Gains de rétroaction et modèle de Lorenz-63

Mars 2007

Illustrations complémentaires à l'article pour les Euro Physics Letters.
brouillon de recherche de la collaboration TEF-ZOOM[1]

Pour rafraîchir les esprits, le fameux "effet papillon", qui prouve que la poésie, l'art et la science sont l'avenir de l'Homme ...

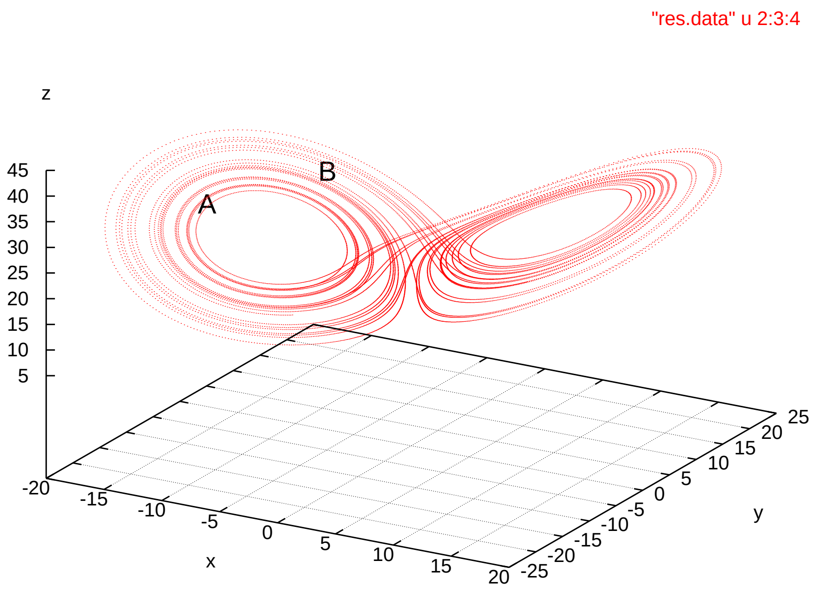

FIG. 1 – L'attracteur de Lorenz.

Le système est ici donné avec une seule variable de transfert $\varphi = xy$, en conformité avec la présentation dans la *Euro Physics Letters*. Cette variable-test correspond à l'interaction mouvement $\times$ température - sous les premiers modes de la fonction courant de Lagrange et d'une différence de température entre particules ascendantes et subsidentes de l'écoulement :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t x = s(y-x) \\ \partial_t y = (rx - y - xz) \\ \partial_t z \ = -bz + xy \end{array}\right. \quad \xrightarrow{Feedback} \quad \left\{\begin{array}{l} \partial_t x = s(y-x) \\ \partial_t y = (rx - y - xz) \\ \partial_t z \ = -bz + \varphi \\ \varphi = xy \end{array}\right. \tag{1}$$

L'effet-en-retour non-L du système sur φ est calculé dans Mini_ker avec l'extension **Psi_t, ko_pert_Type**= 3, et dépend bien sûr du point de démarrage.

[1] All1, avec des contributions de StepH.

