

Météorologie Dynamique contrôle continu 2023-2024

WAPE: Circulation générale de l'atmosphère et météorologie synoptique
François Lott et Aymeric Spiga

Basé sur l'examen final 2023

Problème: Les ondes planétaires libres

La circulation dans la moyenne atmosphère est parfois modulée dans l'espace et dans le temps par des perturbations d'échelle planétaire affectant simultanément les 2 Hémisphères. Un exemple de ce type de perturbation est montré sur la Figure 1. L'objectif de ce problème est de montrer que ces perturbations sont des modes barotropes libres de la dynamique atmosphérique, c'est à dire qu'ils peuvent exister en l'absence de forçage externe.

Pour simplifier le problème, on considère des perturbations par rapport à une atmosphère isotherme et au repos:

$$\bar{u}_0 = 0, \quad \bar{T}_0 = T_s = 240K.$$

On rappelle que dans le cadre non-forcé et non dissipatif les équations de la dynamique utilisées dans le cours s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega \sin \phi v &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv \tan \phi}{a} + 2\Omega \sin \phi u &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \end{aligned}$$

l'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{RT}{H},$$

la loi de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\rho_0}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0,$$

et le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{\kappa T w}{H} = 0.$$

On rappelle quelques définitions,

$$z = H \ln(p_s/p), \quad \rho_0 = \rho_s e^{-z/H}, \quad H = \frac{RT_s}{g}$$

où p_s , ρ_s et T_s sont des valeurs constantes de référence. On rappelle aussi la valeur de quelques constantes:

$$R = 287 \text{JK}^{-1}\text{kg}^{-1}, \quad g = 9.81 \text{ms}^{-2}, \quad \kappa = 2/7, \quad a = 6400 \text{km}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}.$$

On note les champs perturbés u' , v' , w' , T' , et Φ' , et on considère qu'ils sont de petite amplitude.

En $z \rightarrow \infty$ on considèrera que la perturbation se propage vers le haut ou que la densité d'énergie mécanique associée à la perturbation tend vers 0.

Condition à la limite au sol

Une des difficultés de l'utilisation des coordonnées log-pression z est que les conditions à la limite au sol sont en général exprimées en fonction de la hauteur géométrique z^* plutôt qu'en z ; par exemple, quand le sol est plat et que la vitesse verticale y est nulle

$$w^* = \frac{Dz^*}{Dt} = 0, \text{ en } z^* = 0.$$

Cette vitesse verticale géométrique w^* ne doit pas être confondue avec la vitesse "log-pression": $w = \frac{Dz}{Dt}$.

1) Rappeler la définition de $\frac{D}{Dt}$ en coordonnées "log-pression".

2) En considérant qu'au repos la pression au sol vaut p_s , montrer qu'en présence d'une petite perturbation de pression p' la hauteur "log pression" du sol vaut

$$z(z^* = 0) \approx -H \frac{p(z^* = 0) - p_s}{p_s} = -H \frac{p'(z^* = 0)}{p_s}$$

3) En écrivant $w^*(z^*) \approx w^*(z) + (z^* - z)\partial_z w^*(z)$ déduire que la condition à la limite sur la vitesse verticale satisfait au premier ordre:

$$w^* = \frac{Dz^*}{Dt} = 0, \text{ en } z = 0.$$

4) Montrer que cela est équivalent à

$$\frac{D\Phi}{Dt} = 0, \text{ en } z = 0.$$

5) Montrer que cette condition à la limite se linéarise en

$$\frac{\partial \Phi'}{\partial t} + gw' = 0.$$

Structure Verticale

6) Linéariser l'équation de la thermodynamique et montrer qu'elle s'exprime sous la forme:

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t \partial z} + \frac{\kappa g}{H} w' = 0.$$

7) Reconnaître N^2 dans cette expression.

8) Linéariser les équation dynamiques et l'équation de conservation de la masse.

9) Justifier qu'il est légitime de chercher des solutions u' , v' et Φ' ayant la même structure verticale.

