

# Éléments d'analyse des systèmes non linéaires

Céline Conrardy

mars 2007

*Le succès des prévisions météorologiques à long terme passe par la connaissance des sources de variabilité d'un système chaotique non linéaire au delà de l'échelle de temps déterministe (environ 14 jours en météorologie). Les prédictions opérationnelles traditionnelles ont connu des résultats intéressants en utilisant des méthodes d'ensemble et de moyennes qui éliminent une partie des fluctuations de hautes fréquences et cherchent à prédire la partie restante du signal dont les variations sont beaucoup moins importantes [Seidman, Shukla]. Théoriquement, la partie presque périodique d'un flot, par exemple la variabilité intrasaisonnière peut être prédite sur un temps comparable à sa période. En pratique, les méthodes statistiques actuelles comme la prévision par moyenne décalée (prévision séquentielle) ont en général échoué [Kalnay & al]. Les modèles auto régressifs basés sur la minimisation de l'entropie, couplé avec un pré filtrage basé sur l'analyse de spectre sont d'une grande utilité pour le développement de prédictions statistiques à long terme de la variabilité atmosphérique et océanique. Un certain nombre de méthodes de prévision non-linéaires ont été introduites qui semblent bien s'appliquer aux signaux de faibles bruits obtenus par les modèles dynamiques d'ordres faibles ou les systèmes expérimentaux simples [Farmer, Sidorowich, Casdagli]. L'application directe de telles méthodes aux observations atmosphériques ou aux modèles de simulation du climat n'a pas donné de résultats probants [Keppenne & Ghil]. Or nous pouvons constater que le climat, bien que d'une grande variabilité, présente des aspects plus ou moins cycliques à différentes échelles de temps. L'idée qui sous-tend cette étude est d'essayer d'exploiter ces différentes "pseudo-périodes" de la dynamique atmosphérique afin d'en extraire de l'information sur le comportement du système. Il existe une réelle différence d'approche entre d'une part l'approche prédictive point par point et l'approche "modale" où l'on recherche l'excitation de certains "modes" de la trajectoire pouvant servir à prévoir de façon globale le régime d'évolution future. Quelle réalité mathématique peut-on donner à ces "pseudo périodes" pour rendre compte des différents "régimes" du climat? L'objet de ce rapport est de préciser ces notions sur des systèmes chaotiques simples ayant des particularités cycliques.*

1

---

<sup>1</sup>All : outrepassant les limites restrictives de l'exercice, le texte remis a été par la suite abondé dans l'intérêt de l'unsecte lecteur.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Théorie de Floquet</b>	<b>3</b>
1.1	Considérations générales . . . . .	3
a.	Progagateur . . . . .	3
b.	Vecteurs de Floquet . . . . .	3
1.2	Analyse de Floquet des systèmes périodiques . . . . .	4
a.	Théorie . . . . .	4
b.	Propriété de la vitesse lorsque le système est périodique . . . . .	5
1.3	Code dans Mini_ker . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Analyse d'article : Etudes des oscillations intra-saisonnères sur un modèle barotrope</b>	<b>6</b>
a.	oscillations intra-saisonnères . . . . .	6
b.	modèle et analyse de Floquet . . . . .	6
c.	interprétation des vecteurs de Floquet conduisant à des instabilités . . . . .	6
2.1	Lorenz 63 et Lorenz périodique . . . . .	8
a.	optimisation des paramètres en vue de trouver un système périodique . . . . .	8
b.	visualisation des vecteurs de Floquet . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Décomposition de l'attracteur de Lorenz en orbites instables</b>	<b>11</b>
3.1	Recherche des orbites quasi-périodiques de l'attracteur de Lorenz . . . . .	11
3.2	Répartition des orbites dans l'attracteur de Lorenz . . . . .	14
<b>4</b>	<b>Analyse de stabilité des orbites et de l'attracteur</b>	<b>17</b>
4.1	Théorie de l'analyse asymptotique de Lyapunov . . . . .	17
4.2	Exposants de Floquet des orbites . . . . .	19
4.3	Exploitation des vecteurs de Floquet en vue d'une prévision météorologique . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>22</b>
<b>6</b>	<b>Annexe : Le problème du fit des orbites périodiques</b>	<b>24</b>
<b>7</b>	<b>Annexe : Vecteurs de Floquet des composantes périodiques de Lorenz</b>	<b>26</b>

# 1 Théorie de Floquet

## 1.1 Considérations générales

Parmi les outils mathématiques servant à l'analyse de systèmes possédant des périodicités, la théorie de Floquet permet de tout savoir d'un système à matrice d'avance d'état périodique dès la première période. On utilise ici cet outil sur des modèles très simples de la dynamique atmosphérique.

### a. Propagateur

L'analyse de Floquet s'applique aux systèmes dynamiques  $\partial_t x = A(t)x$  lorsque la matrice d'avance d'état au point courant est périodique :  $A(t+T) = A(t) \quad \forall t$ . Elle permet de trouver une base de projection de la trajectoire dans laquelle chaque coordonnée est une trajectoire périodique amplifiée (ou atténuée) exponentiellement. Ceci permet de voir la trajectoire comme la superposition de modes (les vecteurs de Floquet) plus ou moins actifs selon la valeur du coefficient d'amplification (les multiplieurs de Floquet). Les propriétés du propagateur associé au système de Floquet sont classiquement obtenus en considérant la matrice  $X(t)$  des solutions fondamentales du système qui forment une base de toutes les solutions au système. Le propagateur est simplement défini par :

$$\Phi(t, 0) = X(t)X^{-1}(0) \quad (1)$$

On a la relation :

$$\partial_t \Phi(t+T, 0) = A(t) \Phi(t+T, 0) \quad (2)$$

qui prouve que  $\Phi(t+T, 0)$  est également solution, et peut donc s'exprimer dans la base  $\Phi(t, 0)$  :

$$\Phi(t+T, 0) = \Phi(t, 0) M \quad (3)$$

où  $M$  est une matrice constante (et régulière, puisque les  $\Phi$  le sont par définition).

### b. Vecteurs de Floquet

On diagonalise<sup>1</sup> le propagateur en  $t = T$ , ce qui permet de déterminer les valeurs propres  $\sigma_i = e^{\Lambda_i T}$

$$\begin{aligned} \Phi(T, 0) &= Z e^{\Lambda T} Z^{-1} = Z \Sigma Z^{-1} \\ Y(t) &\stackrel{def}{=} \Phi(t, 0) Z \\ Y(0) &= Z \end{aligned} \quad (4)$$

La relation de  $Y(t)$  avec sa réplique à  $t+T$  est alors

$$\begin{aligned} Y(t+T) &= \Phi(t+T, 0) Z = \Phi(t+T, T) \Phi(T, 0) Z \\ &= \Phi(t, 0) Z e^{\Lambda T} \\ Y(t+T) &= Y(t) e^{\Lambda T} \end{aligned} \quad (5)$$

Par ailleurs,  $Y$  s'intègre comme le propagateur, car

$$\partial_t Y = A(t) \Phi(t) Z = A(t) Y(t) \quad (6)$$

---

<sup>1</sup>cette diagonalisation est toujours possible avec un calcul machine car l'ensemble des matrices non diagonalisables est de mesure nulle dans l'ensemble des matrices.

On construit à partir des vecteurs colonne de  $Y$  d'autres vecteurs non amortis, ce sont les vecteurs de Floquet. On obtient une matrice  $\Psi^F$  que l'on définit en "dés-amortissant"  $Y$  et dont les vecteurs colonne sont les vecteurs de Floquet.

$$\Psi^F(t) \stackrel{\text{def}}{=} Y(t)e^{-\Lambda t} \quad (7)$$

on obtient bien un vecteur périodique, car :

$$\begin{aligned} \Psi^F(t+T) &= Y(t+T)e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} \\ &= Y(t)e^{-\Lambda t} = \Psi^F(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi^F &= AY e^{-\Lambda t} - Y(t)\Lambda e^{-\Lambda t} \\ &= A\Psi^F(t) - \Psi^F e^{\Lambda t}\Lambda e^{-\Lambda t} \end{aligned} \quad (9)$$

et du fait de la diagonalité des trois matrices de droite, le résultat final est

$$\partial_t \Psi^F = A\Psi^F(t) - \Psi^F \Lambda \quad \text{avec } \Psi^F(0) = Z \quad (10)$$

Ainsi, connaissant la période  $T$  de la matrice d'avance de phase d'un système dynamique linéaire, et ayant calculé les vecteurs propres du propagateur à  $t = T$ , on est capable d'intégrer en avant un ou plusieurs vecteurs de Floquet. On a alors pour le propagateur :

$$\Phi(t, 0) = Y(t)Z^{-1} = \Phi(t, 0) = \Psi^F(t)e^{\Lambda t}Z^{-1}$$

On peut ainsi caractériser la stabilité des systèmes de Floquet en calculant  $\Lambda = \frac{1}{T} \log \Sigma$ . Les valeurs propres  $\sigma_i$  sont appelées les **multiplieurs de Floquet** et sont uniques. Les  $\lambda_i$  sont les **exposants de Floquet** et ne sont pas uniques dans la décomposition de Floquet puisque si

$$\begin{aligned} \sigma_i &= \rho_i e^{-i\theta_i} \\ \lambda_i &= \frac{\ln(\rho_i)}{T} + i \frac{\theta_i + 2k\pi}{T} \end{aligned}$$

avec  $k$  un entier quelconque. De plus  $\Psi^F$  et  $\Lambda$  sont en toute généralité imaginaires. La croissance de chaque vecteur de Floquet au cours du temps est déterminée par la partie réelle de l'exposant de Floquet correspondant, et la fréquence par la partie imaginaire.

## 1.2 Analyse de Floquet des systèmes périodiques

### a. Théorie

Prenons un système périodique régi par l'équation :

$$\partial_t \eta = g(\eta) \quad (11)$$

Le système est périodique, on a donc par définition  $\eta(t+T) = \eta(t)$ . Une perturbation sur la trajectoire de référence est régie par :

$$\partial_t \delta \eta = \partial_\eta g \delta \eta \quad (12)$$

Avec  $\delta \eta(t) = \Phi(t, \tau) \delta \eta(\tau)$  où  $\Phi(t, \tau)$  est le propagateur et en posant  $A = \partial_\eta g(\eta)$  on a :

$$\partial_t \Phi(t, \tau) = A(t) \Phi(t, \tau) \quad (13)$$

La matrice d'avance d'état au point courant  $A$  est elle-même périodique ( $\forall t, A(t+T) = A(t)$ ). On considère alors le système de Floquet de période  $T$ .

## b. Propriété de la vitesse lorsque le système est périodique

La "vitesse" du système est par définition  $V(t) = \partial_t \eta$  et la périodicité<sup>1</sup> du système entraîne  $V(t+T) = V(t)$ . Comme par ailleurs

$$\partial_t V = \partial_t g(\eta) = \partial_\eta g(\eta) \partial_t \eta = A(t)V(t) \quad (14)$$

on a que  $V$  se propage de la même façon que  $\delta\eta$ . On peut déduire de cette particularité une **propriété de la décomposition de Floquet du système linéaire tangent des systèmes périodiques**, celle d'avoir un **multiplieur de Floquet égal à 1**. En effet, on a que  $V(t) = \Phi(t, 0)V(0)$  est périodique de période  $T$ . Or

$$V(T) = \Phi(T, 0)V(0) = V(0)$$

et donc  $V(0)$  est vecteur propre de  $\Phi(T, 0)$  avec la valeur propre 1. Cette propriété permet aussi de vérifier qu'un système de Floquet est un système périodique de par l'existence d'un multiplieur de Floquet égal à 1.

