

## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

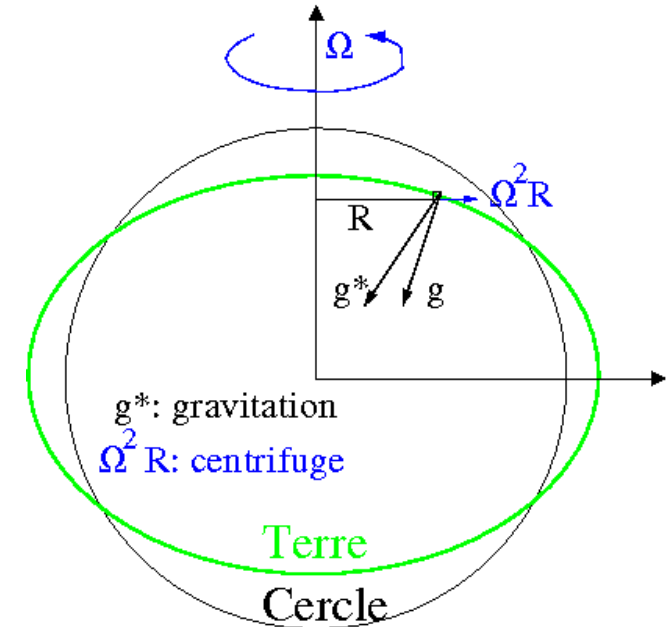
Loi de Newton dans un référentiel tournant:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \vec{D}$$

$\vec{D}$ : Forces de Friction

$p$ : Pression

$\vec{g}$ : vecteur incluant la gravitation et la force centrifuge



Accélération en coordonnées sphériques:

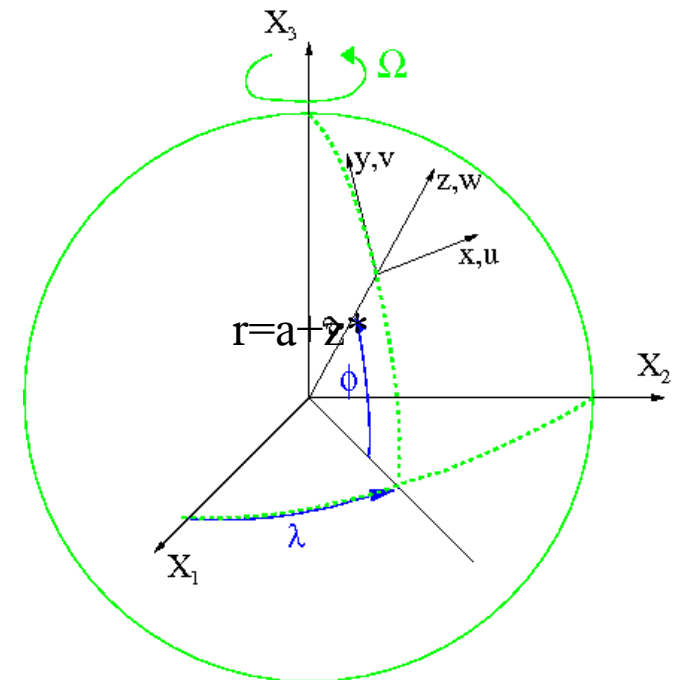
$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} = \begin{cases} \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{r} + \frac{uw}{r} \\ \quad - 2\Omega \sin \phi v + 2\Omega \cos \phi w \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{r} + \frac{vw}{r} \\ \quad + 2\Omega \sin \phi u \\ \frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega \cos \phi u \end{cases}$$

Avec:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r}$$

et:

$$u = r \cos \phi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v = r \frac{D\phi}{Dt}, \quad w = \frac{Dr}{Dt}$$



## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

Approximation pour une atmosphère mince ( $z^* \ll a$ ,  $w \ll u, v$ )

