Modèles simples de la Variabilité Climatique

François Lott

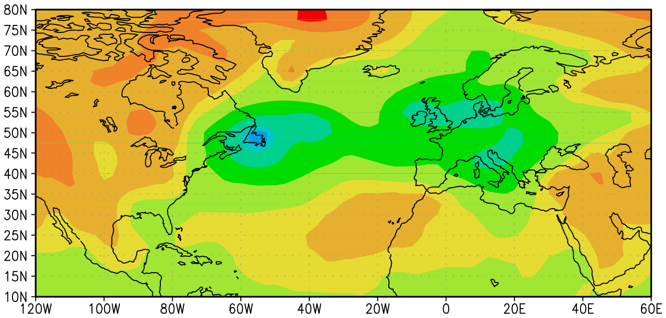
Cours 4:

Oscillations de basse fréquence dans la troposphère aux latitudes tempérées

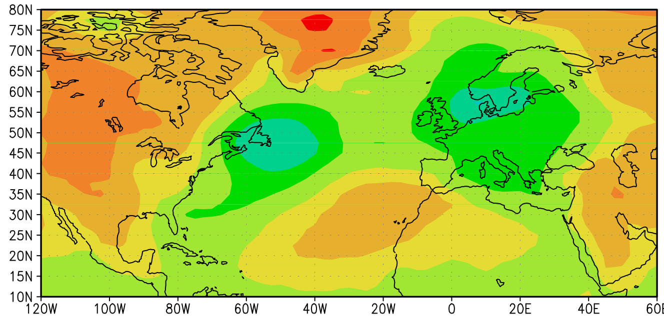
Trajectoire caractéristique d'une dépression sur l'Atlantique Nord