### 1.3 Code dans Mini\_ker

La modélisation des systèmes est généralement conçue dans la perspective de simulations numériques. Pour tous les calculs présentés dans ce rapport, on a modélisé les systèmes étudiés dans Mini\_ker qui est un environnement logiciel de type ZOOM simplifié. Toutes les dérivées partielles nécessaires à la résolution du système sont effectuées à la précompilation. Le programme principal de Mini\_ker est subdivisé en morceaux, que l'on appelle séquences. On code dans la séquence \$ZINIT les instructions de dimension du modèle et son expression mathématique. Puis dans les séquences \$ZTEER et \$ZSTEP introduites en fin de la boucle temporelle du programme principal, on peut effectuer des tests et calculs supplémentaires, interrompre la simulation...

Pour le calcul des vecteurs et exposants de Floquet, on réalise la décomposition en valeurs propres du propagateur dans \$ZSTEER pour déterminer la période  $T$ , les exposants de Floquet  $\lambda$  et  $Z$ . Ces calculs se font facilement grâce à la librairie mathématique Lapack. Les valeurs sont stockées dans un fichier de sortie. Puis on utilise à nouveau Mini\_ker prenant en entrée le fichier précédent pour initialiser  $\Phi(T, 0) = Z$  dans le \$ZINIT et effectuer le calcul  $\Psi^F(t) = \Phi(t, 0) Z \exp(-\Lambda t)$  en complexe dans \$ZSTEER.

---

<sup>1</sup>Prendre garde au fait que la périodicité du système n'entraîne pas la périodicité des perturbations :  $\delta\eta(t+T) \neq \delta\eta(t)$

## 2 Analyse d'article : Etudes des oscillations intra-saisonnères sur un modèle barotrope

A quoi peut servir la théorie de Floquet dans le domaine de la prédiction météorologique ? L'analyse d'un article<sup>1</sup> de C.Strong, M.Ghil et F. Jin émet des hypothèses intéressantes quand à l'interprétation physique pouvant être donnée aux vecteurs de Floquet.

### a. oscillations intra-saisonnères

Le phénomène d'oscillations intra-saisonnères dans l'hémisphère Nord est un phénomène bien connu des météorologues. On peut l'observer sur de nombreuses variables atmosphériques dont le moment angulaire global de l'atmosphère. En effet, si le moment angulaire total de la Terre se conserve, ce n'est pas le cas de celui de l'atmosphère car il y a échange avec les continents et les océans : quand le vent augmente, la rotation terrestre diminue et vice-versa. Le moment angulaire global de l'atmosphère est donc un bon indicateur de la dynamique atmosphérique à grande échelle. Les observations ont montré des oscillations de 40 jours autour de la valeur moyenne du moment angulaire, particulièrement en hiver et au début du printemps. Dans ce qui suit, l'analyse de Floquet d'un modèle barotrope de l'atmosphère permet d'établir une corrélation entre ces oscillations intra-saisonnères d'une périodicité d'environ 40 jours et le cycle annuel moyen.

### b. modèle et analyse de Floquet

Le modèle utilisé est un modèle atmosphérique barotrope dont l'équation adimensionnée du flot atmosphérique est :

$$\partial_t(\Delta - \Gamma^2)\Psi + J[\Psi, \Delta\Psi + 2\mu(1 + \gamma h)] = -\alpha\Delta(\rho\Psi^* - \Psi) - \nu\Delta^k\Psi \quad (15)$$

où  $\Psi^*$  est un forçage périodique.

On génère grâce à ce modèle 100 années synthétiques du climat, on construit le flot d'une année moyenne  $\Psi_p$  qui peut être considérée en bonne approximation comme le motif répété d'un système périodique. On linéarise alors le système autour de ce flot moyen. Une perturbation initiale au flot moyen est régit par :

$$\partial_t\delta\Psi = (\Delta - \Gamma^2)^{-1} \left( -J(\Psi_p(t), \Delta\delta\Psi) - J[\delta\Psi, \Delta\Psi_p(t) + 2\mu(1 + \gamma h)] + \alpha\Delta\delta\Psi - \nu\Delta^k\delta\Psi \right) = L\delta\Psi$$

où L est un opérateur linéaire.

On intègre cette équation sur une base de vecteurs initiaux, ce qui permet d'obtenir le propagateur  $\Phi(t, 0)$ . La décomposition en valeurs propres de  $\Phi(T, 0)$  donne les exposants de Floquet. Il suffit ensuite de résoudre :

$$\partial_t\Psi^F = -\lambda\Psi^F + L\Psi^F \quad (16)$$

pour obtenir les vecteurs de Floquet

### c. interprétation des vecteurs de Floquet conduisant à des instabilités

En prenant  $t_0 = 15 \text{ juin}$  Strong *et al* trouvent trois exposants de Floquet de partie réelle positives. Il y a donc trois modes instables. Le premier mode est oscillant avec  $1/\lambda_{\text{rei}}$  égal à 28 jours. La structure du vecteur de Floquet associé présente une forte activité en hiver et au début du printemps comme on peut le constater sur la Fig. 1.

<sup>1</sup>Intraseasonal Oscillations in a Barotropic Model with Annual Cycle, and Their Predictability, 1994

Ceci permet aux auteurs de conclure à une instabilité principale de 28 jours de temps de croissance caractéristique, à l'origine d'une oscillation intra-saisonnière, bien observée, de 40 jours de l'Hémisphère Nord (trouvée sur  $\Psi^F(t)$ ) et confirme son activité hivernale au sens large. La solution numérique du problème aux valeurs propres pour les exposants de Floquet confirme l'augmentation de l'activité pendant l'hiver et fournit un moyen de suivre la croissance et l'atténuation de l'activité intra-saisonnière via la structure du vecteur de Floquet. Les auteurs de l'article utilisent le vecteur de Floquet comme base pour des prédictions à 40 jours en utilisant un modèle auto-régressif de maximisation d'entropie (MEM).

L'idée de base de ces expériences de prédiction est que **le comportement du vecteur de Floquet est le même que celui de la composante intrasaisonnière du modèle non linéaire complet**. Or, la méthode MEM ne donne pas de résultats satisfaisants pour le modèle complet. Mais le fait que le vecteur de Floquet soit régulier, oscillant avec un spectre dominé par les pics à 40 et 365 jours rend la méthode MEM opérationnelle sur ce vecteur. D'après les auteurs cette méthode s'est révélée très efficace pour prévoir les anomalies de la fonction courant de Lagrange pendant l'hiver. Toutefois, il faut garder à

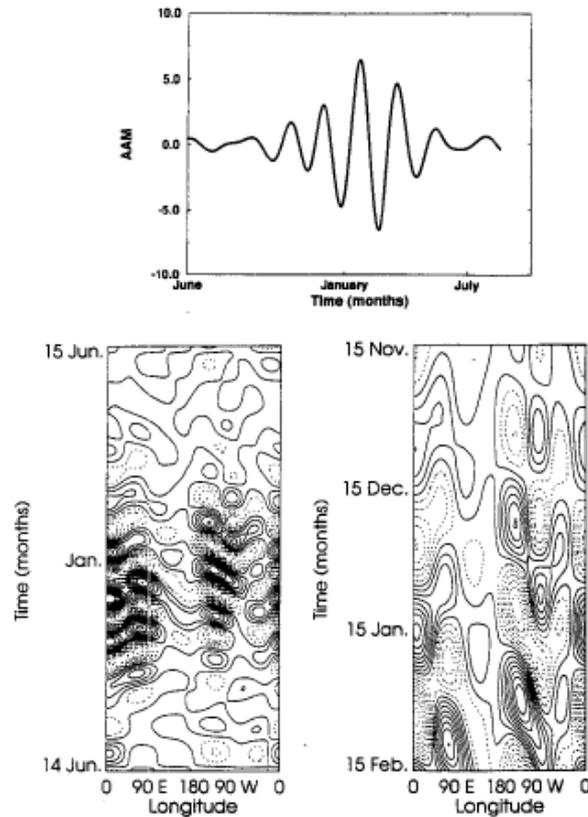


FIG. 6. (a) AAM (nondimensional) of the most unstable eigenvector during one year, with  $t_0 = 15$  June. (b) Associated eigenvector structure in two Hovmöller diagrams at  $50^\circ\text{N}$ . Values are converted to geopotential and span the range from  $-90$  to  $95$  m; contour interval is  $10$  m. (left) Eigenvector structure with 3-day time step for 1 year, with time on the ordinate and longitude on the abscissa. (right) Blowup of left panel, for 15 November–15 February.

FIG. 1 – Moment angulaire du premier vecteur de Floquet et structure de ce vecteur dans un diagramme de Hovmöller

l'esprit qu'on analyse l'évolution d'une perturbation le 15 juin par rapport au flot moyen annuel. Or il existe à tout instant des perturbations par rapport à ce flot moyen et il eut été intéressant que les auteurs étudient le vecteur de Floquet avec un autre point de

départ. Cependant la perturbation initiale étant prise dans une période de faible activité intra-saisonnière, l'analyse de Floquet permet d'étudier l'amplification d'une perturbation faible ce qui est cohérent avec la logique d'étude de stabilité.

## 2.1 Lorenz 63 et Lorenz périodique

On cherche à appliquer les idées de l'article précédent à un système beaucoup plus simple. Pour cela on cherche d'abord comment périodiciser un système "presque" périodique puis à appliquer la théorie de Floquet. Cette étude à l'avantage de préparer un algorithme d'optimisation dont on utilisera une version plus complexe au chapitre suivant.

Le système étudié est un système de dimension 3 : l'attracteur de Lorenz qui tient son nom du météorologue Edward Lorenz qui l'a découvert et étudié en détail. C'est une simplification à l'extrême d'équations régissant les mouvements atmosphériques. Lorenz les a promu afin de mettre en évidence sur un système simple la sensibilité aux conditions initiales qu'il avait observée sur des modèles numériques plus complets. Les équations correspondent aux modes principaux des équations de la convection de Rayleigh-Bénard dans lesquelles on considère un fluide entre deux plaques portées à deux températures légèrement différentes. Les deux plaques sont horizontales et la plaque la plus chaude est située en bas. On observe alors des tourbillons. Le comportement du fluide est très bien déterminé par les équations de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes, hypothèse d'incompressibilité du fluide, équation de la chaleur).

Ces équations donnent le système réduit suivant :

$$\begin{cases} \partial_t x = P_r(y - x) \\ \partial_t y = rx - y - xz \\ \partial_t z = -bz + xy \end{cases} \quad (17)$$

avec  $y$  qui représente la température et  $x$  la vitesse du fluide. Pour les valeurs suivantes des paramètres, on obtient un attracteur "papillon" :

$$\begin{cases} P_r = 10 \text{ nombre de Prandtl} \\ r = 28 \text{ nombre de Rayleigh} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases} \quad (18)$$

On peut voir l'attracteur résultant de la résolution de ce système sur la Fig.2 <sup>1</sup> Le modèle de Lorenz présente le double avantage d'être un modèle simple et déjà très étudié [Sparrow]. Le modèle n'est pas périodique, mais on peut considérer qu'avant une transition, il est pseudo-périodique. On va chercher dans un premier temps à le rendre périodique.