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} \approx \begin{cases} \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega \sin \phi v \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv \tan \phi}{a} + 2\Omega \sin \phi u \\ 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

et:

$$u = a \cos \phi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v = a \frac{D\phi}{Dt}, \quad w = \frac{Dz}{Dt}.$$

Dans ce cadre la composante verticale de la loi de Newton se réduit à l'Approximation hydrostatique:  
(les forces de frictions doivent aussi être faibles dans cette direction)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

Introduction d'une coordonnée verticale décroissante uniformément avec l'altitude (z):  $\eta(p, p_s)$  telle que  $\begin{cases} \eta(0, p_s) = 0 \\ \eta(p_s, p_s) = 1 \end{cases}$

Dérivée particulaire: 
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Force de pression en utilisant cette nouvelle coordonnée:

Sur une surface  $\eta = \text{cte}$ :

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{z\phi} \delta \lambda + \left( \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_{z\lambda} \delta \phi + \underbrace{\left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{\lambda\phi}}_{-\rho g} \delta z$$

mais aussi:

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} \delta \lambda + \left( \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} \delta \phi$$

En introduisant le geopotentiel  $\Phi = gz$ , et en écrivant:

$$\delta \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} \delta \lambda + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} \delta \phi$$

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_h p = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho a \cos \phi} \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} & + \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} \\ \frac{1}{\rho a} \left( \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} & + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} \end{pmatrix}$$

## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

$$\delta M = \rho a^2 \cos \phi \delta \lambda \delta \phi \delta z = -ga^2 \cos \phi \frac{\partial p}{\partial \eta} \delta \lambda \delta \phi \delta \eta$$

Conservation de la masse:

$$\frac{1}{\delta M} \frac{D\delta M}{Dt} = \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \eta}} \frac{D\frac{\partial p}{\partial \eta}}{Dt} + \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cos \phi v}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}$$

En écrivant la conservation de la masse sous la forme:

$$\lim_{\delta M \rightarrow 0} \frac{1}{\delta M} \frac{D\delta M}{Dt} = 0$$

On obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial p}{\partial \eta} u + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \cos \phi v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \dot{\eta} = 0$$

$$\frac{D\theta}{DT} = Q \quad \text{où} \quad \theta = T \left( \frac{p_r}{p} \right)^\kappa$$

$p_r$  pression de référence constante et  $\kappa = R/C_p$

Bilan de chaleur:

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{\kappa T \omega}{p} = P_T$$

où  $\omega = \frac{Dp}{Dt}$  est la vitesse verticale "pression",  
et  $P_T$  représente les forçages diabatiques.

## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

Récapitulatif:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}\right) u - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega \sin \phi v = -\frac{1}{\rho a \cos \phi} \left(\frac{\partial p}{\partial \lambda}\right)_{\eta \phi} - \frac{1}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}\right)_{\eta \phi} + P_U$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}\right) v + \frac{vu \tan \phi}{a} + 2\Omega \sin \phi u = -\frac{1}{\rho a} \left(\frac{\partial p}{\partial \phi}\right)_{\eta \lambda} - \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \phi}\right)_{\eta \lambda} + P_V$$

Hydrostatique: 
$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = -\frac{RT}{P} \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial p}{\partial \eta} u + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \cos \phi v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \dot{\eta} = 0$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}\right) T + \frac{\kappa T \omega}{p} = P_T$$

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

Un Modèle de Circulation Générale de l'Atmosphère calcule l'évolution temporelle de diverses variables, essentiellement le vent, la Température et l'humidité, en différents points d'un **"maillage" 3D** qui couvre l'ensemble de l'atmosphère.