Pression au niveau de la mer

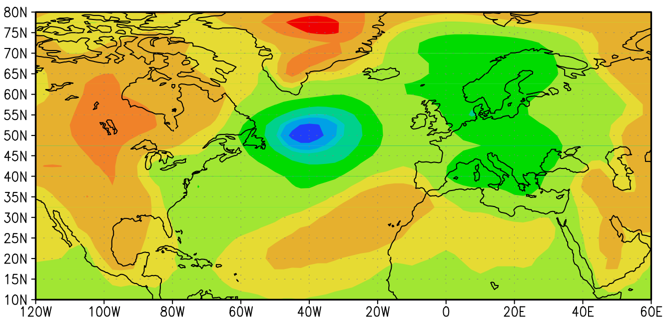
2000 28 Decembre



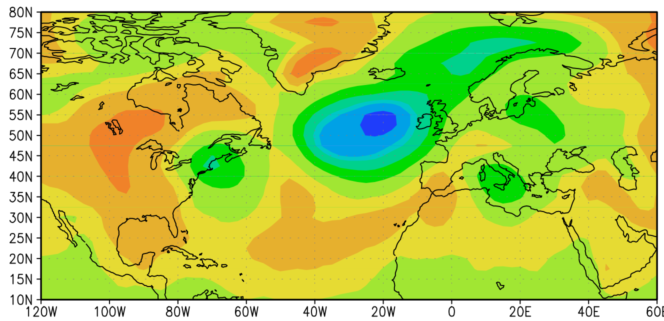
2000 29 Decembre



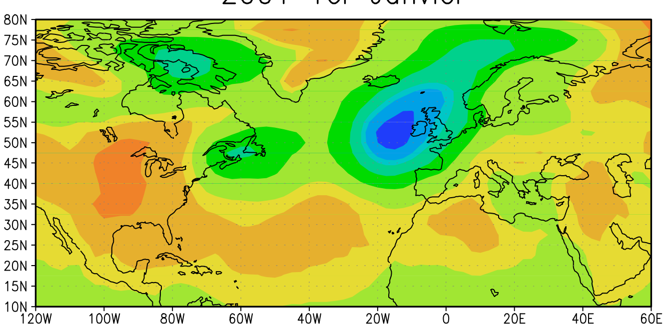
2000 30 Decembre



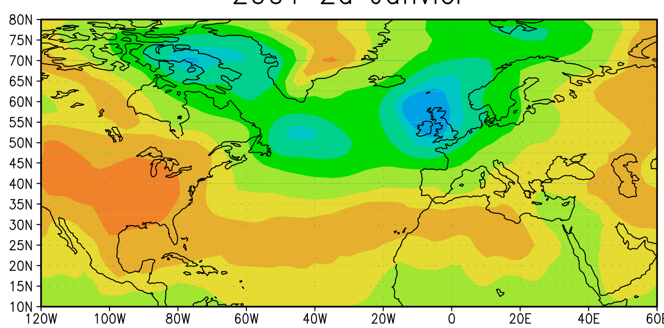
2000 31 Decembre



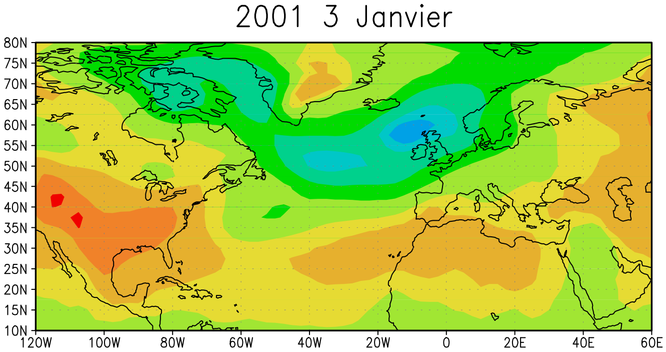
2001 1er Janvier



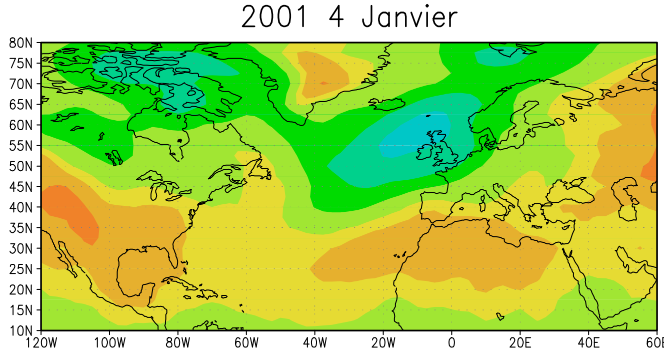
2001 2d Janvier



2001 3 Janvier

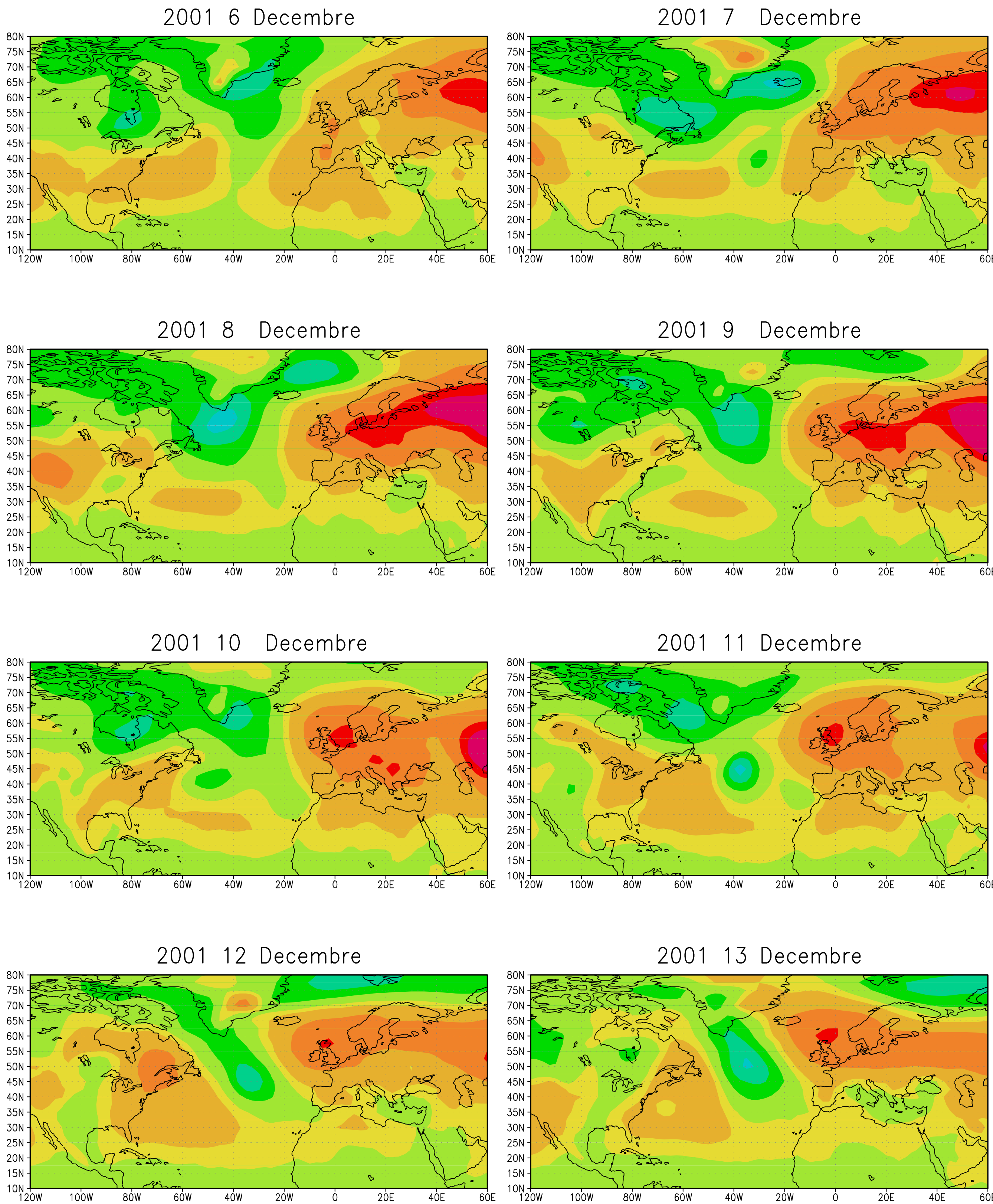


2001 4 Janvier



Exemple de la modification de la Trajectoire des dépressions sur l'Atlantique Nord

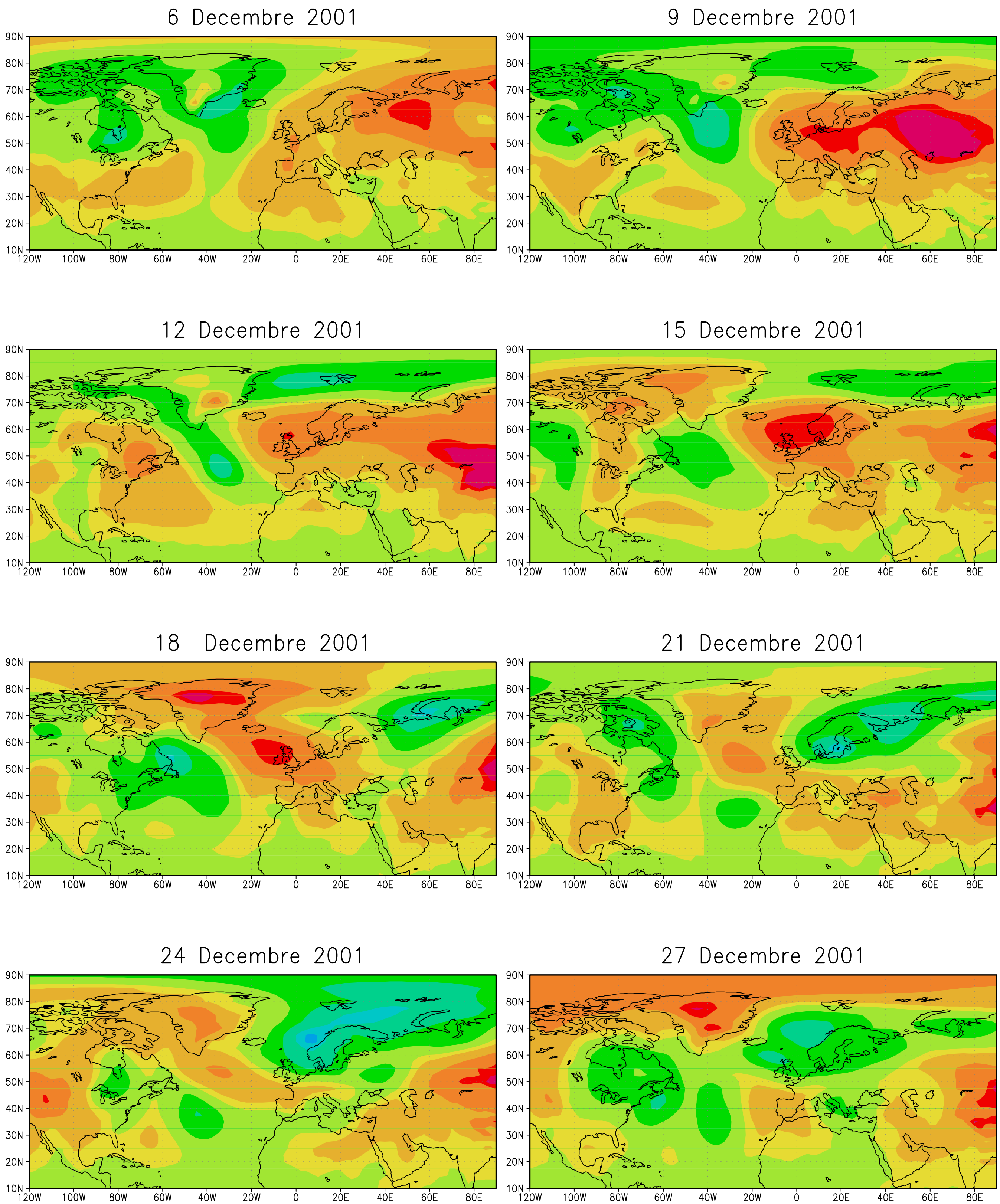
Pression au niveau de la mer



Exemple de la modification de la Trajectoire des dépressions sur l'Atlantique Nord

