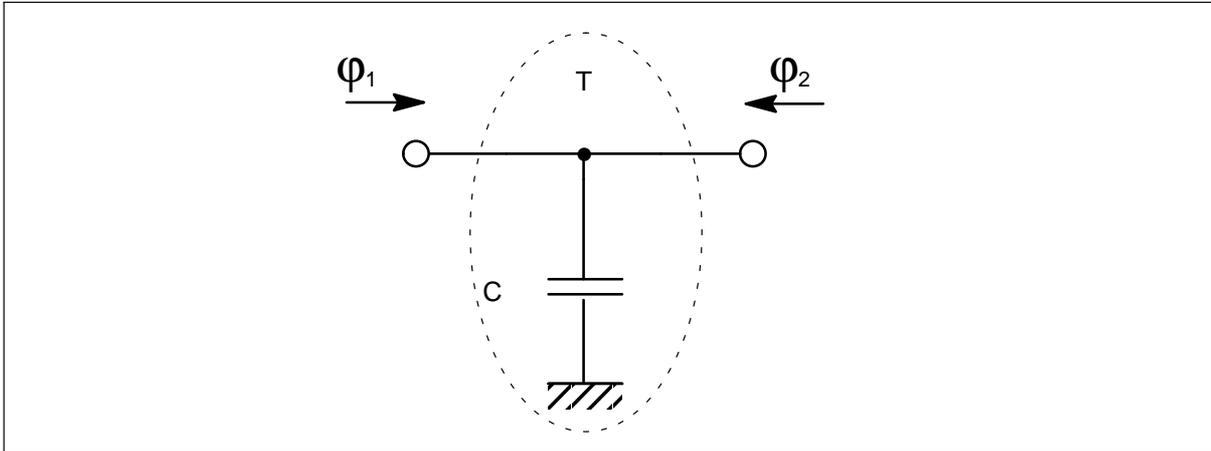


Figure IV.2

Cette cellule sera composée uniquement de la capacitance C:

Sa variable d'état T évolue selon la loi :

$$C \frac{\partial T}{\partial t}(t) = \sum_i \varphi_i(t) \quad (1)$$

$\sum_i \varphi_i(t)$: étant le bilan de flux aux bornes de la capacitance. Ces flux sont les variables de transfert connectés à la cellule.

L'intégration de type Crank-Nicholson (méthode des trapèzes) sur un pas de temps δt conduit à une relation linéaire entre l'évolution δT de la variable d'état de la cellule et les variables de transfert $\delta \varphi_i$, entre les instants t_0 et $t_0 + \delta t$:

$$C \delta T - \frac{\delta t}{2} \sum_i \delta \varphi_i = \sum_i (\varphi_i)_{t=t_0} \delta t \quad (2)$$

que l'on rapprochera le l'équation générale:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\alpha\alpha} \delta \vec{\eta}_\alpha + \mathbf{B}_{\alpha f} \vec{\Delta}_f = \vec{\Gamma}_\alpha \delta t} \quad (3)$$

C'est la forme canonique d'une équation d'évolution de cellule.

On peut considérer globalement que l'on a traité le modèle non pas comme si les conditions limites $\sum_i \varphi_i(t)$ étaient constantes, mais linéarisées sur δt , ce qui introduit une deuxième inconnue $\delta \varphi$ dans l'équation (2) de la cellule; c'est ce terme $\delta \varphi$ qui raccorde la cellule au reste du système; pour $\delta \varphi = 0$, la cellule est découplée du système. On appelle $\delta \eta_{\alpha, \text{dec}}$ la solution de (2) où $\sum_i \delta \varphi_i(t) = 0$.

IV.3. MODELE SIMPLE DE TRANSFERT

Le modèle le plus simple de transfert que nous puissions imaginer sera simplement constitué d'une résistance (conductance) comme sur la figure IV.3.

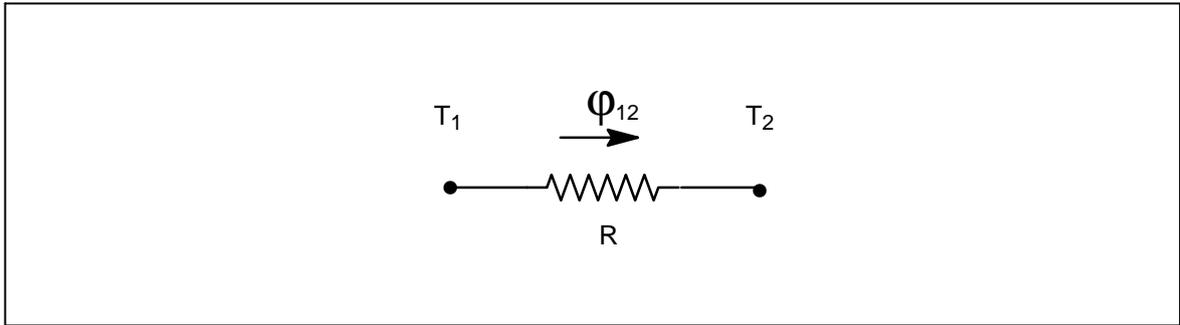


Figure IV.3

Plus généralement le raccordement entre cellules est effectué par le choix d'une variable de transfert φ_i ou d'un vecteur de transfert $|\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\rangle$ pour un groupe de cellules ou de familles de cellules. Dans notre exemple nous raccordons deux variables d'état en explicitant la contrainte statique entre elles et la variable de transfert-flux:

