

Quelques notes sur la physique et la dynamique de l'atmosphère

Frédéric Hourdin
Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS
Ecole Normale Supérieure, Paris
hourdin@lmd.ens.fr

11 novembre 2003

Table des matières

1	L'atmosphère au "repos"	3
1.1	Gravité : l'équilibre d'une bille posée sur le sol	3
1.2	Bilan des forces sur une particule fluide au repos	4
1.3	L'équilibre hydrostatique dans l'atmosphère	6
1.3.1	Importance de l'eau	8
2	Rayonnement et structure thermique de l'atmosphère	9
2.1	L'émission thermique d'un corps noir	9
2.2	Un modèle simpl(e/iste) du transfert radiatif dans l'atmosphère .	11
2.3	L'équilibre radiatif	13
2.4	La stratification de l'atmosphère terrestre	16
3	Quelques notions simples sur la circulation générale atmosphérique	17
3.1	La machine thermique atmosphérique	17
3.1.1	Les redistributions d'énergie en latitude	17
3.1.2	L'effet de l'inertie thermique des océans	18
3.1.3	Disparités régionales	20
3.2	La circulation de Hadley	20
3.2.1	Transport méridien d'énergie par une cellule convective .	20
3.2.2	Effets de la rotation : la conservation du moment cinétique	22
3.2.3	Effets de la rotation : la force centrifuge	26
3.3	Le vent gradient	27
3.3.1	Définition	27
3.3.2	Dérivation mathématique	28
3.4	Les instabilités et les ondes planétaires	29
3.5	Transports latitudinaux d'énergie et de moment cinétique	30
4	Equation du mouvement et équilibre géostrophique	32
4.1	L'équation fondamentale de la dynamique	32
4.2	Passage en référentiel tournant	32
4.2.1	Un exemple de plus	32
4.2.2	Un petit rappel...	33
4.2.3	La vitesse dans le référentiel tournant	34
4.2.4	L'accélération dans le référentiel tournant	35
4.2.5	Equation du mouvement	35
4.3	Passage aux coordonnées sphériques	36

4.4	Description Eulérienne	37
4.5	Ordre de grandeur des différents termes dans l'équation du mouvement	37
4.6	L'équilibre géostrophique	38
5	Une approche simple de la couche limite	40

Chapitre 1

L'atmosphère au "repos"

Avant de s'attaquer aux mouvements atmosphériques, on analyse ici l'état d'équilibre d'une atmosphère sans vents en retournant aux forces fondamentales agissant sur une particule en équilibre à la surface d'une planète en rotation.

1.1 Gravité : l'équilibre d'une bille posée sur le sol

Les forces s'exerçant sur une bille de masse m posée sur le sol d'une planète sont : 1) l'**attraction gravitationnelle** (notée ici $m\vec{g}^*$) proportionnelle à la masse de la bille et dirigée vers le centre de la planète; 2) la **réaction** \vec{R} , perpendiculaire à la surface, qui empêche la particule de s'enfoncer dans le sol. Dans un référentiel galiléen, cette bille, dite immobile, tourne en fait avec la même vitesse de rotation Ω que la planète solide. Si elle est située à une latitude ϕ , elle tourne à une distance $r = a \cos \phi$ de l'axe des pôles (où a est le rayon de la planète). Elle a donc une accélération absolue centripète $\vec{\gamma}$ avec $|\vec{\gamma}| = \Omega^2 a \cos \phi$. Pour que la bille de masse m soit en équilibre ($m\vec{\gamma} = \vec{R} + m\vec{g}^*$), il faut que la surface de la planète soit perpendiculaire à $\vec{g}^* - \vec{\gamma}$. Sur une planète sphérique, la bille serait entraînée vers l'équateur avec une force apparente centrifuge $m\Omega^2 r$.

En fait, chaque particule d'une planète sphérique serait soumise à la même force apparente résultant en un entraînement de masse vers l'équateur. La forme de la planète s'ajuste ainsi sous l'effet combiné de la rotation et de la gravitation pour adopter une forme aplatie au niveau des pôles, dans laquelle la **gravité** définie par

$$\vec{g} = \vec{g}^* + \Omega^2 \vec{r} \quad (1.1)$$

est partout perpendiculaire à la surface. Cette gravité \vec{g} qui est celle mesurée par un accéléromètre à la surface donne aussi la direction de la verticale d'un fil à plomb.

Cette gravité dérive d'un potentiel, appelé **géopotential** : l'énergie qu'il faut fournir à une particule de masse m pour l'élever d'une altitude dz est simplement donnée par le produit de la masse m par la différence de géopotential entre les deux points $d\Phi = mgdz$. La forme que prend la surface de la planète correspond à un iso-potential qui peut être utilisé comme géopotential de référence. Par la suite, on note Φ le géopotential compté à partir du niveau de référence. Si on

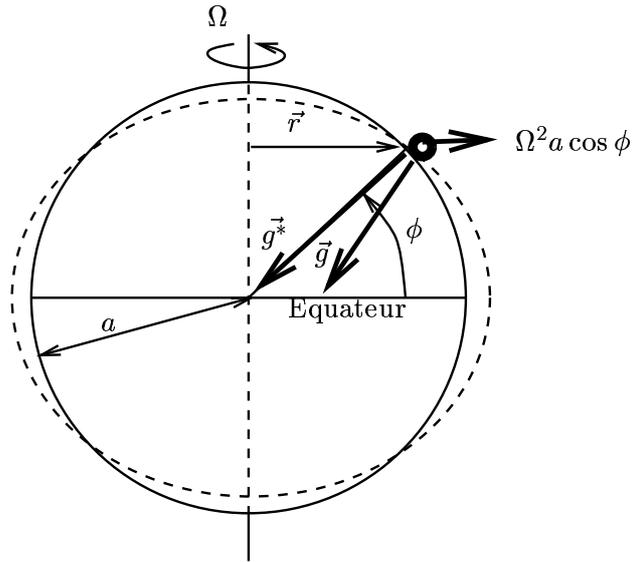


FIG. 1.1 – Equilibre d'une bille sur la surface d'une planète

néglige les variations de g dans l'atmosphère, le géopotential à une distance z au-dessus du sol est simplement gz .

1.2 Bilan des forces sur une particule fluide au repos

Pour une particule fluide au-dessus de la surface, la réaction du sol n'est plus directement sensible. Ce sont alors les **forces de pression** qui équilibrent la gravité.

Pression et force de pression

On rappelle qu'un fluide exerce sur une surface S une force perpendiculaire à la surface et d'intensité pS où p est la pression au sein du fluide ¹.

Plaçons nous dans un repère cartésien avec z suivant la verticale et isolons un petit volume δV avec un sommet en (x, y, z) et des arêtes de longueurs δx , δy et δz (se reporter à la Fig. 1.2).

Supposons pour commencer que la pression ne varie que selon x . Dans ce cas, les forces exercées en haut et en bas du petit volume sont de même intensité et se compensent donc exactement. De la même façon, les forces exercées devant et derrière le petit volume (dans la direction y) se compensent exactement. Seule les forces exercées dans la direction x ne se compensent pas. La force exercée à gauche (sur la face A pour la figure) est dirigée vers la droite et vaut $F_x^{(A)} = \delta y \delta z p(x)$ alors que celle exercées à droite (sur la face B) est dirigée vers la gauche et d'intensité $F_x^{(B)} = \delta y \delta z p(x + \delta x)$. La résultante des forces

¹A une échelle microscopique, ce sont les collisions entre molécules qui effectuent un transfert de quantité de mouvement permanent entre la particule fluide et la surface ou la particule fluide voisine.

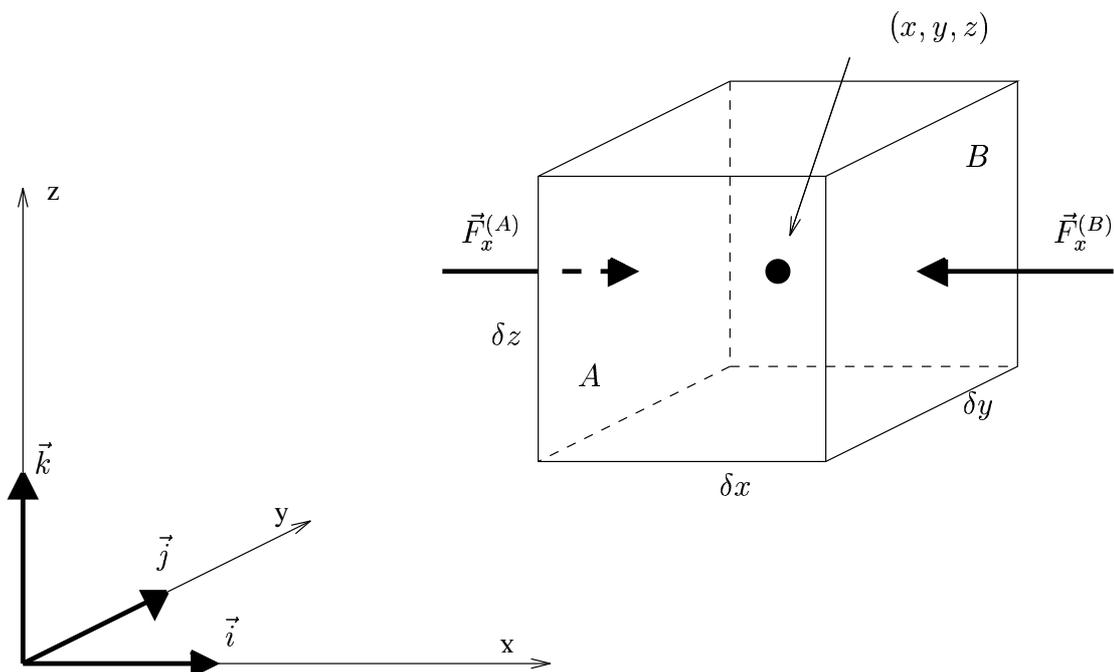


FIG. 1.2 – Composante suivant x des forces de pression agissant sur une particule fluide.

s'écrit donc

$$\delta \vec{F} = \delta y \delta z [p(x) - p(x + \delta x)] \vec{i} \quad (1.2)$$

qui peut se transformer en introduisant la dérivée partielle de la pression le long de l'axe des x

$$\delta \vec{F} = -\delta x \delta y \delta z \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i}. \quad (1.3)$$

En appliquant le même raisonnement dans le cas où la pression varie en y et en z , on obtient que la force exercée sur l'élément de volume $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ est

$$\delta \vec{F} = -\delta V \text{grad } p \quad (1.4)$$

où $\text{grad } p$ est le vecteur gradient de la pression

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{k} \quad (1.5)$$

Bilan des forces

Si l'atmosphère est au repos, le bilan des forces doit être nul. Horizontalement, aucune autre force ne vient agir sur les particules d'air. Pour que l'air soit immobile, il faut donc que les forces de pression se compensent de part et d'autre du volume, ou encore que les dérivées partielles de la pression suivant x et y soient nulles ce qui revient à dire plus simplement que la pression à une altitude z donnée ne dépend pas du point (x, y) .

Verticalement, la particule est soumise en plus à son poids $-\delta m g$ où δm est la masse de la particule fluide et où $g \simeq 9,81 \text{ m s}^{-1}$ est définie ici comme

une constante positive. En introduisant la masse volumique de l'air $\rho = \delta m / \delta V$ l'équilibre s'écrit

$$\rho g + \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (1.6)$$

Cet équilibre entre gravité et forces de pression est connu sous le nom d'**équilibre hydrostatique**.

L'équilibre hydrostatique prend en fait deux significations :

1. Cette équation régit l'état d'une atmosphère globalement au repos. On voit que cet état de repos ne peut être obtenu que dans le cas où la pression ne varie pas horizontalement.
2. Dans le cas des fluides géophysiques en mouvement, l'expérience montre que, en un point donné du globe, et sous réserve de regarder des quantités moyennes sur un domaine horizontal suffisamment grand (par exemple, sur plus de 100 km^2 pour l'atmosphère terrestre), la variation verticale de la pression est régie par l'équilibre hydrostatique.

Dans tout le cours, on s'intéressera uniquement à des fluides en équilibre hydrostatique, ce qui ne veut pas dire que le fluide ne bouge pas !

Remarque : l'équilibre hydrostatique a une conséquence pratique importante. La masse M d'une colonne verticale de fluide de section S est directement reliée à la différence de pression entre le bas p_b et le haut p_h de la colonne : $M = S (p_b - p_h) / g$. Cette propriété incite souvent à remplacer la coordonnée verticale par une coordonnée de pression pour décrire les écoulements fluides verticalement en équilibre hydrostatique.

A FAIRE : Demander à Jean-Louis sa figure avec la compression des niveaux verticaux

1.3 L'équilibre hydrostatique dans l'atmosphère

Equilibre

À un très bon degré d'approximation, le gaz atmosphérique peut être assimilé à un gaz parfait avec pour équation d'état

$$p = \rho RT \quad (1.7)$$

L'Eq. 1.6 devient alors

$$\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{RT} \quad (1.8)$$

Ici R est la constante du gaz atmosphérique qui est reliée à la constante universelle des gaz parfaits $R^* = 8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mole}^{-1}$ par la relation $R = R^* / \mu$ où μ est la masse molaire du gaz, $\mu \sim 29g$ pour l'atmosphère de la terre².

²On écrit plus classiquement l'équation du gaz parfait pour un volume δV associé à un nombre de moles δn sous la forme $p\delta V = \delta n R^* T$ qui se transforme en remarquant que $\delta V = \delta m / \rho$ et que $\delta m / \delta n = \mu$.

Si on néglige les variations verticales de g (ce qui sera fait dans la suite de ce cours) et si l'atmosphère est en plus supposée isotherme ($T = cste$), cette équation s'intègre pour donner la pression à une altitude z sous la forme

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{zg}{RT}\right) \quad (1.9)$$

où p_0 est la pression à l'altitude $z = 0$. En fait, la formule précédente, calculée avec une température moyenne, donne une bonne approximation de la pression à une altitude z .

Il est commode d'introduire la hauteur d'échelle $H = RT/g$ de la pression : si on s'élève d'une hauteur H dans l'atmosphère, la pression est divisée par un facteur $e \sim 2.7$. Pour l'atmosphère terrestre, $250K$ est une bonne température moyenne qui correspond à une échelle de hauteur de $7km$ environ. On en déduit qu'environ 63% de la masse de l'atmosphère est contenue dans les 7 premiers kilomètres, environ 87% dans les 14 premiers et 97% dans les trente premiers.