### a. optimisation des paramètres en vue de trouver un système périodique

Il existe plusieurs méthodes de stabilisation d'orbites périodiques instables. La possibilité de trouver une "fenêtre" dans la gamme de paramètres du modèle où l'orbite périodique devient stable a déjà été discutée [Barreto]. Cependant, la possibilité de trouver ce type de "fenêtre" dépend du nombre d'exposants de Lyapunov<sup>2</sup> positifs de l'attracteur et, si le premier est suffisamment grand, la recherche d'une telle "fenêtre" devient impossible<sup>3</sup>. Il existe aussi une méthode de stabilisation des orbites basée sur une série de transformations universelles, à savoir des réflexions et rotations dans l'espace qui s'applique aux système de petites dimensions [Schmelcher et Diakonov].

<sup>1</sup>On essaie de remettre au goût du jour les figures en relief à la Morse & Feshbach ; il suffit de tirer légèrement les commissures externes des yeux et de laisser gentiment les deux images se superposer pour voir émerger du relief.

<sup>2</sup>Voir le chap.4 pour une définition des exposants de Lyapunov.

<sup>3</sup>En ce qui concerne l'attracteur de Lorenz, le calcul des exposants de Lyapunov par *rodution* présenté dans le rapport du premier semestre montre que ce n'est pas le cas.

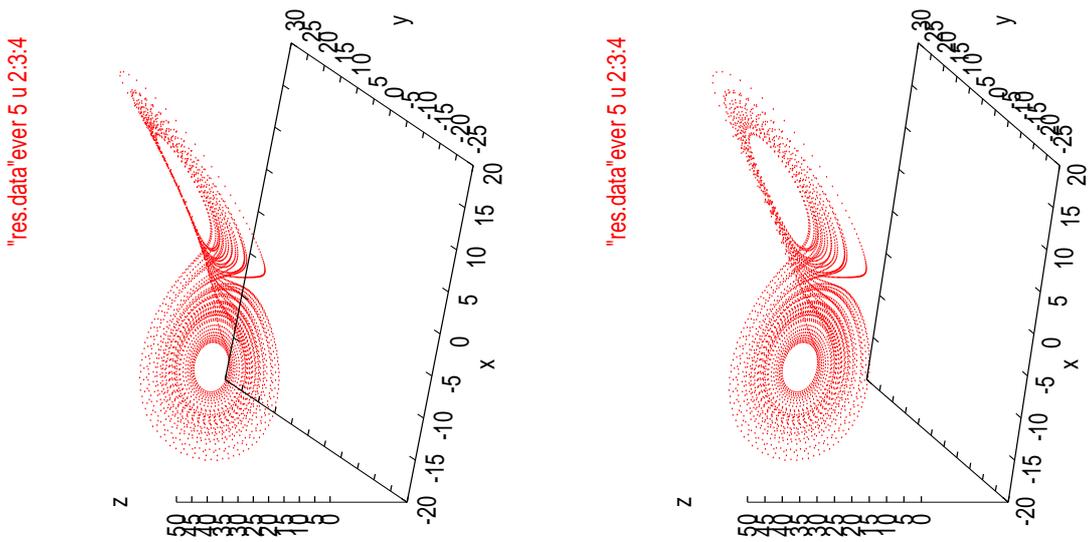


FIG. 2 – Attracteur de Lorenz.

On choisit ici de réaliser un algorithme d'optimisation permettant de trouver la valeur du coefficient de Rayleigh pour lequel le système de Lorenz est périodique.

Pour cela l'algorithme cherche tout d'abord une valeur du point courant  $\vec{\eta}(t)$  qui repasse à proximité du point de départ  $\vec{\xi}_0$  puis utilise une routine Lapack donnant le vecteur  $X$  qui minimise la norme de :

$$\|AX - B\| \quad (19)$$

avec dans un premier temps  $A = \partial_r \vec{\eta}(t)$ ,  $X = \delta r$  et  $B = \vec{\eta}(t) - \vec{\xi}_0$ , ( $r$  étant le Rayleigh).

Le programme :

- Commence le calcul de la trajectoire à partir d'un point initial donné à la main.
- Repère le premier minimum de la distance au point initial.
- Réalise la procédure d'optimisation du minimum : calcul de  $\delta \vec{\xi}_0$  et  $\delta r$
- Calcule les exposants de Floquet et la matrice  $Z$  (éléments propres de  $\Phi(T, 0)$ ).
- Actualise les conditions initiales :  $\vec{\xi}_0 = \vec{\xi}_0 + \delta \vec{\xi}_0$  et  $r = r + \delta r$
- Imprime les valeurs des variables correspondant à la pseudo-période optimisée dans un fichier sortie (point initial, point final, Rayleigh, distance, pseudo-période,  $Z$ , multiplicateurs de Floquet).
- Réitère la procédure jusqu'à ce que la distance de fermeture de l'orbite soit inférieure à une valeur seuil de  $10^{-30}$ .

Ce système est périodique pour :

$$\begin{cases} P_r = 10 \\ r = 24.07 \\ b = \frac{8}{3} \end{cases} \quad (20)$$

Pour vérifier que ce résultat ne dépend pas du point initial, on effectue une optimisation en quatre dimensions (sur le Rayleigh et sur le point initial  $\vec{\xi}$ ).

On a alors :

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\Delta \vec{\eta}(t)}{\Delta \vec{\xi}} & \frac{\Delta \vec{\eta}(t)}{\Delta r} \end{bmatrix} \quad (21)$$

et

$$X = \begin{bmatrix} \delta \vec{\xi} \\ \delta r \end{bmatrix} \quad (22)$$

On reconnaît en  $\frac{\Delta \eta(\vec{t})}{\Delta \vec{\xi}}$  la valeur du propagateur.

On peut vérifier la convergence de l'algorithme sur la Fig. 3 où est reportée la valeur du Rayleigh à chaque itération de la procédure d'optimisation. Celui-ci converge vers 23,9.

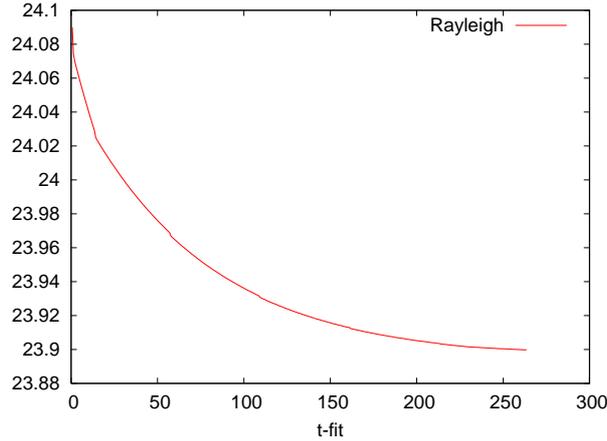


FIG. 3 – Évolution du Rayleigh au cours de la procédure d'optimisation

*Remarque : Dans le programme les choses sont un peu plus compliquées que la description précédente. Le pas de temps utilisé pour les calculs doit être réactualisé à chaque boucle d'optimisation pour que la pseudo-période recalculée soit un multiple du pas de temps et que le pas de temps devienne de plus en plus petit à l'approche du minimum de la distance entre le point initial et le point final. On trouvera en annexe finale une discussion sur ces problèmes pratiques du fit.*

## b. visualisation des vecteurs de Floquet

On visualise sur la Fig.4 les trois vecteurs de Floquet de ce système périodique. Évidemment, étant donné la simplicité du système et sa faible dimension, il n'y a rien de particulier à observer sur la structure des vecteurs de Floquet. On peut noter que le calcul du premier vecteur de Floquet correspond à la valeur propre du propagateur qui tend rapidement vers 0; pour rendre ce vecteur périodique, il faut ainsi le multiplier par  $10^4$  à chaque tour, et on est très vite limité par la précision machine. Ceci est lié à la dimension de l'attracteur qui est bidim comme déjà remarqué dans le premier rapport, d'où le calcul d'un wronskien sous-dimensionné. Cependant, cette méthode très générale peut être appliquée à des systèmes de dimensions plus élevées pour lesquels les défauts de périodicité sont moins importants et où le système périodique diffère peu du système initial<sup>1</sup>. C'est notamment le cas dans l'article de M.Ghil où le système périodique consiste en une moyenne de la fonction courant de Lagrange sur plusieurs années. En fait, le principal problème de la périodicisation de l'attracteur de Lorenz avec la méthode précédente est que l'attracteur obtenu n'a plus rien à voir avec l'attracteur de Lorenz initial chaotique. On cherche dans ce qui suit une autre approche pour exploiter le "caractère périodique" de l'attracteur.

<sup>1</sup>cf. l'étude d'un modèle économique en fin de rapport

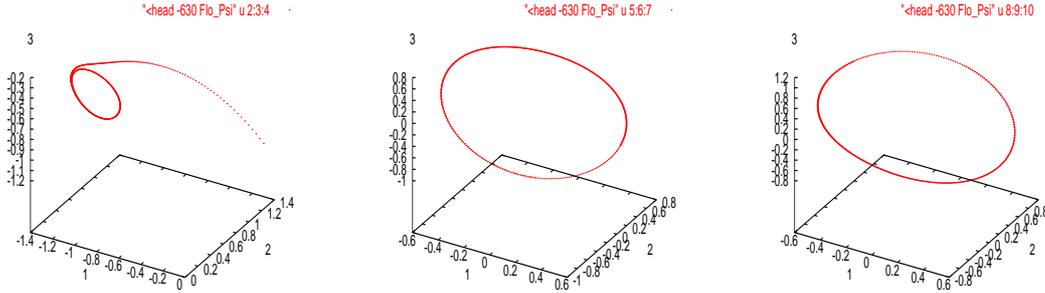


FIG. 4 – Vecteurs de Floquet du Lorenz périodique (de gauche à droite : multiplicateur presque nul, unité et instable).

### 3 Décomposition de l'attracteur de Lorenz en orbites instables

Dans le but de réaliser des prévisions météorologiques au delà de la prévision déterministe, un certain nombre de théories des systèmes dynamiques ont été développées en exploitant les particularités des attracteurs de systèmes chaotiques. Il y a déjà plusieurs années, des chercheurs ont mis en parallèle les blocages atmosphériques observés en météorologie et les trajectoires ayant des conditions initiales proches d'un point fixe d'un attracteur chaotique. La théorie des équilibres multiples de la circulation atmosphérique [Charney & De Vore] qui en a résulté a permis de classifier les régimes atmosphériques quasi stationnaires. Chaque équilibre instable forme une région de l'espace des phases où la trajectoire ralentit et reste "piégée" pendant une durée qui peut être déterminée. La pertinence de cette hypothèse a été confirmée par la comparaison des résultats d'analyse de cluster de la solution d'un modèle barotrope avec ses équilibres [Mo & Ghil].