A partir d'un état initial, le modèle calcule l'évolution de ces variables, pas de temps après pas de temps

- 1) A un instant  $t$  on connaît la variable,  $X_t$ , en tout point de l'atmosphère ( $X$  peut-être  $u, v, T$ , ou  $p_s$ )
- 2a) On calcule alors son évolution due à l'advection ( $u, v, T$ ), les forces de pression et la force de Coriolis ( $u, v$ ) ou la conservation de la masse ( $p_s$ ). C'est à dire tout les termes explicitement représentés par les équations de la dynamique du fluide. On appelle cette évolution, la tendance dynamique de  $X$ :  $(\partial_t X)_{\text{dyn}}$
- 2b) On calcule aussi son évolution due aux échanges turbulents avec le sol ( $u, v, T$ ) et dont les mouvements sont de trop petites échelles pour être représentés par la dynamique résolue par la grille du modèle. On calcul aussi l'évolution de la Température liée aux forçages radiatifs Infrarouge venant du sol, et visible venant du soleil et de la réflexion par le Sol. On appelle cette évolution la tendance physique de  $X$ :  $(\partial_t X)_{\text{phys}}$
- 3) Au pas de temps suivant,  $t+dt$ , on calcul  $X_{t+df}$  et fonction de  $X_t$  et des tendances, c'est l'intégration des variables dans le temps. Exemple du pas dit d'"Euler":

$$X_{t+\delta t} = X_t + (\partial_t X)_{\text{dyn}} \delta t + (\partial_t X)_{\text{phys}} \delta t$$

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Discretisation verticale:

Pour représenter la dépendance verticale des variables

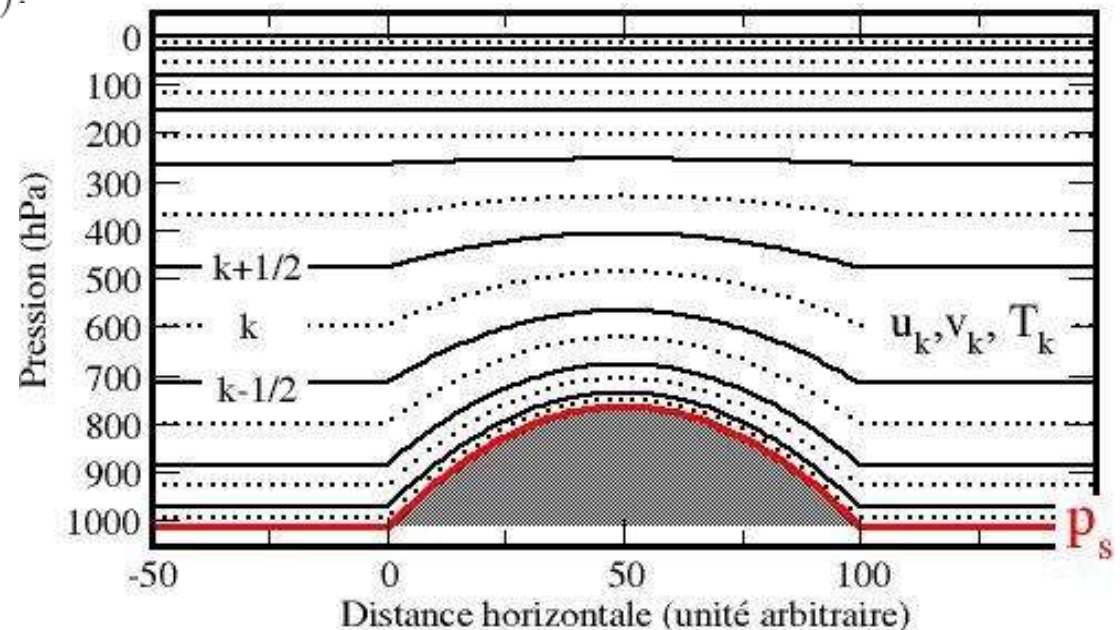
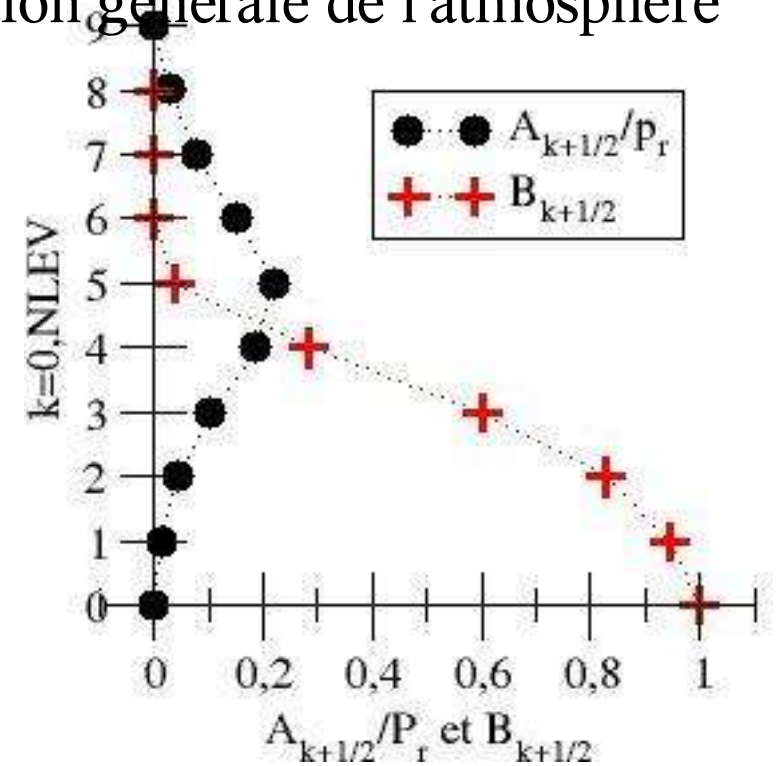
$$u, v, T,$$