Stabilité

L'équilibre des forces ne garantit pas que le système va rester dans son état. Il faut en plus que l'équilibre soit stable (c'est la différence entre une bille posée à la pointe d'un stylo vertical ou au fond d'un bol).

Pour étudier la stabilité de l'équilibre hydrostatique, on va s'intéresser au comportement d'une particule de fluide déplacée verticalement à partir de sa position d'équilibre. Pour se faire, on va appliquer le premier principe de la thermodynamique pour une particule de gaz parfait. Pour 1 kg d'air, ce premier principe peut s'écrire

$$\delta Q = dU - \delta W \quad (1.10)$$

$$= c_v dT + p d\alpha \quad (1.11)$$

où δQ est l'échange de chaleur avec le milieu extérieur, dU la variation d'énergie interne, δW le travail des forces de pression, c_v la chaleur massique spécifique à volume constant et $\alpha = 1/\rho$ le volume spécifique de l'air. En différenciant l'équation d'état du gaz $p\alpha = RT$:

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT \quad (1.12)$$

et en utilisant la relation $R = c_p - c_v$, l'Eq. 1.10 devient

$$\delta Q = c_p dT - \alpha dp \quad (1.13)$$

Si aucun échange de chaleur n'a lieu à travers les parois de la particule fluide ($\delta Q = 0$), le mouvement est adiabatique et on obtient la relation suivante

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{\rho c_p} \quad (1.14)$$

puis, en utilisant à nouveau la loi des gaz parfaits

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p} \frac{dp}{p} \quad (1.15)$$

En introduisant, la constante $\kappa = R/c_p$, cette équation s'intègre facilement sous la forme

$$\ln T = \kappa \ln p + cste \quad (1.16)$$

ou encore

$$T/p^\kappa = cte \quad (1.17)$$

La quantité $\theta = T(p_0/p)^\kappa$ est appelée **température potentielle** (c'est la température qu'aurait la particule une fois ramenée à la pression de référence p_0 par transformation adiabatique). Une particule qui s'élève dans l'atmosphère (et est donc soumise à une pression de moins en moins forte) voit ainsi sa température diminuer proportionnellement à p^κ (on parle de refroidissement adiabatique). Supposons que l'air environnant la particule soit tel que la température décroît avec l'altitude (c'est généralement le cas dans la troposphère terrestre, par exemple). Si la particule en s'élevant devient plus froide et donc plus dense (cf. Eq. 1.7) que l'air qui l'entoure, elle retournera naturellement vers sa position de départ. Si au contraire elle devient moins dense que l'air ambiant, la résultante vers le haut des forces de pression sera plus forte que son poids et l'entraînera vers le haut, loin de sa position de départ. Cette dernière situation, instable, se produit donc dès lors que la température décroît plus vite avec l'altitude que la décroissance calculée par l'Eq. 1.17 ou encore (dit autrement) quand le gradient vertical de température potentiel est négatif.

Dans le cas de la stratification stable (température potentielle croissant avec l'altitude), une particule d'air déplacée vers le haut de façon adiabatique depuis sa position d'équilibre est ramenée vers sa position de départ. Elle rejoint cette position avec une vitesse non nulle et est donc entraînée vers le bas au-delà de cette position. La particule devient alors moins dense que le milieu environnant et est à nouveau entraînée vers le haut. La particule d'air entre en oscillation autour de sa position d'équilibre. On montre que la fréquence de ces oscillations, fréquence de **Brunt-Väisälä** N , est directement reliée au gradient vertical de la température potentielle dans l'atmosphère environnante :

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (1.18)$$

1.3.1 Importance de l'eau

L'eau joue un rôle fondamental dans ces problèmes de stabilité verticale de l'atmosphère.

D'abord, la vapeur d'eau est le seul constituant qui fasse varier la masse molaire de l'atmosphère dans la troposphère de façon significative.

Mais l'effet le plus important est le dégagement de chaleur latente lors de la condensation de la vapeur d'eau. Par exemple, dans une ascendance d'air saturé, l'air se refroidit limitant considérablement la capacité de l'air à contenir de la vapeur d'eau (via la relation de Clausius-Clapeyron). La vapeur d'eau condense, réchauffant la particule d'air ce qui tend à accroître encore sa flotabilité.

Ces aspects ne sont pas développés ici mais sont au coeur des deux premiers TD.

Chapitre 2

Rayonnement et structure thermique de l'atmosphère

La température d'une planète est déterminée en première approximation par l'équilibre entre le chauffage par le soleil et le refroidissement par émission de rayonnement thermique infrarouge. Ce sont aussi les disparités régionales d'absorption du rayonnement solaire par le système climatique qui mettent en route la circulation atmosphérique. Une approche rigoureuse du "transfert radiatif" est tout à fait hors de portée de ce cours. Mais, vue l'importance que revêt ce phénomène dans le système climatique, on donne ici quelques rudiments sans entrer dans le détail des théories sous-jacentes.

2.1 L'émission thermique d'un corps noir

Tout corps émet un rayonnement (des photons) dont l'intensité et la "couleur" dépendent fortement de la température; c'est pourquoi il est souvent appelé rayonnement thermique. Plus le corps est froid, moins il émet d'énergie et plus il émet dans les grandes longueurs d'ondes. La surface du soleil, avec une température de 5700 K, émet un rayonnement blanc. Une étoile plus chaude émettra un rayonnement décalé vers le violet. Un corps plus froid, en revanche, émettra plus vers le rouge. Sur Terre les corps sont tellement froids que leur rayonnement propre sort du domaine des fréquences perceptibles par l'oeil humain. On parle alors de rayonnement infra-rouge. Mais si on chauffe suffisamment un métal, par exemple, il commencera à émettre un rayonnement rouge, puis blanc pour des températures plus élevées. C'est ce rayonnement, émis par tous les corps, et en particulier par l'atmosphère, qui est mesuré par les détecteurs infra-rouges et permet de voir la nuit.

Plus précisément, quand on regarde un corps "opaque" (en gros un corps qui ne peut pas être traversé de part en part par des photons), il émet généralement une énergie qui est proportionnelle à la puissance quatrième de sa température :

$$F = \sigma T^4 \tag{2.1}$$

Cette émission a reçu le nom d'émission de corps noir mais peut concerner des corps aussi "brillants" que le soleil. $\sigma = 5.670 \times 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-4} \text{ s}^{-1}$ est connue

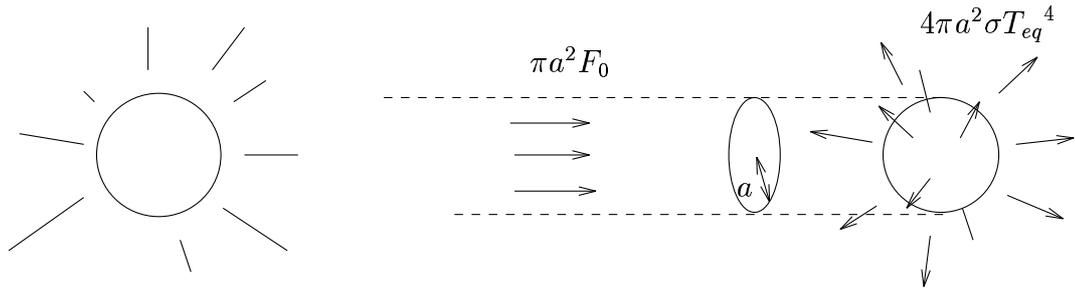


FIG. 2.1 – Equilibre entre le flux reçu du soleil et le flux réémis par la planète sous forme de rayonnement thermique infrarouge.

sous le nom de constante de Stefan-Boltzmann.

Du rayonnement émis par le soleil, il arrive au niveau de la terre un flux $F_0 \sim 1370 \text{ W m}^{-2}$. La terre intercepte une puissance $\pi a^2 F_0$ où $a = 6400 \text{ km}$ est le rayon de la terre (se reporter à la Fig. 2.1). En fait, une fraction importante (30% environ) du rayonnement reçu par la terre est réfléchi directement vers l'espace par : (1) la diffusion moléculaire qui affecte surtout les hautes fréquences¹, (2) la réflexion sur les nuages et (3) la réflexion sur la surface. Le rapport entre le flux directement réémis vers l'espace et le flux provenant du soleil est appelé albédo planétaire. On le notera A . La terre absorbe donc effectivement une puissance $\pi a^2(1 - A)F_0$.

La terre réémet un rayonnement thermique égal au produit de la surface de la sphère $4\pi a^2$ par l'émission de corps noir de la surface. La température moyenne d'équilibre de la planète résulte de l'équilibre entre le flux solaire incident et le flux thermique réémis :

$$\sigma T_{eq}^4 = \frac{1}{4}(1 - A)F_0 \quad (2.2)$$

L'application numérique donne une valeur de 255 K pour la température d'équilibre de la terre. Cette température est comprise entre la température à la surface de la terre ($\sim 285 \text{ K}$ en moyenne) et la température à la tropopause, vers 10 km d'altitude (220 K environ).

Pour comprendre les variations verticales de la température, et en particulier le réchauffement de la surface d'une trentaine de degrés par rapport à l'équilibre simple décrit plus haut, il faut s'enfoncer un peu dans les chemins ombragés de la théorie du "transfert radiatif".

¹En l'absence d'atmosphère, sur la lune par exemple, le ciel paraît noir même en plein soleil. En fait c'est la diffusion de la lumière provenant du soleil sur les molécules atmosphériques qui rend le ciel lumineux. Cette diffusion est plus efficace pour les courtes longueurs d'onde ce qui explique la couleur bleue du ciel. En même temps, ces photons bleus, soustraits au rayonnement arrivant du soleil, produisent un rougissement de l'apparence du soleil, rougissement d'autant plus grand que la quantité de gaz traversée est grande, par exemple quand le soleil est bas sur l'horizon.

2.2 Un modèle simpl(e/iste) du transfert radiatif dans l'atmosphère

Si l'atmosphère est relativement transparente pour le rayonnement solaire, elle est en revanche fortement absorbante pour le rayonnement thermique infrarouge.

On va donc se placer dans le cas théorique d'une atmosphère qui laisserait passer jusqu'à la surface la totalité du rayonnement solaire mais absorberait uniquement le rayonnement infrarouge. On va de plus supposer que l'absorption et l'émission de rayonnement infrarouge par l'atmosphère est indépendante de la fréquence considérée (approximation grise).

On se place de plus dans l'approximation dite "plan parallèle" qui revient à négliger la sphéricité de la terre et à considérer localement que toutes les grandeurs ne varient que suivant la direction verticale. Il est alors possible de séparer le rayonnement infrarouge dans l'atmosphère en deux parties, le rayonnement montant, associé à un flux F^\uparrow et le rayonnement descendant F^\downarrow .

Considérons par exemple le rayonnement montant F^\uparrow . On peut montrer que, après la traversée d'une couche d'atmosphère très fine d'épaisseur δz et à l'altitude z , le flux a diminué, par **absorption atmosphérique**, d'une quantité

$$F^\uparrow(z + \delta z) - F^\uparrow(z) = -k\rho\delta z F^\uparrow(z) \quad (2.3)$$

ce qui revient fondamentalement à dire que l'absorption du rayonnement est proportionnelle à la quantité de matière rencontrée. Dans toute la suite on va supposer que le coefficient k est constant alors qu'il varie en fait suivant la fréquence considérée, la température, la pression et la composition du gaz atmosphérique.

La couche d'atmosphère **émet** également du rayonnement (rayonnement thermique). Cette émission est proportionnelle à la puissance quatrième de la température (comme l'émission du corps noir) et à l'épaisseur de la couche d'atmosphère. De plus, on peut montrer (c'est moins évident) que le coefficient de proportionnalité est le même que celui qui intervient dans l'absorption. L'émission thermique de la couche vaut finalement

$$k\rho\delta z\sigma T^4(z). \quad (2.4)$$

$T(z)$ représentant la température de la couche d'altitude z .

Finalement, la modification du flux montant après la traversée de la couche d'épaisseur δz est donnée par

$$F^\uparrow(z + \delta z) - F^\uparrow(z) = -k\rho\delta z F^\uparrow(z) + k\rho\delta z\sigma T^4(z) \quad (2.5)$$

ou encore

$$\frac{dF^\uparrow}{dz} = k\rho \left[\sigma T^4(z) - F^\uparrow(z) \right]. \quad (2.6)$$

Deux applications des équations ci-dessus :

1) Absorption pure

Oublions dans un premier temps l'émission par l'atmosphère. On suppose que l'atmosphère reçoit en bas, en $z = 0$, un flux F_0^\uparrow (par exemple le flux émis par la surface). Dans l'atmosphère, ce flux va décroître sous l'effet de l'absorption suivant l'équation différentielle

$$\frac{1}{F^\uparrow} \frac{dF^\uparrow}{dz} = -k\rho \quad (2.7)$$

qui admet pour solution

$$F^\uparrow(Z) = \alpha \exp \left\{ - \int_0^Z k\rho dz \right\}. \quad (2.8)$$

La condition en $z = 0$ fournit une solution unique

$$F^\uparrow(z) = F_0^\uparrow \exp \left\{ -k \int_0^z \rho dz \right\}. \quad (2.9)$$

Noter que l'intégrale sous l'exponentielle est simplement la masse d'atmosphère traversée.

Donc, en l'absence d'émission, le rayonnement décroît exponentiellement en fonction de la quantité de masse traversée.

Si

$$k \int_0^Z \rho dz \ll 1, \quad (2.10)$$

les photons traversant la couche d'épaisseur Z n'auront qu'une chance très faible d'être absorbés au moins une fois. Au contraire, dans le cas où

$$k \int_0^Z \rho dz \gg 1, \quad (2.11)$$

la majorité des photons est absorbée dans la couche ce qui est équivalent à dire que le "libre parcours moyen" des photons est plus petit que l'épaisseur de la couche. La quantité $\tau = k \int \rho dz$ est appelée "profondeur optique".

Dans l'atmosphère terrestre, le coefficient k est typiquement de l'ordre de $2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$. La masse totale de l'atmosphère est de 10^4 kg m^{-2} . Seulement 8% (c'est à dire $\exp(-2.5)$) environ du rayonnement émis par la surface parvient à traverser directement l'atmosphère.