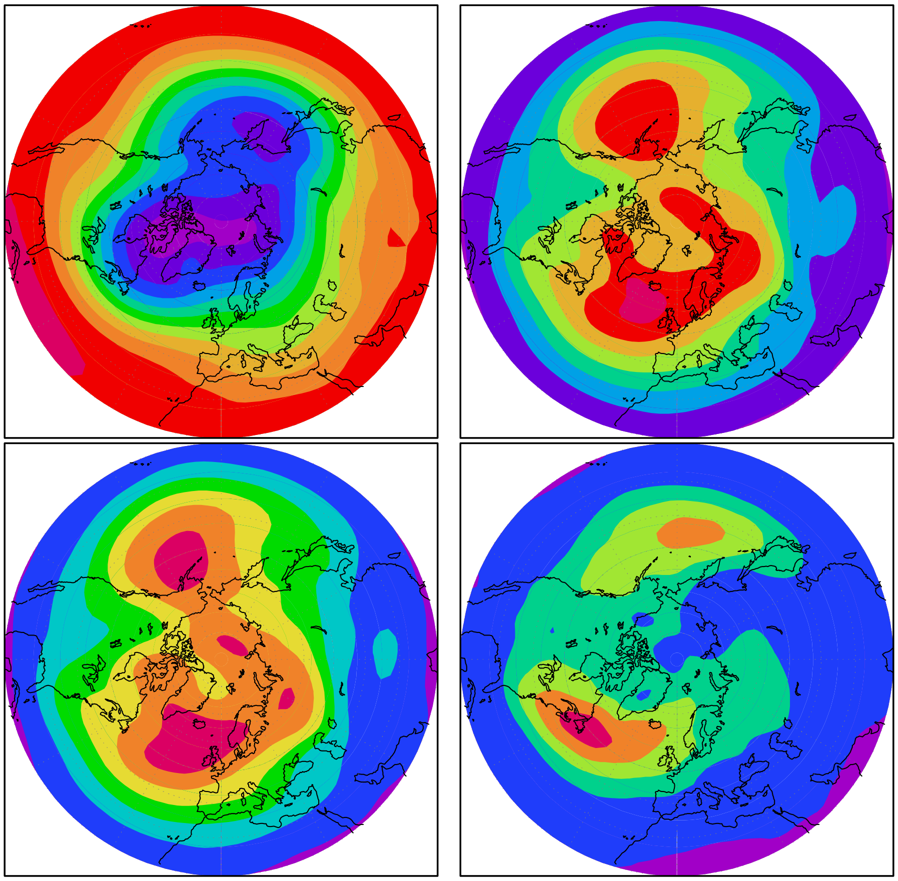
Pression au niveau de la mer

Cartes tout les 3 jours



Statistiques de l'évolution du Géopotentiel à 700hPa

Mois d'hiver, 1958-1997, données NCEP



Moyenne

Déviation standard

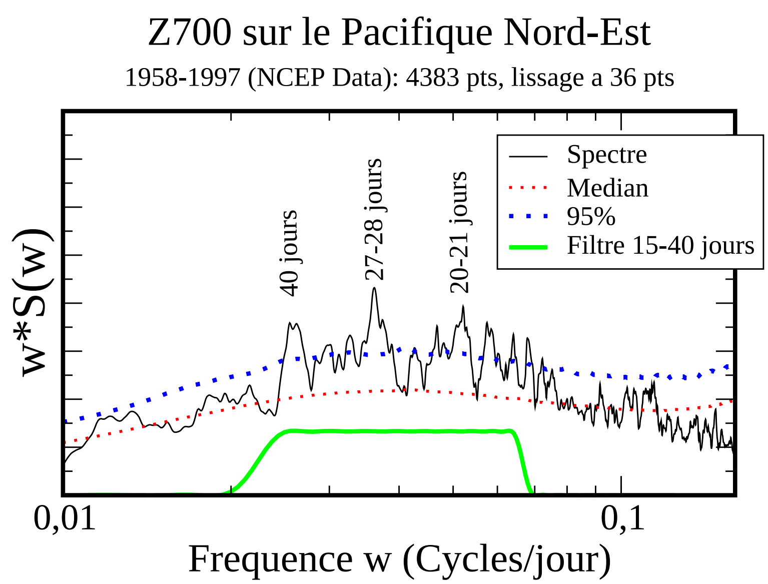
Déviation standard basse fréquence

Déviation standard haute fréquence

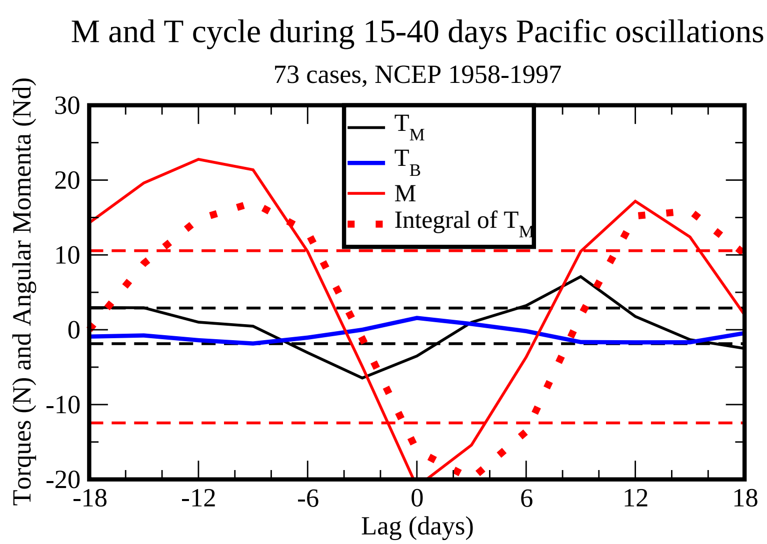
Analyse Spectrale des variations du Géopotentiel à 700hPa

Données NCEP sans cycle annuel, 1958-1997

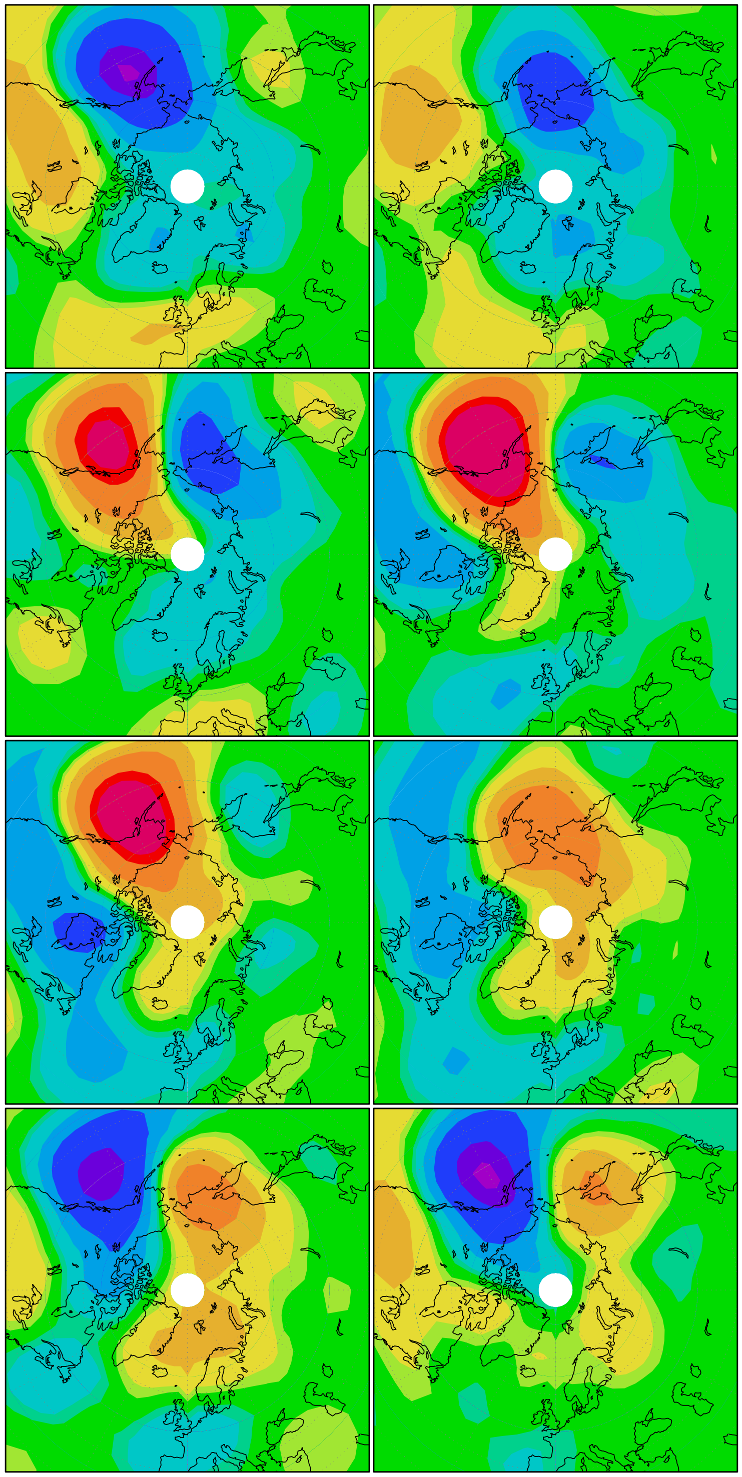
Evidence d'oscillations?



