Ondes de gravité, approximation de Boussinesq non-hydrostatique : les croix de Saint-Andrew

Les ondes de gravité sont des ondes dont la force de rappel est la flottabilité. Elles sont produites lorsqu'il y a déplacement vertical de masses d'air (ou d'eau) dans des milieux de densité différents. Ce type de déplacement est provoqué notamment par les reliefs et la convection profonde.

1 Ondes de gravité et stabilité verticale de l'atmosphère

On considère qu'une parcelle d'air située en $z^* = z_0^*$ est soulevée jusqu'en $z^* = z_0^* + \delta z^*$ de manière adiabatique. On note ρ_p la masse volumique de la parcelle, ρ_e la masse volumique de l'environnement, θ_p la température potentielle de la parcelle d'air et θ_e la température potentielle de l'environnement.

1. Exprimer la somme des forces massiques s'exerçant selon la verticale sur la parcelle.
2. Déduire que l'équation d'évolution de la parcelle est

$$\frac{\partial^2 \delta z^*}{\partial t^2} = g\frac{\rho_e - \rho_p}{\rho_p} = g\frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_e}$$

3. Montrer ensuite que, avec N_* la fréquence de Brunt Väisälä

$$\frac{\partial^2 \delta z^*}{\partial t^2} = -N^{*2}\,\delta z^* \qquad \text{avec} \qquad N^{*2} = \frac{g}{\theta_e}\frac{\partial \theta_e}{\partial z^*}$$

4. Discuter du comportement de la parcelle en conditions a) instables b) stables
5. Conclure sur les conditions de formation des ondes de gravité et la signification de la fréquence de Brunt Väisälä?

2 Système d'équation de Boussinesq

Considérons un fluide bi-dimensionnel (x, z^*) pour lequel on peut effectuer l'approximation de Boussinesq pour laquelle la pression et la densité sont écrites sous la forme :

$$\begin{array}{rcccccc} p = & p_s(z^*) & + & p_0(z^*) & + & \tilde{p}(x,z^*,t) \\ \rho = & \rho_s & + & \rho_0(z^*) & + & \tilde{\rho}(x,z^*,t) \\ & \text{reference} & & \text{stratification} & & \text{mouvement} \end{array}$$

Un fluide de Boussinesq est un fluide pour lequel les variations de densité peuvent être négligées sauf lorsqu'elles apparaissent dans des termes associés à g, l'accélération de la gravité.

Montrer que les équations de Boussinesq dans le cas non tournant s'écrivent:

1. Mouvement horizontal

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

2. Mouvement vertical

$$\frac{D\mathrm{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z^*} - g\frac{\tilde{\rho}}{\rho_s}$$

3. Conservation de la masse

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z^*} = 0$$

4. Conservation de l'énergie

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} - \frac{\rho_s}{g}N^2\mathrm{w} = 0$$

$$\text{avec} \qquad N^2 = -\frac{g}{\rho_s}\frac{d\rho_0}{dz^*} = \frac{g}{\theta_s}\frac{d\theta_0}{dz^*}$$

3 Expérience des croix de Saint-Andrew

On propose d'étudier le champ d'ondes de gravité produites par un petit cylindre oscillant à une pulsation ω constante au centre d'une cuve d'eau salée et dont la salinité décroit avec la hauteur z^*. On suppose que le fluide est bi-dimensionnel, non tournant, et vérifie l'approximation de Boussinesq. On se place à présent dans le cadre où le forçage produit des ondes de petite amplitude : $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}'$ avec $\mathcal{F} \equiv u, \mathrm{w}, p, \rho$. On va chercher la solution sous la forme de superposition d'harmoniques chacune de la forme

$$\mathrm{w}'(w, x, z^*, t) = \mathrm{Re}\left\{\hat{w}e^{i(kx+mz^*-\omega t)}\right\} \tag{1}$$

où ω est la fréquence imposée.

1. Donner en fonction de u', w', p' le système d'équations linéaires que doit satisfaire la perturbation.
2. Donner en fonction de $\hat{u}$, $\hat{\mathrm{w}}$, $\hat{p}$ le système d'équations linéaires complexes que doit satisfaire la perturbation.
3. Donner la relation de dispersion liant ω à k et m. Pour quelles valeurs de ω le cylindre produit-il des ondes internes de gravité se propageant vers le haut?
4. Calculer la vitesse de groupe $\vec{c}_g$. En déduire que l'angle θ que font les rayons d'onde avec l'horizontale ne varie qu'en fonction de la fréquence ω.
5. En discutant l'angle fait par l'onde pour différentes valeurs de ω vérifiez que le résultat obtenu est bien conforme aux résultats de l'expérience montrés sur la Figure 1.
6. Calculer la vitesse de phase $\vec{c}$. En déduire que
$$\vec{c}_g \cdot \vec{c} = 0.$$
Ce résultat est-il comforme aux structures d'ondes visibles sur la Figure 1?

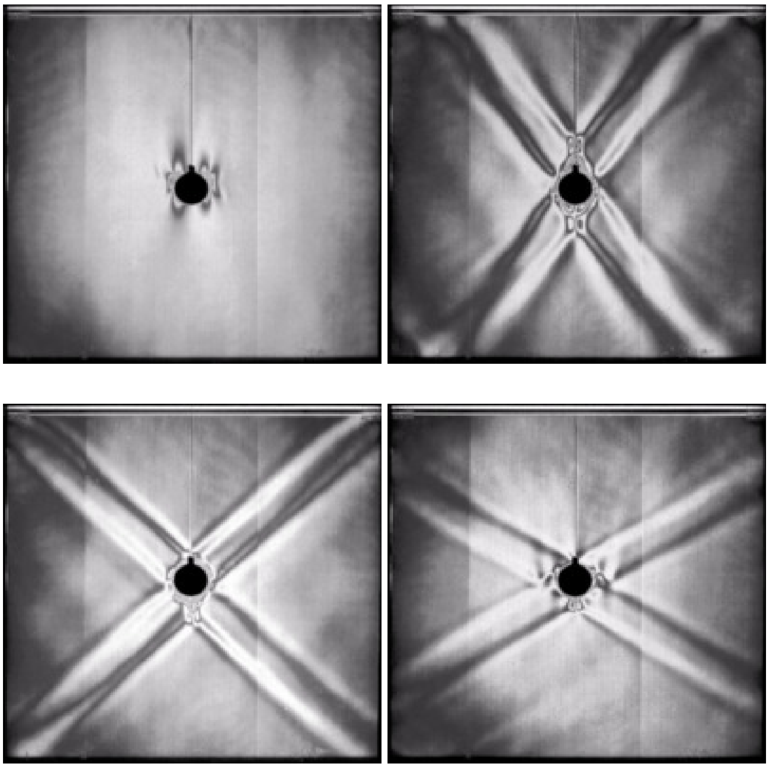

Figure 1: *Champs d'ondes produits par un cylindre oscillant au centre d'une cuve rectangulaire remplie d'un fluide stratifié en densité et dont la fréquence de Briünt-Väisälä est $N^{-1} = 4s$. a) Etat initial, b) $\omega^{-1} = 3.8s$, c) $\omega^{-1} = 5s$, et d) $\omega^{-1} = 8s$.*