on divise l'atmosphère en  $NLEV$  couches, A l'interface de chaque couche la pression est définie par:

$$p_{k+1/2} = A_{k+1/2} + B_{k+1/2}p_s, \text{ pour } k = 0, NLEV.$$

Les  $A_{k+1/2}$  et les  $B_{k+1/2}$  sont des constantes définissant la coornnée verticale, elles sont fixées une fois pour toute. La pression dans chaque couche est donnée par:

$$p_k = 0.5 * (p_{k-1/2} + p_{k+1/2}).$$



## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Discretisation verticale:

Evaluation de la pression de Surface et de la vitesse verticale "pression":

On intègre de  $\eta = 0$  à  $\eta = 1$  la conservation de la masse:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\vec{\nabla}_h \cdot \sum_1^{\text{NLEV}} \Delta p_k \vec{u}_k$$

où:  $\Delta p_k = p_{k-1/2} - p_{k+1/2}$

Pour  $\omega$  on détermine  $\partial_t p$  en intégrant la continuité de  $\eta = 0$  à  $\eta$ :

$$\omega_k = \vec{u}_k \cdot \vec{\nabla}_h p_k - \vec{\nabla}_h \cdot \sum_k^{\text{NLEV}} \Delta p_k \vec{u}_k$$

Pour un scalaire  $S$  et un vecteur de vent  $\vec{u}$  les conventions suivantes ont été utilisées:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_h S = \left( \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) S$$

$$\vec{\nabla}_h \cdot \vec{u} S = \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial u S}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cos \phi v S}{\partial \phi} \right)$$

Exercices:

**1** Donner la forme discrète permettant d'évaluer le géopotentiel

$\Phi$  (sa valeur au sol est le relief  $\Phi_s$ )