Ces théories se basent sur l'exploration de la structure de l'espace des phases et notamment du nombre de points d'équilibre instable qu'il comporte. Cependant, même s'il existe de multiples points d'équilibre instable dans les attracteurs des modèles climatiques, leurs zones d'influence couvrent une très faible part de l'attracteur total et on ne sait pas dire quoi que ce soit du comportement du système entre deux passages près de l'un de ces points.

En faisant l'analogie avec les rapprochements faits pour la théorie des équilibres instables (blocage atmosphérique/point d'équilibre de l'attracteur), on peut se demander s'il n'existe pas d'autres types de "solutions particulières" des attracteurs qui pourraient être associés à des "comportements atmosphériques particuliers". On cherche notamment à étudier des régimes quasi-périodiques ou des apparences intermittentes de modes oscillatoires qui pourraient être expliquées comme un mouvement autour d'un cycle limite instable.

C'est dans cette perspective que cette étude analyse la structure de l'attracteur de Lorenz au moyen d'orbites quasi périodiques. Il est à noter que cette recherche, tout comme les précédentes citées, s'inscrit dans la droite ligne des idées de Poincaré qui a le premier montré l'intérêt d'analyser un attracteur en ses composantes périodiques.

#### 3.1 Recherche des orbites quasi-périodiques de l'attracteur de Lorenz

La recherche des orbites quasi-périodiques de l'attracteur de Lorenz a déjà été entreprise par Zoldi et Greenside qui utilisent une méthode de Newton pour localiser les orbites périodiques instables de l'attracteur. Cependant les conditions initiales pour cette méthode doivent être choisies très proches de l'orbite périodique à trouver car sinon la méthode diverge. On lui préfère une méthode proche de celle de Kazantsev, qui utilise

une minimalisation de fonctionnelle, en exploitant le calcul du propagateur.

**Recherche d'orbites :** On recherche tout d'abord des pseudo-périodes assez grossières. Pour cela on réalise un algorithme qui :

- Se donne un point initial de la trajectoire,
- Repère les transitions et attribue un code A ou B permettant de connaître les orbes successivement décrites (si le code barre devient trop long, on sort de la boucle),
- Repère le premier minimum de la distance au point initial si cette distance est inférieure à une distance critique (choisie à 30 dans le programme) et si la trajectoire a déjà effectué une transition d'une orbe à l'autre,
- Décale le point d'arrivée d'un incrément de temps et l'utilise comme nouveau point initial de la boucle.

Ce premier programme permet d'établir un fichier de données dans lequel on trouve notamment pour chaque pseudo-période trouvée :

- le point de départ  $\vec{\xi}$
- le "code barre"
- la pseudo période
- le point final
- la distance entre le point initial et le point final

On donne à la Fig. 5 la répartition des orbites trouvées en fonction de leurs pseudo-périodes. Le zoom montre avant fit la largeur des pseudo-périodes trouvées. qu'après le fit ces périodes sont très resserrées.

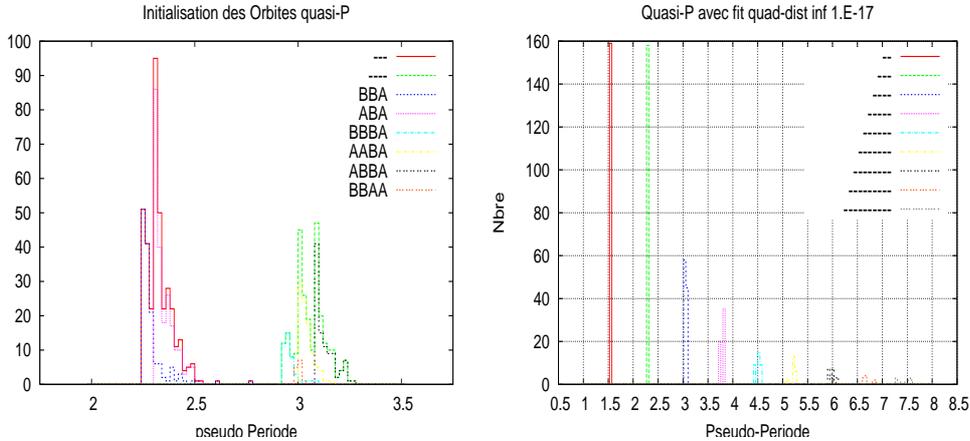


FIG. 5 – Histogrammes donnant la répartition des pseudo-orbites en fonction de leurs pseudo-périodes : à gauche, zoom sur les séquences de 3 et 4 lettres avant fit ; à droite, après fit.

**Optimisation des orbites :** On réalise un programme qui, pour chaque pseudo-période précédemment sélectionnée, réalise une optimisation permettant de minimiser la distance entre point initial  $\vec{\xi}$  et point final  $\vec{\eta}(t)$ . Cette optimisation est réalisée par la méthode de Newton et à l'aide d'une routine Lapack qui permet de minimiser la norme :

$$\|AX - B\| \quad (23)$$

On a :

$$A = \begin{bmatrix} \Delta \vec{\eta}(t) & \frac{\partial \vec{\eta}(t)}{\partial t} \Big|_{t=T} \\ \Delta \vec{\xi} & \end{bmatrix} \quad (24)$$

et

$$X = \begin{bmatrix} \delta \vec{\xi} \\ \delta T \end{bmatrix} \quad (25)$$

On reconnait en  $\frac{\Delta \eta(\vec{t})}{\Delta \vec{\xi}}$  la valeur du propagateur.

Le programme :

- Commence le calcul de la trajectoire à partir du point initial donné par le fichier input.
- Repère les transitions et attribue un code permettant de connaître les orbes successivement décrites.
- Repère le premier minimum de la distance au point initial si cette distance est inférieure à une distance critique et si la trajectoire a déjà effectué une transition d'une orbe à l'autre.
- Réalise à la procédure d'optimisation du minimum : calcul de  $\delta \vec{\xi}$  et  $\delta T$
- Calcule les exposants de Floquet et la matrice Z des vecteurs propres de  $\Phi(T, 0)$ .
- Actualise les conditions initiales :  $\vec{\xi} = \vec{\xi} + \delta \vec{\xi}$  et  $T = T + \delta T$
- Réitère la boucle d'optimisation jusqu'à trouver une condition de sortie.
- Recommence la procédure avec la pseudo-période non fitée suivante dans le fichier input.

Dans le programme les choses sont un peu plus compliquées que la description précédente. Le pas de temps utilisé pour les calculs doit être réactualisé à chaque boucle d'optimisation pour que la pseudo-période recalculée soit un multiple du pas de temps et que le pas de temps devienne de plus en plus petit à l'approche du minimum de la distance entre le point initial et le point final.

Les conditions de sortie du programmes sont :

- Les conditions initiales optimisées donnent lieu à une trajectoire ayant un code barre différent.
- Après plusieurs essais d'optimisation en raffinant le pas de temps, la distance ne converge pas.
- La distance est inférieure à  $10^{-17}$ . On imprime alors les valeurs des variables correspondant à la pseudo-période optimisée dans un fichier sortie (point initial, point final, code barre, distance période, Z, multiplieurs de Floquet).

La Fig. 5 à droite donne les histogrammes des périodes après fit, ce qui permet de constater le resserrement des pics trouvés. On peut voir sur la Fig 6 une peusdo-orbite avant et après optimisation.

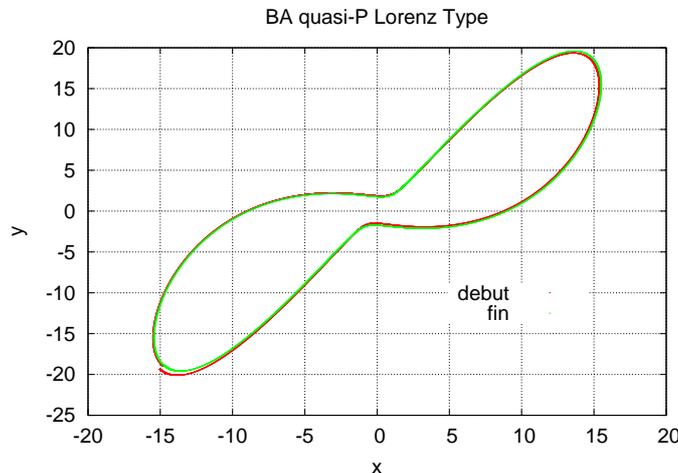


FIG. 6 – Orbite BA avant optimisation en rouge et après optimisation en vert.

### 3.2 Répartition des orbites dans l'attracteur de Lorenz

On donne à la Fig. 7 la répartition des orbites trouvées en fonction de leurs périodes pour l'ensemble de 1200 orbites initiales. On constate une nette amélioration dans la distribution temporelle des périodes par rapport aux pseudo-périodes non optimisées de la Fig. 5.

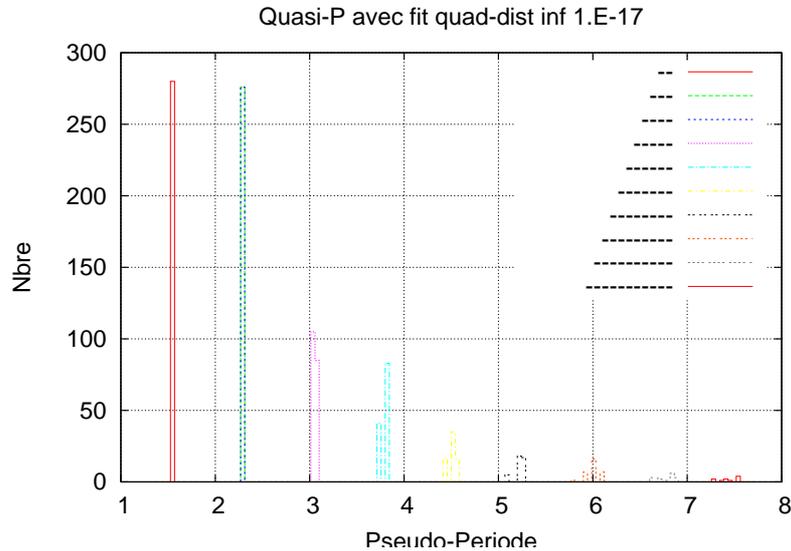


FIG. 7 – Histogramme donnant la répartition des orbites optimisées en fonction de leurs pseudo-périodes

**Répartition des orbites dans l'espace des phases :** Une première remarque qui n'était pas évidente a priori est que toutes les pseudo-orbites ayant un même code barre ont convergé vers la même orbite finale. On montre ces orbites périodiques à deux et trois lettres en 3D sur la Fig 8 : cette fois, la forme de l'attracteur est bien captée.