Ce résultat permet de chercher des solutions de la forme:

$$(u', v', \Phi')(\lambda, \phi, z, t) = e^{z/2H} U(z) (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi})(\lambda, \phi, t),$$

$$w'(\lambda, \phi, z, t) = e^{z/2H} W(z) \tilde{w}(\lambda, \phi, t).$$

10) Ecrire les deux équations dynamiques et l'équation de conservation de la masse selon \tilde{u} , \tilde{v} , \tilde{w} et $\tilde{\Phi}$.

11) En déduire que l'on peut choisir pour U :

$$U = \frac{dW}{dz} - \frac{W}{2H}.$$

Que devient l'équation de conservation de la masse?

12) Ecrire l'équation de la thermodynamique en utilisant $\tilde{\Phi}$ et \tilde{w} . Exprimer en fonction de W le rapport

$$\frac{\partial_t \tilde{\Phi}}{\tilde{w}}$$

13) Justifier que ce rapport est égal à une constante que l'on notera gh , où h est une constante dite de séparation.

14) Si l'on fait le choix de la question (11) pour U , en déduire l'équation donnant la structure verticale de W , l'exprimer en fonction de W , H et h uniquement (en tenant compte que $\kappa = 2/7$).

15) Exprimer les deux équations dynamiques et l'équation de conservation de la masse en fonction de \tilde{u} , \tilde{v} et $\tilde{\Phi}$ (et gh).

16) Reconnaissez vous ce système d'équations?

17) Montrer que la condition à la limite inférieure s'écrit

$$hW_z + \left(1 - \frac{h}{2H}\right)W = 0$$

18) Montrer que pour la valeur $h = \frac{7}{5}H$, il existe une solution pour W satisfaisant la condition à la limite inférieure.

Indication: Déterminer tout d'abord une solution de type $W = W_0 \exp(\epsilon \Lambda z)$ avec $\epsilon = \pm 1$ et Λ une constante à exprimer à l'aide du résultat de la question (14). Déterminer ensuite ϵ à l'aide de la condition à la limite en $z = 0$.

19) Justifier que ces ondes seront beaucoup plus détectables dans la mésosphère.

20) Cette solution permet-elle à la densité d'énergie de la perturbation de s'annuler lorsque $z \rightarrow \infty$?

Indication: Ne pas faire de calcul lourd. Utiliser que la densité d'énergie mécanique est donnée par:

$$E = \frac{\rho_0}{2} \left(u'^2 + v'^2 + \frac{(\partial_z \Phi')^2}{N^2} \right)$$

Structure horizontale

Pour un océan de profondeur H_0 , les mouvements barotropes sont décrits à l'aide des équations en couche mince:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega \sin \phi v = -\frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial H_0}{\partial \lambda},$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{uu \tan \phi}{a} + 2\Omega \sin \phi u = -\frac{g}{a} \frac{\partial H_0}{\partial \phi},$$

$$\frac{DH_0}{Dt} + \frac{H_0}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \phi}{\partial \phi} \right) = 0.$$

Pour une planète couverte d'un océan uniforme de profondeur au repos H_s , cet océan admet des mouvements oscillatoires de petite amplitude qui ont largement été étudié dans le cadre de la théorie des marées océaniques. Pour un nombre d'onde horizontal s donné, ces mouvements libres ont des fréquences ω bien déterminées: pour une profondeur H_s donnée, il y en a une infinité dénombrable, un certain nombre d'entre elles sont montrées sur les Figures 2 et 4. Chacune de ces fréquences correspond à une structure méridienne précise, quelques exemples sont donnés sur les Figures 3 et 5.

- 21) Linéariser les équations en couche mince autour d'un état de base au repos (on écrira entre autre, $H_0 = H_s + H'$).
- 22) En quoi la théorie des marées océanique peut-elle aider à trouver la structure des ondes libres se propageant dans l'atmosphère moyenne ?
- 23) Déterminer à l'aide de la Figure 1 le nombre d'onde s et la période de l'onde planétaire observée. En déduire sa fréquence normalisée $\frac{\omega}{2\Omega}$.
- 24) Localiser cette onde sur la Figure 2 ou sur la Figure 4, quelle type de correspondance vous attendez-vous à trouver entre h et H_s ? La trouvez-vous ?
- 25) La structure méridienne correspond-elle ?
- 26) De quel type d'onde s'agit-il ?
- 27) Tracer le champ des vitesses sur la Figure 1, justifier.