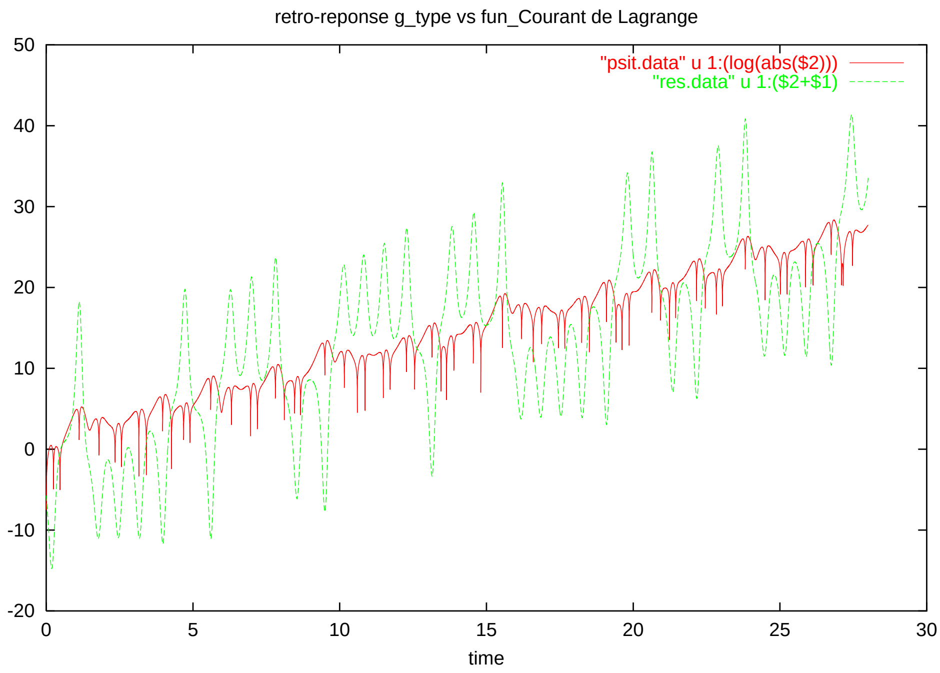

FIG. 2 – Gain non-L$(0, \tau)$.

On voit clairement en coordonnées-log la croissance en moyenne le long du premier exposant de Lyapunov ($\lambda_L \simeq 0.95$), et le lacet d'amplitude accrue précédent chaque transition.

Le SLT-gain est définit comme la fonction dynamique de gain du système stationnaire au point circulant de la trajectoire de base, démarrant à l'instant de son calcul le long de la trajectoire non-L du transfert correspondant. On a ainsi

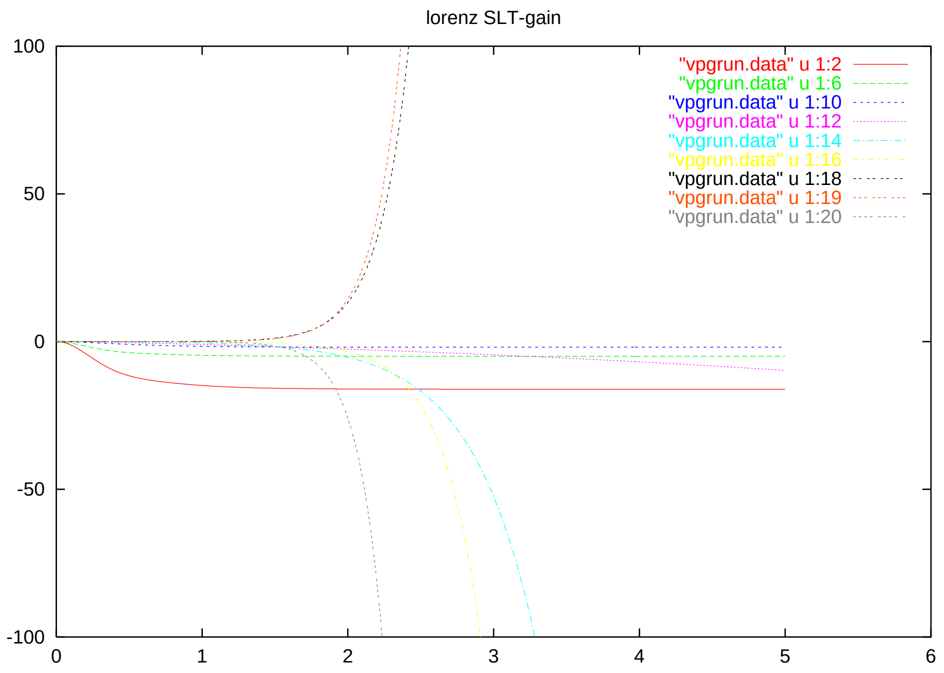

FIG. 3 – SLT-gain.$(t, t + \tau)$

la réponse de ce transfert à une perturbation step appliquée au reste du système en boucle ouverte. Cette fonction a été calculée à partir des éléments propres du système et inversé en suivant la méthode décrite dans le papier *Effluents*.

On remarque que le gain comporte toujours des pôles réels, avec trois comportements caractéristiques

- négatif avec asymptote finie aux points 2, 6, 10 ;
- négatifs explosifs aux points 12, 14, 16 puis 20 ;
- ce dernier rompant avec une séquence positive explosive en 18 et 19 ;

nous verrons que la séquence brève positive est caractéristique d'une fin de transition entre les deux ailes de l'attracteur.