$$\varphi_{12} = h(T_1 - T_2) \tag{4}$$

Après intégration:

$$-h\delta T_1 + h\delta T_2 + \delta\varphi_{12} = 0 \tag{5}$$

que l'on rapprochera le l'équation générale:

$$\delta t \sum_{\alpha} C_{f\alpha}^+ \delta \vec{\eta}_{\alpha} - (\mathbf{1} + \mathbf{D}_{ff}) \vec{\Delta}_f = \vec{\Omega}_f \delta t \tag{6}$$

avec: $\delta t C_{f\alpha}^+ = \pm h$ $\mathbf{D}_{ff} = \vec{0}$ $\vec{\Omega}_f \delta t = 0$

IV.4. RACCORDEMENT DES OBJETS PRECEDENTS

Reprenons le réseau R-C de la fig. IV.1 dans lequel nous regroupons la source extérieure Φ constante dans le temps et la capacité C_1 dans la cellule α ; la capacité C_2 , la conductance h_2 et le puits (extérieur) de potentiel T_c constant dans le temps dans la cellule β et relier les entre elles par une conductance h_1 (fig. IV.4).

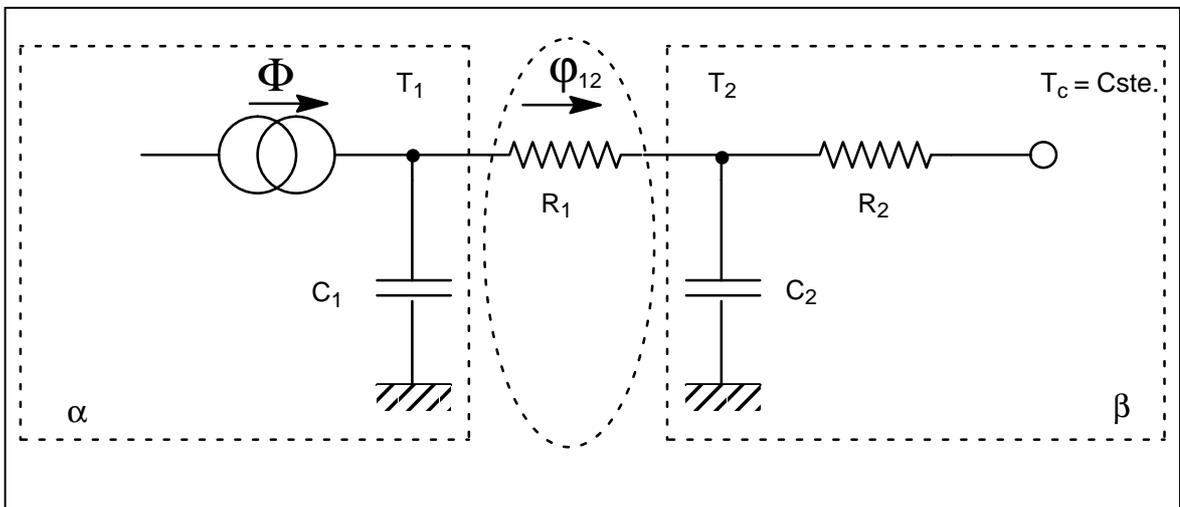


Figure IV.4

Le choix de α et β comme cellules avec variables d'états T_1 et T_2 entraînera le choix naturel du module de raccordement précédent.

Les équations du système sont les suivantes:

- pour les cellules α et β :

$$\begin{cases} C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \Phi + \varphi_{21} \\ C_2 \frac{\partial T_2}{\partial t} = \varphi_{12} + h_2(T_c - T_2) \end{cases} \quad (7)$$

- pour le transfert:

$$\varphi_{12} = -\varphi_{21} = -h_1(T_2 - T_1) \quad (8)$$

En écrivant (7) et (8) sous la forme canonique (3) et (6) :

$$\begin{cases} C_1 \delta T_1 - \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_{21} = [\Phi + \varphi_{21}(0)] \delta t \\ (C_2 + h_2 \frac{\delta t}{2}) \delta T_2 + \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_{12} = [\varphi_{12}(0) + h_2[T_c - T_2(0)]] \delta t \end{cases} \quad (9)$$

$$h_1 \delta T_2 - h_1 \delta T_1 + \delta \varphi_{12} = 0 \quad (10)$$

Eliminons les variables d'état des cellules:

$$\begin{cases} \delta T_1 = \frac{[\Phi + \varphi_{21}(0)] \delta t + \delta \varphi_{21} \frac{\delta t}{2}}{C_1} \\ \delta T_2 = \frac{\varphi_{12}(0) + h_1[T_c - T_2(0)]}{C_2 + h_2 \frac{\delta t}{2}} \delta t - \delta \varphi_{12} \frac{\delta t}{2(C_2 + h_2 \frac{\delta t}{2})} \end{cases} \quad (11)$$

On pose:

$$\begin{cases} \delta T_{1,dec} = \frac{[\Phi + \varphi_{21}(0)] \delta t}{C_1} \\ \delta T_{2,dec} = \frac{\varphi_{12}(0) + h_1[T_c - T_2(0)]}{C_2 + h_2 \frac{\delta t}{2}} \delta t \end{cases} \quad (12)$$

c'est l'évolution qu'auraient les cellules si elles étaient découplées du système.