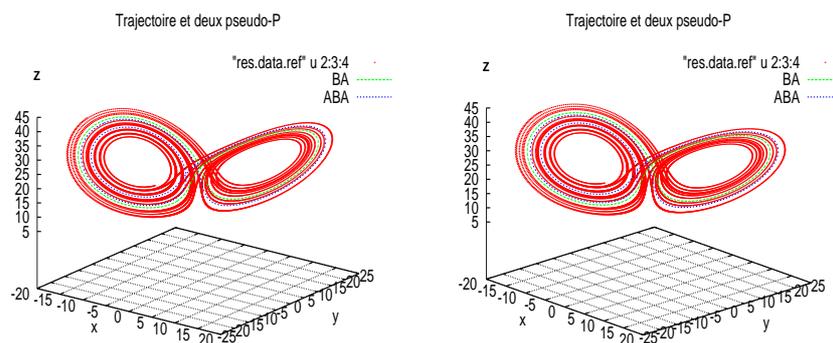


FIG. 8 – Visualisation des orbites BA et ABA au sein de l'attracteur en 3D

Par ailleurs l'attracteur de Lorenz possède une symétrie évidente : la transformation  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$  ne change pas le système. Il en résulte que pour toute orbite asymétrique le résultat obtenu par symétrie est également une orbite, comme on le vérifie sur la Fig 9 des orbites à trois lettres :

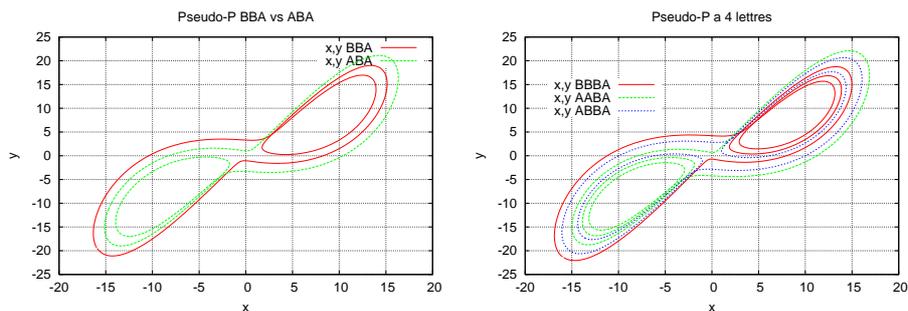


FIG. 9 – Orbites à 3 lettres et orbites à 4 lettres

On peut encore le vérifier sur les orbites à quatre lettres, sur la Fig 10 :

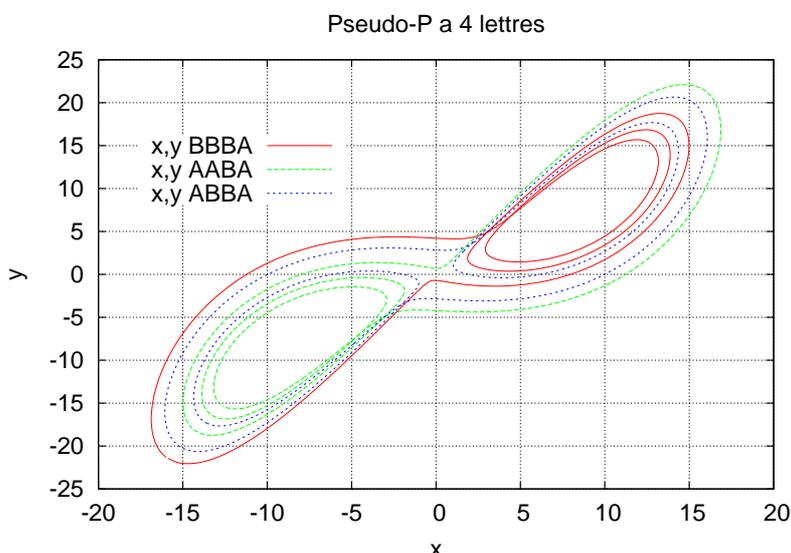


FIG. 10 – Orbites périodiques à quatre lettres

La question de la représentativité d'un attracteur par ses composantes périodiques oblige à ne pas en oublier, et donc à prendre un ensemble de points initiaux denses dans l'espace des phases. On constate sur la Fig. 11 que la répartition des points initiaux choisis et sélectionnés grâce à cette procédure balaie une zone assez grande de l'espace des phases. Cependant ce n'est peut-être pas suffisant pour prétendre avoir détecté toutes les orbites ayant un code barre de longueur donnée...et pas non plus suffisant pour affirmer qu'il n'y a qu'une orbite par code barre (ce qui est le cas pour les quelques centaines d'orbites de code de longueur inférieure à 11 qui ont été trouvées par l'algorithme). On peut ainsi s'étonner de l'absence de la période à 4.5 dans la Fig 7.

**Densité et temps de résidence autour des orbites trouvées** La principale différence entre l'étude des points stationnaires et l'étude des orbites instables périodiques est que les premiers sont en nombre fini alors que les secondes sont en nombre infini. Une définition des systèmes chaotiques [Devaney] utilise même la densité des orbites périodiques dans un sous-espace  $V$  pour dire que le comportement du système  $y$  est chaotique. On ne peut donc pas trouver toutes les orbites mais tout au plus exploiter l'information contenue dans celles de plus faible période.

De même qu'au paragraphe précédent, cette première série de données n'est pas exhaustive et on peut voir clairement sur la section de Poincaré de la Fig 12 où les orbites sont en vert et les points d'une trajectoire en rouge qu'il peut manquer des orbites

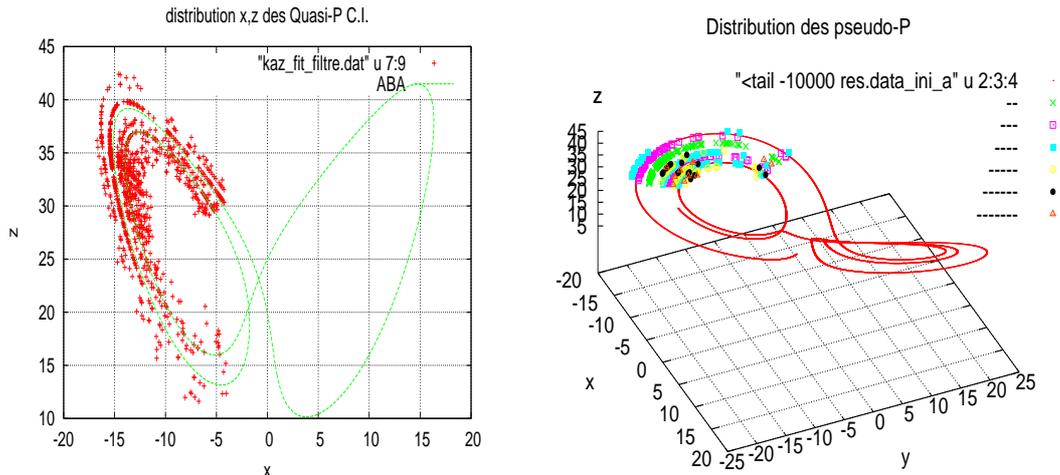


FIG. 11 – Répartition des points initiaux des orbites optimisées

pour interpréter la trajectoire. La raison de la recherche de ces orbites instables est le

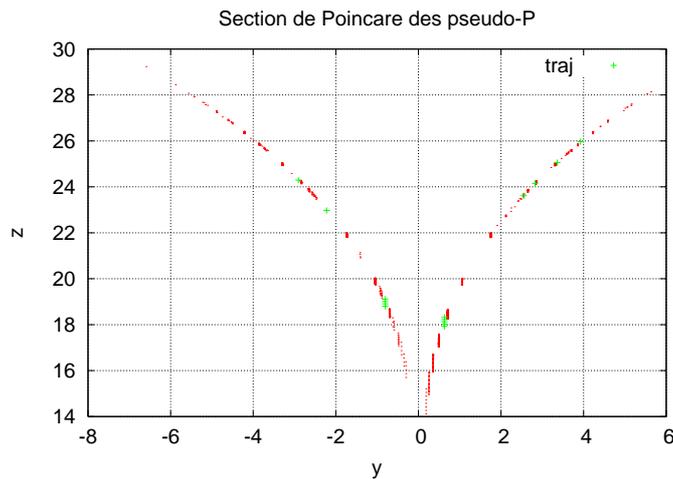


FIG. 12 – Orbites instables dans une section de Poincaré

fait que la périodicisation du Lorenz par modification des paramètres a abouti à un système périodique trop simple et peu ressemblant au système initial. On a donc cherché à définir des périodes moins triviales. L'inconvénient est qu'il y a maintenant une infinité de périodes. Se pose donc la question de la validité de l'approximation périodique à proximité des orbites trouvées. Kazantsev s'est intéressé à la définition d'un temps de résidence autour des orbites. Cette méthode consiste à comptabiliser le nombre de passages complets de la trajectoire dans un petit tube très mince autour de chaque orbite. La répartition statistique de ces orbites, les relations entre les coordonnées dans des sections de Poincaré et la période, la répartition des périodes et la recherche des orbites manquantes donne lieu à de nombreuses études [Kazantsev, Auerbach, Cvitanovic]. L'idée sous-jacente est que le comportement du système est principalement déterminé par les orbites les plus fréquentes et les plus stables. Complétons enfin ce paragraphe qui pose plus de problème qu'il n'en résout en montrant avec la Fig 13 comment une trajectoire passe dans les bassins périodiques BA et ABA<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> note A11 : on ne peut s'empêcher de rapprocher cette représentation de celle des systèmes quantiques, et d'associer ces composantes périodiques à des états de base d'un ensemble statistique.

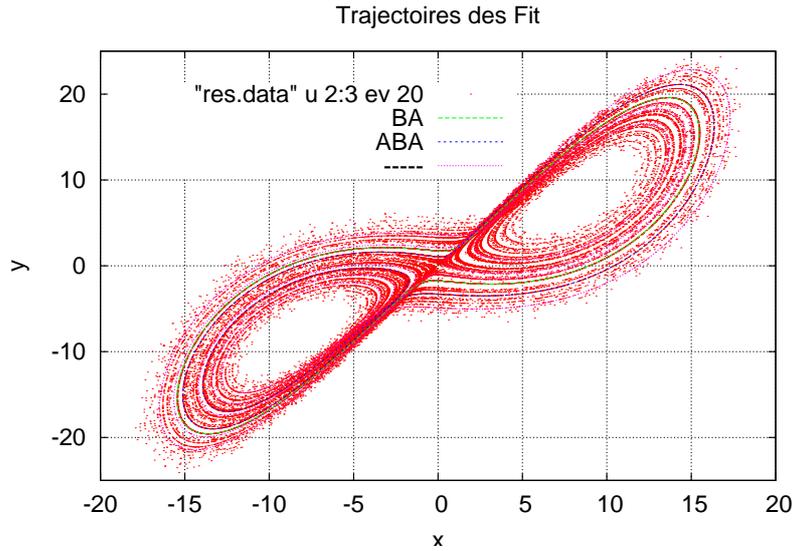


FIG. 13 – Orbites périodiques et trajectoire en x,y

## 4 Analyse de stabilité des orbites et de l'attracteur

On cherche à étudier des apparences intermittentes de régimes quasipériodiques qui pourraient être expliquées comme un mouvement autour d'un cycle limite instable. Des observations de tels types de régimes se trouvent dans tous les systèmes physiques tels que l'atmosphère ou l'océan. Bien que notre étude soit incomplète du point de vue statistique, on peut déjà se demander quelles informations retirer des orbites trouvées sur la prédiction de l'évolution du système.

### 4.1 Théorie de l'analyse asymptotique de Lyapunov

On introduit ici quelques éléments d'analyse de stabilité qui seront utiles par la suite.