Cycle du moment Angulaire

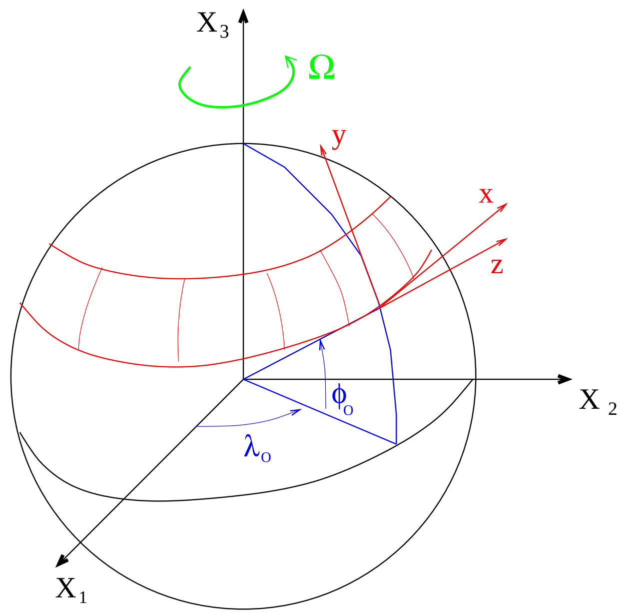


Composites du géopotentiel à 700hPa sur les oscillatons du Pacifique Nord-Est à 15-40 jours



-9 jours
-6 jours
-3 jours
0 jours
3 jours
6 jours
9 jours
12 jours

Approximation du plan β



Dérivée particulaire:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u_\lambda}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{u_\phi}{a}\frac{\partial}{\partial\phi} + w\frac{\partial}{\partial r}$$
$$\approx \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Avec: $x = a\cos\phi_0\,(\lambda - \lambda_0)$, $y = a\,(\phi - \phi_0)$, et $z = r - a$.

Terme de Coriolis:

$$2\Omega\sin\phi \approx 2\Omega\sin\phi_0 + 2\Omega\cos\phi_0\,(\phi - \phi_0)$$
$$\approx f_0 + \beta y$$

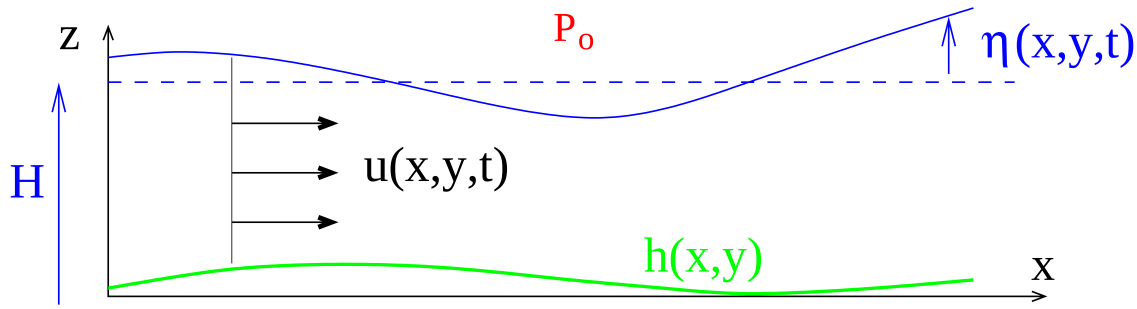
Continuité: $(\mathrm{div}\vec{u} = 0)$ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

Equations de la quantité de mouvement horizontale:

$$\frac{Du}{Dt} - (f_0 + \beta y)\,v = -\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial p}{\partial x} + F_u$$
$$\frac{Dv}{Dt} + (f_0 + \beta y)\,u = -\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial p}{\partial y} + F_v$$

Les termes de sphéricité $\tan\phi\frac{uv}{a}$ et $\tan\phi\frac{u^2}{a}$ sont aussi négligés.

Modèle de Saint Venant



Equilibre Hydrostatique: $p = P_0 + \rho_r g\,(\eta - z)$

Conditions aux limites cinématiques:

$$w = \frac{D\eta}{Dt} \text{ en } z = H + \eta \;\; ; \;\; w = \frac{Dh}{Dt} \text{ en } z = h$$

Dérivée particulaire:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}$$

Continuité:

$$\int_h^{H+\eta} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz = (H + \eta - h)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{D}{Dt}(H + \eta - h) = 0$$

Récapitulatif:

Continuité:

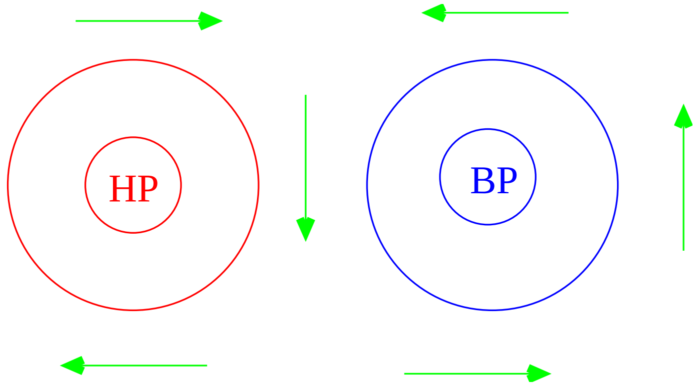
$$(H + \eta - h)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{D}{Dt}(H + \eta - h) = 0$$

Quantité de mouvement:

$$\frac{Du}{Dt} - (f_0 + \beta y)\,v = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + F_u$$

$$\frac{Dv}{Dt} + (f_0 + \beta y)\,u = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} + F_v$$

Approximation Quasi-Géostrophique:



Equilibre géostrophique:

$$f_0 u \approx -g\frac{\partial \eta}{\partial y} = f_0 u_g \quad ; \quad f_0 v \approx g\frac{\partial \eta}{\partial y} = f_0 v_g$$

la vitesse géostrophique (u_g, v_g) est non divergente

Equations quasi-géostrophique:

$$D_g u_g - f_0 v - \beta y v_g = -g\frac{\partial \eta}{\partial x} + F_u$$

$$D_g v_g + f_0 u + \beta y u_g = -g\frac{\partial \eta}{\partial y} + F_v$$

$$(H + \eta - h)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + D_g (H + \eta - h) = 0$$

Avec:

$$D_g = \frac{\partial}{\partial t} + u_g\frac{\partial}{\partial x} + v_g\frac{\partial}{\partial y}$$

Vorticité Potentielle:

$$D_g\frac{\Delta\psi + f}{H + h - \eta} = \frac{\partial_x F_v - \partial_y F_u}{H + h - \eta}$$

$\psi = \frac{g}{f_0}\eta$ est le fonction de courrant de la vitesse géostrophique;

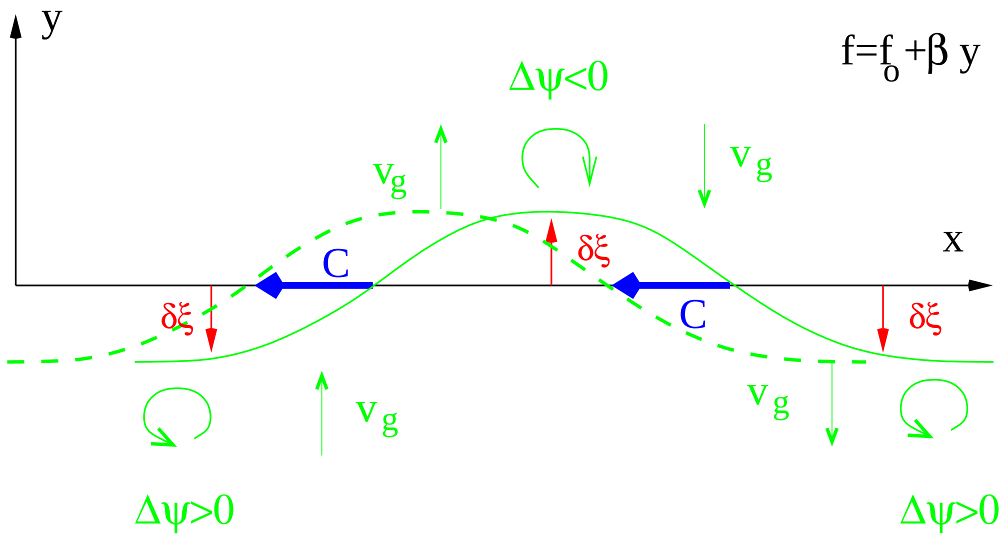
$f = f_0 + \beta y$

Vorticité Potentielle Quasi-Géostrophique:

Linéarisation pour η et h petits:

$$D_g \underbrace{\left(\Delta\psi + f - \frac{f_0^2}{gH}\psi + \frac{f_0}{H}h\right)}_{VPQG} = \partial_x F_v - \partial_y F_u$$

Ondes de Rossby:



Sans forçage ($h = F_u = F_v = 0$) dans un écoulement moyen au repos et pour de petites perturbations, la conservation de la VPQG devient:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\psi - \frac{f_0^2}{gH}\psi\right) + \frac{\partial\psi}{\partial x}\beta = 0$$

Ce qui donne, pour une onde monochromatique,

$$\psi(x, y, t) = \Re\left(\hat{\psi}e^{i(\omega t - kx)}\right) \;,$$

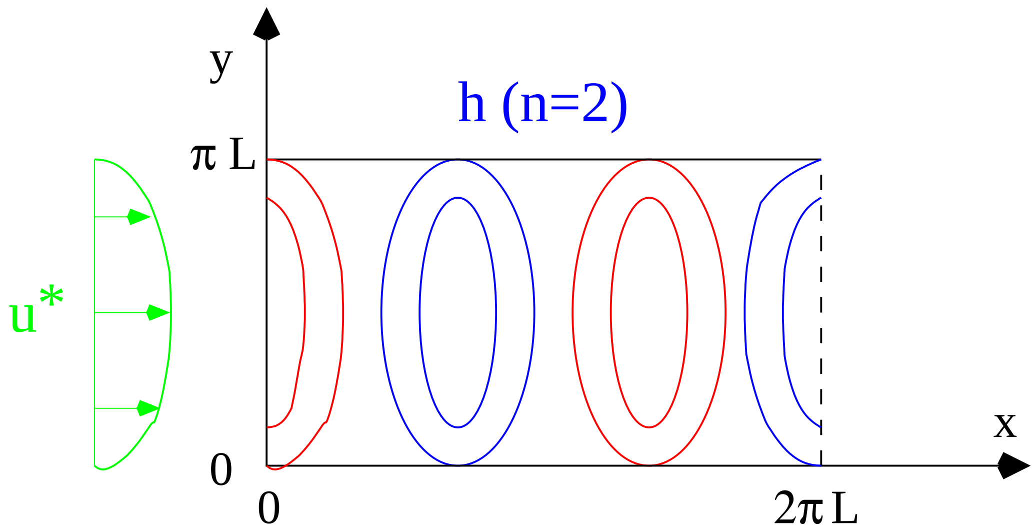
la relation de dispersion des ondes de Rossby:

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + \frac{f_0^2}{gH}}$$

Vitesse de phase vers l'Ouest:

$$C = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + \frac{f_0^2}{gH}}$$

Modèle de Charney et DeVore (1979)



Canal périodique de longueur $2\pi a \cos\phi_0 = 2\pi L$ et de largeur πL

Rappel de l'écoulement vers une "climatologie":

$$F_u = -\gamma\,(u_g - u^*)\ \ ;\ \ F_v = -\gamma v_g$$

Vorticité Potentielle quasi géostrophique:

$$D_g \underbrace{\left(\Delta\psi + f - \frac{f_0^2}{gH}\psi + \frac{f_0}{H}h\right)}_{VPQG} = -\gamma\Delta\,(\psi - \psi^*)$$

Conditions aux limites:

$$v_g = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \ \text{ en }\ y = 0, \pi L$$

Il s'agit d'un modèle forcé et dissipatif

Ecriture sous forme non-dimensionnelle:

$$\bar{t} = f_0 t \ , \quad \bar{x}, \bar{y} = \frac{x, y}{L} \ , \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{L^2 f_0} \ , \quad \bar{\beta} = \frac{\beta L}{f_0} \ , \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{f_0} \ , \quad \bar{h} = \frac{h}{H}$$

Vorticité Potentielle quasi géostrophique:

$$\overline{D}_g \left(\overline{\Delta \psi} + \bar{\beta} \bar{y} - \frac{\bar{\psi}}{\bar{\lambda}^2} + \bar{h} \right) = -\bar{\gamma} \bar{\Delta} \left(\bar{\psi} - \bar{\psi}^* \right)$$

Rayon de déformation de Rossby normalisé: $\bar{\lambda}^2 = \frac{gH}{f_0^2 L^2}$. On omet les $\overline{(\,)}$ par la suite.

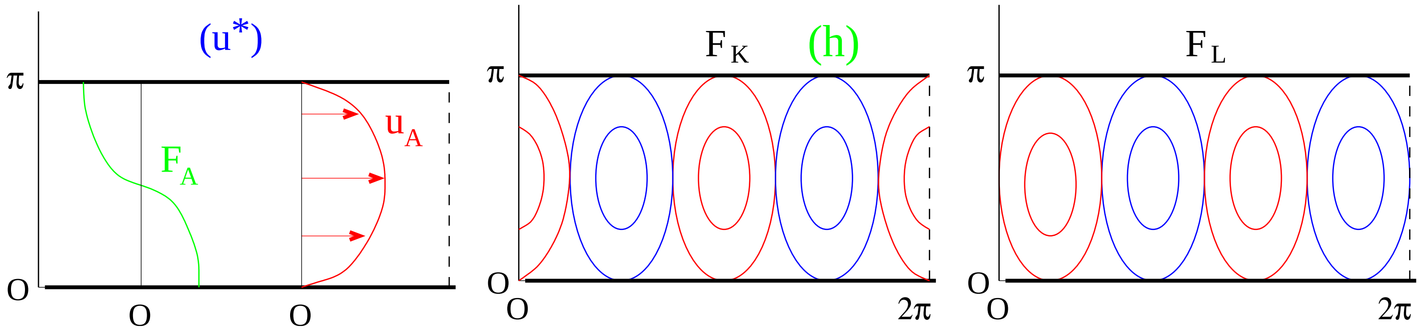
$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Delta \psi - \frac{\psi}{\lambda^2} \right) = -J \left(\psi, \Delta \psi - \frac{\psi}{\lambda^2} + h + \beta y \right) - \gamma \Delta \left(\psi - \psi^* \right)$$

Décomposition en série de six fonctions propres de l'opérateur Δ:

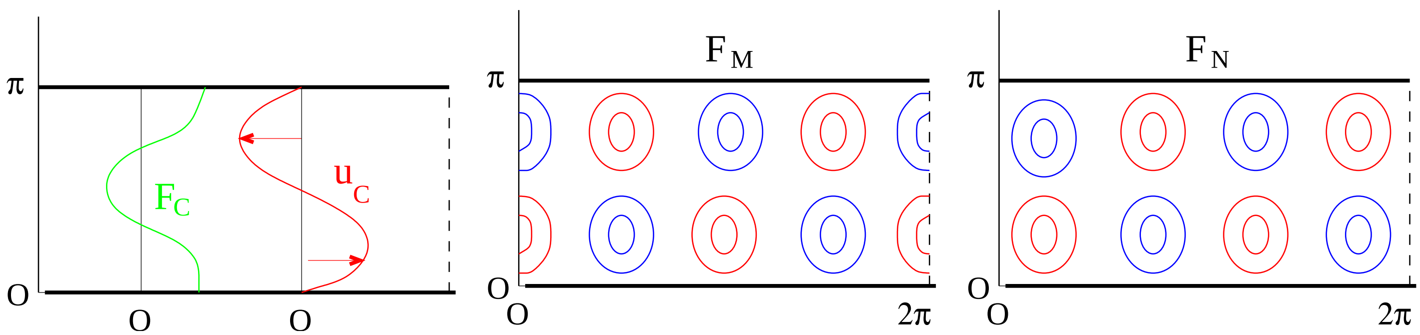
$$\Delta F_i = -a_i^2 F_i \ , \quad \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_i F_j dy dx = 2\pi^2 \delta_{i,j} \ , \quad \frac{\partial F_i}{\partial x} = 0 \ \text{ en } \ y = 0, \pi$$

$$\psi = \psi_A(t) F_A + \psi_K(t) F_K + \psi_L(t) F_L + \psi_C(t) F_C + \psi_M(t) F_M + \psi_N(t) F_N$$

$F_A = \sqrt{2} \cos y$ $\qquad$ $F_K = 2 \sin y \cos nx$ $\qquad$ $F_L = 2 \sin y \sin nx$



$F_C = \sqrt{2} \cos 2y$ $\qquad$ $F_M = 2 \sin 2y \cos nx$ $\qquad$ $F_N = 2 \sin 2y \sin nx$



Modèle de Charney et DeVore (1979) de l'instabilité topographique

Forçage:

Topography: $h = h_o F_K$. Climatology: $\psi^* = \psi^*_A F_A$.