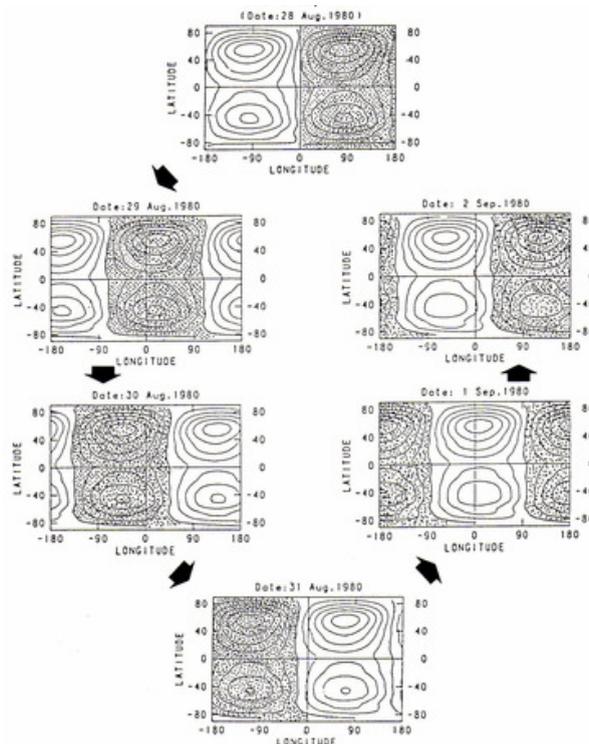


Figure 1

Anomalie de Géopotentiel à $z=50\text{km}$ et durant 6 jours en Août-Septembre 1980. Observations depuis le satellite TIROS-N (Hirota et Hirooka 1980). L'intervalle entre les iso- Φ est de $200\text{m}^2\text{s}^{-2}$

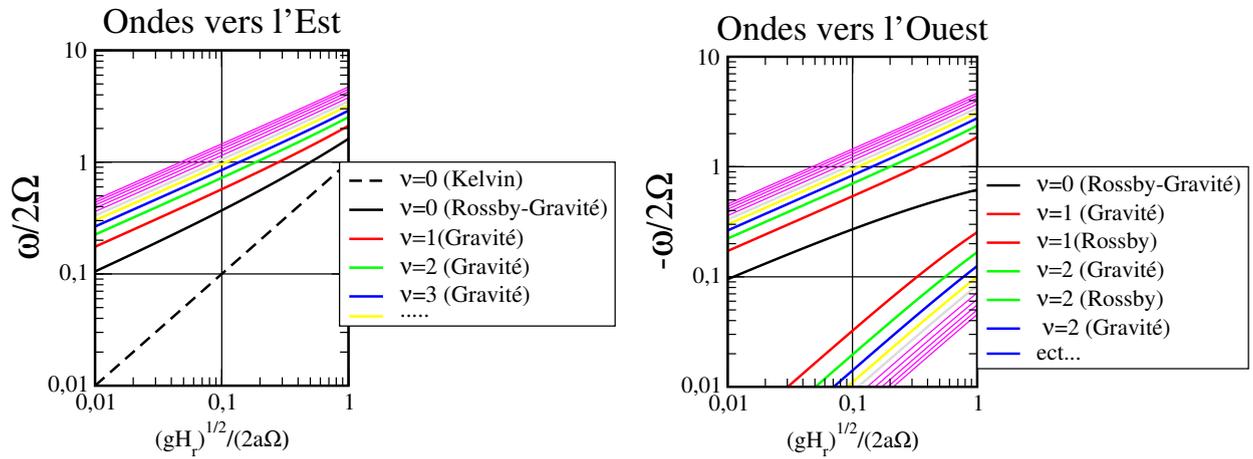


Figure 2: Diagramme de dispersion des modes propres des équations en couche mince pour le nombre d'onde zonal $s = 1$.