2) Emission atmosphérique

Oublions cette fois-ci la surface de la planète et considérons une atmosphère avec une température constante. Intégrons l'Eq. 2.6 verticalement en supposant que le rayonnement montant est nul en $z = 0$. A partir de la solution 2.8 de l'Eq. 2.7, on sait qu'on peut chercher les solutions de l'équation complète 2.6 sous la forme (méthode de la variation de la constante)

$$F^\uparrow(Z) = \alpha(Z) \exp \left\{ - \int_0^Z k\rho dz \right\} \quad (2.12)$$

ce qui donne après substitution dans l'Eq. 2.6

$$\frac{d\alpha}{dz}(Z) = k\rho\sigma T^4 \exp \left\{ \int_0^Z k\rho dz \right\} \quad (2.13)$$

ou encore, puisqu'on a supposé l'atmosphère isotherme,

$$\alpha(Z) = \sigma T^4 \exp \left\{ \int_0^Z k\rho dz \right\} + cste. \quad (2.14)$$

La solution de l'Eq. 2.6 s'écrit donc

$$F^\uparrow(Z) = \sigma T^4 + cste \times \exp \left\{ - \int_0^Z k\rho dz \right\} \quad (2.15)$$

Comme on a supposé que le flux est nul en $z = 0$, on trouve finalement

$$F^\uparrow(Z) = \sigma T^4 \times \left[1 - \exp \left\{ - \int_0^Z k\rho dz \right\} \right] \quad (2.16)$$

Dans une atmosphère isotherme, ne recevant aucun flux de la surface, le rayonnement croît au fur et à mesure qu'on s'élève pour atteindre la valeur de l'émission de corps noir. Tant qu'on ne considère qu'une épaisseur d'atmosphère relativement fine, pour laquelle la profondeur optique (le terme sous l'exponentiel) est petit devant 1, l'absorption ou l'émission varie proportionnellement à l'épaisseur traversée (on retrouve ce qu'on a supposé au départ).

Au contraire, pour une atmosphère opaque, c'est à dire pour des profondeurs optiques grandes devant l'unité, le rayonnement sortant d'un coté est indépendant du flux entrant à l'autre extrémité et est égal à l'émission de corps noir. Comme précédemment, la transition entre ces deux comportements a lieu quand les photons n'ont presque plus aucune chance de traverser l'atmosphère sans être au moins absorbés une fois.

On peut facilement établir une équation analogue à l'Eq. 2.6 mais pour le flux descendant. En passant à travers une couche d'épaisseur δz , ce flux est diminué par absorption et augmenté par émission thermique :

$$F^\downarrow(z - \delta z) - F^\downarrow(z) = -k\rho\delta z F^\downarrow(z) + k\rho\delta z\sigma T^4 \quad (2.17)$$

soit encore

$$-\frac{dF^\downarrow}{dz} = k\rho \left[\sigma T^4 - F^\downarrow \right] \quad (2.18)$$

2.3 L'équilibre radiatif

Si le flux net $F^\uparrow - F^\downarrow$ est différent en haut et en bas d'une couche d'atmosphère, cette couche va se refroidir ou se réchauffer suivant

$$\rho\delta z c_p \frac{dT}{dt} = F^\uparrow(z) - F^\downarrow(z) - F^\uparrow(z + \delta z) + F^\downarrow(z + \delta z) \quad (2.19)$$

On parle d'équilibre radiatif quand la température n'évolue pas dans le temps, c'est à dire quand le flux net $F^\uparrow - F^\downarrow$ est indépendant de l'altitude :

$$\frac{d(F^\uparrow - F^\downarrow)}{dz} = 0. \quad (2.20)$$

De la même façon, l'équilibre radiatif se traduit pour la surface par l'équilibre des flux :

$$F^\downarrow(0) - F^\uparrow(0) + (1 - A) F_0/4 = 0. \quad (2.21)$$

On a donc en tout point de l'atmosphère

$$F^\uparrow - F^\downarrow = (1 - A) F_0/4. \quad (2.22)$$

En ajoutant les Equations 2.18 et 2.6, et en utilisant l'Eq. 2.20, on trouve immédiatement la relation suivante :

$$F^\uparrow + F^\downarrow = 2\sigma T^4. \quad (2.23)$$

La dérivée verticale de cette relation, en utilisant à nouveau les équations 2.6 et 2.18, donne finalement

$$\frac{d(2\sigma T^4)}{dz} = -k\rho (F^\uparrow - F^\downarrow) = -k\rho (1 - A) F_0/4. \quad (2.24)$$

En utilisant l'équation hydrostatique $dp/dz = -\rho g$, on obtient finalement la relation suivante

$$\frac{d(2\sigma T^4)}{dp} = \frac{k}{g} (1 - A) F_0/4 \quad (2.25)$$

On voit donc que la température (ou T^4) décroît quand on s'élève dans l'atmosphère, et que la variation verticale de σT^4 est proportionnelle à la pression. De plus σT^4 est la moyenne des flux montant et descendant et la différence $F^\uparrow - F^\downarrow$ est constante et égale à $(1 - A) F_0/4$. Les dérivées par rapport à la pression de F^\uparrow , F^\downarrow et σT^4 sont donc toutes trois égales à $k(1 - A) F_0/(8g)$.

Comme on a en plus $F^\downarrow = 0$ pour $p = 0$, on a

$$F^\downarrow = \frac{kp}{g} (1 - A) F_0/8, \quad (2.26)$$

$$\sigma T^4 = \left(1 + \frac{kp}{g}\right) (1 - A) F_0/8, \quad (2.27)$$

et

$$F^\uparrow = \left(2 + \frac{kp}{g}\right) (1 - A) F_0/8. \quad (2.28)$$

Les trois courbes correspondantes sont tracées sur la Fig. 2.2 en fonction de la pression.

On avait défini au début de ce chapitre la température d'équilibre de la planète T_{eq} à partir de l'Eq. 2.2. Avec le profil de température d'équilibre calculé ici (Eq. 2.27), on voit que T_{eq} correspond au niveau de pression tel que

$$\frac{kp}{g} = k \int_Z^\infty \rho dz = 1 \quad (2.29)$$

où Z est l'altitude correspondant à la pression p . En fait, les photons émis depuis des couches plus profondes n'arrivent pas à s'échapper. **La température d'équilibre T_{eq} est donc égale à la température de l'atmosphère à l'altitude moyenne d'où les photons s'échappent directement vers l'espace** (plus précisément à l'altitude à partir de laquelle les photons émis vers le haut ont une probabilité presque nulle d'être absorbés).

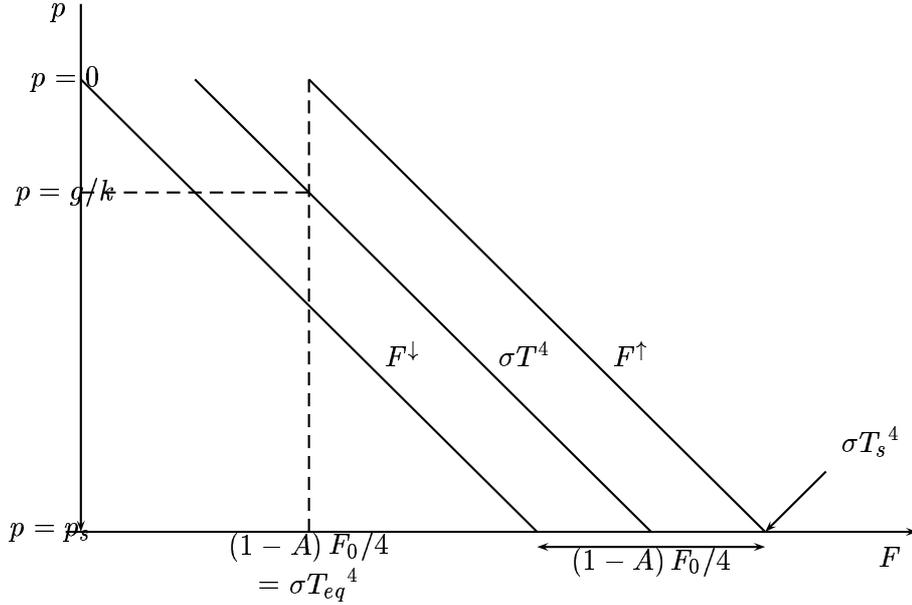


FIG. 2.2 – Variations verticales, en fonction de la pression, des flux montant, flux descendant et émission de corps noir pour une atmosphère "grise" pour le rayonnement thermique et transparente pour le rayonnement solaire visible.

Pour $k = 2.5 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ kg}^{-1}$, la température de l'air près de la surface est donnée par l'Eq. 2.27 et vaut

$$\sigma T^4 = \left(1 + \frac{kp_s}{g}\right) (1-A) F_0/8 = 3.5 (1-A) F_0/8 = \frac{3.5}{2} \sigma T_{eq}^4 \quad (2.30)$$

d'où on tire finalement $T(z=0) = 293 \text{ K}$. Cette température qui est celle de l'air au-dessus de la surface, est plus froide que celle de la surface proprement dite qui est donnée par l'Eq. 2.28

$$\sigma T_s^4 = F^\uparrow(p=p_s) = \left(2 + \frac{kp_s}{g}\right) (1-A) F_0/8 = \frac{4.5}{2} \sigma T_{eq}^4 \quad (2.31)$$

soit $T_s \sim 312 \text{ K}$.

On voit que ce modèle simple d'équilibre radiatif est capable d'expliquer la structure thermique verticale dans la basse atmosphère. A l'altitude d'émission, c'est à dire ici pour $p \sim 4 \times 10^4 \text{ Pa}$, la température de l'atmosphère est égale à la température d'équilibre de la planète, 255 K. La température croît quand on descend vers la surface, pour atteindre une valeur plus élevée de 38 ou 47 degrés suivant qu'on considère la température de l'air près de la surface ou celle de la surface.

La réalité est bien sûr un peu plus complexe. D'abord, l'absorption atmosphérique n'est pas grise : certaines régions du spectre absorbent beaucoup plus fortement le rayonnement infrarouge. Ces régions sont saturées en photons et les lois simples énoncées précédemment doivent être en partie modifiées. Dans d'autres parties du spectre en revanche, l'atmosphère est presque transparente

au rayonnement infrarouge. On parle de fenêtres. De plus, l'absorption directe de rayonnement visible par l'atmosphère n'est pas absolument nulle.

Un traitement complet et réaliste du transfert radiatif requiert en fait l'usage d'ordinateurs puissants. Le résultat est cependant qualitativement proche de celui trouvé ici. La surface est en réalité seulement environ 30 degrés plus chaude que la température d'équilibre de la planète. Les deux tiers de ce réchauffement sont dus à l'absorption et à l'émission thermique par la vapeur d'eau et l'autre tiers essentiellement au gaz carbonique.

2.4 La stratification de l'atmosphère terrestre

La stratification verticale d'une atmosphère est étroitement liée à la façon dont le rayonnement est absorbé.

Dans les premiers kilomètres près de la surface, l'atmosphère est essentiellement chauffée par la surface par absorption de rayonnement thermique infrarouge comme on vient de le voir. Dans cette région appelée **troposphère** la température décroît donc avec l'altitude.

Dans cette partie de l'atmosphère où l'air chaud est situé en-dessous de l'air froid, l'équilibre hydrostatique est peu stable vis-à-vis de l'instabilité (instabilité convective) présentée précédemment c'est à dire que le gradient vertical de température potentielle n'est que faiblement positif. Suivant les régions, les saisons ou l'heure de la journée, ce gradient peut même devenir négatif auquel cas la convection se déclenche, mélangeant l'air chaud près de la surface avec l'air froid situé au-dessus.

Dans l'atmosphère terrestre, la convection est modifiée par les changements de phase de l'eau. La condensation de la vapeur d'eau dans un mouvement ascendant par exemple peut réchauffer l'air qui monte et amplifier le mouvement vers le haut. Cette convection humide est un phénomène dominant de la météorologie tropicale. Au niveau de l'**équateur thermique** la convection s'organise en grandes colonnes nuageuses qui peuvent atteindre verticalement une dizaine de kilomètres et produire des précipitations intenses.

Le gradient vertical moyen dans l'atmosphère est essentiellement le résultat des processus radiatifs et du mélange vertical de l'air par la convection sèche ou humide. Il est typiquement de l'ordre de -6.5 K par km dans la troposphère terrestre.

Plus haut dans l'atmosphère, l'absorption directe du rayonnement solaire (surtout ultra-violet) par l'ozone, devient une part dominante du bilan radiatif. Dans cette région, la température croît avec l'altitude. Cette partie de l'atmosphère est donc très fortement stratifiée verticalement d'où son nom de **stratosphère**.

Dans la stratosphère, le brassage vertical de l'air est très difficile. Ceci explique, la forme très plate des nuages qui se développent dans cette région.

La troposphère et la stratosphère sont séparées par une région frontière appelée **tropopause** qui se situe environ à une dizaine de kilomètres au-dessus de la surface.

Chapitre 3

Quelques notions simples sur la circulation générale atmosphérique

3.1 La machine thermique atmosphérique

3.1.1 Les redistributions d'énergie en latitude

La circulation de l'atmosphère d'une planète peut être vue comme une machine thermique mue sous l'effet des différences régionales du chauffage par le soleil. Ces effets différentiels du chauffage peuvent engendrer des circulations locales, par exemple en dessous d'un nuage ou encore près des côtes où la différence de vitesse de chauffage et de refroidissement de la terre et de la mer produisent des vents locaux qui s'inversent entre le jour (brise de mer) et la nuit (brise de terre). A une échelle globale, les variations les plus importantes du chauffage solaire sont les variations latitudinales et saisonnières¹. L'étude de la circulation générale s'intéresse avant tout à la réponse de l'atmosphère à ces forçages de grande échelle.

La façon dont l'atmosphère est chauffée dépend de la quantité d'énergie reçue du soleil, mais également de la façon dont cette énergie est réfléchi, diffusée et absorbée par l'atmosphère. Sur des planètes comme la Terre ou Mars, les atmosphères relativement transparentes laissent passer une part importante de l'énergie solaire jusqu'à la surface où elle est fortement absorbée. Le sol ainsi chauffé réémet de l'énergie dans les longueurs d'onde infra-rouge. Cette énergie réémise par le sol est absorbée par l'atmosphère beaucoup plus efficacement que le rayonnement solaire de plus courtes longueurs d'onde. L'atmosphère, elle-même, réémet du rayonnement vers le sol (c'est le fameux effet de serre) et

¹Les variations diurnes de l'ensoleillement qui sont également très importantes en amplitude, sont généralement trop rapides pour permettre à une circulation de s'établir. Elles peuvent cependant jouer un rôle non négligeable dans la circulation en créant des ondes planétaires forcées, avec un ou deux nombres d'onde sur la planète, qui peuvent interagir avec la circulation atmosphérique. Ces "marées thermiques" sont particulièrement importantes sur Mars où les températures de la surface et de l'atmosphère réagissent très rapidement au cycle diurne, les amplitudes des variations journalières de température atteignant souvent 100K.

vers l'espace.