On se limite dans un premier temps à 3 degrés de liberté

Evol.	Rappel	Rossby-Advection	Forçages Montagnes
$\dot{\psi}_A =$	$-k_{01}\left(\psi_A - \psi^*_A\right)$		$+h_{01}\psi_L$
$\dot{\psi}_K =$	$-k_{n1}\psi_K$	$+\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)\psi_L$	
$\dot{\psi}_L =$	$-k_{n1}\psi_L$	$-\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)\psi_K$	$-h_{n1}\psi_A$

Ondes de Rossby, libres:

$h_0 = 0$, et $k_{01} = k_{n1} = 0$

$$\begin{aligned}
\dot{\psi}_A &= 0 \\
\dot{\psi}_K &= \left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)\psi_L \\
\dot{\psi}_L &= -\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)\psi_K
\end{aligned}$$

Solution pour un vent sous-critique: $\omega = \beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A > 0$.

$$\psi_K = \psi_{K0}\cos\omega t \ , \quad \psi_L = -\psi_{K0}\sin\omega t$$

Propagation vers l'Ouest

Solution pour un vent sur-critique: $\omega = \alpha_{n1}\psi_A - \beta_{n1} > 0$.

$$\psi_K = \psi_{K0}\cos\omega t \ , \quad \psi_L = \psi_{K0}\sin\omega t$$

Propagation vers l'Est (l'advection l'emporte)

Remarque: le système peut répondre de façon raisonnante au forçage des montagnes lorsque $\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A \approx 0$

Solutions stationnaires

$$\dot{\psi}_A = \dot{\psi}_K = \dot{\psi}_L = 0$$

$$\psi_A = \psi_A^* + \frac{h_{01}\psi_L}{k_{01}}$$

$$\psi_L = -\frac{h_{n1}k_{n1}}{\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)^2 + k_{n1}^2}\psi_A$$

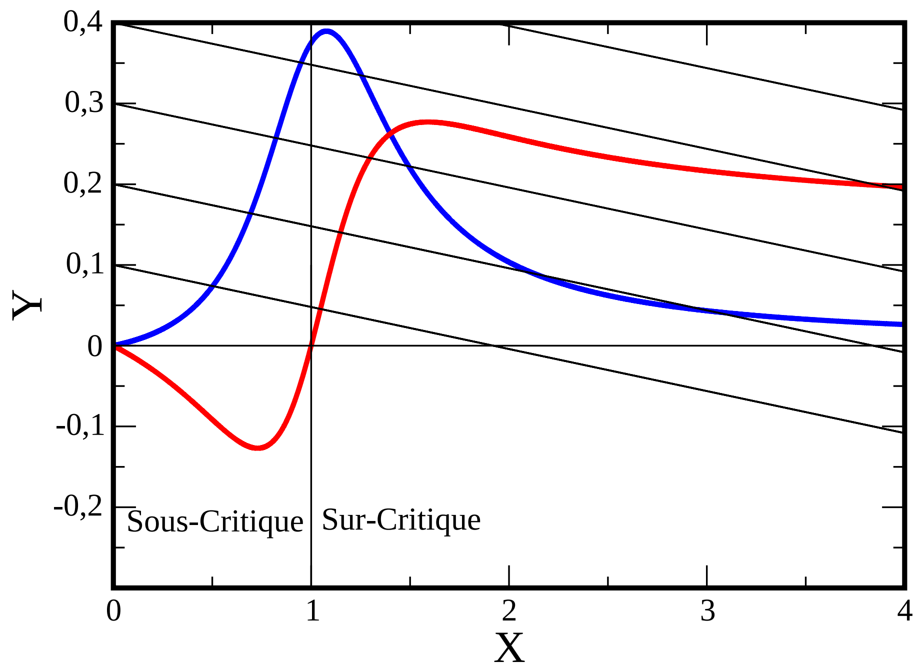
$$\psi_K = -\frac{h_{n1}\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)}{\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)^2 + k_{n1}^2}\psi_A$$

Résolution graphique:

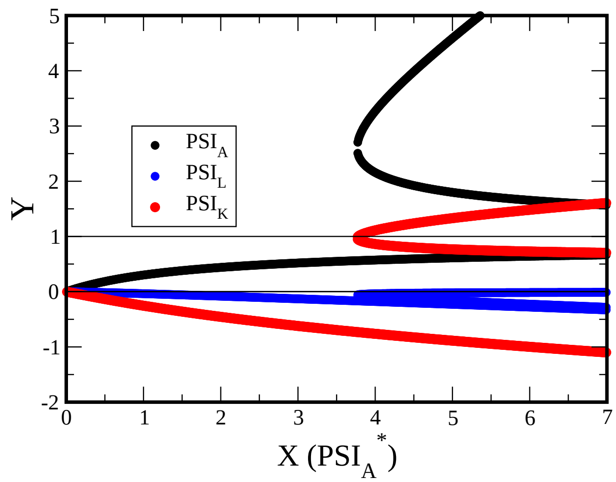
$$Y = -\frac{h_{01}\psi_L}{k_{01}} = \psi_A^* - \psi_A, \quad X = \frac{\alpha_{n1}\psi_A}{\beta_{n1}}$$

$$Y = -\frac{h_{01}\psi_L}{k_{01}} = \frac{h_{01}}{k_{01}}\ \frac{h_{n1}k_{n1}}{\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)^2 + k_{n1}^2}\psi_A$$