**2** Donner la forme discrète permettant d'évaluer l'advection verticale d'un scalaire  $S$ :

$$\dot{\eta} \frac{\partial S}{\partial \eta}$$



## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

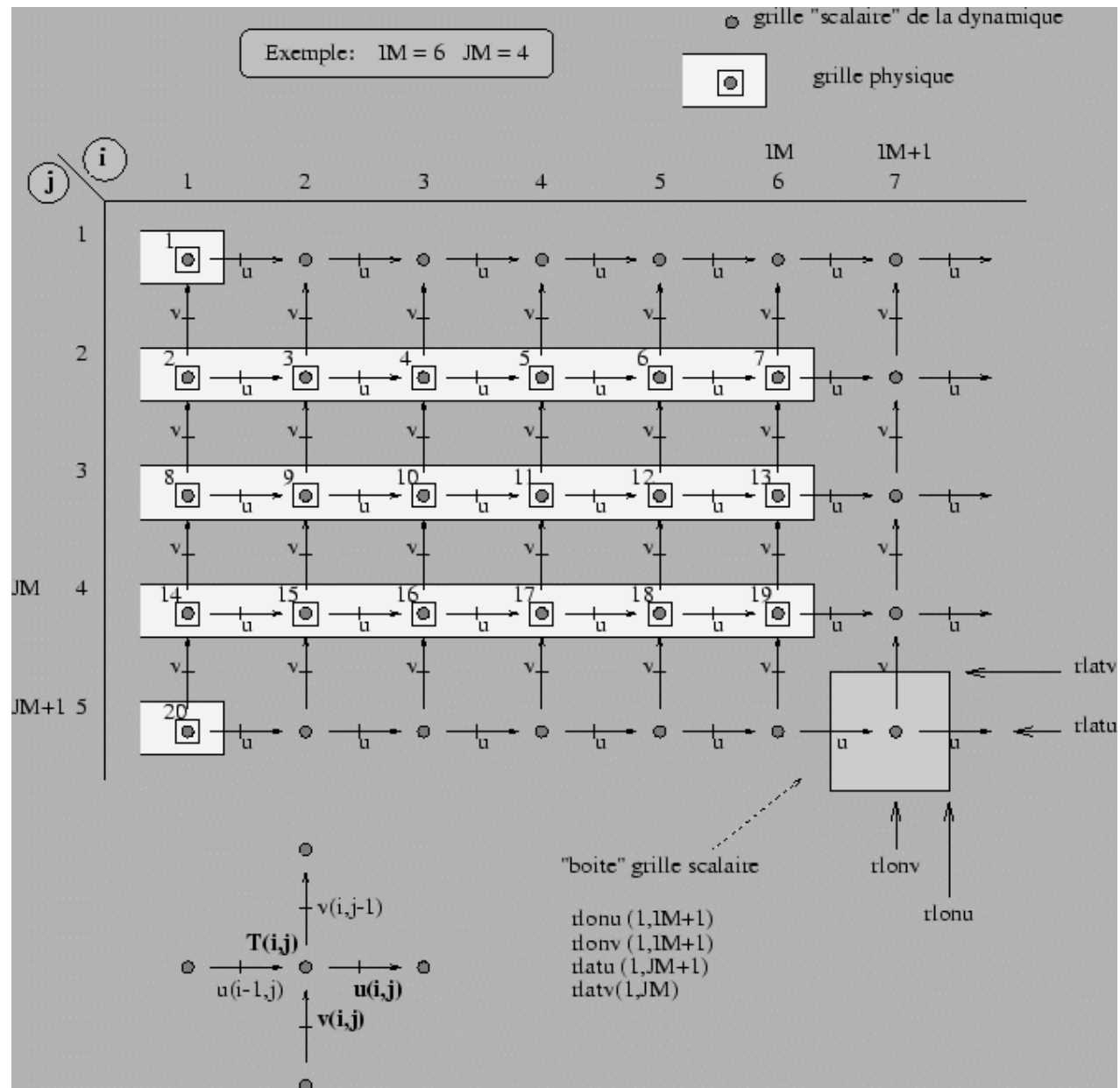
### Discretisation horizontale:

Pour la dynamique on utilise des grilles décalées pour chaque variables. Cela permet d'avoir une précision du second ordre pour l'estimation des différentielles horizontales.