A cause de la dépendance en température de l'émission propre de l'atmosphère et du sol, il est difficile de séparer complètement le forçage radiatif de la circulation et la circulation elle-même. Il est en revanche possible, par exemple à partir de mesures satellitaires, d'évaluer le bilan total d'énergie au sommet de l'atmosphère. C'est ce qui est montré sur la Fig. 3.1 où sont représentées : l'insolation en moyenne annuelle au sommet de l'atmosphère (courbe continue), la quantité d'énergie solaire effectivement absorbée par le système Terre-atmosphère (courbe discontinue) et, enfin, l'énergie rayonnée vers l'espace sous forme de rayonnement thermique infra-rouge (pointillés). La différence entre la courbe discontinue et les pointillés représente le bilan annuel d'énergie au sommet de l'atmosphère. Les tropiques reçoivent beaucoup plus d'énergie radiative qu'ils n'en émettent alors que les régions polaires sont très déficitaires. La différence entre ces deux courbes est égale à la quantité d'énergie redistribuée en latitude par la circulation². En fait, sur la Terre, cette redistribution est effectuée autant par les courants océaniques que par la circulation atmosphérique.

Mais, alors que la circulation atmosphérique est directement forcée par les différentiels latitudinaux d'énergie, les courants à la surface des océans sont, avant tout, créés par entraînement de l'eau par les vents près de la surface.

3.1.2 L'effet de l'inertie thermique des océans

En fait, les moyennes annuelles du bilan radiatif présentées plus haut cachent des variations saisonnières importantes. C'est particulièrement criant si on regarde l'évolution saisonnière de l'insolation au sommet de l'atmosphère en fonction de la latitude (cf. Fig. 3.2, graphique du haut). Bien que le point subsolaire ne se déplace pas au-delà des tropiques, près des solstices ce sont les pôles qui reçoivent le maximum d'énergie du soleil, l'effet de longueur des jours l'emportant sur l'inclinaison des rayons du soleil. Cependant, à cause de la très grande inertie thermique des océans, le maximum de température (aussi appelé **équateur thermique**) ne se déplace pas de plus d'une quinzaine de degrés par rapport à l'équateur vrai. Ceci est illustré par la variation saisonnière et en latitude des flux thermiques émis au sommet de l'atmosphère, Fig. 3.2, graphique de droite.

Du fait de l'inertie thermique élevée des océans, les variations latitudinales de l'énergie radiative absorbée par l'atmosphère restent donc relativement symétriques par rapport à l'équateur à toutes les saisons.

La comparaison avec Mars est à ce propos très instructive. Mars a presque la même obliquité que la terre. Elle est en revanche dépourvue d'océans, et, de plus, sa surface et son atmosphère ont une inertie thermique particulièrement

²Sur la Fig. 3.1 le déficit d'énergie près des pôles semble plus important que l'excédent près de l'équateur. Ceci s'explique par le fait que les déficits polaires représentent en fait une surface relative beaucoup moins grande que ne le suggère l'échelle linéaire en latitude utilisée pour le graphique. Il faut se souvenir que la moitié de la surface de la planète est comprise entre les latitudes 30N et 30S.

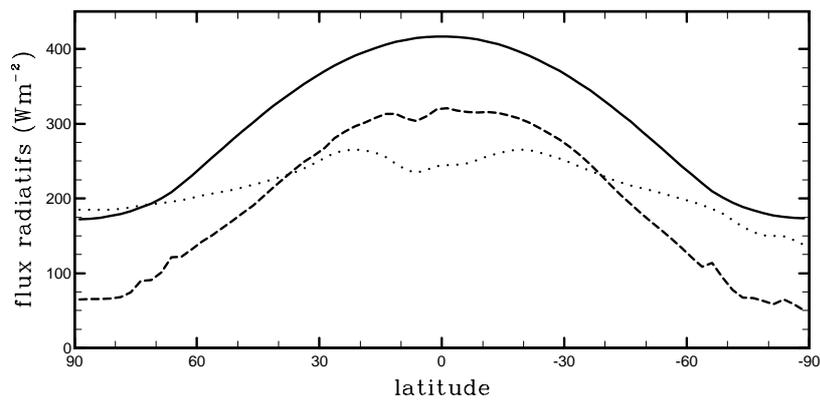


FIG. 3.1 – Bilan d'énergie radiative au sommet de l'atmosphère
 Les moyennes annuelles et longitudinales des flux radiatifs sont représentées en fonction de la latitude. Insolation (courbe pleine), quantité d'énergie solaire absorbée par le système Terre-atmosphère (traits discontinus), et flux infra-rouge émis vers l'espace (pointillés). D'après des données de l'expérience ERBE (Earth Radiative Budget Experiment).

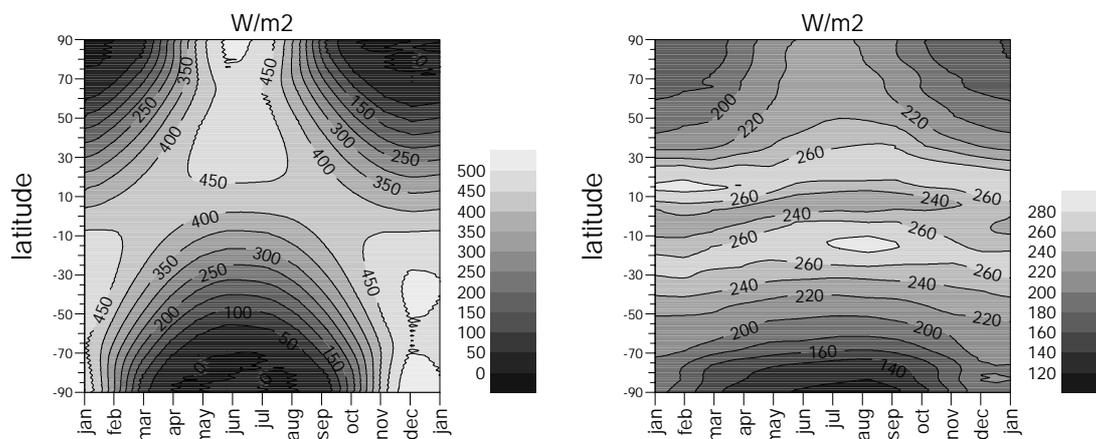


FIG. 3.2 – Insolation au sommet de l’atmosphère (à gauche) et flux thermique sortant (à droite) (W/m^2) mesurés par l’expérience ERBE.

faible. En conséquence, le maximum de température au solstice est atteint pratiquement sur le pôle de l’hémisphère d’été.

3.1.3 Disparités régionales

Bien sûr, la surface de la terre n’est pas entièrement recouverte d’océans. Pendant l’été, les sols terrestres se réchauffent en général beaucoup plus vite que les surfaces océaniques. Des circulations peuvent alors s’établir qui redistribuent l’énergie depuis les continents vers les océans. Cette circulation s’inverse pendant l’hiver où les continents se refroidissent beaucoup plus vite que les océans.

C’est notamment le cas de la circulation de mousson, particulièrement de la mousson indienne.

3.2 La circulation de Hadley

L’idée que la circulation de l’atmosphère terrestre puisse être engendrée par les différentiels d’absorption du rayonnement solaire remonte à la fin du dix-septième siècle. C’est Halley qui en 1686 proposa d’expliquer les vents par une ascendance d’air chaud dans les régions tropicales et une subsidence dans les hautes latitudes, assimilant ainsi la Terre à une grande casserole chauffée à l’équateur.

3.2.1 Transport méridien d’énergie par une cellule convective

Le principe de cette circulation méridienne est simple. Dans les régions tropicales, l’air se réchauffe plus vite sous l’effet du soleil qu’il ne se refroidit par rayonnement thermique (cf. Fig. 3.1). Il en résulte une expansion du gaz atmosphérique et donc, à une altitude donnée, une augmentation de la pression.

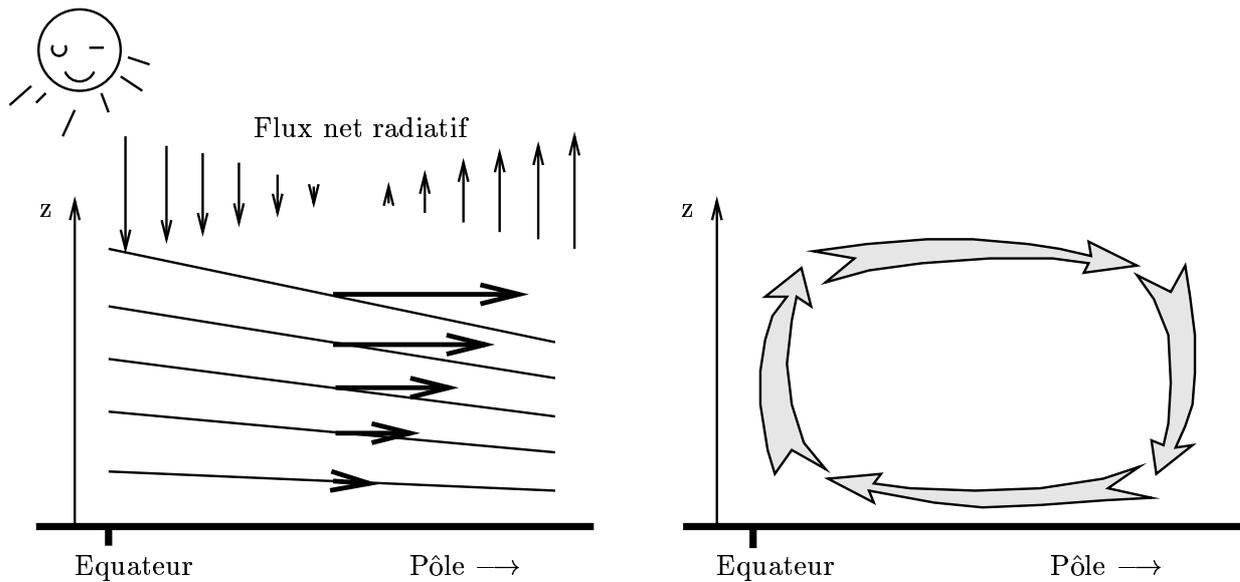


FIG. 3.3 – La circulation de Hadley

Sur la gauche, sont représentées : les variations latitudinales du flux radiatif net, absorbé (ou émis) par l'atmosphère (petite flèches verticales en haut), les courbes à pression constante ou isobares (les droites penchées), la force de gradient de pression créée par l'inclinaison de ces isobares.

A droite : représentation schématique de la cellule de Hadley.

Dans les hautes latitudes en revanche, l'atmosphère se refroidit plus vite qu'elle ne se réchauffe, et la hauteur d'échelle de l'atmosphère décroît.

On voit ainsi comment l'énergie radiative absorbée par l'atmosphère est transformée à la fois en énergie interne (élévation de la température) et en énergie potentielle (changement d'altitude). C'est la transformation de cette énergie potentielle en énergie cinétique qui explique la création de mouvements dans l'atmosphère.

A une altitude fixe au-dessus du sol, la pression décroît donc depuis l'équateur vers le pôle, ce qui est illustré sur la Fig. 3.3. Cette variation de pression provoque un mouvement d'air global depuis l'équateur vers les pôles. En divisant intellectuellement l'atmosphère en une superposition verticale de couches (cf. Fig. 3.3), il apparaît clairement que l'effet d'inclinaison des isobares est cumulatif et que les isobares sont beaucoup plus penchées en haut de l'atmosphère qu'en bas. Près de la surface l'effet est même nul (à condition de négliger le relief de la planète). Le transport systématique de masse vers les pôles aboutit à une élévation de la pression dans les hautes latitudes. Ces variations latitudinales de la pression de surface vont donc créer un mouvement de retour de l'air près de la surface. Finalement, une grande cellule de convection se met en place avec ascendance près de l'équateur, transport vers les pôles dans la branche supérieure, subsidence dans les hautes latitudes et enfin, transport vers l'équateur près de la surface (Fig. 3.3 à droite).

C'est exactement sur le même schéma que se met en route la brise de mer quand l'air se réchauffe plus vite au-dessus de la mer que sur la terre pendant la journée. L'air monte alors au-dessus de la terre et le vent souffle depuis la mer près de la surface.

3.2.2 Effets de la rotation : la conservation du moment cinétique

Ce n'est pas le nom de Halley qui reste attaché à cette circulation, mais celui de Hadley qui le premier, en 1735, fit intervenir l'effet de la rotation terrestre dans cette circulation et expliqua du même coup l'origine des alizés.

A un mouvement vers le pôle est associé la création de vents d'ouest. La meilleure façon pour le comprendre est de considérer le moment cinétique des particules fluides par rapport à l'axe des pôles. Ce moment cinétique est le produit de la composante ouest-est de la vitesse absolue de la particule par la distance à l'axe de rotation. On peut montrer que, si on suit une particule de fluide, l'évolution de ce moment cinétique est égale au moment (produit par la distance à l'axe) de la composante ouest-est des forces exercées sur la particule. En l'absence de friction et si les gradients longitudinaux de pression sont nuls ($\partial p/\partial x = 0$), la particule fluide conserve son moment cinétique dans son mouvement vers les pôles.

Qu'arrive-t-il par exemple à une particule d'air qui part de l'équateur et est emportée (advectée) vers les hautes latitudes dans la branche supérieure de la cellule de Hadley ? Comme une patineuse quand elle resserre les bras (Fig. 3.4), cette particule, en se rapprochant de l'axe des pôles, se met à tourner de plus en plus vite³. La vitesse relative des particules par rapport à la planète (le vent) croît encore plus vite que la vitesse absolue puisque, quand on se dirige de l'équateur vers le pôle, la vitesse absolue de la surface de la planète est de plus en plus petite.

Prenons au contraire une particule près de la surface qui part avec une vitesse relative (ou vent) nulle d'une certaine latitude, 30° par exemple. Cette particule est entraînée vers l'équateur par la circulation de Hadley, et elle s'éloigne donc de l'axe des pôles. La particule tourne alors moins vite que la planète. C'est l'origine des alizés, ces vents d'est intertropicaux, jadis utilisés par la marine à voile.

Pour déduire les équations mathématiques de la conservation du moment cinétique, il faut introduire quelques conventions supplémentaires.