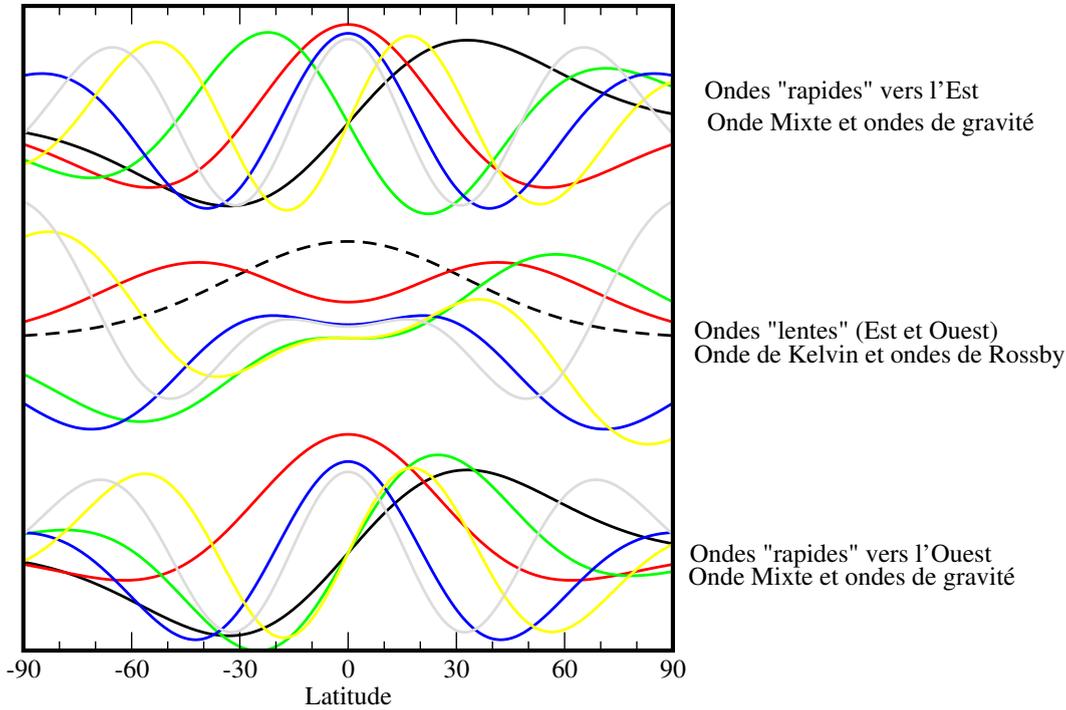


Figure 3: Structure méridienne de l'anomalie de hauteur H' associée aux modes propres des équations en couche mince pour $H_s = 9.8\text{km}$ et $s = 1$. Seuls les 18 modes les plus graves (au sens des variations en latitudes) sont représentés. Il y a une certaine correspondance entre les couleurs des courbes sur les Figures 2 et 3.

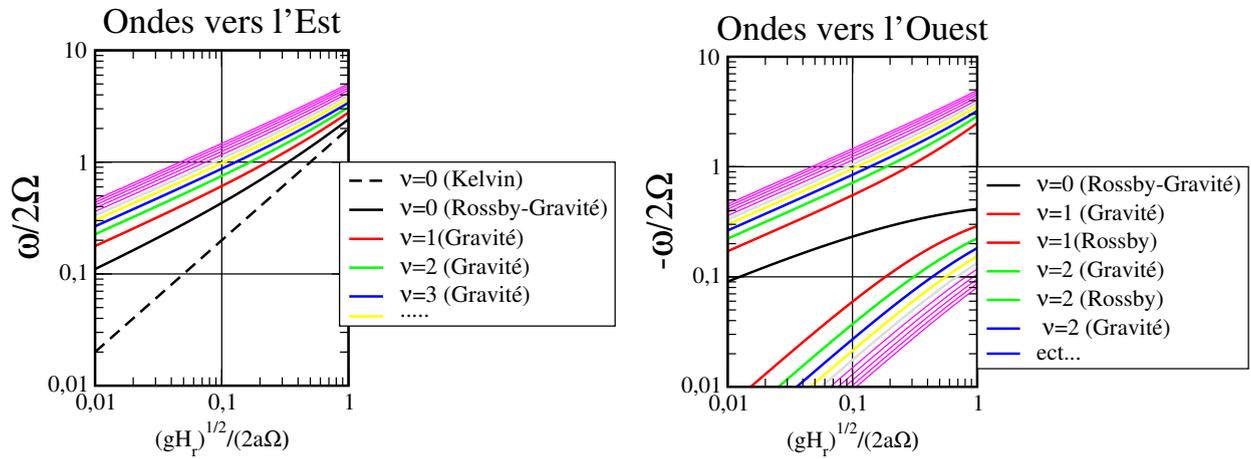


Figure 4: Diagramme de dispersion des modes propres des équations en couche mince pour le nombre d'onde zonal $s = 2$.