Exemple de la tendance dynamique due au gradient de pression:

$$(\partial_t u)_{i,j} = \frac{1}{a \cos \phi_j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\lambda_{i+1} - \lambda_i}$$

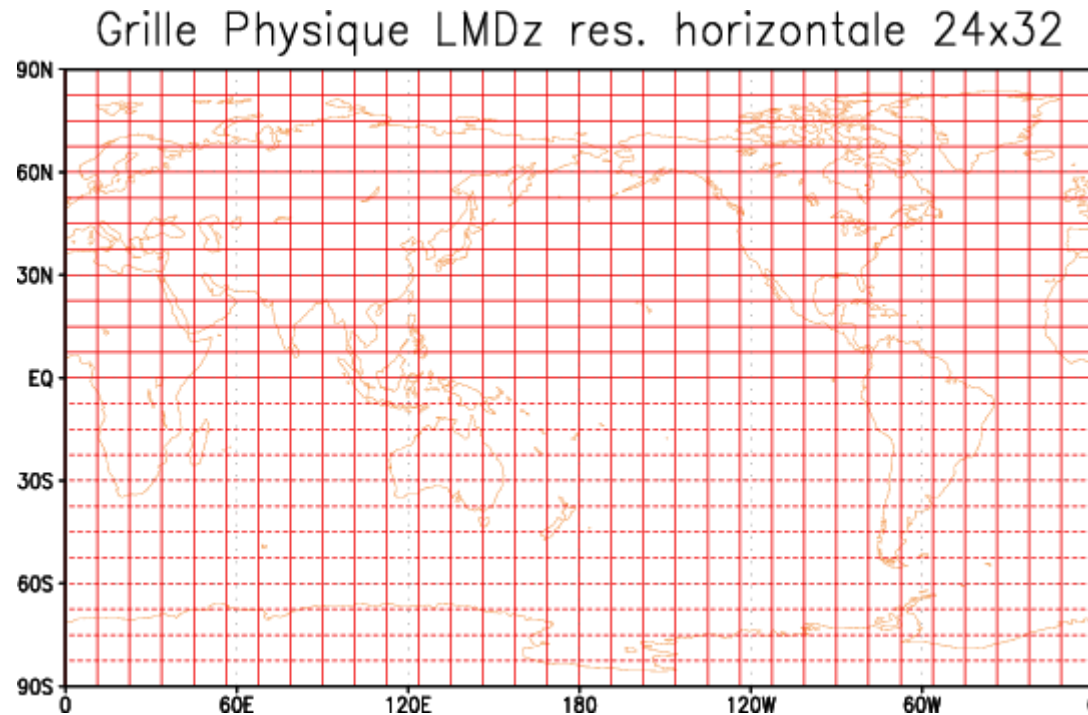
Pour la physique toutes les variables sont sur les mêmes points



## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

Discrétisation horizontale:

Exemple de la grille horizontale « physique » utilisée dans ce cours



Le passage de la grille physique à la grille dynamique se fait par des interpolations linéaires

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

Représentation de la physique.

Chaque point de la grille physique est associé à une colonne verticale

**Sur la grille physique, sont évaluées les tendances sur T dues:**

Au forçage radiatif (solaire et infrarouge)

Au dépôt de chaleur latente lié à la condensation

Aux échanges (chaleur latente et chaleur sensible) avec le sol dus à la turbulence dans la couche limite

Aux ajustements statiques (sec et humides)

**Sur la grille physique, sont évaluées les tendances sur u et v dues:**

Aux échanges avec le sol dus à la turbulence dans la couche limite

au déferlement des ondes de gravité

aux ajustements statiques (sec et humide)

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Représentation de la physique:

#### Un exemple, la turbulence dans la couche limite (forme continue)

Le transfert turbulent d'une quantité  $X$  depuis la surface vers le haut est représenté sous la forme conservative:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{\text{CL}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_X}{\partial z}$$

où  $J_X$  est le flux turbulent. Ce flux a pour valeur 0 au sommet et pour valeur

$$\rho C_X |\vec{u}(z)| (X(z) - X_s)$$

lorsque  $z$  est proche du sol. Si  $z$  est suffisamment petit, on peut considérer qu'il est dans une couche dite "de surface", où le flux turbulent est constant. La théorie de la similarité permet alors d'exprimer  $C_X$  en fonction de la rugosité du sol, de la stabilité du fluide, et de  $z$ .