Coordonnées sphériques et composantes du vent

Un système de coordonnées particulièrement adapté aux études météorologiques est le système des coordonnées sphériques dans lequel la position d'un point est repérée par deux angles, la longitude λ et la latitude ϕ , et la distance au centre de la terre r (ou l'altitude z du point par rapport au géopotential de référence).

Les conventions de définition de la longitude et de la latitude sont données sur la Fig. 3.5. Il est également commode d'introduire, à la surface de la terre un repère cartésien local (x, y, z) . On prend par convention x le long du parallèle local et orienté vers l'est, y le long du méridien et orienté vers le nord et z

³Cet effet de la rotation terrestre est particulièrement simple à percevoir pour un observateur extérieur à l'atmosphère, qui assimile facilement la Terre à une championne de patinage artistique. Pour le terrien rivé sur son fauteuil, qui veut analyser le phénomène par rapport à un repère lié à ce même fauteuil, le problème devient beaucoup plus compliqué. Il ne comprend plus pourquoi les vents dirigés vers les pôles se dévient spontanément vers l'ouest et invoque alors le mystérieux Coriolis.

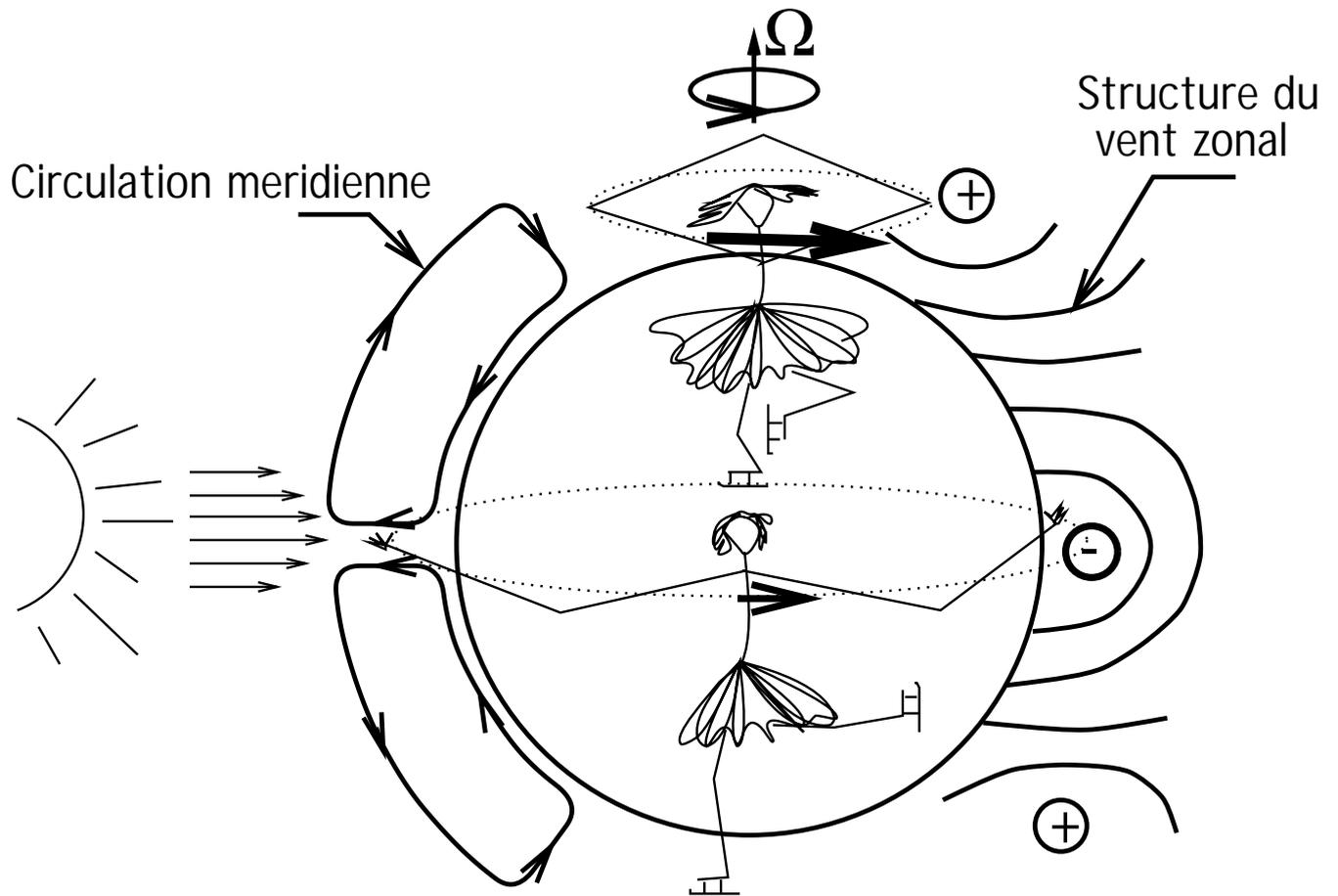


FIG. 3.4 – Circulation de Hadley et conservation du moment cinétique. La circulation méridienne mise en route sous l'effet du chauffage différentiel par le soleil est représentée sur la gauche. Dans les branches supérieures des deux cellules de Hadley, les particules d'air, advectées vers les pôles, se rapprochent de l'axe de rotation. Par conservation du moment cinétique, leur vitesse de rotation croît. C'est ce qui est illustré par la charmante patineuse au centre du dessin qui tourne plus vite quand elle resserre les bras. L'effet sur le vent ouest-est est schématisé sur la partie droite de la Figure. Les signes + et - indiquent les régions de maximum et de minimum du vent ouest-est.

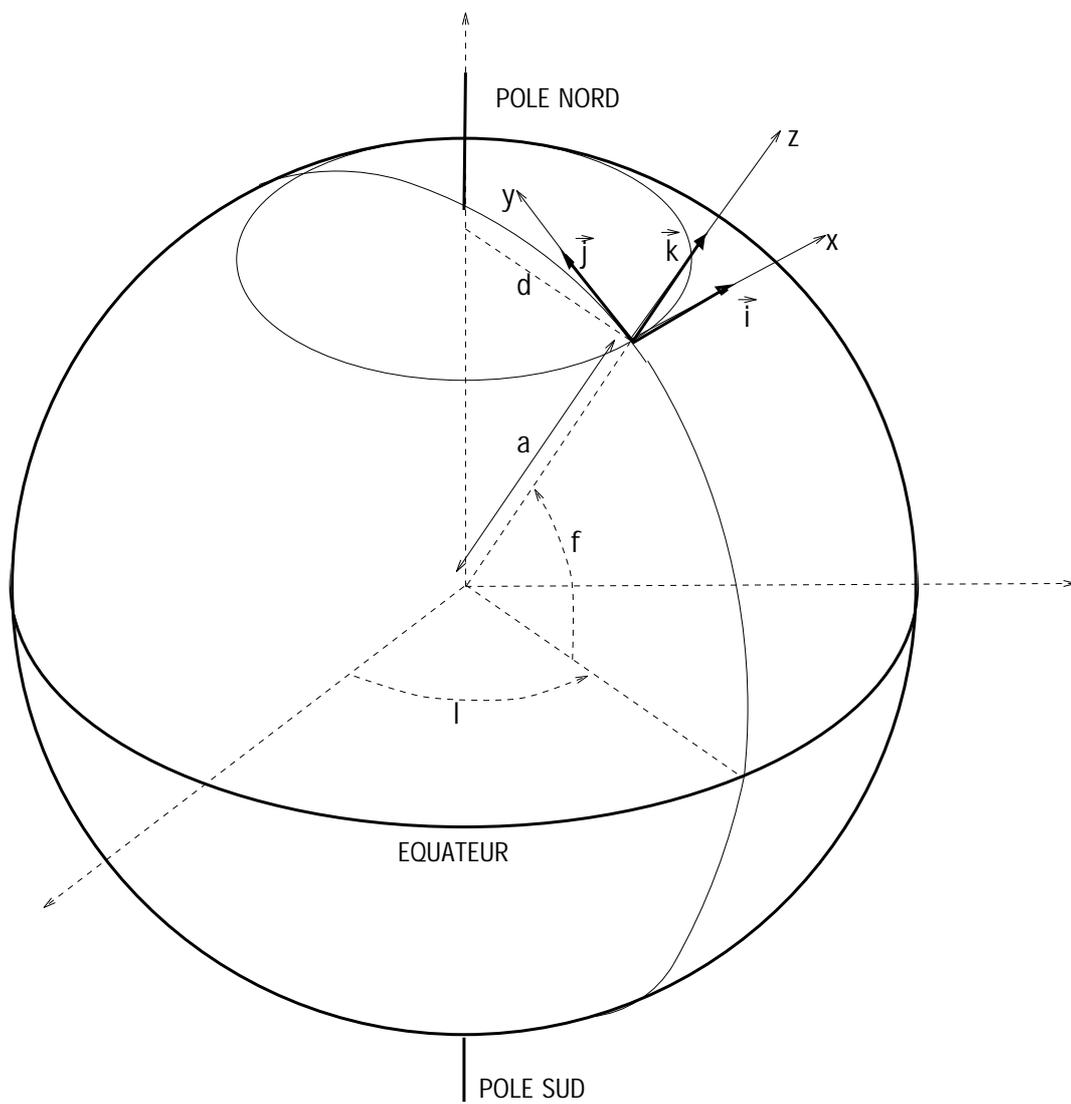


FIG. 3.5 – Définition des coordonnées sphériques et du repère local $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

vertical orienté vers le haut. On note en général (u, v, w) les trois composantes du vent (ou vitesse relative) \vec{U}_r .

On voit facilement que les composantes du vent sont reliées aux coordonnées sphériques par les identités suivantes

$$u = a \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = a \frac{d\phi}{dt} \quad \text{et} \quad w = \frac{dz}{dt}. \quad (3.1)$$

La dérivée temporelle dans ces expressions, notée d/dt , est calculée en suivant les particules fluides ; c'est la **dérivée Lagrangienne**. Les composantes u et v du vent sont appelées **composantes zonale et méridienne**.

Expression mathématique de la conservation du moment cinétique

Avec ces conventions, le moment cinétique d'une particule autour de l'axe des pôles est le produit de sa masse m , de sa vitesse zonale absolue $u_a = \Omega a \cos \phi + u$ et de la distance à l'axe $d = a \cos \phi$ (se reporter à la Fig. 3.5)⁴ soit

$$M = m a \cos \phi (\Omega a \cos \phi + u) \quad (3.2)$$

La conservation du moment cinétique particulaire se traduit en disant que sa dérivée Lagrangienne est nulle

$$\frac{d}{dt} [\cos \phi (\Omega a \cos \phi + u)] = 0 \quad (3.3)$$

ou encore

$$\cos \phi \frac{du}{dt} = (u \sin \phi + 2a\Omega \cos \phi \sin \phi) \frac{d\phi}{dt} \quad (3.4)$$

La variation Lagrangienne de la latitude au cours du déplacement d'une particule est simplement égale à v/a et l'accélération zonale d'une particule conservant son moment cinétique s'écrit finalement

$$\frac{du}{dt} = uv \frac{\tan \phi}{a} + 2v\Omega \sin \phi \quad (3.5)$$

Sur la Terre, le deuxième terme dans le membre de droite (accélération de Coriolis) est très supérieur au premier parce que la vitesse absolue d'une particule "immobile" au niveau de l'équateur $a\Omega \sim 460 \text{ ms}^{-1}$, est toujours très supérieure au vent zonal u qui dépasse rarement 100 ms^{-1} . On voit donc que la conservation du moment cinétique déviara les particules se dirigeant vers le pôle ($v\phi > 0$) vers l'est et les particules se dirigeant vers l'équateur vers l'ouest.

Il est important de remarquer que la simple conservation du moment cinétique par une particule partant avec une vitesse nulle de l'équateur, produit à 30° de latitude, un vent d'ouest

$$u = a\Omega \frac{1 - \cos^2 \phi}{\cos \phi} \sim 135 \text{ ms}^{-1} \quad (3.6)$$

⁴On peut montrer que les variations du moment cinétique dans l'atmosphère liées au changements de la distance au centre de la terre (dues à la fois au variations d'altitude et aux changements de forme du géopotentiel de référence) sont négligeables devant les variations liées aux déplacements horizontaux. On prend alors comme expression de la distance à l'axe des pôles $d = a \cos \phi$. Cette approximation qui revient à négliger les variations de la distance au centre de la terre au sein de l'atmosphère est appelée **approximation de couche mince**.

On voit donc que, si l'absorption différentielle d'énergie radiative est la source première des mouvements atmosphériques, la production de vents importants est avant tout la conséquence de la rotation et de la sphéricité de la planète.

3.2.3 Effets de la rotation : la force centrifuge

La création de vents d'ouest dans la branche supérieure de la cellule est un frein très important pour la circulation de Hadley. En effet, par la même loi physique qui aplatit les planètes sous l'effet de leur rotation, une particule tournant plus vite que la planète est entraînée vers l'équateur. La force inertielle correspondante tend à contrecarrer la force de gradient de pression qui a engendré les mouvements vers le pôle dans la branche haute de la cellule de Hadley.

Reprenons la figure de l'équilibre de la bille au repos (Fig. 1.1) mais en considérant cette fois une particule tournant plus vite que la planète, c'est à dire une particule animée d'une vitesse relative (ou vent zonal) $u > 0$. La bille tourne encore à une distance $r = a \cos \phi$ de l'axe des pôles, mais cette fois avec une vitesse de rotation

$$\omega = \Omega + \frac{u}{a \cos \phi} \quad (3.7)$$

La force apparente centrifuge exercée sur la particule de masse $m = \rho \delta V$ est alors égale à $-m\omega^2 \vec{r}$ avec

$$\begin{aligned} \omega^2 r &= a \cos \phi \times \left(\Omega + \frac{u}{a \cos \phi} \right)^2 \\ &= \Omega^2 a \cos \phi + 2\Omega u + \frac{u^2}{a \cos \phi} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Le terme $\Omega^2 a \cos \phi$ est en fait déjà pris en compte dans la définition de la gravité (Eq. 1.1). Si on projette la somme de la gravité et de la force centrifuge sur l'axe horizontal défini par \vec{j} (cf. Fig. 3.6) la particule, en l'absence d'autre force, est entraînée vers l'équateur par une force apparente $-m\vec{\gamma}_H$ avec

$$\vec{\gamma}_H = \left(2\Omega \sin \phi u + \frac{u^2 \tan \phi}{a} \right) \vec{j} \quad (3.9)$$

La première partie de cette force est en fait la composante méridienne de la force de Coriolis qui dévie les vents d'ouest vers l'équateur. Sur la Terre à nouveau, ce terme l'emporte presque toujours sur le second.

