Instabilité barocline

1 Approche graphique

L'instabilité barocline résulte d'une amplification entre une perturbation de pression à la surface et une perturbation de pression à la tropopause, dans une troposphère possédant un cisaillement vertical de vent zonal. Cette instabilité a lieu à l'échelle synoptique ($\neq$ 1000 km) dans la troposphère des moyennes latitudes. Ici la situation considérée est celle de l'hémisphère nord. La troposphère est supposée être caractérisée par une vorticité potentielle uniforme et respecter l'équilibre géostrophique (sur le plan f).

1. Considérer une perturbation de vorticité relative positive $\xi' > 0$ (zone cyclonique) à proximité de la surface à $z^* = 0$.
   - Justifier que cette perturbation est associée à une anomalie négative de pression $P' < 0$ et dessiner les lignes isobares dans le plan (Oxz^*).
   - Justifier ensuite que cette perturbation est associée à une anomalie chaude et dessiner les lignes isentropes dans le plan (Oxz^*).
   - Justifier alors que cette perturbation est associée à une anomalie négative de stabilité statique $N^2 < 0$.
2. Considérer une perturbation de vorticité relative positive $\xi' > 0$ (zone cyclonique) à proximité de la tropopause supposée être un couvercle rigide située à une altitude constante $z^* = D$. Reprendre les questions précédentes en justifiant que, cette fois, la perturbation est associée à une anomalie froide.
3. Considérer un environnement barocline où la température potentielle décroît de l'équateur vers le pôle (c'est-à-dire vers les $y > 0$) et où le vent zonal croît vers l'est en altitude – typiquement un cisaillement constant de vent zonal $U = \Lambda z^*$ ($\Lambda > 0$).
   - Dessiner dans le plan (Oxy) l'effet sur les isentropes d'une perturbation cyclonique $\xi' > 0$ proche surface.
   - Déterminer si l'anomalie de température potentielle associée se propage vers l'est ou vers l'ouest.
   - Justifier qu'une subsidence (ascendance) adiabatique se met en place à l'ouest (à l'est) de la perturbation.
   - Mêmes questions pour une perturbation cyclonique $\xi' > 0$ proche de la tropopause.
   - Expliquer une configuration où les perturbations de vorticité s'amplifient mutuellement.

2 Approche analytique (modèle de Eady, Toy Model 2)

Désormais les coordonnées verticales adoptées sont log-pression z et l'objectif est d'étudier l'instabilité barocline via la propagation de perturbations de géopotentiel dans la troposphère à l'échelle synoptique ($\approx$1000 km). Il s'agit du modèle de Eady pour l'instabilité barocline, comme présenté dans le cours (Toy model 2).

Les équations considérées sont les équations de Boussinesq sur le plan f aux moyennes latitudes, sous l'approximation quasi-géostrophique qui permet d'étudier des mouvements hydrostatiques et très proche de l'équilibre géostrophique.

$$D_g u_g - f_0 v + \partial_x \Phi_e = 0 \tag{1a}$$

$$D_g v_g + f_0 u + \partial_y \Phi_e = 0 \tag{1b}$$

$$D_g b_e + N^2 w = 0 \tag{1c}$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \tag{1d}$$

où le vent géostrophique (zonal u_g et méridien v_g) et la flottabilité b_e sont reliés au potentiel Φ_e par les relations géostrophique et hydrostatique:

$$u_g = -f_0^{-1}\partial_y \Phi_e,\ v_g = f_0^{-1}\partial_x \Phi_e,\ \text{and } b_e = \partial_z \Phi_e. \tag{2}$$

et où la dérivée matérielle suivant le vent géostrophique s'écrit:

$$D_g = \partial_t + u_g \partial_x + v_g \partial z \tag{3}$$

1. Au dessus du sol, c'est à dire en $z > 0$, dériver les équations suivantes pour l'évolution de la vorticité relative et pour la compression des isothermes:

$$D_g \left(\partial_x v_g - \partial_y u_g\right) + f_0 \left(\partial_x u + \partial_y v\right) = 0, \tag{4a}$$

$$D_g \partial_z \frac{b_e}{N^2} + \partial_z w = 0. \tag{4b}$$

2. En déduire une équation pour l'évolution de la vorticité potentielle (tourbillon potentiel quasi géostrophique):

$$q_g = f_0 + \partial_x v_g - \partial_y u_g + f_0 \partial_z \frac{b_e}{N^2} \tag{5}$$

3. Montrer qu'en $z = 0$, la condition à la limite peut s'exprimer:

$$D_g b_e = 0. \tag{6}$$

On se place désormais dans une troposphère dont l'état de base est caractérisé par un vent zonal $U = \Lambda z$ et une flottabilité notée B. Dans toute la suite du problème, la fréquence de Brunt-Väisälä du milieu au repos N^2 est supposée constante.