Même chose mais avec l'effet-en-retour stationnaire.

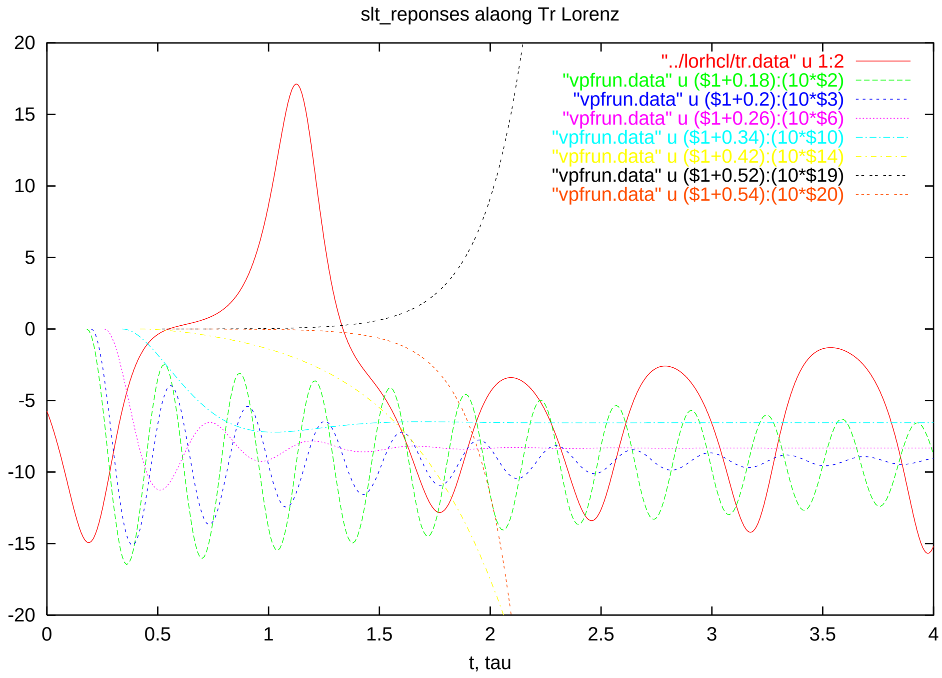

FIG. 4 – SLT-effet-en-retour$(t, t+\tau)$.

On peut remarquer que les SLT-gains ne comportent pas de mode oscillant, alors qu'ils apparaissent dans l'effet-en-retour. Cela signifie que le transfert choisi produit les oscillations, qui disparaissent en boucle ouverte.

On va regarder plus en détail ce qui se passe dans une orbite d'une part (point A), et à l'approche, ici, d'une double transition (point B) sur une trajectoire (fig 5).

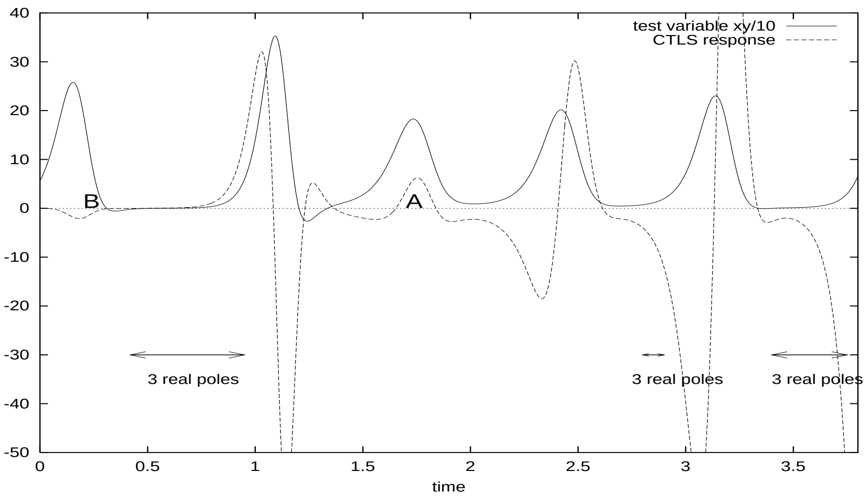

FIG. 5 – Portion de trajectoire d'étude choisie.