On reporte (11) dans l'équation (10) des transferts:

$$-h_1 \delta T_{1,dec} - h_1 \frac{\delta t}{2C_1} \delta \varphi_{21} - h_1 \delta T_{2,dec} - h_1 \frac{\delta t}{2(C_2 + h_2 \frac{\delta t}{2})} \delta \varphi_{12} + \delta \varphi_{12} = 0 \quad (13)$$

que l'on peut résoudre en $\delta \varphi_{12}$ et qui une fois reporté dans (11) nous donne l'évolution des variables d'état des cellules.

L'évidence de ce découpage en cellules et raccordement par un flux provient de la représentation «nodale» (lumped) qui a explicitement modularisé le système.

D'une façon générale, nous avons constaté que les formulations intégrales étaient bien adaptées au TEF (ou réciproquement !). Mais le TEF est aussi très utile pour d'autres approches.

Nous allons à présent introduire les notations matricielles du TEF et montrer les liens entre découpage, raccordement et les formulations du système résultant.

IV.5. FAMILLE DE DEUX CELLULES AVEC DIFFERENTES MODALITES DE RACCORDEMENT

IV.5.A. Considérons un circuit R-C élargi à quatre capacitances et conductances. On effectue cette fois-ci un découpage du système en deux cellules comme sur la figure IV.5, où les cellules α et β ont deux variables d'états chacune. Ceci entraînera comme auparavant le choix d'une variable de transfert φ_{23} de type flux qui connecte certaines variables d'état de chacune des deux cellules α et β .

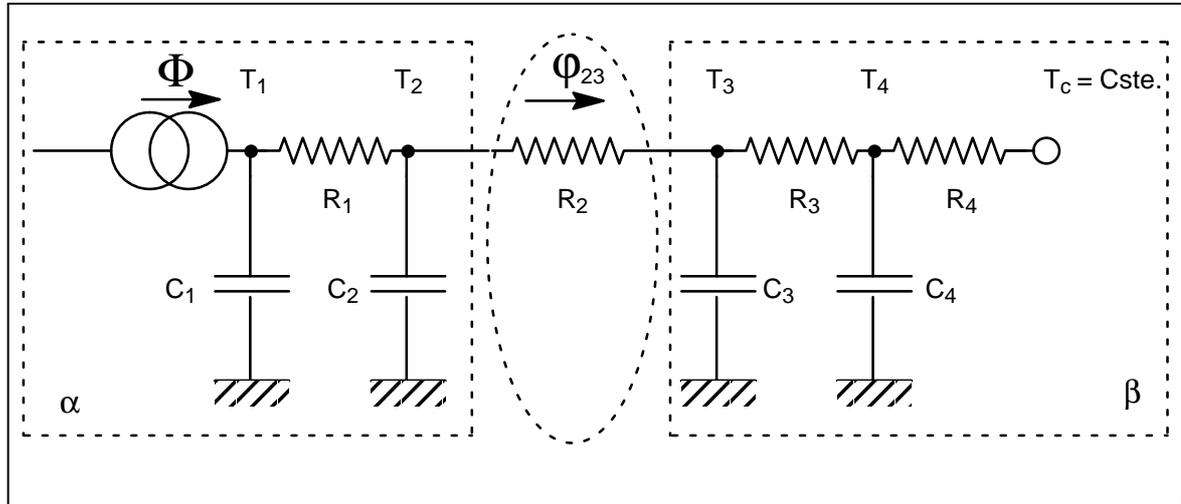


Figure IV.5

Les variables d'état des deux cellules seront représentées par deux vecteurs $\vec{\eta}_\alpha = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ et $\vec{\eta}_\beta = \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \end{bmatrix}$

et la variable de transfert est φ_{23} .

Les équations canoniques des deux cellules seront alors:

- Pour la cellule α :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ -h_1 & h_1 \end{bmatrix} \right] \delta \vec{\eta}_\alpha - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta \varphi_{23} \\ & = \delta t \begin{bmatrix} -h_1 & h_1 \\ h_1 & -h_1 \end{bmatrix} \vec{\eta}_\alpha + \delta t \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\delta t^2}{2} \begin{bmatrix} \partial \Phi / \partial t \\ 0 \end{bmatrix} + \delta t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \varphi_{23} \end{aligned} \quad (14)$$

- Pour la cellule β :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{bmatrix} C_3 & 0 \\ 0 & C_4 \end{bmatrix} - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} h_3 & -h_3 \\ -h_3 & h_3 + h_4 \end{bmatrix} \right] \delta \vec{\eta}_\beta - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta \varphi_{23} \\ & = \delta t \begin{bmatrix} -h_3 & h_3 \\ h_3 & -h_3 - h_4 \end{bmatrix} \vec{\eta}_\beta + \delta t \begin{bmatrix} 0 \\ h_4 T_c \end{bmatrix} + \delta t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \varphi_{23} \end{aligned} \quad (15)$$

L'équation de transfert sera:

$$\begin{bmatrix} -h_2 & : & 0 \end{bmatrix} \delta \vec{\eta}_\alpha + \begin{bmatrix} h_2 & : & 0 \end{bmatrix} \delta \vec{\eta}_\beta + \delta \varphi_{23} = 0 \quad (16)$$

Nous utiliserons systématiquement la lettre φ pour représenter les variables et vecteurs de transfert et le symbole η pour décrire les variables et vecteurs d'états des cellules.