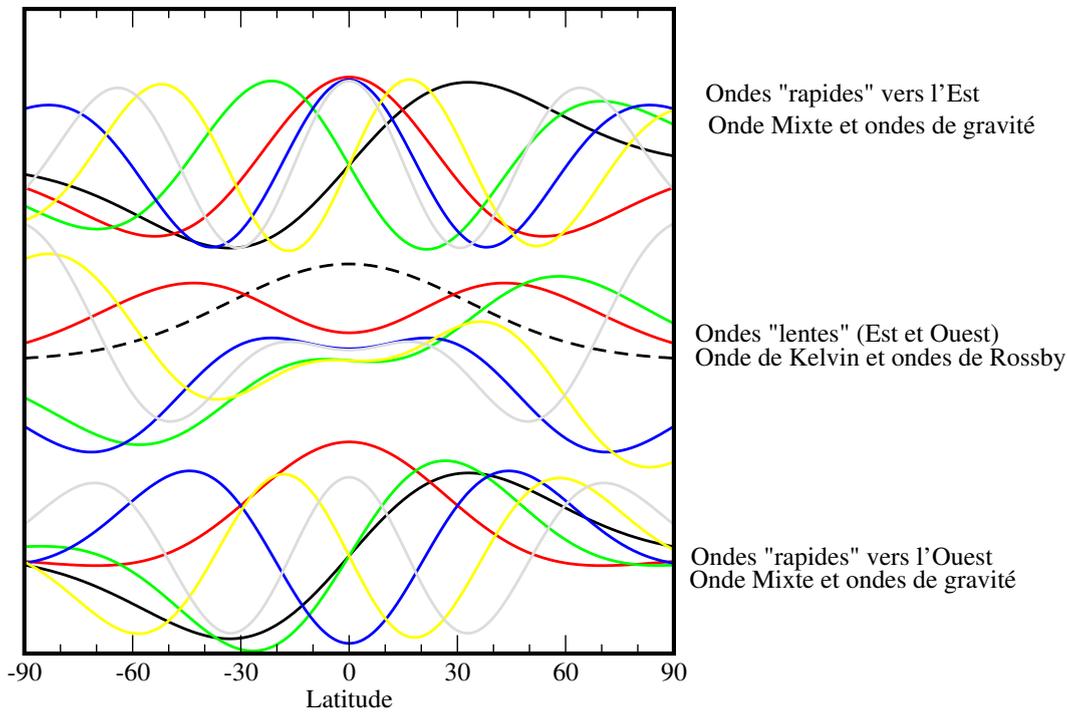


Figure 5: Structure méridienne de l'anomalie de hauteur H' associée aux modes propres des équations en couche mince pour $H_s = 9.8\text{km}$ et $s = 2$. Seuls les 18 modes les plus graves (au sens des variations en latitudes) sont représentés. Il y a une certaine correspondance entre les couleurs des courbes sur les Figures 4 et 5.

Questions de cours

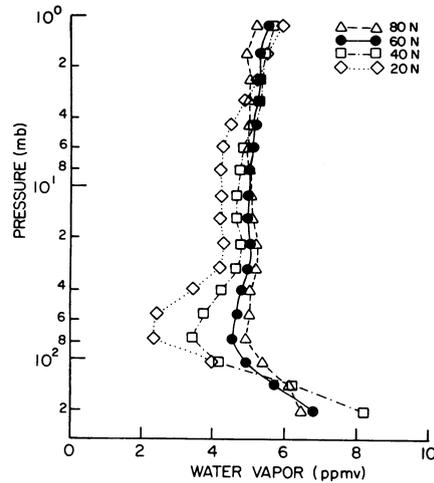


Fig. 1.5. Vertical profiles of water vapor mixing ratio at several latitudes measured by the LIMS instrument on the *Nimbus 7* satellite for May 1–26, 1979. [From Remsberg *et al.* (1984b). American Meteorological Society.]