La création de forts vents d'ouest par transport du moment cinétique produit donc une force dirigée vers l'équateur qui tend à stopper la circulation de Hadley. Plus une planète tourne vite et plus cet effet de frein de la circulation méridienne est important. Sur la Terre, la cellule de Hadley s'arrête à 30° environ de part et d'autre de l'équateur alors que sur Vénus, qui tourne sur elle-même en 240 jours, cette circulation s'étend jusqu'aux pôles.

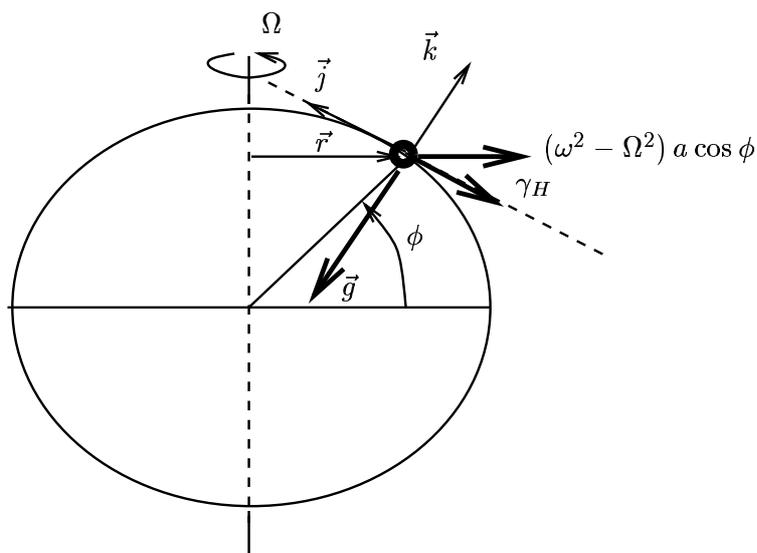


FIG. 3.6 – Equilibre d’une particule tournant le long d’un parallèle

3.3 Le vent gradient

Sous l’effet de la force centrifuge, l’advection de l’air dans la branche haute de la cellule de Hadley devient de moins en moins efficace au fur et à mesure qu’on s’éloigne de l’équateur et les isobares s’inclinent de plus en plus. Finalement, la force de gradient de pression et la composante horizontale de la force centrifuge deviennent prépondérantes dans l’équation du mouvement méridien. Il s’établit un quasi-équilibre entre ces forces, l’accélération méridienne résultant alors de la faible différence entre les deux termes.

3.3.1 Définition

Cet équilibre, dit du vent gradient, est en fait très général. Dans toutes les atmosphères connues et dans l’océan, un quasi-équilibre s’établit entre le champ de masse atmosphérique et la composante horizontale de la force centrifuge, liée au vent zonal, quand on regarde les champs à grande échelle. De même que la Terre solide adoptait une forme aplatie sous l’effet de la rotation, le champ de masse d’une atmosphère tournant plus vite que la planète solide sera déformé, résultant en une plus grande quantité de masse à l’équateur qu’aux pôles. En fait, quand on regarde les moyennes des champs en longitude (ce que les météorologistes appellent une **moyenne zonale**) un équilibre s’établit en chaque point du plan méridien entre la force centrifuge décrite précédemment et le gradient latitudinal de pression.

Cet équilibre s’écrit simplement

$$\frac{1}{a\rho} \frac{\partial p}{\partial \phi} + 2\Omega u \sin \phi + u^2 \frac{\tan \phi}{a} = 0 \quad (3.10)$$

A une altitude z au dessus du sol, les gradients latitudinaux de pression sont très nettement dominés par les variations latitudinales de l’échelle de hauteur

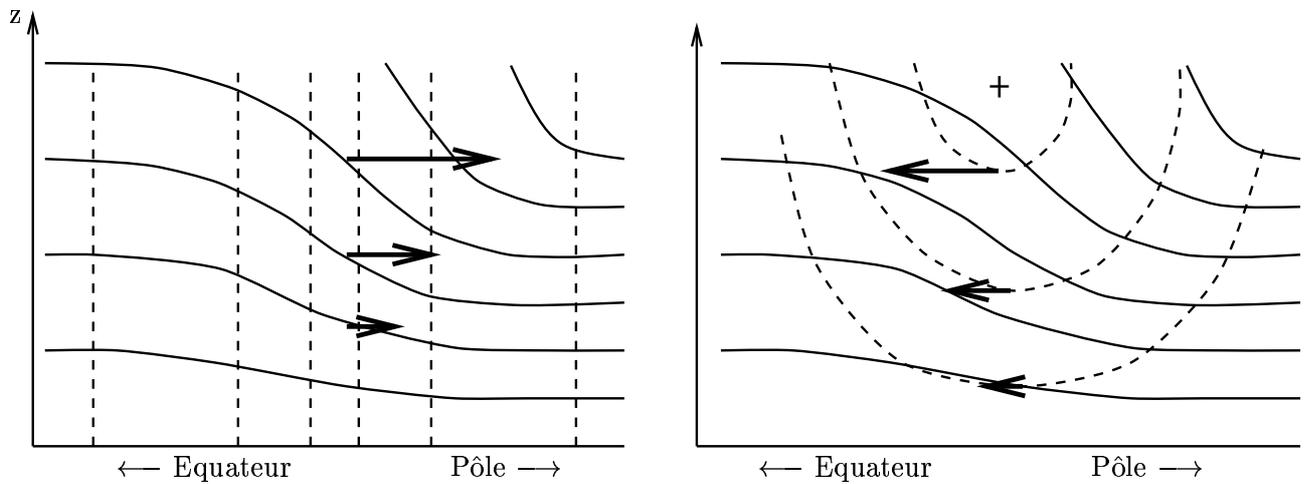


FIG. 3.7 – Le vent gradient

A gauche : en pointillés les isothermes et en traits plein les isobares correspondantes. Les flèches représentent la force de gradient de pression.

A droite : les mêmes isobares en trait pleins et les isocontours du vent gradient en pointillés, avec un maximum signalé par le signe +. Les flèches représentent la force centrifuge.

$H = RT/g$ de l'atmosphère (dans le cas d'une planète sans relief avec pression de surface constante, la variation de l'échelle de hauteur est en fait la seule source de variation horizontale de pression). En présence d'une forte variation latitudinale de la pression, les isobares seront très inclinées (descendant vers les hautes latitudes) et il faudra un vent zonal très fort pour équilibrer la force de pression. Ceci est illustré sur la Fig. 3.7.

Cet équilibre horizontal peut donc être transformé en une relation entre le champ de température et le champ de vent, connue sous le nom de relation du vent gradient. La dérivation de cette forme particulière de l'équilibre nécessite cependant quelques développements mathématiques.

3.3.2 Dérivation mathématique

Il faut pour cela passer de la coordonnée verticale naturelle (l'altitude) à la coordonnée de pression très communément utilisée dans les études atmosphériques. Pour une atmosphère verticalement en équilibre hydrostatique, la dérivée horizontale de la pression à altitude constante

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \quad (3.11)$$

(où x est une coordonnée horizontale quelconque) est reliée à la variation horizontale du géopotentiel $\Phi = gz$ par

$$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)_p \quad (3.12)$$

Fondamentalement, en atmosphère hydrostatique, il est équivalent de dire que les particules sont entraînées horizontalement vers les zones de plus faible pression ou de dire qu'à pression

fixe, les particules sont entraînées vers une zone d'altitude plus basse. L'Eq. 3.10 s'écrit alors

$$\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} + 2\Omega u \sin \phi + u^2 \frac{\tan \phi}{a} = 0 \quad (3.13)$$

L'étape suivante consiste à utiliser comme coordonnée verticale le logarithme de la pression normalisée $\xi = \ln(p/p_0)$ (le produit ξH est proche de l'altitude) et à remarquer que l'équilibre hydrostatique (Eq. 1.8) s'écrit alors simplement

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = -RT \quad (3.14)$$

La dérivée verticale de l'équation du vent gradient fournit l'équation suivante

$$\frac{1}{a} \frac{\partial RT}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left(2\Omega u \sin \phi + u^2 \frac{\tan \phi}{a} \right) \quad (3.15)$$

En négligeant les vents au sol $u \sim 0$ (les vents sont généralement plus faibles près du sol à cause du frottement de la surface), le vent se calcule à partir du champ de température en résolvant l'équation

$$\int \frac{\partial \xi}{a} \frac{\partial RT}{\partial \phi} = 2\Omega u \sin \phi + u^2 \frac{\tan \phi}{a} \quad (3.16)$$

Cette relation est très souvent utilisée pour évaluer les vents sur une planète. En effet, si les vents peuvent parfois être partiellement déterminés à partir du déplacement de certaines structures, nuageuses par exemple, ces structures sont souvent trop rares (comme sur Mars) ou, dans le cas contraire, elles occultent complètement une partie de l'atmosphère (pour Vénus par exemple). En revanche, les températures atmosphériques sont assez simples à reconstruire depuis une sonde en orbite à partir de la mesure du flux infrarouge thermique émis par l'atmosphère.

On peut cependant mentionner que des techniques récentes, basées sur les mesures d'effets Doppler permettront sans doute dans un futur proche d'obtenir des informations complètes et fiables sur les champs de vents.

3.4 Les instabilités et les ondes planétaires

Si l'étude de la circulation générale atmosphérique s'intéresse particulièrement à la redistribution en latitude de différentes quantités, comme l'énergie ou le moment cinétique, le transport par une circulation méridienne axi-symétrique, du type cellule de Hadley, est loin d'être l'unique mode de redistribution. En fait, même pour une planète sans contrastes longitudinaux (pas de relief, pas de contrastes océans-continent *etc.*) et en présence d'un forçage énergétique axi-symétrique (par exemple le forçage correspondant à l'absorption du rayonnement solaire journalier moyen par l'atmosphère et la surface), la circulation atmosphérique qui se développe est fortement non axi-symétrique.

Pour décrire une circulation réaliste non axi-symétrique, il est commode de distinguer la circulation moyenne (moyenne sur les longitudes et sur une certaine période de temps) et les différences à cette moyenne appelées perturbations. Pour une quantité $q(x, y, z, t)$, on écrira

$$q(x, y, z, t) = \bar{q}(y, z) + q'(x, y, z, t) \quad (3.17)$$

où \bar{q} est le champ moyen et q' la perturbation.

Dans les latitudes moyennes, pendant l'hiver, les perturbations sont particulièrement importantes : des ondes planétaires se mettent en place, successions longitudinales de hautes et basses pressions qui se déplacent le long des parallèles.

Une certaine quantité d'énergie cinétique est associée à cette composante non axi-symétrique de la circulation. Cette énergie cinétique provient d'une des formes d'énergie disponibles dans la circulation moyenne. Les seules perturbations qui pourront se développer effectivement sont donc celles qui diminuent l'énergie de l'écoulement moyen. On voit ainsi apparaître une nouvelle approche de l'instabilité : des perturbations qui diminuent l'énergie de l'écoulement moyen sont susceptibles de transformer cette énergie en énergie cinétique et donc de croître.

Deux formes d'instabilité de l'écoulement moyen jouent un rôle fondamental dans les bilans d'énergie et de moment cinétique : (1) l'instabilité barocline qui apparaît dans des zones de forts gradients latitudinaux de la température ; cette instabilité est le moteur des ondes responsables, dans les moyennes latitudes, des successions de hautes et basses pressions, particulièrement sensibles pendant l'hiver ; (2) l'instabilité barotrope qui puise son énergie dans l'énergie cinétique de l'écoulement moyen. Contrairement à l'instabilité barocline, elle peut se développer en l'absence de gradients latitudinaux de température, c'est à dire dans une situation où la température ne dépend que du niveau de pression, d'où son nom de barotrope.

3.5 Transports latitudinaux d'énergie et de moment cinétique

Si on schématise la circulation atmosphérique terrestre en oubliant les variations saisonnières et les contrastes longitudinaux liés notamment à la présence de surfaces continentales et océaniques, on peut résumer le bilan d'énergie dans l'atmosphère de la façon suivante.

1. Dans les latitudes tropicales, où les effets de la rotation terrestre sont relativement faibles, la circulation de type Hadley, redistribue très efficacement l'énergie en latitude, ce qui résulte en des variations latitudinales relativement faibles de la température.
2. Vers 30 degrés de latitude, cette composante axi-symétrique devient très inefficace et les gradients latitudinaux de la température deviennent plus marqués. Des ondes planétaires se développent alors, forcées par l'instabilité barocline liée à l'inclinaison des iso- θ .

L'excédent d'énergie dans les régions tropicales est donc d'abord transporté vers les moyennes latitudes par la circulation de Hadley puis vers les latitudes plus élevées par les ondes baroclines et enfin renvoyé vers l'espace par le rayonnement thermique.

A ces transports d'énergie est associé un transport de moment cinétique. Si on regarde un champ de vent zonal moyen, près de la surface, on voit que les vents sont essentiellement d'est jusqu'à 30 degrés de part et d'autre de

l'équateur. Dans toute cette région, l'atmosphère reçoit du moment cinétique de la planète par frottement des alizés. Dans les moyennes latitudes, ce moment cinétique est restitué à la planète par le frottement des vents d'ouest. La cellule de Hadley a un effet relativement faible dans le transport de moment cinétique en latitude, le transport vers les pôles dans la branche haute de la cellule étant compensé par un transport vers l'équateur près de la surface. Cependant, le transport de moment cinétique par la circulation de Hadley a un rôle essentiel en ce sens qu'il est responsable de la création de jets d'ouest très intenses qui, en creusant les gradients latitudinaux de température, produisent les conditions favorables au développement de l'instabilité barocline. Ce sont les ondes planétaires qui se chargent ensuite de transporter vers les plus hautes latitudes ce moment cinétique amené des surfaces équatoriales par la cellule de Hadley. Ce moment cinétique est finalement restitué à la planète dans les moyennes latitudes où les vents dominants sont d'ouest.

Chapitre 4

Equation du mouvement et équilibre géostrophique

Dans ce chapitre, on revient sur certaines notions introduites précédemment pour aboutir au formalisme des équations du mouvement.