$$Y = \frac{h_{01}\psi_K}{k_{01}}$$

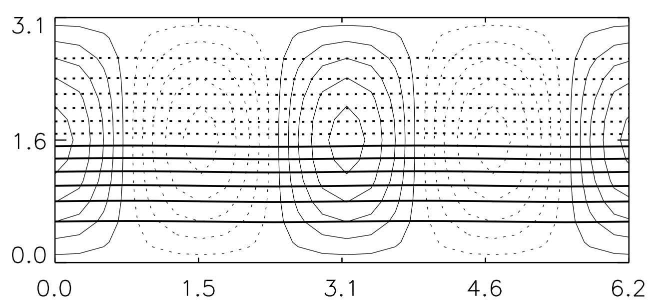


Solutions stationnaires

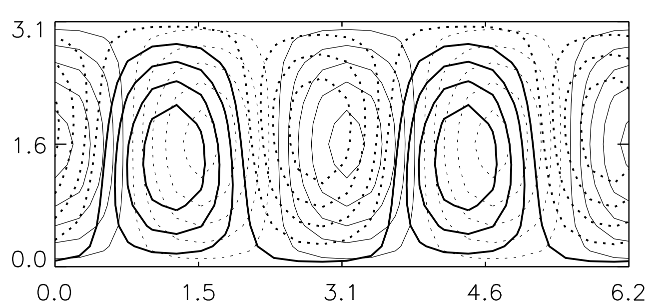


Fonctions de courrant pour $\psi_A^* = 0.45$

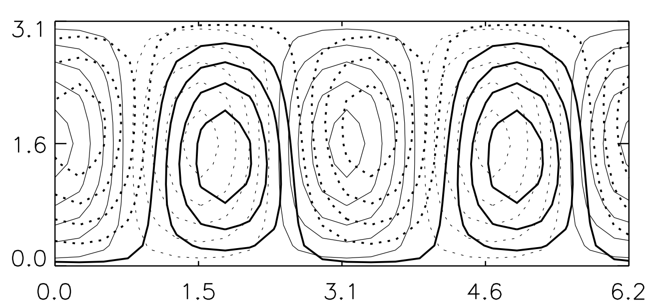
Zonal
Stable



Bloqué
Instable Fourche



Bloqué
Instable Hopf



Anomalies du Géopotentiel à 700hPa

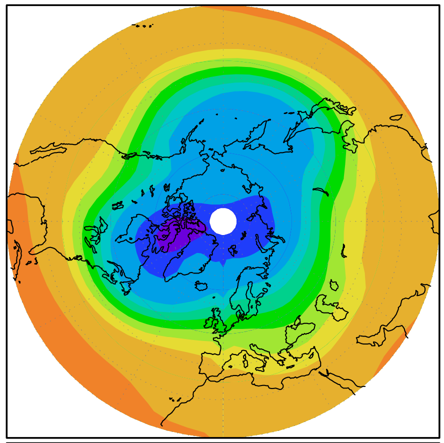
Données NCEP 1958-1997, durant les mois d'hiver

Moyenne et composites suivant la hauteur du Géopotentiel sur l'Atlantique Nord-Est

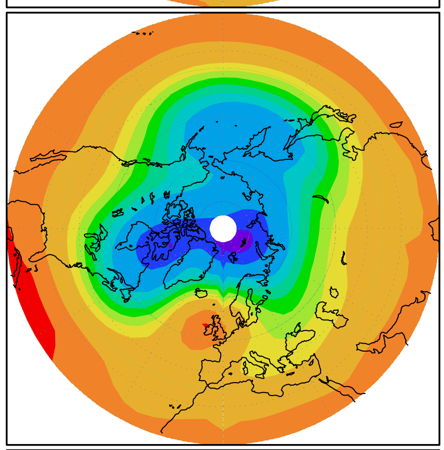
Localisation: 15^oW, 58^oN

(Voir Cours 2 pour plus de détails)

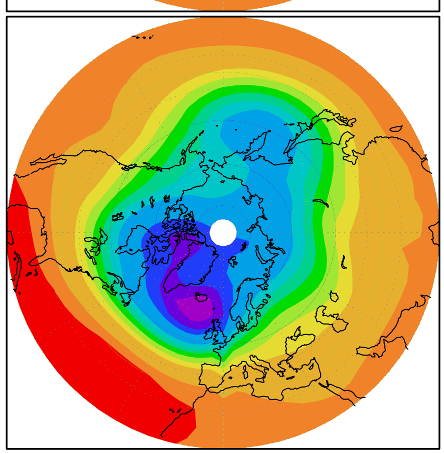
Moyenne d'hiver



Anomalie Positive
Situations de blocage



Anomalie négative
Situations zonales



Calcul de la stabilité des solutions stationnaires

ψ_A^S, ψ_L^S, ψ_K^S

on note les perturbations:

$\psi'_A = \psi_A - \psi_A^S$, $\psi'_L = \psi_L - \psi_L^S$, et $\psi'_K = \psi_K - \psi_K^S$

$$
\begin{array}{llllll}
\dot{\psi}'_A = & -k_{01}\psi'_A & & +h_{01}\psi'_L & \\
\dot{\psi}'_K = & -k_{n1}\psi'_K & +\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A^S\right)\psi'_L & -\alpha_{n1}\psi_L^S\psi'_A & \\
\dot{\psi}'_L = & -k_{n1}\psi'_L & -\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A^S\right)\psi'_K & +\alpha_{n1}\psi_K^S\psi'_A & -h_{n1}\psi'_A
\end{array}
$$

Notation synthétique: $\dot{\vec{\psi}} = L(\vec{\psi}^S)\vec{\psi}$

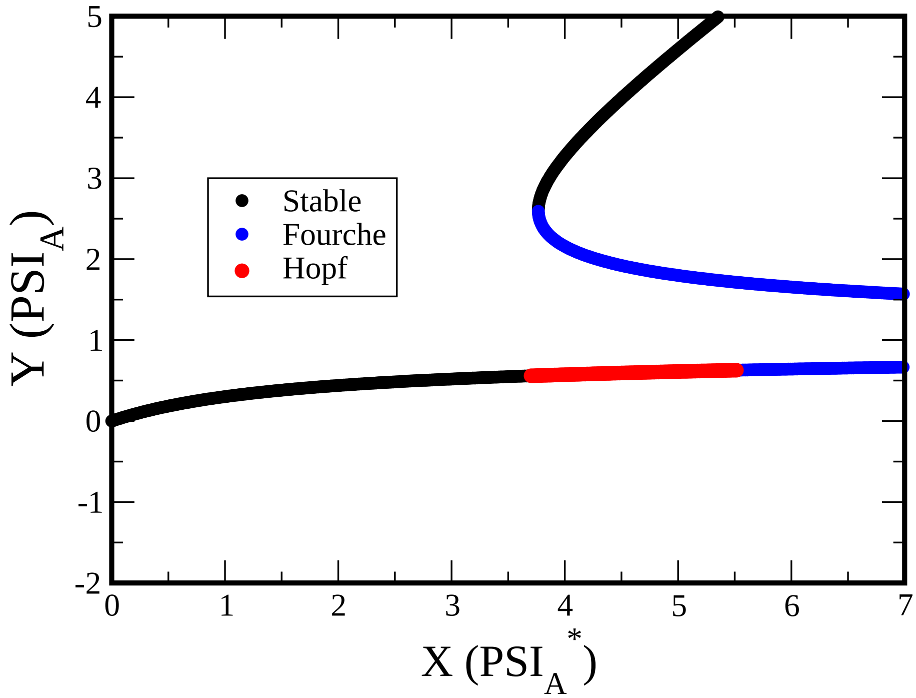
En fonction des valeurs propres λ_i de $L(\vec{\psi}^S)$ on distingue trois cas:

1. **Stable:** Pour tous les λ_i, $\Re(\lambda_i) < 0$
2. **Instable fourche** Pour certains λ_i, $\Re(\lambda_i) > 0$ mais $\Im(\lambda_i) = 0$
3. **Instable Hopf** Pour certains λ_i, $\Re(\lambda_i) > 0$ et $\Im(\lambda_i) \neq 0$

L’instabilité topographique

Dans le modèle de Charney et de Vore limité à 3 degrés de liberté seules 1 et 2 se produisent: la branche sous critique et la branche sur-critique pour laquelle $\vec{\psi}_A \approx \vec{\psi}_A^*$ sont stables. L’autre branche sur critique est instable (fourche).

Dans le modèle de Charney et de Vore à 6 degrés de liberté La branche sous-critique devient aussi instable (Hopf puis fourche) au dela de la première bifurcation:



Exemples d'évolution
Modèle complet:

Evol.	Rappel	Rossby-Advection	Forçages Montagnes	Ondes-ondes
$\dot{\psi}_A =$	$-k_{01}\left(\psi_A - \psi_A^*\right)$		$+h_{01}\psi_L$	
$\dot{\psi}_K =$	$-k_{n1}\psi_K$	$+\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)\psi_L$		$-\delta_{n1}\psi_C\psi_N$
$\dot{\psi}_L =$	$-k_{n1}\psi_L$	$-\left(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A\right)\psi_K$	$-h_{n1}\psi_A$	$+\delta_{n1}\psi_C\psi_M$
$\dot{\psi}_C =$	$-k_{02}\psi_C$		$+h_{02}\psi_N$	$+\epsilon_n\left(\psi_K\psi_N - \psi_L\psi_M\right)$
$\dot{\psi}_M =$	$-k_{n2}\psi_M$	$+\left(\beta_{n2} - \alpha_{n2}\psi_A\right)\psi_N$		$-\delta_{n2}\psi_C\psi_L$
$\dot{\psi}_N =$	$-k_{n2}\psi_N$	$-\left(\beta_{n2} - \alpha_{n2}\psi_A\right)\psi_M$	$-h_{n2}\psi_C$	$+\delta_{n2}\psi_C\psi_K$