IV.5.B. Considérons un système semblable au précédent mais avec un découpage différent (figure IV.6). On introduit un autre genre de variable de transfert de type température T (ou potentiel).

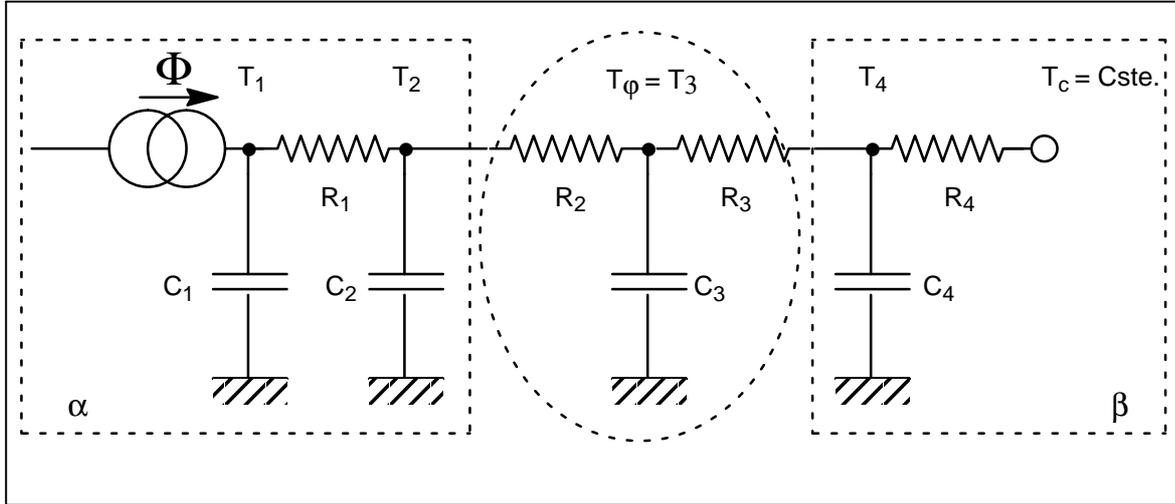


Figure IV.6

La cellule α possède deux variables d'états T_1 et T_2 tandis que la cellule β à pour seule variable d'état T_4 . $T_\varphi = T_3$ est la variable de transfert correspondant à ce découpage.

On définit les vecteurs d'état: $\vec{\eta}_\alpha = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ et $\vec{\eta}_\beta = T_4$. Les équations canoniques des cellules seront:

- Pour la cellule α :

$$\begin{aligned} & \left[\begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} h_1 & -h_1 \\ -h_1 & h_1 + h_2 \end{bmatrix} \right] \delta \vec{\eta}_\alpha - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -h_2 \end{bmatrix} \delta T_\varphi \\ & = \delta t \begin{bmatrix} -h_1 & h_1 \\ h_1 & -h_1 - h_2 \end{bmatrix} \vec{\eta}_\alpha + \delta t \begin{bmatrix} \Phi \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\delta t^2}{2} \begin{bmatrix} \partial \Phi / \partial t \\ 0 \end{bmatrix} + \delta t \begin{bmatrix} 0 \\ h_2 \end{bmatrix} T_\varphi \end{aligned} \quad (17)$$

- Pour la cellule β :

$$\left[C_4 - \frac{\delta t}{2} (h_3 + h_4) \right] \delta \vec{\eta}_\beta - \frac{\delta t}{2} (-h_3) \delta T_\varphi = \delta t (-h_3 - h_4) \vec{\eta}_\beta + \delta t h_4 T_c + \delta t h_3 T_\varphi \quad (18)$$

L'équation canonique de transfert est de la forme:

$$\begin{aligned} & \left[C_3 - \frac{\delta t}{2} (h_2 + h_3) \right] \delta T_\varphi - \frac{\delta t}{2} [0 : -h_2] \delta \vec{\eta}_\alpha - \frac{\delta t}{2} (-h_3) \delta \vec{\eta}_\beta \\ & = \delta t [0 : h_2] \vec{\eta}_\alpha + \delta t (-h_3) \vec{\eta}_\beta + \delta t (-h_2 - h_3) \delta T_\varphi \end{aligned} \quad (19)$$

Cependant, bien que ce modèle de transfert soit tout à fait acceptable formellement, il déroge à la dissymétrie cellules-transferts précédemment introduite, l'équation de contrainte des transferts étant non statique. Nous verrons par la suite qu'il correspond à un macro-objet du TEF, une C-famille.

IV.5.C. Considérons la figure IV.7 avec un nouveau découpage du système.