Si  $M$  est une matrice  $m * n$  réelle ou complexe, alors il existe une factorisation de la forme :

$$M = U \Sigma V^\dagger,$$

où  $U$  est une matrice  $m \times n$ ,  $\Sigma$  une matrice ayant des nombres non-négatifs sur la diagonale et des zéros ailleurs et  $V^\dagger$  est la matrice conjuguée de  $V$ , une matrice  $n * n$ . On a de plus  $U U^\dagger = V V^\dagger = I$ . On appelle cette factorisation **décomposition en Valeurs Singulières** de  $M$ .

Par convention, on ordonne les valeurs singulières par ordre décroissant et alors  $\Sigma$  est uniquement déterminée par  $M$ .

L'estimation de l'amplitude de la prévision de l'erreur d'un système est toujours un problème intéressant dans le domaine de la prédiction. La croissance de l'erreur traduit, du point de vue théorique, l'instabilité du modèle. Pour un phénomène chaotique, les trajectoires issues de conditions initiales proches divergent localement au sein de l'attracteur. Le calcul des exposants de Lyapunov permet de mesurer le taux de divergence entre deux trajectoires.

On peut généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles. Quantitativement, deux trajectoires dans l'espace des phases écartées de  $\delta \mathbf{Z}_0$  divergent de

$$|\delta \mathbf{Z}(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta \mathbf{Z}_0| \quad (26)$$

Le taux de divergence peut être différent pour différentes orientations du vecteur de séparation initial. C'est pourquoi il y a tout un "spectre des exposants de Lyapunov".

Un système m-dimensionnel possédera m exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)t} \quad (27)$$

On se réfère souvent au plus grand des exposants car il détermine la prédictabilité d'un système dynamique. Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un des  $\lambda_i$  soit positif, mais il faut également que la somme des  $\lambda_i$  soit négative. En effet, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé. On n'aurait alors plus un attracteur de faible dimension, et donc plus affaire à du chaos déterministe.

La définition des **exposants de Lyapunov** se base sur le résultat du théorème d'Osedece qui stipule que la limite :  $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(t, 0)^\dagger \Phi(t, 0))^{\frac{1}{2t}}$  existe et vaut une matrice L. Les exposants de Lyapunov sont alors :

$$\lambda_i = \ln(l_i(t)) \quad (28)$$

où les  $l_i$  sont les valeurs propres de la matrice L.

Cette définition traduit bien le fait qu'une perturbation initiale  $\langle x(0) | x(0) \rangle$  devienne  $\langle x(t) | x(t) \rangle = \langle x(0) \Phi^\dagger \Phi x(0) \rangle$  et permet de hiérarchiser les directions de perturbation.

On peut tout aussi bien considérer la décomposition en valeurs singulières du propagateur à tout instant :

$$\Phi(t, 0) = U(t) \text{diag}(w_i(t)) V^\dagger(t) \quad (29)$$

On remarque alors qu'on a à tout instant :  $\Phi^\dagger \Phi V = \text{diag}(w_i^2) V$  donc  $w_i^2$  est valeur propre de  $\Phi^\dagger \Phi$  avec pour vecteur propre  $V_i$ . Et comme  $\Phi^\dagger \Phi = V^\dagger w^2 V$ , il revient donc au même de définir les exposants de Lyapunov globaux par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(w_i(t)) \quad (30)$$

Par ailleurs, on peut montrer<sup>1</sup> que les exposants de Lyapunov sont les parties réelles des valeurs propres du propagateur pour un système linéaire invariant et les parties réelles des exposants de Floquet pour les systèmes de Floquet.

Enfin on remarque que :

$$\sum \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\text{Det}(\Phi(t, 0))) \quad (31)$$

où le déterminant peut être calculé soit par SDV  $\text{Det}(\Phi(t, 0)) = \text{Det}(\text{diag}(w_i(t)))$ .

---

<sup>1</sup>M. Farkas, Periodic Motions, Springer-Verlag, New York, 1994

## 4.2 Exposants de Floquet des orbites

Il semble assez difficile de tirer des conclusions quant à la répartition des exposants de Floquet des différentes orbites. La Fig 14 les montre en fonctions des périodes. Il est troublant de constater que l'exposant le plus faible, que l'on a associé à la dimension de l'attracteur qui disparaît semble vouloir ne disparaître qu'avec plus de difficulté des longues orbites, ce qui semble contradictoire; on peut émettre l'hypothèse que ce sont les transitions qui fait augmenter cet exposants : nouvelle question à explorer.

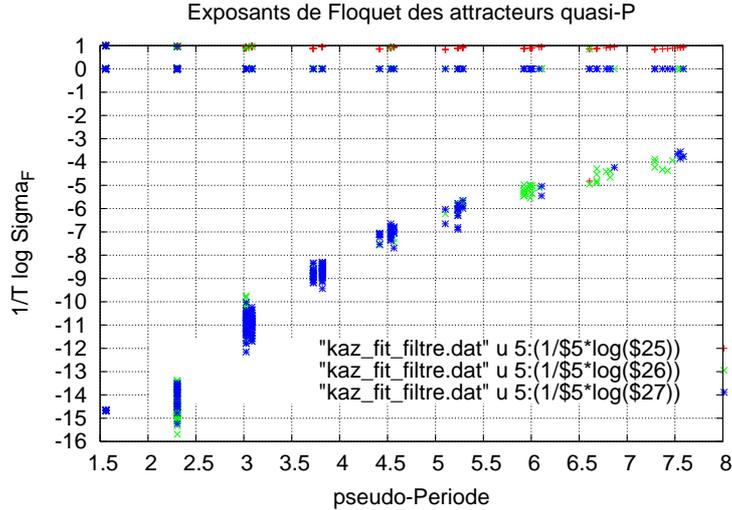


FIG. 14 – Exposants de Floquet en fonction de la période de l'orbite.

On peut remarquer sur la Fig 15 que les plus grands exposants de Floquet pour chaque orbite ont une valeur assez proche du plus grand Lyapunov global de l'attracteur.

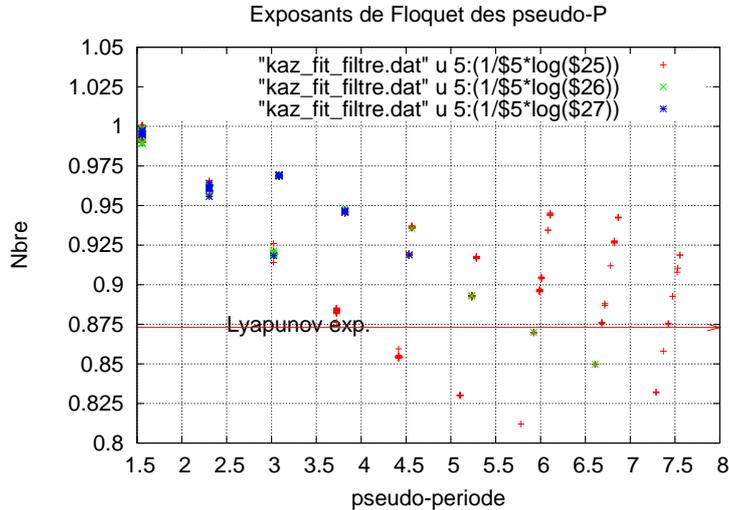


FIG. 15 – Exposant de Floquet le plus instable en fonction de la période de l'orbite.

On constate sur la Fig. 16 que les exposants de Floquet correspondants au mode neutre trouvés sont assez dispersés autour de zéro.. Dans le cas d'une orbite strictement périodique on s'attend à avoir zéro. Il y a donc un écart à la périodicité, particulièrement affirmé pour l'orbite BA. Mais étant donné les problèmes du fit qui ont été rencontrés, ceci peut être du à un effet numérique (cf annexe). La corrélation entre la stabilité des orbites et leur fréquence dans l'attracteur a été étudiée par Kazantsev<sup>1</sup>. On cherche ici à

<sup>1</sup>Cependant la corrélation semble dépendre aussi du nombre de transitions contenues dans les orbites et

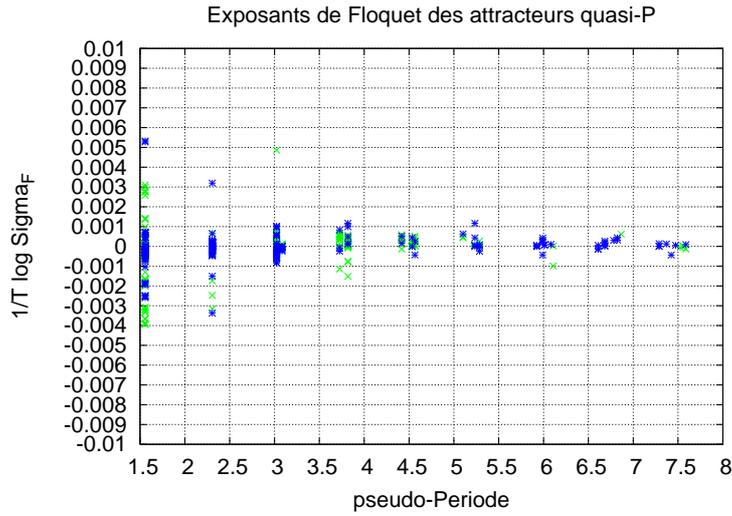


FIG. 16 – Exposant de Floquet "nul" en fonction de la période de l'orbite.

aller plus loin dans l'analyse de stabilité en détaillant le contenu des vecteurs de Floquet.

### 4.3 Exploitation des vecteurs de Floquet en vue d'une prévision météorologique

Nous pouvons considérer qu'un régime quasi périodique s'installe lorsque la trajectoire approche une orbite périodique instable. Le temps moyen de résidence dans ce régime est déterminé par la valeur du plus grand exposant de Floquet. Cependant, la valeur de l'exposant de Floquet ne fait que donner l'enveloppe du tube de solutions dans lequel va évoluer la trajectoire perturbée. La structure du vecteur de Floquet donne a priori une indication supplémentaire puisque sa valeur permet de situer l'écart à la trajectoire de référence à l'intérieur du tube.

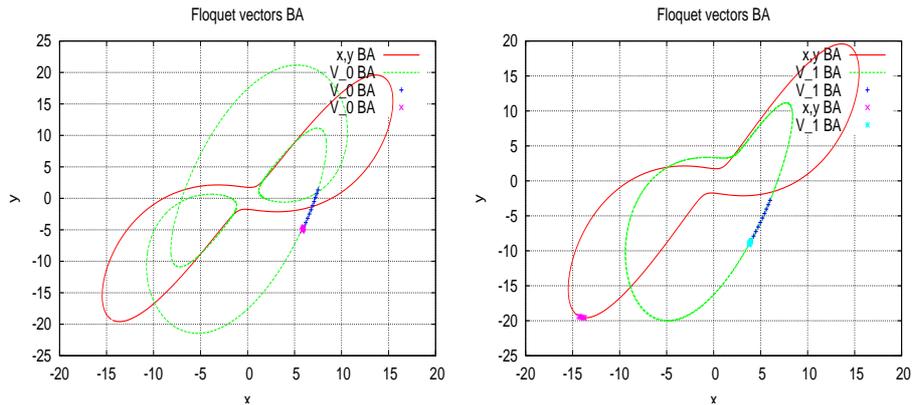


FIG. 17 – Orbite et vecteurs de Floquet d'une séquence BA.