Sur la figure 6, on démarre au point A et on examine une séquence de sept SLT-effet-en-retour à un step d'amplitude 10 (SLT-eff). La première réponse est oscillante peu amortie, puis en 2, de grande amplitude et de grande période ; la période revient à sa valeur la plus fréquente en 3, puis retour à amortissement pour les systèmes suivants.

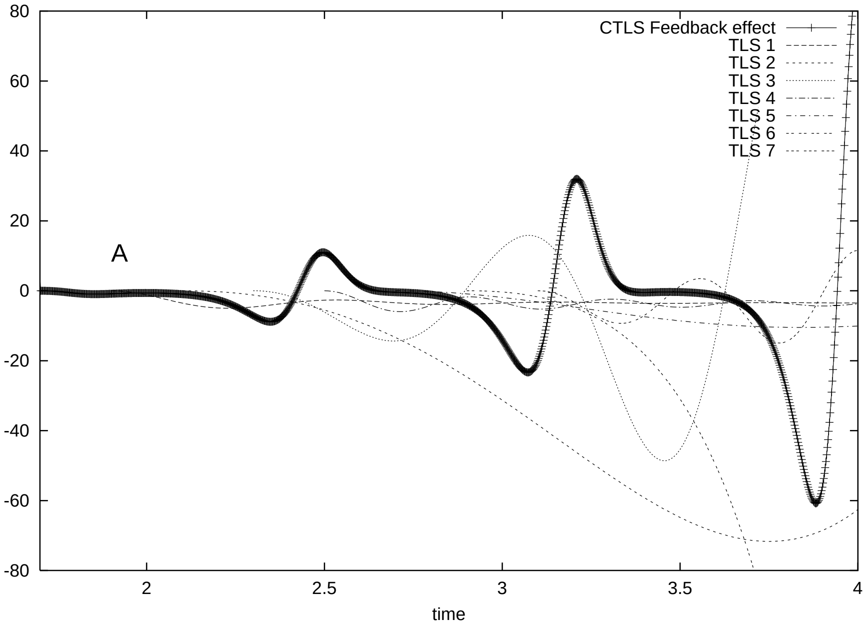

FIG. 6 – Orbite et CTLS.

Regardons à présent la trajectoire complète des pôles pour voir si la séquence est la même à chaque orbe (fig. 7). On montre les amplitudes complexes de l'effet-en-retour, correspondant à un pôle réel et une paire conjuguée pouvant dégénérer. Là au moins, on voit bien ce qui se passe ! Chaque orbe amorce une crise instable qui démarre par un triplet de pôles réels dont un instable, et se poursuit par une oscillation divergente qui finit par s'amortir. Cette séquence se produit avec une croissance du temps de passage par le triplet réel, et correspond à l'accroissement de la partie oscillante de la réponse SLTC.

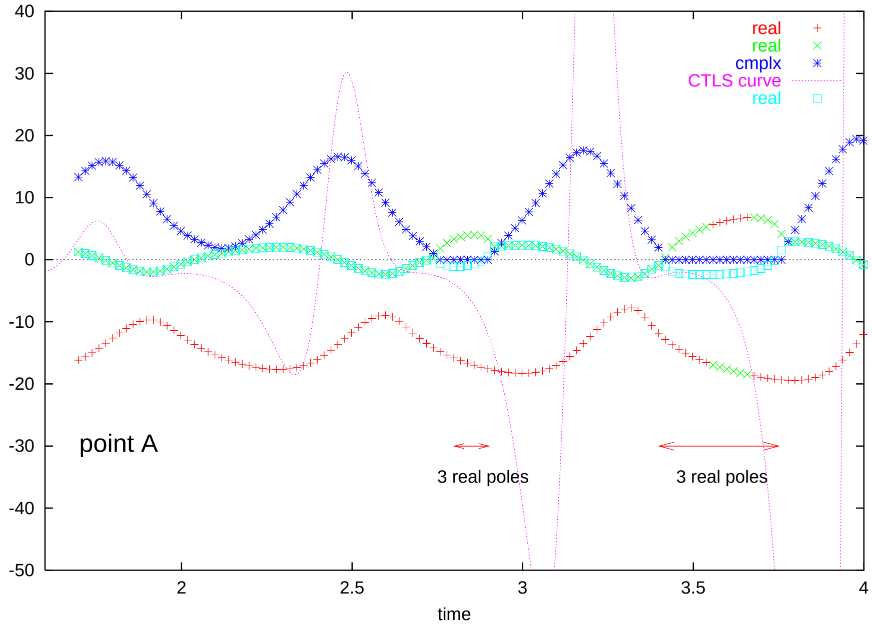

Fig. 7 – Le CTLS et la population des pôles.