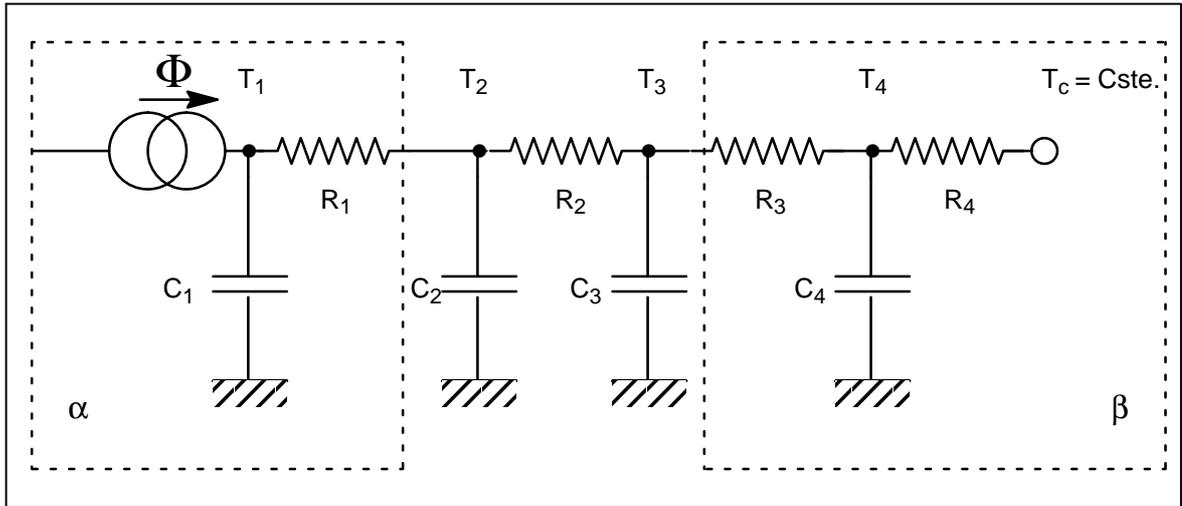


Figure IV.7

Avec cette répartition la variable de transfert est le vecteur $\vec{T}_\varphi = \begin{bmatrix} T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}$

Les équations canoniques des cellules sont:

- Pour la cellule α :

$$\left[C_1 - \frac{\delta t}{2} h_1 \right] \delta \vec{\eta}_\alpha - \frac{\delta t}{2} [-h_1 : 0] \delta \vec{T}_\varphi = \delta t (-h_1) \vec{\eta}_\alpha + \delta t [\Phi : 0] + \delta t [h_1 : 0] \vec{T}_\varphi \quad (20)$$

- Pour la cellule β :

$$\begin{aligned} \left[C_4 - \frac{\delta t}{2} (h_3 + h_4) \right] \delta \vec{\eta}_\beta - \frac{\delta t}{2} [0 : -h_3] \delta \vec{T}_\varphi \\ = \delta t (-h_3 - h_4) \vec{\eta}_\beta + \delta t h_4 T_c + \delta t [0 : h_3] \vec{T}_\varphi \end{aligned} \quad (21)$$

L'équation de transfert est:

$$\begin{aligned} \left[\begin{bmatrix} C_2 & 0 \\ 0 & C_3 \end{bmatrix} - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} h_1 + h_2 & -h_2 \\ -h_2 & h_2 + h_3 \end{bmatrix} \right] \delta \vec{T}_\varphi - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} -h_1 \\ 0 \end{bmatrix} \delta \vec{\eta}_\alpha - \frac{\delta t}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -h_3 \end{bmatrix} \delta \vec{\eta}_\beta \\ = \delta t \begin{bmatrix} -h_1 - h_2 & h_2 \\ h_2 & -h_2 - h_3 \end{bmatrix} \vec{T}_\varphi + \delta t \begin{bmatrix} h_1 \\ 0 \end{bmatrix} \vec{\eta}_\alpha + \delta t \begin{bmatrix} 0 \\ h_3 \end{bmatrix} \vec{\eta}_\beta \end{aligned} \quad (22)$$

Le critère de choix d'une variable de transfert dans les cas précédents était simplement celui d'une variable qui relie au moins une variable d'état de chacune des cellules.

On peut à partir de ces découpages du système apprécier l'idée du raccordement, qui a reconstitué la dynamique du système complet à travers deux effets du raccordement:

- 1 – L'équation d'évolution linéarisée de la cellule traduit l'influence de la variation des transferts connectés sur l'évolution de l'état de la cellule.
- 2 – L'équation de contrainte des transferts fait dépendre l'évolution des transferts de celle des états des cellules connectées. On peut les considérer comme une extension de la dualité action-réaction.

IV.6. MODE DE REPRESENTATION TEF DES CELLULES DE RACCORDEMENT

Dans les trois cas précédents A, B et C le système d'équation a toujours été bi-dimensionnel et la solution aurait toujours exigé l'inversion d'une matrice de dimension 2×2 .

Il est possible cependant d'opter pour un découpage avec une cellule ayant trois variables d'états, l'autre en ayant une seule. Le transfert serait de type flux comme au cas A. La solution du système d'équations aurait nécessité l'inversion d'une matrice de dimension 3×3 .

Un autre cas aurait été d'avoir une seule cellule avec quatre variables d'états T_1, T_2, T_3, T_4 . La solution de la seule équation du système aurait nécessité l'inversion d'une matrice de dimension 4×4 en donnant la solution de son vecteur d'état en ses quatre composantes: $\delta T_1, \delta T_2, \delta T_3, \delta T_4$.

