Météorologie Dynamique

WAPE: Circulation générale de l'atmosphère et météorologie synoptique

François Lott et Aymeric Spiga

Exercice du cours 6

Dynamique et propagation verticale des ondes de Rossby dans le "Toy model 3"

On rappelle les équations de l'approximation quasi-géostrophique des équations de Boussinesq dans le plan-béta aux moyennes latitudes:

$$D_g u_g - f_0 v - \beta y v_g + \partial_x \Phi_e = X \tag{1a}$$

$$D_g v_g + f_0 u + \beta y u_g + \partial_y \Phi_e = Y \tag{1b}$$

$$D_g b_e + N^2 w = Q \tag{1c}$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0 \tag{1d}$$

où le vent géostrophique, , u_g , v_g, et la flottabilité b_e sont reliés au potentiel Φ_e par les relations géostrophique et hydrostatique:

$$u_g = -f_0^{-1}\partial_y \Phi_e,\ v_g = f_0^{-1}\partial_x \Phi_e,\ \text{et } b_e = \partial_z \Phi_e. \tag{2}$$

et où la dérivée matérielle suivant le vent géostrophique s'écrit:

$$D_g = \partial_t + u_g \partial_x + v_g \partial z \tag{3}$$

1) Dérivez l'équation pour l'évolution du tourbillon potentiel quasi géostrophique:

$$q_g = f_0 + \beta y + \partial_x v_g - \partial_y u_g + f_0 \partial_z \frac{b_e}{N^2} \tag{4}$$

Réponse: $D_g q_g = Z$, avec $Z = \partial_x Y - \partial_y X + f_0 \partial_z \frac{Q}{N^2}$

2) Pour un coulement de base, $\overline{u}_0(y,z)$, donner l'expression du tourbillon potentiel de base $\overline{q}_0$.

3) Montrer que toute perturbation du tourbillon potentiel q_g' satisfait une quation du type:

$$\left(\partial_t + \overline{u}_0 \partial_x\right) q_g' + v_g' \overline{q}_{0y} = Z' \tag{5}$$

4) Former la loi de conservation de l'action $A = {q_g'}^2/(2\overline{q}_{0y})$, valable lorsque $\overline{q}_{0y} \neq 0$ (esquisser les calculs):

$$\left(\partial_t + \overline{u}_0 \partial_x\right) A + \partial_x \left(\frac{{v_g'}^2}{2} - \frac{{u_g'}^2}{2} - \frac{f_0}{N^2}\frac{b'^2}{2} \right) - \partial_y v_g' u_g' + \partial_z \frac{f_0}{N^2} v_g' b' = \frac{q_g' Z'}{\overline{q}_{0y}} \tag{6}$$

5) En déduire que

$$\partial_t \overline{A} + \text{div}\vec{\overline{F}} = \frac{\overline{q_g' Z'}}{\overline{q}_{0y}} \tag{7}$$

où le flux d'Eliasen Palm

$$\vec{\overline{F}} = \left(-\overline{v_g' u_g'}, \frac{f_0}{N^2}\overline{v_g' b'} \right)$$

6) En déduire le théorème de non-interaction d'Eliasen Palm (on utilisera sans les démontrer les équations en moyenne Eulérienne transfomée introduite dans le cours 6).

Dans toute la suite du problème, la fréquence de Brunt-Vaisala du milieux au repos N^2 est constante et l'écoulement de base $\overline{u}_0 = \text{cte}$. On cherche par ailleurs des solutions sous la forme d'ondes monochromatiques adiabatiques et non dissipées:

$$\Phi' = \hat{\Phi}_s e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \tag{8}$$

7) Montrer que montrer que $q'_g = \hat{q}_s e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ et $v'_g = \hat{v}_s e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}$ où

$$f_0 \hat{q}_s = -\left(k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N^2} m^2\right) \hat{\Phi}_s \text{ et } \; f_0 \hat{v}_s = ik\hat{\Phi}_s \tag{9}$$

8) En déduire la relation de dispersion,

$$\hat{\omega} = \omega - k\overline{u}_0 = -\frac{k\beta}{k^2 + l^2 + \frac{f_0^2}{N^2} m^2} \tag{10}$$

9) Le signe de la vitesse de phase intrinsèque horizontale $\hat{C}_x = \frac{k\hat{\omega}}{k^2+l^2+m^2}$ vous étonne t'il?

10) Montrer que la condition $km > 0$ est nécessaire pour que nos ondes se propagent vers le haut. Dcrire les conséquences sur l'inclinaison des lignes de phase dans le plan (x, z).

11) En exprimant m^2 en fonction de k, l, ω justifier que seule les ondes longues et lentes atteignent l'atmosphère moyenne, et qu'elles ne le font qu'en hiver.