4. Montrer que l'état de base $U = \Lambda z$ est solution des équations quasi-géostrophiques pour une certaine expression de la flottabilité B à déterminer. Montrer également que le tourbillon potentiel q_g associé à cet état de base est constante.

On étudie à présent les perturbations pouvant se propager dans cet état de base en écrivant le potentiel sous la forme :

$$\Phi_e = \Phi_U + \Phi', \text{ où } \Phi_U = -f_0 \Lambda z y \tag{7}$$

5. Montrer que la perturbation Φ' satisfait, à l'ordre dominant, les équations :

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi'}{\partial y^2} + \frac{f_0^2}{N^2}\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial z^2} = 0 \text{ pour } z > 0, \tag{8a}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi'}{\partial t \partial z} - \Lambda \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0 \text{ pour } z = 0. \tag{8b}$$

On cherche à présent des solutions sous la forme d'ondes plane monochromatiques de structure uniforme dans la direction transverse y :

$$\Phi' = \mathrm{Re}\left\{\hat{\Phi}(z) e^{i(kx - \omega t)}\right\} \tag{9}$$

où $\hat{\Phi}(z)$ est une fonction complexe.

Etude d'une onde de Eady seule à la surface On s'intéresse tout d'abord à la propagation d'une perturbation à la surface sans prendre en compte la présence de la tropopause.

6. Montrer (en justifiant le signe dans l'exponentielle) que dans ce cas on a :

$$\hat{\Phi(z)} = \Phi_s e^{-k\frac{N}{f_0}z} \tag{10}$$

7. Déduire de la condition à la limite en surface que $\omega = \omega_S = \frac{\Lambda f_0}{N}$. En déduire l'expression de la vitesse de phase relative et absolue et discuter de son signe.

8. Montrer que pour un telle onde, les champs de pression et de tempéraure au sol sont de sign opposé. En vous repportant aux cartes données dans le cours, est-ce réaliste?

Onde de Eady uniquement à la tropopause On étudie en premier lieu les perturbations se développant à la tropopause (représentée comme un toit rigide en $z = D$) et sans tenir compte de la présence du sol.

9. Montrer (en justifiant le signe) que dans ce cas on a :

$$\hat{\Phi(z)} = \Phi_T e^{+k\frac{N}{f_0}(z-D)} \tag{11}$$

10. Montrer que la condition $w(z = D) = 0$ se traduit par:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Lambda D \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial \Phi'}{\partial z} - \Lambda \frac{\partial \Phi'}{\partial x} = 0. \tag{12}$$

11. En déduire que $\omega = \omega_T = k\Lambda D - \frac{\Lambda f_0}{N}$

Interactions entre les perturbations à la surface et à la tropopause On se propose à présent d'étudier le problème avec "sol" et "tropopause" et de faire interagir les perturbations en mettant en phase leurs structures horizontales à chaque instant. Ceci afin de mettre en évidence que les instabilités baroclines résultent de l'interaction entre des perturbations se développant à la tropopause et à la surface.

12. Déduire de cette hypothèse, $k = 2\frac{f_0}{ND},\ \omega = \frac{\Lambda f_0}{N}$. Ces valeurs sont elles compatibles avec les observations?

On fait interagir ces 2 ondes en permettant aux amplitudes Φ_S et Φ_T de varier au cours du temps, et en écrivant la solution sous la forme:

$$\Phi' = \mathrm{Re}\left\{\left(\Phi_S(t)e^{-2\frac{z}{D}} + \Phi_T(t)e^{+2(\frac{z}{D}-1)}\right)e^{i\left(\frac{2f_0}{ND}x - \frac{\Lambda f_0}{N}t\right)}\right\} \tag{13}$$

13. Sans perdre trop de temps dans les calculs, montrer que

$$\frac{d\Phi_T}{dt} = e^{-2}\left(\frac{d\Phi_S}{dt} + 2i\omega\Phi_S\right) \tag{14a}$$

$$\frac{d\Phi_S}{dt} = e^{-2}\left(\frac{d\Phi_T}{dt} - 2i\omega\Phi_T\right) \tag{14b}$$

14. En déduire que ce système admet un solution instable, $\Phi_S = Ae^{\sigma t}$, et déterminer σ. La valeur obtenue est-elle réaliste ?

15. Montrer que $\Phi_T \approx i\Phi_S$. Ce résultat est -il réaliste?

16. Comparer le phasage entre les champs de pression et de température à la surface pour cette solution. Est-ce plus réaliste que dans le cas d'une onde de Eady seule à la surface pour laquelle $\Phi_T = 0$ (voir question 8) ?