L'un des critères de découpage du système repose ainsi sur la dimensionnalité du système à résoudre.

Nous allons maintenant introduire progressivement l'analyse hiérarchisée associée au TEF à travers la notion de famille, qui regroupe des cellules et leurs transferts internes.

Les quatre cas précédents sont décrits de la même façon, par la définition implicite d'une seule famille U comme symbole de l'ensemble des objets du système (U pour Univers).

La famille qui regroupe cellules et transferts est placée haut dans le schéma. Chacun des cas précédents est représenté par une seule famille U distincte (figure IV.8):

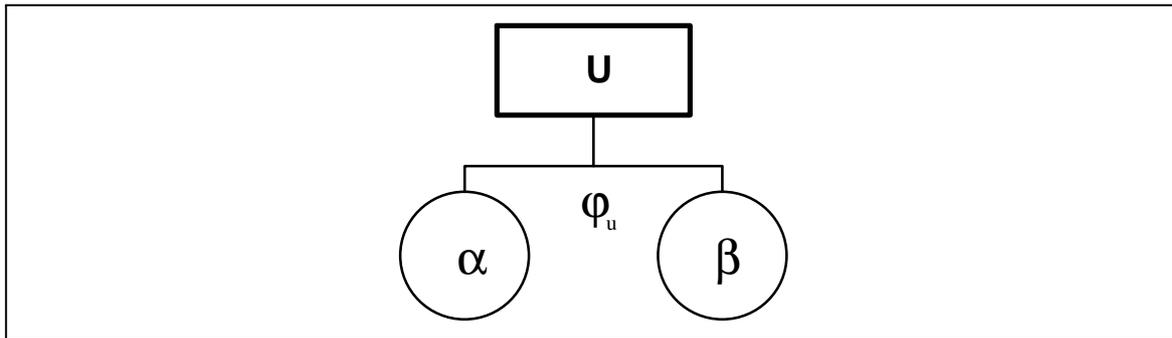


Figure IV.8

IV.7. RESOLUTION DES SYSTEMES PRECEDENTS

La résolution de chacun des systèmes précédents est conduite formellement de la même façon en éliminant les variables d'état de l'équation de transfert à partir de leurs équations de cellules. L'équation résultante dite « placée sous U » est de la forme :

$$[U] \delta \vec{\varphi}_u = \vec{A} \quad \text{ou } \vec{A} \text{ est un vecteur connu.} \quad (23)$$

La résolution de ce système linéaire fournit $\delta \varphi_u$, et les variables d'état s'obtiennent en résolvant un système linéaire par cellule:

$$A \delta \vec{\eta} = \Gamma \delta t - B \delta \vec{\varphi}_u \quad (24)$$

IV.8. LE DECOUPAGE DU SYSTEME EN FAMILLE – CREATION DE FAMILLES HIERARCHI-SEES

Une variante de découpage du système précédent consiste en quatre cellules ayant une variable chacune . Les quatre cellules α , β , γ , δ sont reliées entre elles par des transferts φ_f , φ_g , φ_u (figure IV.9).

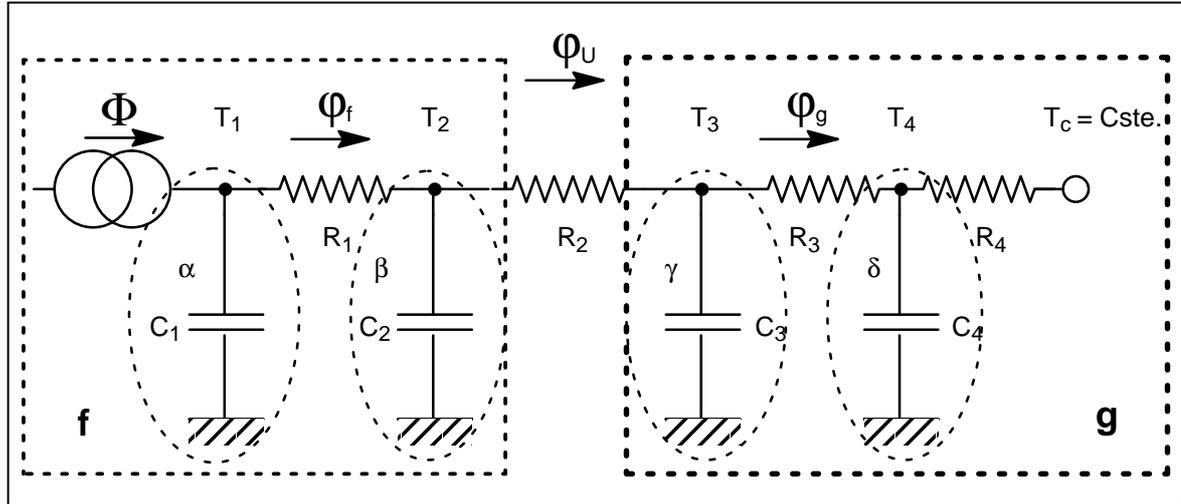


Figure IV.9

Regroupons les cellules arbitrairement par paquets de 2 .