4.1 L'équation fondamentale de la dynamique

On a introduit dans le premier chapitre deux forces fondamentales qui s'exercent sur une particule fluide, l'attraction gravitationnelle et la pression. On s'intéressait dans ce chapitre à une atmosphère statique. Si l'atmosphère est en mouvement, les particules subissent une force supplémentaire : la friction avec les particules voisines ou viscosité moléculaire. Dans le présent chapitre, on conservera pour mémoire cette force Fr mais sans entrer dans le détail de sa formulation.

Si on se place dans un référentiel Galiléen (par exemple un référentiel fixe par rapport aux étoiles) l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{g}^* - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + Fr \quad (4.1)$$

4.2 Passage en référentiel tournant

Pour un observateur à la surface de la terre, on l'a déjà dit, les mouvements atmosphériques paraissent soumis à des forces supplémentaires dues au fait que la terre est en rotation.

4.2.1 Un exemple de plus ...

Considérons le cas d'une bille lancée avec une vitesse initiale non nulle depuis le pôle nord. Dans un référentiel absolu, cette bille se déplace en ligne droite à une vitesse constante (la gravité qui est perpendiculaire à la surface ne modifie pas la trajectoire). Vue dans un repère lié à la terre (et en assimilant localement près du pôle la terre à un disque en rotation), on peut facilement construire sur

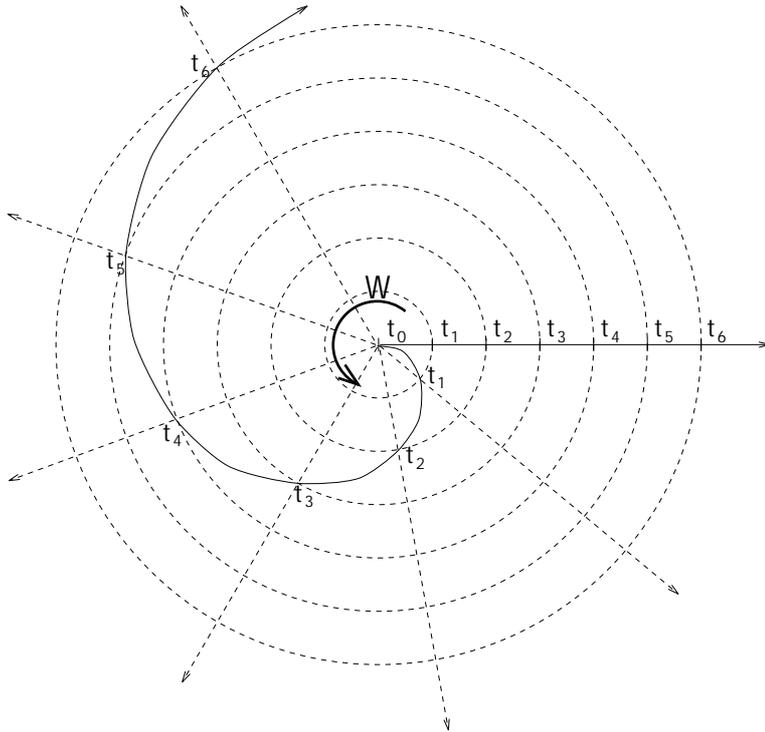


FIG. 4.1 – Mouvement d’une bille lancée du pôle nord avec une vitesse non nulle vu dans un repère lié à la terre. Les droites en pointillé représentent les positions successives, vues depuis le repère tournant, de la droite suivie par la bille.

un graphique (Fig. 4.1) la trajectoire de la bille. Cette trajectoire est incurvée vers la droite et la particule semble accélérer (le module de sa vitesse devient de plus en plus grand) par rapport à la surface de la terre.

4.2.2 Un petit rappel...

Regardons le mouvement d’une particule décrivant un cercle autour d’un axe (O, \vec{k}) à une vitesse angulaire constante Ω (se reporter à la Fig. 4.2). La vitesse de la particule est définie comme la dérivée du vecteur position $O\vec{M}$

$$\vec{U} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{OM(\vec{t} + \delta t) - O\vec{M}(t)}{\delta t} \quad (4.2)$$

Si on regarde la direction du vecteur, on voit qu’elle est portée par la tangente à la trajectoire de la particule. La distance $M(t)M(t + \delta t)$ est d’autre part à peu près égale à $\Omega \delta t SM = \Omega \delta t OM \sin \theta$. Le module du vecteur vitesse est donc $U = \Omega OM \sin \theta$. Finalement le vecteur vitesse est simplement le produit vectoriel

$$\frac{dO\vec{M}}{dt} = \Omega \vec{k} \wedge O\vec{M} \quad (4.3)$$

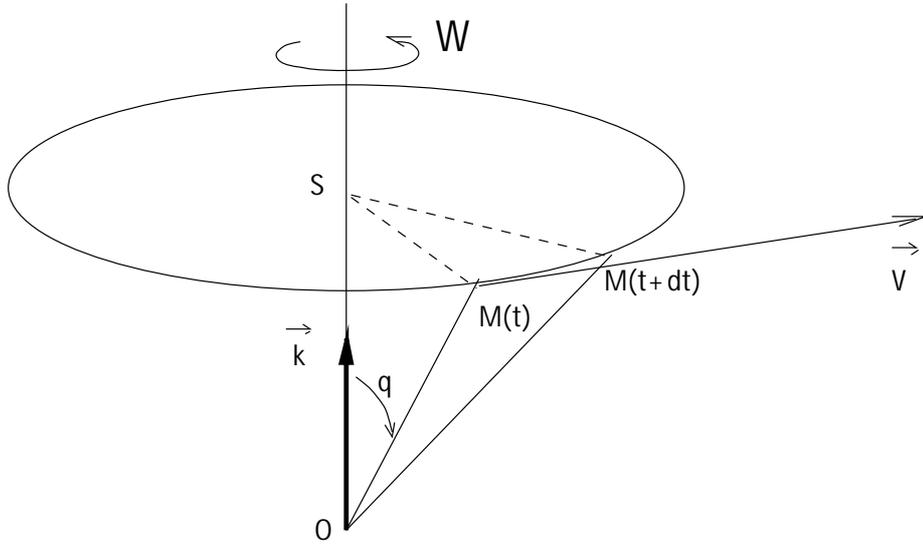


FIG. 4.2 – Vitesse d'un point décrivant un cercle autour d'un axe (O, \vec{k}) à une vitesse angulaire constante Ω .

ou, en introduisant le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$,

$$\frac{dO\vec{M}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge O\vec{M} \quad (4.4)$$

4.2.3 La vitesse dans le référentiel tournant

On va noter avec un indice a les dérivées évaluées dans le repère absolu (Galiléen) et avec un indice r , les dérivées calculées dans un repère lié à la terre. On va prendre dans le référentiel lié à la terre un repère défini par le centre de la terre O et trois vecteurs \vec{i}_n , avec $n = 1, 2, 3$.

Pour chacun de ces vecteurs on a

$$\left(\frac{d\vec{i}_n}{dt} \right)_a = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}_n \quad (4.5)$$

Prenons maintenant un point en mouvement M défini par ses coordonnées x_1, x_2 et x_3 dans le repère $(O, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \vec{i}_3)$.

On peut facilement relier les vitesses de la particule M dans les référentiels absolu et relatif

$$\begin{aligned} \left(\frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_a &= \left[\frac{d(x_1\vec{i}_1 + x_2\vec{i}_2 + x_3\vec{i}_3)}{dt} \right]_a \\ &= \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dx_2}{dt}\vec{i}_2 + \frac{dx_3}{dt}\vec{i}_3 + x_1 \left(\frac{\partial \vec{i}_1}{\partial t} \right)_a + x_2 \left(\frac{\partial \vec{i}_2}{\partial t} \right)_a + x_3 \left(\frac{\partial \vec{i}_3}{\partial t} \right)_a \\ &= \left(\frac{dO\vec{M}}{dt} \right)_r + \vec{\Omega} \wedge (x_1\vec{i}_1 + x_2\vec{i}_2 + x_3\vec{i}_3) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Les vitesses absolue \vec{U}_a et relative \vec{U}_r sont finalement reliées par la formule

$$\vec{U}_a = \vec{U}_r + \vec{\Omega} \wedge O\vec{M} \quad (4.7)$$

ce qui se traduit en français en disant que la vitesse absolue de la particule est la somme de sa vitesse relative et de la vitesse d'entraînement par la planète.

4.2.4 L'accélération dans le référentiel tournant

Pour l'accélération, le calcul n'est pas plus compliqué

$$\left(\frac{d^2 O\vec{M}}{dt^2} \right)_a = \sum_{n=1}^3 \left[\frac{d^2 (x_n \vec{i}_n)}{dt^2} \right]_a \quad (4.8)$$

$$= \sum_{n=1}^3 \left[\frac{d^2 x_n}{dt^2} \vec{i}_n + 2 \frac{dx_n}{dt} \left(\frac{d\vec{i}_n}{dt} \right)_a + x_n \left(\frac{d^2 \vec{i}_n}{dt^2} \right)_a \right] \quad (4.9)$$

Finalement, les accélérations absolue $\vec{\gamma}_a$ et relative $\vec{\gamma}_r$ sont reliées par la formule

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}) \quad (4.10)$$

faisant intervenir l'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_r$ et l'accélération d'entraînement $\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M})$.

4.2.5 Equation du mouvement

L'équation du mouvement s'écrit finalement dans le référentiel relatif

$$\vec{\gamma}_r = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_r - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}) + \vec{g}^* - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + Fr \quad (4.11)$$

En introduisant à nouveau comme au Chapitre 1

$$\vec{g} = \vec{g}^* - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M}) \quad (4.12)$$

cette équation se réduit à

$$\vec{\gamma}_r = -2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_r + \vec{g} - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + Fr \quad (4.13)$$

Le passage en référentiel tournant fait donc apparaître en plus de la force centrifuge $-\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge O\vec{M})$ prise en compte dans la définition de la gravité, la force de Coriolis $-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_r$.

Cette force étant perpendiculaire à la trajectoire de la particule dans le référentiel tournant, elle ne change pas le module de la vitesse mais ce contente de dévier la trajectoire, vers la droite dans l'hémisphère nord et vers la gauche dans l'hémisphère sud.

4.3 Passage aux coordonnées sphériques

Pour pouvoir traiter ces équations, il faut passer d'une représentation vectorielle à des équations portant sur les coordonnées des vecteurs.

On a déjà donné dans le Chapitre 3 les expressions des composantes de la vitesse en fonction des coordonnées sphériques

$$u = a \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}, \quad v = a \frac{d\phi}{dt} \quad \text{et} \quad w = \frac{dz}{dt}. \quad (4.14)$$

Pour les composantes de l'accélération, les choses se compliquent un peu. On oublie à partir de maintenant l'indice r quand on parle de quantités calculées par rapport au référentiel tournant. La dérivée Lagrangienne de la vitesse, c'est à dire la dérivée temporelle calculée en suivant la particule de fluide, prend en compte non seulement les variations dans le temps des coordonnées u , v et w mais aussi les variations des vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ liées au déplacement de la particule :

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} + w\frac{d\vec{k}}{dt}. \quad (4.15)$$

On peut trouver assez facilement les dérivées Lagrangiennes des vecteurs de base :

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{u}{a \cos \phi} (\vec{j} \sin \phi - \vec{k} \cos \phi) \quad (4.16)$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\frac{u \tan \phi}{a} \vec{i} - \frac{v}{a} \vec{k} \quad (4.17)$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{i} \frac{v}{a} + \vec{j} \frac{u}{a} \quad (4.18)$$

d'où finalement les composantes de l'accélération

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{wu}{a} \\ \frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

On peut calculer également les composantes de la force de Coriolis

$$-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} = -2 \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \cos \phi \\ \Omega \sin \phi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Omega (v \sin \phi - w \cos \phi) \\ -2\Omega u \sin \phi \\ 2\Omega u \cos \phi \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Finalement, les trois composantes de l'équation du mouvement s'écrivent

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} + \frac{uw}{a} = 2\Omega (v \sin \phi - w \cos \phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + Fr_x \quad (4.21)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{a} + \frac{wu}{a} = -2\Omega u \sin \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Fr_y \quad (4.22)$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2 + v^2}{a} = 2\Omega u \cos \phi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Fr_z - g \quad (4.23)$$

4.4 Description Eulérienne

Les équations précédentes contiennent encore les dérivées Lagrangiennes des composantes du vent calculées en suivant la trajectoire des particules. Pour traiter l'équation du mouvement, et notamment pour la faire rentrer sur un ordinateur, il est généralement nécessaire de passer à une description **Eulérienne** dans laquelle on calcule l'évolution temporelle des différentes variables en des points fixes de l'atmosphère. Pour les équations précédentes, le passage de la représentation Lagrangienne à la représentation Eulérienne revient simplement à remplacer les dérivées temporelles des composantes du vent (u, v, w) en utilisant pour chacune d'elle la relation

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (4.24)$$

4.5 Ordre de grandeur des différents termes dans l'équation du mouvement

On néglige ici d'office les termes de friction.

On peut évaluer l'ordre de grandeur des différents termes dans ces équations pour les écoulements de grande échelle sur la Terre à partir de valeurs moyennes des différentes quantités. L'échelle de distance typique pour les cellules de Hadley ou les perturbations transitoires dans les moyennes latitudes est de l'ordre de $L \sim 10^6$ m. Les vents horizontaux dans la troposphère sont de l'ordre de $U \sim 10$ m s⁻¹. Les variations typiques de la pression sont de l'ordre de 1000 Pa et la densité de l'ordre de 1 d'où $\Delta P/\rho \sim 10^3$ m²s⁻². Les vitesses verticales sont typiquement de l'ordre de $W \sim 1$ cm s⁻¹. Enfin le facteur de Coriolis $f = 2\Omega \sin \phi$ est de l'ordre de 10^{-4} s⁻¹ dans les moyennes latitudes.

On peut en plus introduire une échelle temporelle $\tau = L/U \sim 10^5$ s.

En utilisant ces valeurs, on trouve que :

1. La composante verticale de l'équation du mouvement est très largement dominée par l'équilibre hydrostatique entre le gradient de pression et la gravité.
2. Les termes en Wf ou WU/a dans les composantes horizontales de l'équation du mouvement sont petits devant tous les autres. Ces termes sont dus aux variations verticales de la géométrie en fonction de la distance au centre de la terre (approximation de couche mince).
3. Le rapport entre les termes dits de courbure (les termes en U^2/a dans les membres de gauche des composantes horizontales de l'équation du mouvement) et la force de Coriolis est de l'ordre de $U/(a\Omega) \sim 10^{-2}$. C'est aussi le rapport entre la vitesse relative des particules et la vitesse d'entraînement par la planète.
4. Les termes d'accélération horizontale sont de l'ordre de U^2/L . Le rapport entre ces termes d'accélération et la force de Coriolis est de l'ordre de

$$R_o = \frac{U}{L\Omega}. \quad (4.25)$$

R_o est connu sous le nom de **nombre de Rossby**.