On trace dans les Fig.17,18,19 et 20 les vecteurs de Floquet correspondant à l'exposant nul ( $V_0$ ) et à l'exposant positif (multiplicateur supérieur à 1). Les particularités de ce dernier vecteur sont a priori les plus intéressantes car les plus amplifiées par l'exposant. Sur la Fig. 17 on constate malheureusement que le vecteur de Floquet  $V_1$  de la séquence BA ne présente pas de particularités. Il semble que la structure se complexifie à partir des orbites à 3 lettres mais il est assez difficile de dégager quelque chose de significatif à

---

de leurs longueurs donc le résultat n'est pas trivial. Par ailleurs, d'étranges "trajectoires" semblent relier les exp max.

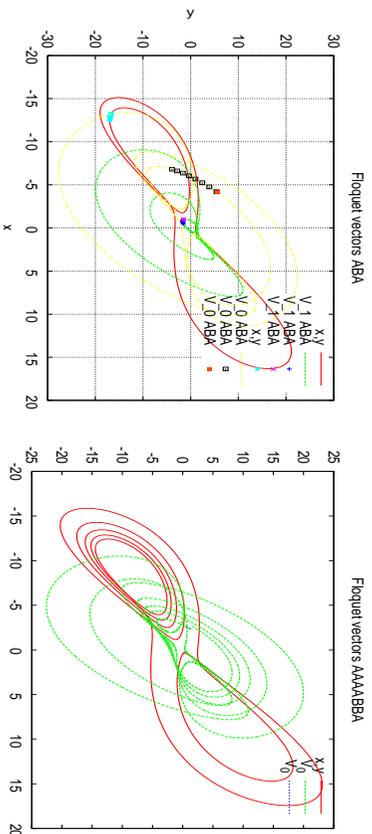


Fig. 18 – Orbite et vecteurs de Floquet d'une séquence ABBA.

ce stade. Ainsi, contrairement à l'observation de Michael Ghil, on ne peut systématiser

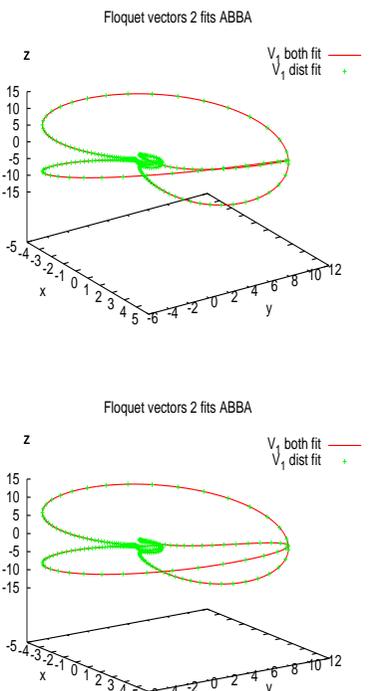


Fig. 19 – Vecteur dominant de Floquet d'une séquence ABBA en 3D (voir annexe sur les deux fits).

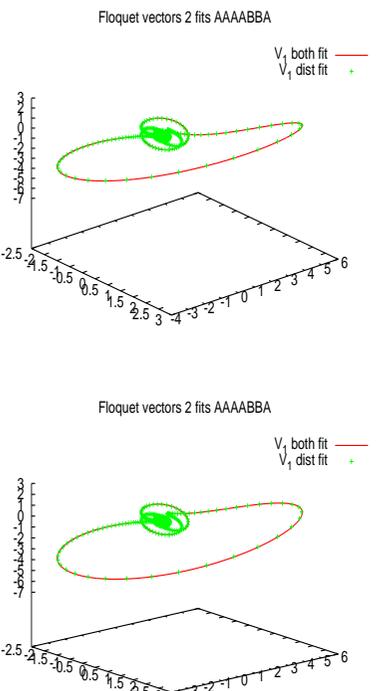


Fig. 20 – Vecteur dominant de Floquet de la séquence AAAABBA en 3D (*idem*).

pour un système chaotique de ressemblance entre un vecteur de Floquet et une trajectoire. Il serait utile de déterminer les conditions où ce principe s'applique..

## 5 Conclusion et perspectives

**Application à un modèle économique en dimension 8** Les codes de calculs générés par ce travail ont un champ d'application assez vaste. Prenons le cas d'un modèle économique à 8 dimensions quasi-périodique représentant des phases de croissance récession successives. Il a été observé sur ce cycle que l'ajout d'une perturbation sur la trajectoire peut engendrer soit une phase de récession bien plus importante soit permettre la reprise d'une croissance plus forte après la récession selon le type et l'instant de la perturbation. Peut-on relier l'effet de la perturbation à la structure d'un vecteur de Floquet qui serait plus ou moins "excité" par la perturbation? Un étudiant en économie<sup>1</sup> a utilisé l'algorithme d'optimisation précédent de Mini\_ker et a optimisé les paramètres en vue de rendre le système totalement périodique. On voit sur la Fig.21 la représentation du cycle sur 3 dimensions. L'objectif suivant sera de déterminer si les différents comportements du système vis à vis d'une perturbation résultent de l'excitation de différents modes de Floquet. La connaissance de la structure des vecteurs de Floquet pourrait permettre de déterminer la perturbation optimale à appliquer en phase de récession afin d'obtenir une phase optimale de croissance dans le cycle suivant.

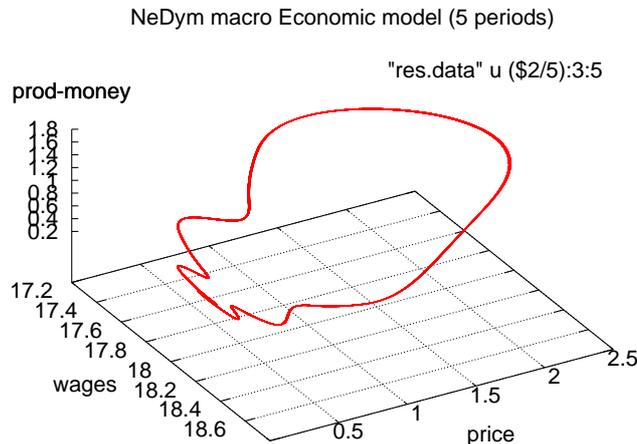


FIG. 21 – Représentation du cycle économique sur 3 des 8 dimensions

**Applications à la climatologie** On a cherché dans cette étude à caractériser l'attracteur de Lorenz via ses orbites périodiques instables. Cette étude n'a pas permis de dégager une signification claire de la décomposition de Floquet de ces orbites. Cependant l'application de cette technique sur des modèles géophysiques aux dérivées partielles plus complexes pourrait donner lieu à des analyses de stabilité d'orbites ayant des formes plus complexes donc plus pertinentes. Les résultats de l'étude par décomposition de Floquet du système économique à 8 variables présenté ci-dessus s'avère semble mieux correspondre au phénomène étudié par M.Ghil à propos des oscillations intrasaisonnières.

Dans le cas d'une réponse positive pour ce modèles, de nombreuses questions restent ouvertes. Peut-on extraire des orbites dans les systèmes géophysiques réels? Ces orbites seraient-elles suffisamment stables pour qu'une étude perturbative soit pertinente? La réponse à ces question pourrait donner lieu à une approche prédictive de la météo par analyse d'orbite et donc considérablement améliorer la fiabilité des prévisions à longs termes.

---

<sup>1</sup>note All sic : et félicitations à Stéphane ...

## Références

- M. Farkas, *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994
- Christopher Strong, Fei-Fei Jin, Michael Ghil, 1994 *Intraseasonal Oscillations in a Barotropic Model with Annual Cycle, and Their Predictability*
- Pierre Montagnier, Raymond J. Spiteri, Jorge Angeles 2004 *The control of linear time-periodic systems using Floquet-Lyapunov theory*
- Yakubovic et Starzhinshii, 1975 *Linear Differential Equations with Periodic Coefficient*
- Evgueni Kazantsev, 1998 *Unstable periodic orbits and attractor of the Lorenz model*, INRIA
- Alain Lahellec, 2006 *Manuel pratique de Mini\_ker*
- Collaboration TEF-ZOOM, *Le Formalisme d'Evolution par Transferts : une introduction au découpage de modèle et à l'analyse de rétro-actions*, CIRED, LMD, LE
- M. Ghil, 2001 *Hilbert problems for the geosciences in the 21<sup>th</sup> century*
- B. Legras, M. Guil 1985 *Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability.*
- S. Bharadwaj and K.D. Mease *A New Invariance Property of Lyapunov Characteristic Directions*
- Farmer J.D., Sidorowich J.J 1987 *Predicting chaotic time series*, Physical Review Letter
- E. Kalnay, M.Kananlutsu et W.E. Baker 1990 *Global numerical weather prediction at the National Meteorological Center* Bulletin of American Meteorological Society 71, 1410-1428
- Casdagli M. 1989 *Nonlinear prediction of chaotic time series* Physica D, 35, 335-356.
- Keppenne C.L. and M. Ghil 1993 *Adaptive filtering and prediction of noisy multivariate signals. An application to subannual variability in atmospheric angular momentum* Journal of Bifurcation and Chaos. 3, 625-634
- Seidman A.E. 1981 *Averaging techniques in long-range weather forecasting*
- Shukla J. 1985 *Predictability* Advances in Geophysics
- E.Baretto, B.R.Hunt, C.Grebogi, J.Gunaratne, I.Procaccia 1987 *Exploring chaotic motions through periodic orbits* Physical Review Letters
- C.Sparrow 1982 *The Lorenz Equation : Bifurcations, Chaos and Strange Attractors* Springer
- P.Schmelcher, F.K.Diakonov. *A general approach to the localization of unstable periodic orbits in chaotic dynamical systems* submitted to Physical Review
- C.Conrardy, A. Lahellec 2006 *Éléments d'analyse des systèmes non linéaires*
- S.M.Zoldi, H.S.Greenside *Spatially localized unstable periodic orbits. submitted to Physical Review Letters*
- J.G.Charney, J.G.De Vore 1979 *Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking. Journal of the Atmospheric Sciences*
- K.Mo, M.Ghil 1988 *Cluster analysis of multiple planetary flow regimes* Journal of Geophysical Research.
- R.L.Devaney 1987 *An introduction to chaotic dynamical systems*
- P.Cvitanovic 1995 *Dynamical averaging in terms of periodic orbits*

### sites internet

[http://en.wikipedia.org/wiki/Singular\\_value\\_decomposition](http://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition)

[http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos\\_fract/Lyapunov/Exposant.html](http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/Lyapunov/Exposant.html)

<http://spacetown.free.fr/chaos/lorenz.php>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Floquet-Theorem>  
<http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Kazantsev/lyapunov/main.html>  
[http://www.atmos.ucla.edu/tcd/RESEARCH/research\\_lfv.html](http://www.atmos.ucla.edu/tcd/RESEARCH/research_lfv.html)  
<http://astrosurf.com/luxorion/meteo-massesdair.htm>  
[http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos\\_fract/Lorenz/lorenz.html](http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/Lorenz/lorenz.html)  
<http://bill.srn.arizona.edu/classes/496yikedata.htm>