La résolution du système découpé selon la figure IV.9 va conduire naturellement au concept de hiérarchisation.

Les équations des cellules sont les suivantes :

- Cellule α : $C_1 \delta T_1 - \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_f = [V_\alpha]_{t=t_0} \delta t$ (1)

- Cellule β : $C_2 \delta T_2 + \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_f - \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_u = [V_\beta]_{t=t_0} \delta t$ (2)

- Cellule γ : $C_3 \delta T_3 + \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_u - \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_g = [V_\gamma]_{t=t_0} \delta t$ (3)

- Cellule δ : $\left[C_4 - \frac{\delta t}{2} h_4 \right] \delta T_4 + \frac{\delta t}{2} \delta \varphi_g = [V_\delta]_{t=t_0} \delta t$ (4)

ou $[V_\alpha]_{t=t_0}$, $[V_\beta]_{t=t_0}$, $[V_\gamma]_{t=t_0}$ et $[V_\delta]_{t=t_0}$ sont des termes connus à t_0 , le temps de départ de l'évolution.

Les équations des transferts sont:

$$-h_1 \delta T_1 + h_1 \delta T_2 + \delta \varphi_f = 0 \quad (5)$$

$$-h_2 \delta T_2 + h_2 \delta T_3 + \delta \varphi_u = 0 \quad (6)$$

$$-h_3 \delta T_3 + h_3 \delta T_4 + \delta \varphi_g = 0 \quad (7)$$

Pour la résolution de ce système, nous allons opérer une hiérarchisation des 7 inconnues en plaçant au niveau inférieur les quatre états des cellules, que nous éliminerons des trois équations de transfert.

après avoir posé:

$$A_{(\alpha\beta)} = \left[1 - \frac{\delta t}{2} \frac{h_1}{C_1} - \frac{\delta t}{2} \frac{h_1}{C_2} \right]$$

$$B_{(\beta)} = \left[\frac{\delta t}{2} \frac{h_1}{C_2} \right]$$

$$\Gamma_{(\alpha\beta)} = \delta t \left[\frac{h_1}{C_1} V_\alpha - \frac{h_1}{C_2} V_\beta \right]$$

L'élimination de δT_1 et δT_2 de l'équation (5) par les équations (1) et (2) des cellules α et β donne l'équation résultante:

$$A_{(\alpha\beta)} \delta\varphi_f + B_{(\beta)} \delta\varphi_U = \Gamma_{(\alpha\beta)} \quad (8)$$

Cette équation montre une similarité formelle avec les équations d'évolution des cellules. On peut assimiler cette équation à une équation canonique de l'évolution de la famille \mathbf{f} , $\delta\varphi_f$ à une variable d'état de cette famille et $\delta\varphi_U$ à sa variable de transfert.

Nous poserons également:

$$A_{(\gamma\delta)} = \left[1 - \frac{\delta t}{2} \frac{h_3}{C_3} - \frac{\delta t}{2} \frac{h_3}{C_4 - \frac{\delta t}{2} h_4} \right]$$

$$B_{(\gamma)} = \left[\frac{\delta t}{2} \frac{h_3}{C_3} \right]$$

$$\Gamma_{(\gamma\delta)} = \delta t \left[\frac{h_3}{C_3} V_\gamma - \frac{h_3}{C_4 - \frac{\delta t}{2} h_4} V_\delta \right]$$

$$A_{(\beta)} = \left[\frac{\delta t}{2} \frac{h_2}{C_2} \right]$$

$$A_{(\gamma)} = \left[\frac{\delta t}{2} \frac{h_2}{C_3} \right]$$

$$B_{(\beta\gamma)} = \left[1 - \frac{\delta t}{2} \frac{h_2}{C_2} - \frac{\delta t}{2} \frac{h_2}{C_3} \right]$$

$$\Gamma_{(\beta\gamma)} = \delta t \left[\frac{h_2}{C_2} V_\beta - \frac{h_2}{C_3} V_\gamma \right]$$

Et avec ces notations l'élimination de δT_3 et δT_4 de l'équation (7) donnera l'équation suivante qui constitue l'équation d'évolution de la famille \mathbf{g} :

$$A_{(\gamma\delta)} \delta\varphi_g + B_{(\gamma)} \delta\varphi_U = \Gamma_{(\gamma\delta)} \quad (9)$$

L'équation «d'archi-transfert» en $\delta\varphi_U$ est dérivée de l'élimination de δT_2 et δT_3 de l'équation (6):

$$A_{(\beta)} \delta\varphi_f + A_{(\gamma)} \delta\varphi_g + B_{(\beta\gamma)} \delta\varphi_U = \Gamma_{(\beta\gamma)} \quad (10)$$

Dans les deux équations précédentes les termes de droite dépendent comme dans les équations des cellules de valeurs connues au temps t_0 .

La deuxième étape de la résolution va consister à hiérarchiser les trois transferts en plaçant les familles **f** et **g** sous la famille **U**.