Dans le fluide, le flux  $J_X$  est écrit sous la forme

$$J_X = \rho K_X \frac{\partial X}{\partial z}$$

où  $K_X$  est un coefficient d'échange dépendant lui aussi de la stabilité du fluide.

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Représentation de la physique.

#### Un exemple, la turbulence dans la couche limite (forme Discrète)

A l'aide de la valeur de  $X$  au premier niveau du modèle on évalue le flux turbulent au sol sous la forme:

$$J_{X_s} = \rho C_X |\vec{u}_1| (X_1 - X_s)$$

Remarques: le sol  $s$  est aussi le demi niveau 1/2; la valeur au sol  $X_s$  est évaluée à partir d'un modèle de sol, et/ou de climatologies. A chaque demi niveau entre le sol et le sommet, on évalue le flux

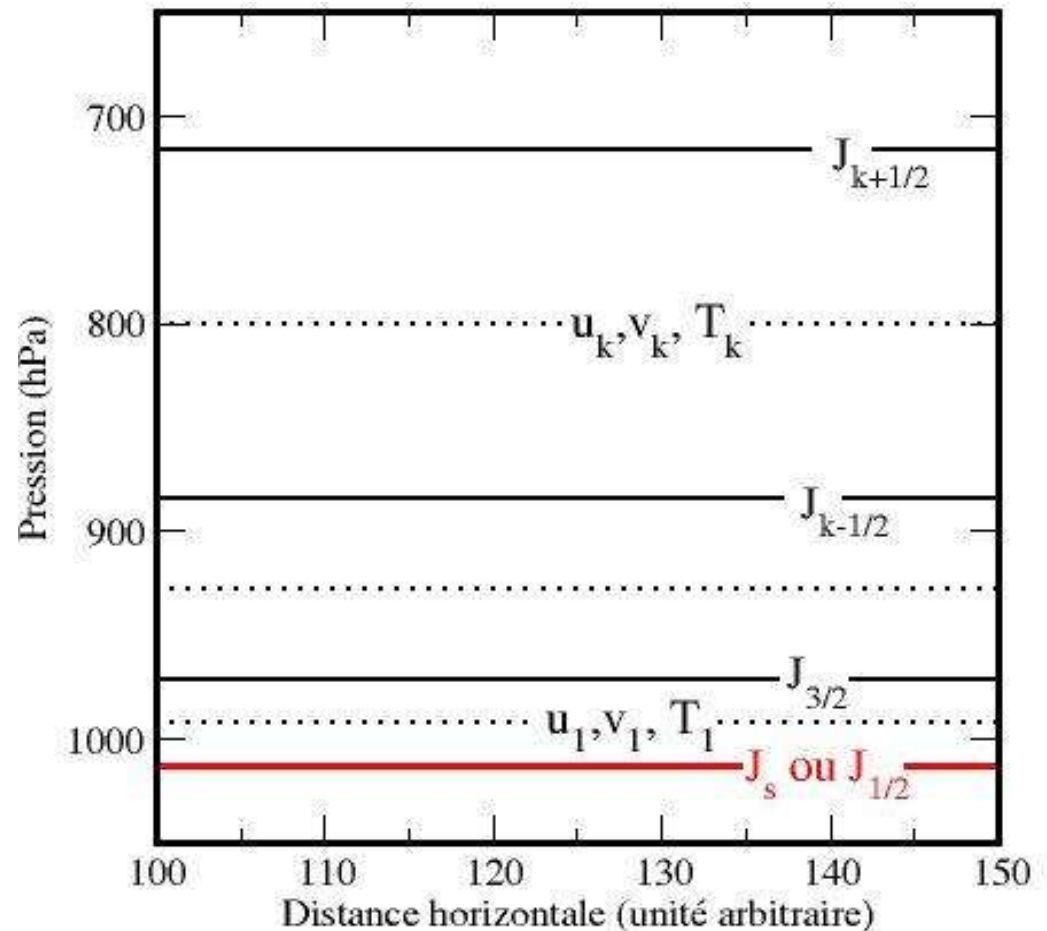
$$J_{X_{k+1/2}} = \rho^2 K_X g \frac{X_{k+1} - X_k}{\Delta p_{k+1/2}}$$

où

$$\Delta p_{k+1/2} = p_{k+1} - p_k.$$

A chaque niveau on évalue alors la tendance "physique":