Figure 6: Profils verticaux du rapport de mélange en vapeur d'eau mesuré par satellites à différentes latitudes.

- 28) Rappeler la définition du rapport de mélange
- 29) Pourquoi celui de l'eau à l'équateur présente-t'il un minimum relatif?
- 30) Pourquoi le rapport de mélange de la vapeur d'eau est il aussi uniforme et faible au dessus de 10hPa.

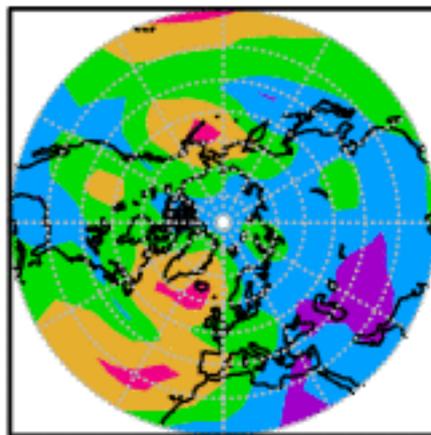


Figure 7:

Carte des extrêmes d'anti corrélation des anomalies basse fréquence du géopotential à 700hPa, (anomalies notées \tilde{Z}):

$$- \underbrace{\text{Min}}_{0 < \lambda' < 360, 20 < \phi' < 90} \left(\frac{\langle \tilde{Z}(\lambda', \phi', t) \tilde{Z}(\lambda, \phi, t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{Z}(\lambda', \phi', t)^2 \rangle \langle \tilde{Z}(\lambda, \phi, t)^2 \rangle}} \right)$$

les anomalies sont par rapport au cycle annuel, et les moyennes temporelles sur les mois d'hiver (DJF) pendant la période 1958 – 2010. Les zones en rouges sont pour des maxima.

- 31) Indiquez sur la figure 7 les régions qui sont en relation.

32) Quels sont les modes de variabilité associés.

33) Quels impacts ont ces modes sur la météorologie.

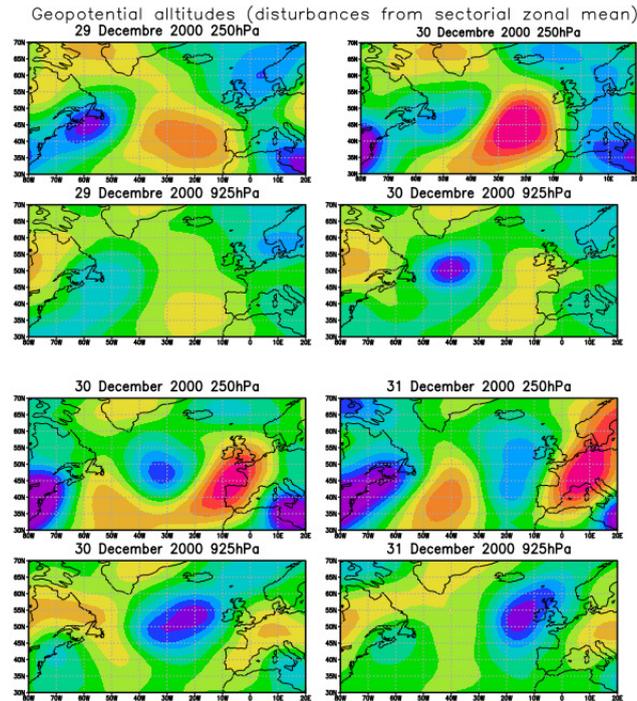


Figure 9: Cartes de géopotential à 925hPa, et à 250hPa et pour 4 jours consécutifs en Décembre 2020. Les zones de bas géopotential sont en couleurs froides, les intervalles entre les contours sont arbitraires.

34) De quel phénomène météorologique caractérise les cartes de la Figure 9?

35) Quel jour s'attend-on à avoir de fortes précipitations sur l'Angleterre et pourquoi?

36) Quelle altitude correspond à 250hPa?

37) Pourquoi compare-t'on le géopotential à cette altitude avec les cartes de géopotential au sol?