Paramètres et constantes:

$$\frac{\gamma_{n1}}{5} = \frac{\gamma_{n2}}{4} = \frac{\gamma_{n3}}{8} = \frac{8\sqrt{2}}{15\pi}n \; ,$$

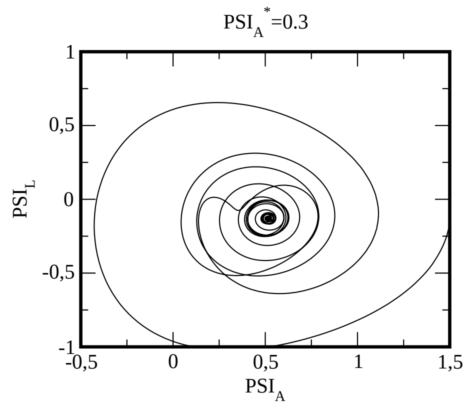
$$\alpha_{nm} = \frac{n^2+m^2-1}{n^2+m^2+\lambda^{-2}}\gamma_{nm} \; , \quad \delta_{nm} = \frac{n^2-m^2+1}{n^2+m^2+\lambda^{-2}}\gamma_{n3} \; , \quad \epsilon_n = \frac{3\gamma_{n3}}{4+\lambda^{-2}} \; ,$$

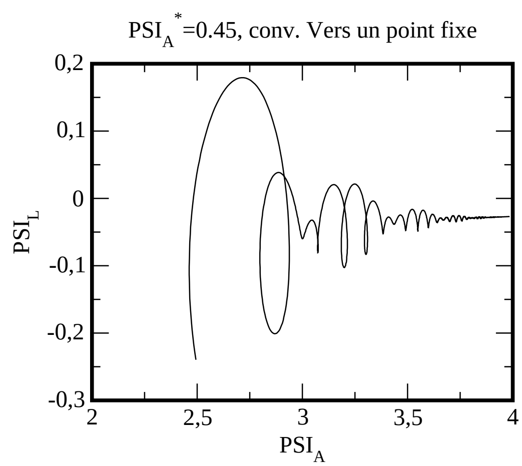
$$k_{nm} = \frac{n^2+m^2}{n^2+m^2+\lambda^{-2}}\gamma \; , \quad \beta_{nm} = \frac{n}{n^2+m^2+\lambda^{-2}}\frac{L}{a}\cot\phi_0 \; ,$$

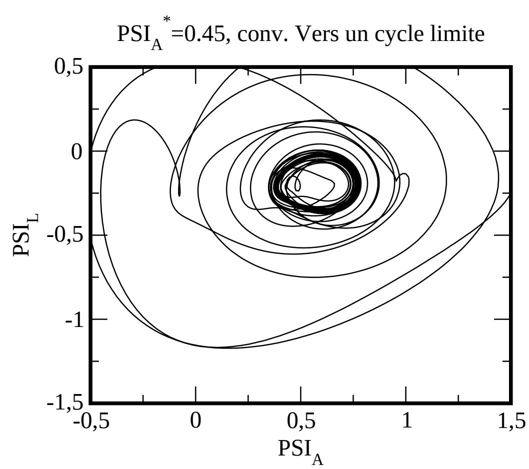
$$h_{01} = \frac{\gamma_{n1}}{1+\lambda^{-2}}\frac{h_0}{2H} \; , \quad h_{02} = \frac{\gamma_{n3}}{4+\lambda^{-2}}\frac{h_0}{2H} \; ,$$

$$h_{n1} = \frac{\gamma_{n1}}{n^2+1+\lambda^{-2}}\frac{h_0}{2H} \; , \quad h_{n2} = \frac{\gamma_{n3}}{n^2+4+\lambda^{-2}}\frac{h_0}{2H} \; .$$

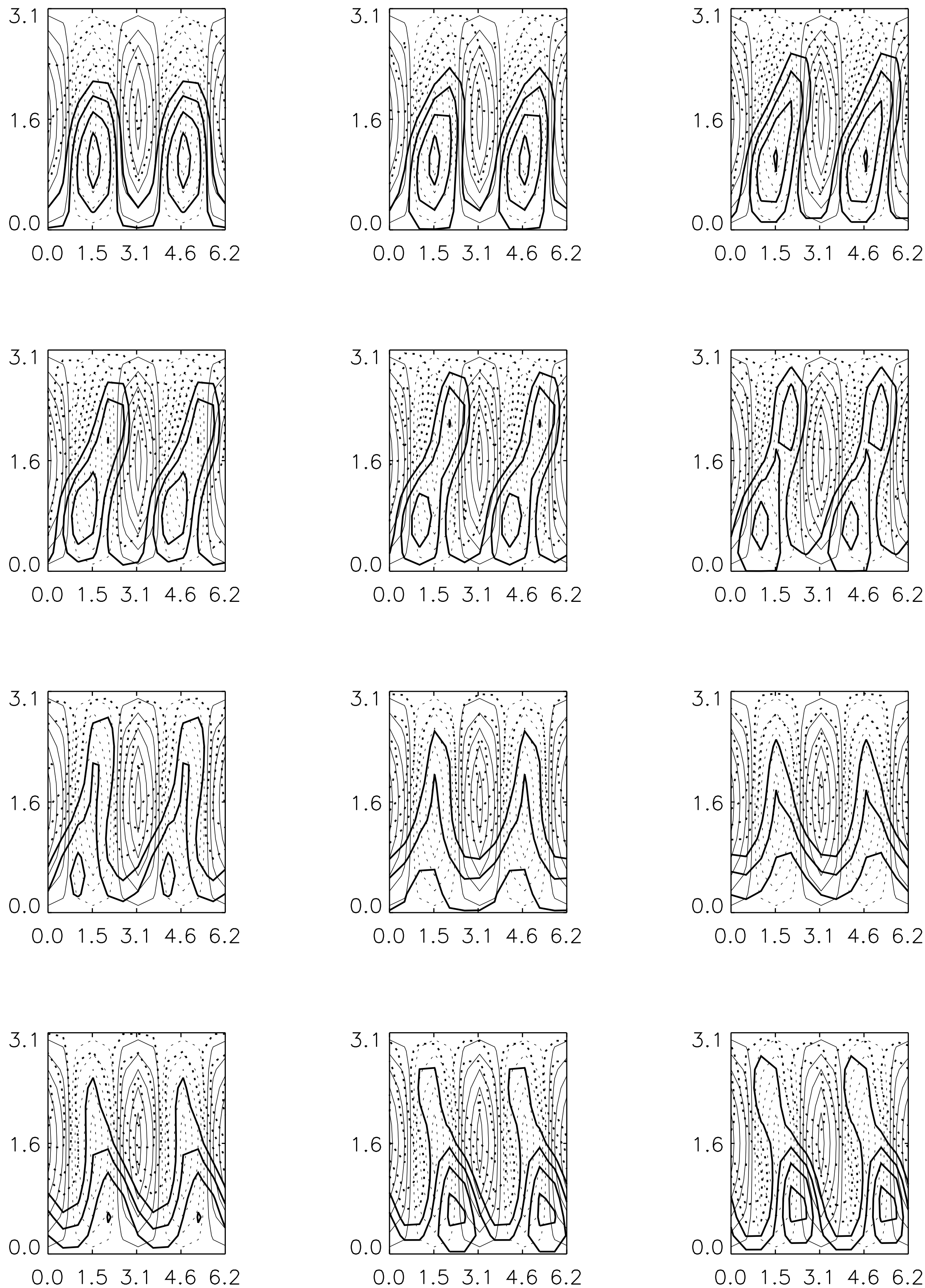
Evolutions dans le diagramme des phases ψ_A, ψ_L







Fonction de courant tous les jours



Fonction de courant tous les jours, modes ψ_C ψ_M ψ_N seulement