5. Enfin, le terme en $2\Omega \cos \phi$ est très petit devant les autres.

4.6 L'équilibre géostrophique

Quand le nombre de Rossby est petit devant 1, c'est le cas pour les écoulements atmosphériques de grande échelle, les termes de gradients horizontaux de pression sont en quasi-équilibre avec la force de Coriolis

$$fv \sim \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (4.26)$$

et

$$fu \sim -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.27)$$

Cet équilibre a un nom : c'est l'**équilibre géostrophique**. R_o est une mesure de la validité de l'équilibre géostrophique. Cet équilibre permet de diagnostiquer les vents à partir de la connaissance du champ de pression. Si on connaît le vent près de la surface, cet équilibre permet de reconstituer complètement le champ de vent, la dérivée verticale du vent étant directement reliée aux gradients horizontaux de température (comme dans le cas du vent thermique présenté précédemment). Dans l'atmosphère terrestre, on a $R_o \sim 0.1 - 0.2$ ce qui veut dire qu'on peut reconstruire le champ de vent à partir du vent thermique avec une précision de l'ordre de 10-20%.

L'équilibre géostrophique est un équilibre entre la force de Coriolis calculée à partir de la vitesse horizontale \vec{U}_H et le gradient horizontal de pression. On peut le résumer sous une forme vectorielle :

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_H + \frac{\vec{\nabla}_H p}{\rho} = \vec{0}. \quad (4.28)$$

Si l'équilibre géostrophique est exactement satisfait, le champ de vent est perpendiculaire au vecteur gradient de pression, c'est à dire que les courbes iso-pression sont partout alignées avec le champ de vent.

L'équilibre géostrophique en coordonnées de pression

Regardons la variations de la pression quand on se déplace horizontalement d'une distance dx (x est ici une direction quelconque du plan horizontal) et verticalement d'une distance dz . La variation correspondante de la pression est donnée par

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \quad (4.29)$$

Si on considère maintenant z comme une fonction de p et de x , la dérivée partielle de z par rapport à x est le rapport de dz et dx calculé le long d'une direction $p = cste$ c'est à dire pour $dp = 0$. A partir de l'équation précédente, on trouve donc

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_p = -\frac{\partial p / \partial x}{\partial p / \partial z}. \quad (4.30)$$

Si on est dans le cadre de l'approximation hydrostatique $\partial p / \partial z = -\rho g$ on trouve

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \frac{1}{\rho g} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (4.31)$$

ou encore, en introduisant le géopotential ϕ ,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_p = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (4.32)$$

L'équilibre géostrophique peut donc se reformuler en terme d'équilibre entre les gradients de géopotential et la force de Coriolis

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_H + \vec{\nabla}_p \phi = \vec{0}. \quad (4.33)$$

remarque : pour retrouver le vent géostrophique il est bon de connaître l'expression de la composante de $\vec{\Omega}$ suivant la verticale locale ($\Omega \sin \phi$) d'où on tire $\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_H = \Omega \sin \phi \vec{k} \wedge \vec{U}_H$.

Chapitre 5

Une approche simple de la couche limite

Dans tout ce qui précédait, on a supposé que les écoulements atmosphériques de grande échelle étaient non visqueux. Si on compare la viscosité moléculaire et l'advection de grande échelle, cette approximation est toujours valide. En revanche, notamment près de la surface, la turbulence de petite échelle (des structures de l'ordre de 10-100 m) interagit avec les écoulements de grandes échelles. Si on peut séparer intellectuellement ces deux échelles, on peut considérer que la turbulence va agir comme une viscosité sur les écoulements de grande échelle. On parle alors de **viscosité turbulente**.

On va essayer ici de donner quelques notions de base sur l'interaction entre la turbulence de petite échelle et les écoulements de plus grande échelle.

On rappelle que les équations du mouvement horizontal dans le cadre de l'**approximation hydrostatique**, de l'**approximation de couche mince** et pour un fluide non visqueux s'écrivent :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.1)$$

avec une équation équivalente pour v , où, pour simplifier l'écriture (ça ne change rien au raisonnement qui suit) on s'est placé dans un repère cartésien en négligeant les termes de courbures (quadratiques en u et v).

L'équation de continuité

On doit introduire ici, en plus de l'équation du mouvement, l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (5.2)$$

qui dit simplement que l'accroissement de la masse dans une maille est le bilan de ce qui est entré ou sorti par les bords. Ce bilan de masse est illustré sur la Fig. 5.1.

L'équation d'évolution de u peut se réécrire sous une forme **flux** :

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v u)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w u)}{\partial z} = f \rho v - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (5.3)$$

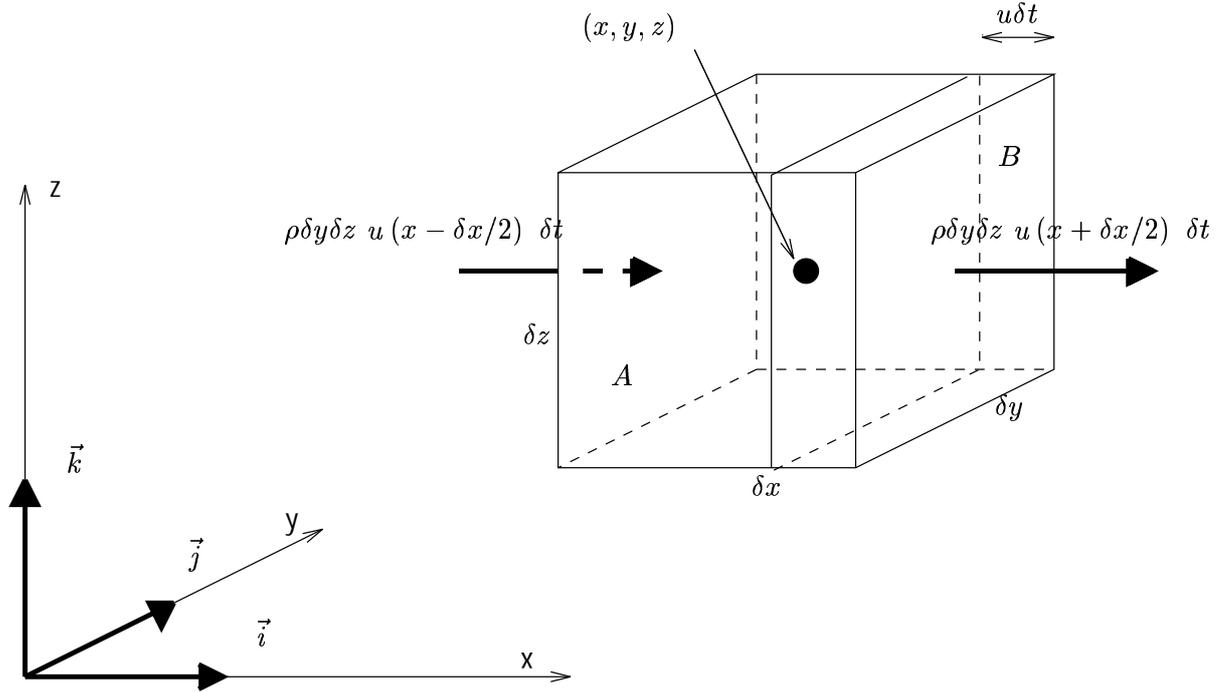


FIG. 5.1 – Quantité de masse entrant et sortant d'un petit élément de volume $(\delta x, \delta y, \delta z)$ suivant la direction x pendant un intervalle de temps δt .

obtenue en additionnant l'Equation 5.1 multipliée par ρ et l'équation 5.2 multipliée par u . Cette équation est analogue à l'équation de bilan de masse décrite plus haut : elle traduit le bilan de quantité de mouvement dans un petit élément de volume.

On va décomposer maintenant les champs en une valeur moyenne sur un certain intervalle de temps (ce temps doit être plus petit que le temps caractéristique d'advection des structures de grande échelle $L/U \sim 10^5 s \sim 1 \text{ jour}$) qu'on notera \bar{q} et les fluctuations rapides liées à la turbulence de petite échelle q' .

On suppose de plus, ce qui est vérifié pour l'atmosphère et exact pour un fluide incompressible, que les fluctuations de la densité sont très petites devant les fluctuations des composantes du vent. On va s'intéresser à la moyenne temporelle de l'équation 5.3. Elle fait d'abord apparaître la dérivée temporelle de la quantité de mouvement moyenne $\rho \bar{u}$. Viennent ensuite des termes quadratiques du type $\rho \bar{v} \bar{u}$. On peut par exemple développer le terme $\bar{v} \bar{u}$:

$$\bar{v} \bar{u} = \overline{\bar{v} \bar{u}} + \overline{\bar{v} u'} + \overline{v' \bar{u}} + \overline{v' u'} \quad (5.4)$$

$$= \bar{v} \bar{u} + \overline{\bar{v} u'} + \overline{v' \bar{u}} + \overline{v' u'} \quad (5.5)$$

$$= \bar{v} \bar{u} + \overline{v' u'} \quad (5.6)$$

puisque la moyenne des fluctuations est nulle.

Finalement l'équation du mouvement peut se réécrire :

$$\frac{\partial (\rho \bar{u})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho \bar{u} \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial (\rho \bar{v} \bar{u})}{\partial y} + \frac{\partial (\rho \bar{w} \bar{u})}{\partial z} =$$

$$f\rho v - \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho u' u'})}{\partial x} - \frac{\partial(\overline{\rho v' u'})}{\partial y} - \frac{\partial(\overline{\rho w' u'})}{\partial z} \quad (5.7)$$

Tous les développements faits précédemment dans le cours s'appliquaient en fait aux composantes moyennes $\bar{u}, \bar{v} \dots$. En réintroduisant l'équation de continuité et en notant à nouveau $u, v \dots$ les champs moyens $\bar{u}, \bar{v} \dots$, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &- \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\overline{\rho u' u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v' u'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho w' u'})}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

Le nouveau terme dans le membre de droite est à nouveau un bilan de quantité de mouvement mais cette fois il prend en compte uniquement les flux turbulent de quantité de mouvement.

On introduit la longueur de mélange vertical l ou libre parcours moyen vertical des particules d'air. On suppose de plus qu'une particule d'air qui descend a au départ la quantité de mouvement correspondant au champ u moyen à l'endroit d'où elle provient. Cette particule amène donc une perturbation du vent au niveau z

$$u' = u(z+l) - u(z) \sim l \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.9)$$

Si on se trouve suffisamment près de la surface, par exemple, le vent moyen, freiné par le frottement sur la surface, croît avec l'altitude. On a donc $u' > 0$ pour une particule qui descend c'est à dire pour $w' < 0$. Pour une particule qui monte, la perturbation au niveau z vaut

$$u' = -u(z) + u(z-l) \sim -l \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.10)$$

Finalement, dans les deux cas, on a une corrélation négative entre u' et w' : $\overline{w' u'} < 0$.

Dans le cas où u croît vers le haut, on a $\overline{w' u'} < 0$ c'est à dire que la diffusion turbulente transporte de la quantité de mouvement vers le bas.

Finalement, le flux total de quantité de mouvement est du type

$$\overline{\rho w' u'} \sim -2\rho l \overline{|w'|} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (5.11)$$

En poussant un peu plus loin le raisonnement, et en supposant que l'atmosphère est neutre vis-à-vis de l'instabilité convective, on peut supposer que la turbulence qui se développe est isotrope. C'est à dire que les perturbations des composantes verticale et horizontale de la vitesse sont du même ordre de grandeur :

$$|w'| \sim |u'| \sim l \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| \sim l \left| \frac{\partial \vec{U}_H}{\partial z} \right| \quad (5.12)$$

De la même façon, on aura pour les corrélations $\overline{u'u'}$ un terme du type

$$\overline{\rho u'u'} = -\rho k \frac{\partial u}{\partial x} \quad (5.13)$$

Mais le gradient vertical du champ moyen u est de l'ordre de U/D , où D est la profondeur de la couche limite (hauteur au-dessus de la surface sur laquelle les champs sont sensiblement affectés par la diffusion verticale turbulente), puisque u est nul au niveau de la surface. En revanche, le gradient horizontal de u est de l'ordre de U/L . On voit donc que le terme de mélange vertical est de loin prépondérant devant les mélanges horizontaux.

Finalement, les équations du mouvement peuvent se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = f v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho k \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (5.14)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = -f u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(\rho k \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (5.15)$$

où le coefficient k , dans le cas où on suppose que l'atmosphère est neutre vis-à-vis de l'instabilité verticale, peut être mis sous la forme

$$k \sim l \left| \frac{\partial \vec{U}_H}{\partial z} \right| \quad (5.16)$$

On voit qu'on a réintroduit dans les équations du mouvement un terme de viscosité qui représente le frottement turbulent des vents sur la surface. En pratique, le coefficient k dépend fortement de l'état moyen de l'atmosphère : d'abord du cisaillement vertical du vent mais également de la stabilité verticale de l'atmosphère (si l'atmosphère est plus stable, les échanges verticaux seront moins efficaces).

On peut définir le nombre d'Eckman turbulent Ek comme le rapport entre le terme de viscosité turbulente et le terme la force de Coriolis. L'ordre de grandeur de la dérivée seconde de u dans la couche limite est U/h^2 où h est la hauteur de la couche limite. On a donc

$$Ek = \frac{k}{fh^2} \quad (5.17)$$

Si on considère que la couche limite s'arrête vers $Ek \sim 0.1$, on trouve, pour une valeur moyenne de $k \sim 5 \text{ m}^2\text{s}^{-1}$, $h \sim \sqrt{5 \times 10^5} \sim 6 \times 10^2 \text{ m}$. En fait la hauteur de la couche limite varie entre quelques dizaines de mètres quand l'atmosphère est très stratifiée et quelques kilomètres en présence de convection.

En fait, le même type de mélange turbulent se produit dans les basses couches de l'atmosphère et sous la surface de l'eau dans la couche mélangée océanique. La connaissance de la diffusion verticale dans ces deux couches limites est essentielle pour comprendre comment le moment cinétique est transféré depuis l'atmosphère vers l'océan. C'est le principal moteur de la circulation océanique en surface.