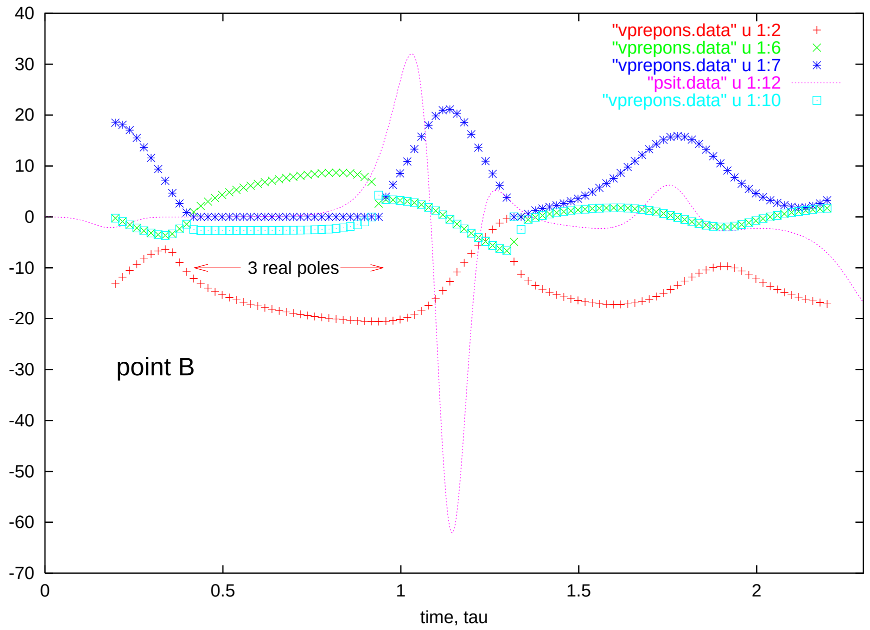

Fig. 8 – SLT-effet-en-retour$(t, t+\tau)$.

La figure 8 montre la même population des pôles de l'effet-en-retour à l'approche de la transition (point B). On voit comment le régime oscillant fait place à trois exponentielles dont une instable, puis pendant la transition, on constate que le régime oscillant permet au système de se récupérer pour continuer à orbiter, mais sur l'aile opposée de l'attracteur.

0.1 Autre portion de la trajectoire (celle de PRL)

La figure 9 montre un partie de la trajectoire située sur l'aile gauche de l'attracteur, qui va orbiter quatre fois avant une transition. Du fait de la symétrie du modèle par rapport à l'axe z, le transfert $\varphi = xy$ ne montre guère clairement la transition, alors qu'elle est très nette sur la fonction SLTC de l'effet-en-retour. Cette fonction est marquée par un effet de lacet négatif-positif

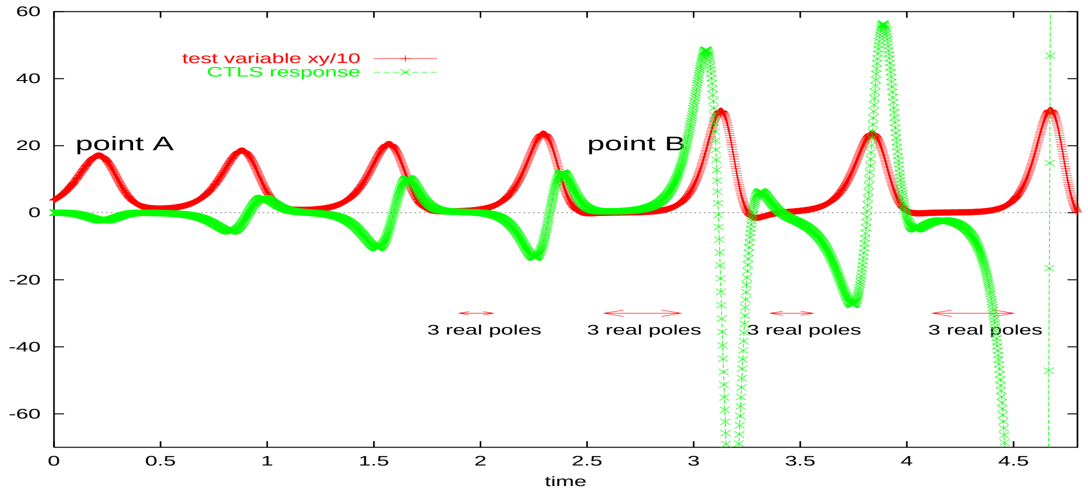

FIG. 9 – Test variable trajectory in the Lorenz model and Feedback Response (see text).