On élimine donc $\delta\varphi_f$ et $\delta\varphi_g$ de (10) à partir de leurs expressions issues de (8) et (9) pour obtenir l'équation sous **U**.

$$\left[B_{(\beta\gamma)} - (A_{(\alpha\beta)})^{-1} A_{(\beta)} B_{(\beta)} - (A_{(\gamma\delta)})^{-1} A_{(\gamma)} B_{(\gamma)} \right] \delta\varphi_U = \Gamma_{(\beta\gamma)} - (A_{(\alpha\beta)})^{-1} A_{(\beta)} \Gamma_{(\alpha\beta)} - (A_{(\gamma\delta)})^{-1} A_{(\gamma)} \Gamma_{(\gamma\delta)} \quad (11)$$

L'équation résultante n'a plus qu'une inconnue $\delta\varphi_U$, associée à la famille **U** regroupant deux objets: les familles **f** et **g**, structure correspondant au schéma suivant (figure IV.10):

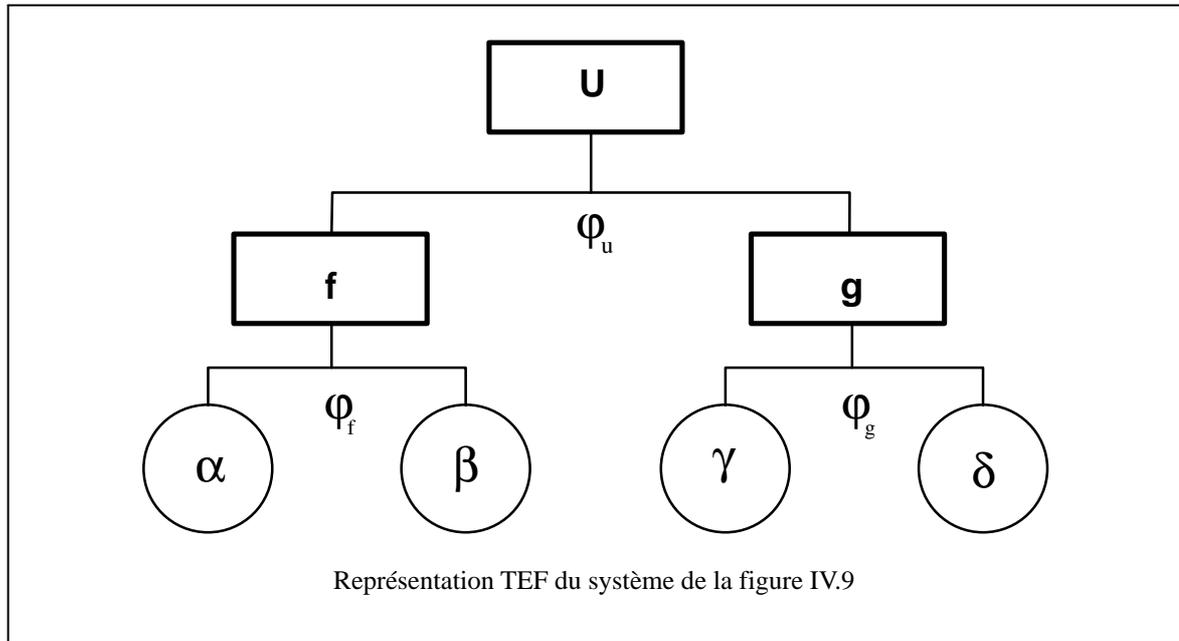


Figure IV.10

On voit ainsi apparaître une possibilité de systématisation conduisant à la construction d'une hiérarchie des inconnues du système, représentée par un arbre. Les principaux ingrédients du TEF sont ainsi introduits.

Sur le plan numérique, le résultat de l'élimination emboîtée est la réduction de la dimensionalité des matrices à manipuler, et évoque ainsi un domaine que nous aurons l'occasion de comparer à l'analyse TEF, celui de la décomposition de domaines.

RESOLUTION FINALE

Après l'étape montante de l'élimination emboîtée, il reste à «redescendre» jusqu'au calcul des vecteurs d'états. L'équation (11) donne $\delta\varphi_U$:

$$\delta\varphi_U = \frac{\Gamma_{(\beta\gamma)} - (A_{(\alpha\beta)})^{-1} A_{(\beta)} \Gamma_{(\alpha\beta)} - (A_{(\gamma\delta)})^{-1} A_{(\gamma)} \Gamma_{(\gamma\delta)}}{B_{(\beta\gamma)} - (A_{(\alpha\beta)})^{-1} A_{(\beta)} B_{(\beta)} - (A_{(\gamma\delta)})^{-1} A_{(\gamma)} B_{(\gamma)}} \quad (12)$$

Puis au niveau inférieur les transferts **f** et **g** à partir des équations (8) et (9):

$$\delta\varphi_f = (A_{(\alpha\beta)})^{-1} \Gamma_{(\alpha\beta)} - (A_{(\alpha\beta)})^{-1} B_{(\beta)} \delta\varphi_U \quad (13)$$

$$\delta\varphi_g = (A_{(\gamma\delta)})^{-1} \Gamma_{(\gamma\delta)} - (A_{(\gamma\delta)})^{-1} B_{(\gamma)} \delta\varphi_U \quad (14)$$

Enfin, on peut calculer les quatre inconnues restantes en reportant ces valeurs dans les quatre équations (1) à (4) des cellules.

Cette résolution à deux passes, l'une montante, l'autre descendante, baptisée «navette ZOOM», constitue le cœur du solveur de ZOOM.