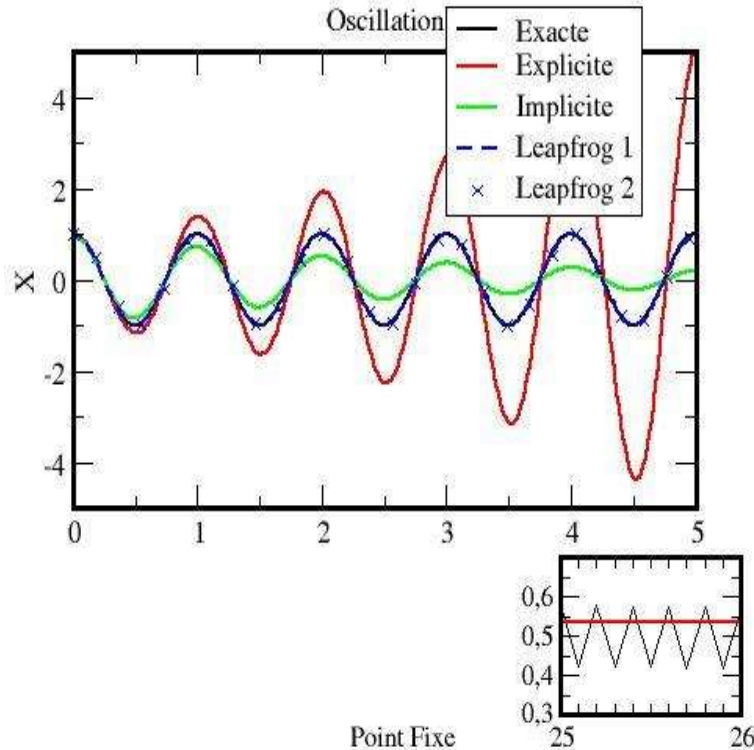
$$\left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)_k = g \frac{J_{k+1/2} - J_{k-1/2}}{\Delta p_k}$$



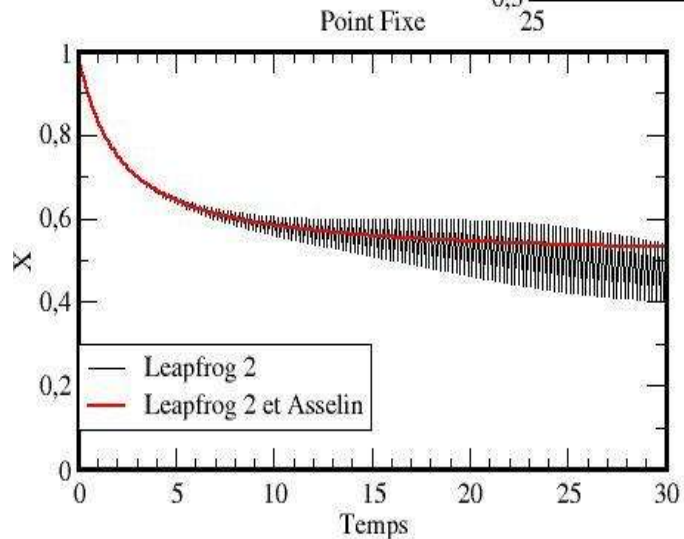
## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Intégration temporelle

Schéma explicites, implicites, leapfrog, et filtre de Asselin



$$\frac{\partial}{\partial t} X = i\omega X$$



$$\frac{\partial}{\partial t} X = -(X - X_0)^2$$