à chaque orbite, d'amplitude régulièrement croissante, en suivant d'ailleurs la croissance exponentielle du Lyapunov. Un système stable montrerait au contraire une décroissance asymptotiquement exponentielle.

La fig. 10 montre la tendance à long terme de la réponse mettant en évidence ce comportement chaotique, puisque on l'a tracée en log. Pour voir le lien avec les transitions, la trajectoire de la variable x est donnée, tournée le long du Lyapunov pour faciliter la lecture des collocations ($x \to x + \lambda_L t$). La réponse logarithmique

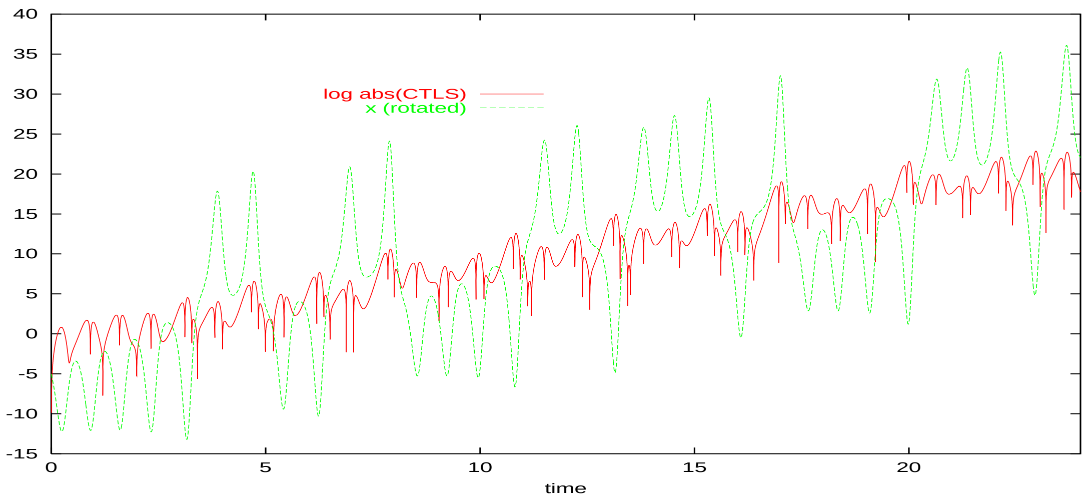

FIG. 10 – Long term feedback response (log scale) and x trajectory rotated along the Lyapunov exponent.

a une croissance moyenne linéaire, suivant la pente du Lyapunov ($\lambda_L \simeq 0.95$). L'amplitude des lacets croit aussi exponentiellement.

Un intérêt évident de l'analyse du SLTC-eff concerne sa faculté à détecter les transitions. D'une part, comme on le voit sur le figure 10 l'amplitude du lacet est plus forte avant une transition, mais plus étonnamment, le signe du lacet s'inverse, avec une première montée positive (fig. 9). Ceci justifie *a posteriori* le choix du transfert, car comme on le verra plus loin, aucun autre transfert ne possède cette intéressante particularité.

trajectoire démarrant loin de l'attracteur.