## 6 Annexe : Le problème du fit des orbites périodiques

Comme tout fit, ceux mis en jeu ici ont leur particularité. On montre sur la Fig 22 la réalisation d'un fit, avec les pics vers le bas représentant le raffinement de calcul près du minimum, et montrant comment l'algorithme recherche des pas plus petits. On a eu ainsi

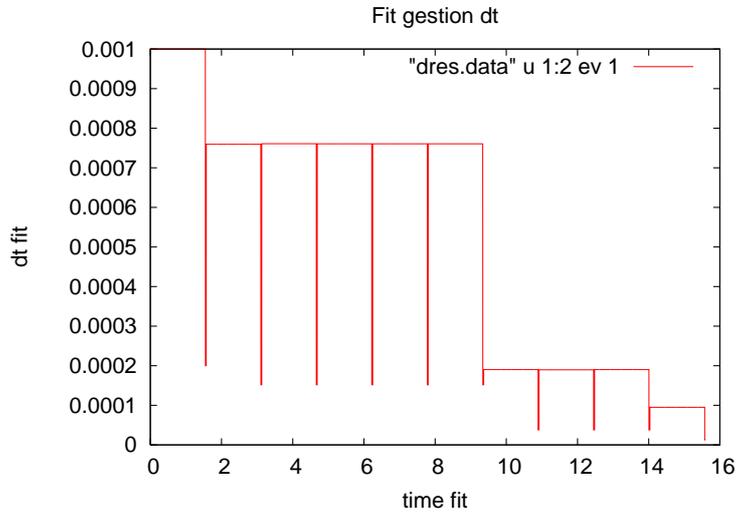


FIG. 22 – Gestion du pas de temps dans la recherche de minimum

du mal à réaliser un fit meilleur que  $10^{-18}$  de la distance quadratique au minimum, et alors on n'obtient un multiplicateur égal à l'unité qu'à une précision difficilement meilleure que  $10^{-3}$  ! D'où l'idée de fitter non pas sur une distance minimum entre états mais sur la vel, celle-ci s'avérant coïncider avec le V.P. associé à 1 du propagateur maille. On calcule ainsi un écart sur cette vitesse :

```

set_probe
< eqn: mu_dist = quad_dist(np,dot_eta(1),dot_eta_bef(1));
>;

```

avec la variable de Mini\_ker **dot\_eta** qui est fournie avec la version 102<sup>1</sup>. Il faut déterminer les sensibilités associées pour minimiser cette fois l'écart entre les vel =  $\partial_t \eta = g(\eta)$  :

$$g(\eta(T + \Delta T) + \Phi_T \Delta \eta_0) - g(\eta_0 + \Delta \eta_0) \quad (32)$$

que l'on développe :

$$g(\eta(T)) + A_T [\partial_t \eta \Delta T + \Phi_T \Delta \eta_0] - (g(\eta_0) + A_0 \Delta \eta_0) \quad (33)$$

ce qui fait que le nouvel opérateur de sensibilité est à présent

$$\wp_{\text{vel}} = [A_T \Phi_T - A_0; A_T \partial_t \eta] \quad (34)$$

<sup>1</sup>cf manuel, le calcul de cette variable a été ajouté pour permettre ce calcul en phase avec les autres variables.

qui se simplifie si on accepte de remplacer  $A_0$  par  $A_T$ , qui convergent l'une vers l'autre<sup>1</sup>. On trouve alors une simple multiplication de l'opérateur sur la distance par  $A_T$  pour passer au fit sur l'écart entre vels :

$$\varrho_{\text{vel}} = A_T[\Phi_T - I; \partial_t \eta] = A_T \varrho_{\text{dist}} \quad (35)$$

L'application de cet algorithme s'avère encore décevante, le fit est moins rapide, on converge vers les mêmes solutions, cf Fig 19 et 20 où on a superposé deux vecteurs de Floquet déterminés par chaque méthode.

Des études systématiques ont montré que la précision sur le propagateur est un des déterminants du problème. Alors, en supprimant le raffinement du pas de temps en se rapprochant du minimum, c'est-à-dire en gardant un pas constant, la détermination est meilleure (sur le multiplicateur). On constate en effet que le propagateur varie fortement près du minimum, comme les trois premières composantes diagonales de la Fig 23 : De

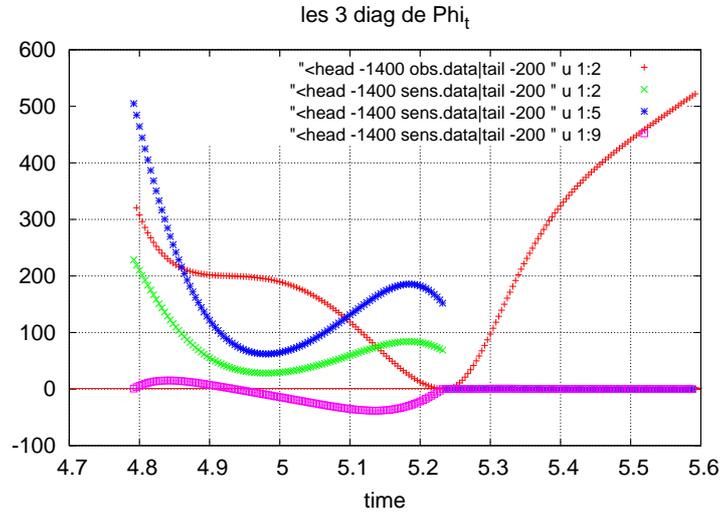


FIG. 23 – Distance quadratique et valeurs de trois coefficients diagonaux du propagateur près du minimum.

plus lorsque l'on fitte sur la vel, on linéarise sur de plus grands accroissements, ce qui peut expliquer la lenteur initiale de la convergence par rapport au premier fit sur la distance.

La clé semble donc de déterminer un pas de temps visant bien le passage par un minimum, mais assurant de même la précision suffisante sur  $\Phi$ .

Finalement, on est arrivé à une variante de fit sur la distance comme la plus satisfaisante. Elle consiste à rechercher ce minimum en déplaçant le point initial dans une section de Poincaré choisie comme l'hyper-plan perpendiculaire à la vitesse. Ceci se fait donc plus simplement encore que par une méthode de Newton puisqu'on a à résoudre le problème 23,24,25, mais avec dans  $A$  la ligne supplémentaire correspondant à l'hyperplan  $\langle \partial_t \eta | \delta X \rangle = 0$ . La nouvelle matrice  $A$  étant carrée, on a la résolution d'un système linéaire au lieu d'un problème de minimisation.

La vitesse de convergence obtenue avec ce nouvel algorithme est très comparable à celle de la minimisation, mais on tombe sur un multiplicateur s'approchant de  $10^{-12}$  à  $10^{-20}$  de l'unité. Sans trop comprendre pourquoi ça marche si bien, c'est donc la solution à retenir.

<sup>1</sup> on a cependant permis de conserver une `alpha_ref` dans le code, gérée par un flag `ZdotEta`, cf manuel et exemples.

## 7 Annexe : Vecteurs de Floquet de composantes périodiques de l'attracteur de Lorenz

On rassemble ici quelques uns des vecteurs déterminés. De façon générale, si les vecteurs ne “ressemblent pas” à l'attracteur, on y retrouve pour chaque vecteurs une transition entre deux plans grossièrement parallèles aux deux ailes de l'attracteur. On peut aussi déceler une croissance faible au démarrage des trajectoires à plusieurs orbites A, avec une croissance brutale correspondant à la transition.

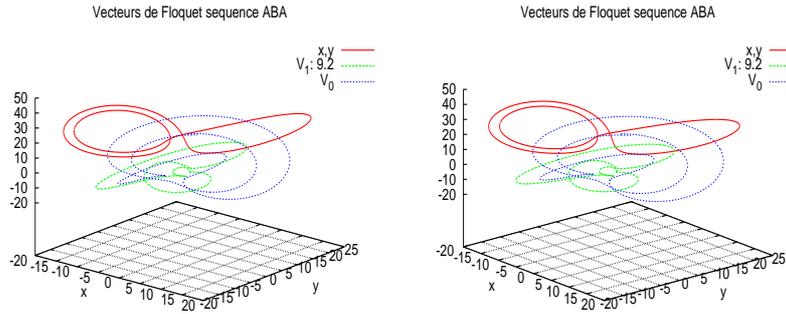


FIG. 24 – Vecteur dominant de Floquet de la séquence ABA en 3D.

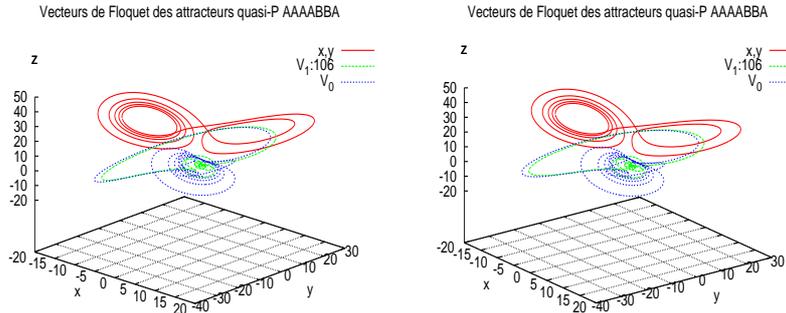


FIG. 25 – Vecteur dominant de Floquet de la séquence AAAABBA en 3D).

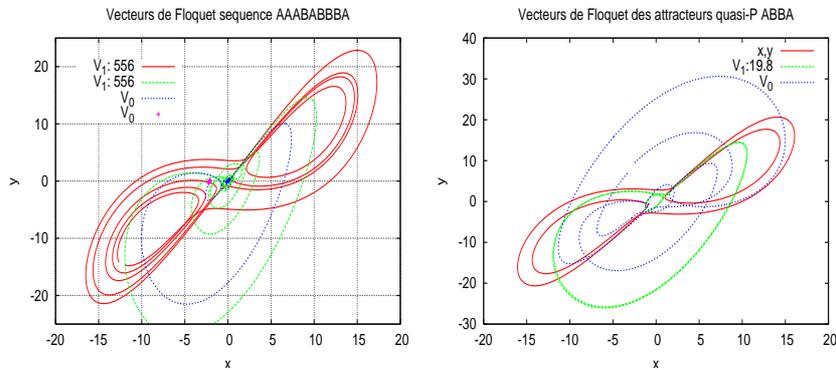


FIG. 26 – Vecteurs de Floquet à 9 et 4 lettres.

**Sur la symétrie** En plus de la symétrie évidente liées aux séquences elles-mêmes symétriques, on observe une propriété particulièrement intéressante avec déjà la

composante BA :

- le vecteur neutre ( $\sigma = 1$ ), la symétrie  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y$  est conservée (cf Fig. 13 ;
- par contre, pour le vecteur dominant ( $\sigma = 4.7$ ), c'est au contraire la symétrie  $z \rightarrow -z$  qui est constatée (pas de Fig.) ;

Une recherche plus systématique s'impose donc, ouvrant là encore de vertigineuses perspectives de compréhension intime de ce modèle particulièrement simple ...