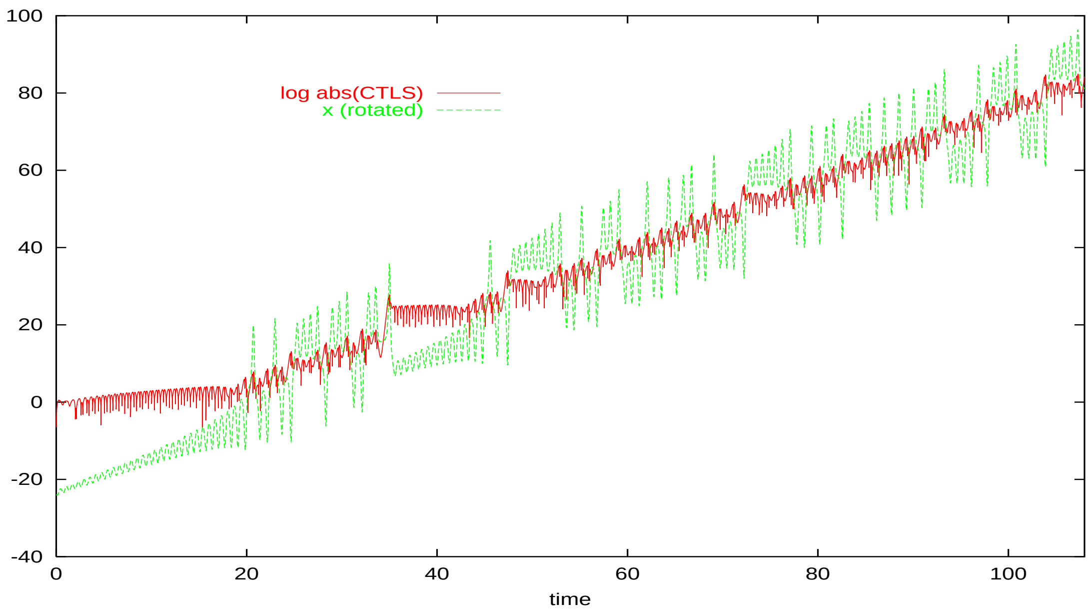

FIG. 11 – Same as fig. 10 with initial conditions out of the attractor basin.

La figure 11 donne la courbe semblable à 10 en partant cette fois de conditions initiales éloignées du bassin d'attraction. Il est remarquable que cette même fonction montre l'attraction du bassin tout entier par une réduction sensible de la croissance exponentielle. Et ceci chaque fois que le point courant s'éloigne du bassin, comme aux temps : 35, 48 et 73. On ainsi jeté une lueur d'interprétation sur l'attracteur de Lorenz avec ignorance asumée des équations du système, avec une mise en évidence d'un effet attracteur dans le bassin, et d'une bonne détection des transitions. Ceci montre bien que l'aspect dynamique du gain non-L est essentiel. On peut se demander alors si la dynamique plus fine de l'attracteur peut aussi bien être interprétée.

ZOOM sur des orbites avant transition

Examinons à présent quatre orbites précédents une transition. Sur la fig. 12, on a tracé la trajectoire en x, y avec des barres d'erreurs. Celles-ci sont en log de l'effet-en-retour SLTC, avec une distinction de signe : horizontales pour les amplitudes au-dessous de la croissance moyenne exponentielle du Lyapunov, verticales au-dessus. Les deux ailes de l'attracteur sont orbitées négativement.

Pour donner une interprétation dynamique de l'attracteur, on peut considérer le transfert xy comme une force s'exerçant sur le point courant. Perturber positivement cette force veut dire tirer le point courant vers l'apogée. Lorsque le système répond positivement, la perturbation accélère vers l'apogée sur les parties de l'orbite s'éloignant du point central, ou décélère le point retournant vers le point central. On apellera donc cet effet **fuyant** - le point central.

Une réponse négative montre que x et y répondent avec des signes opposés, effet que nous appellerons tournant, et qui correspond à une attraction orbitale par un des deux points de convection stationnaire du Rayleigh-Bénard. Au plus près du centre, l'orbite est purement oscillante, d'où on peut conclure à cet effet d'attraction par le point central de l'orbite.

Entre les points 2 and 3, on voit clairement la fin de la décélèration de fuite, suivie de l'acccélération sur le versant opposé de l'orbite (points 4 à 5). Cet effet de fuite est suivie d'une forte rotation menant le point courant près du point central, mais la décélération provoquée par son approche (6) n'est plus suffisante pour éviter la transition. L'effet de fuite vers l'apogée de la dernière orbite corrspond à la montée du lacet de l'effet-en-retour qui mène à une transition.

Le parcourt de l'aile opposée est l'occasion d'un effet de fuite encore fort, qui après une orbite montre un fort effet rotatif en fin de la trajectoire, qui se trouve amorcer une deuxième transition (hors figure).

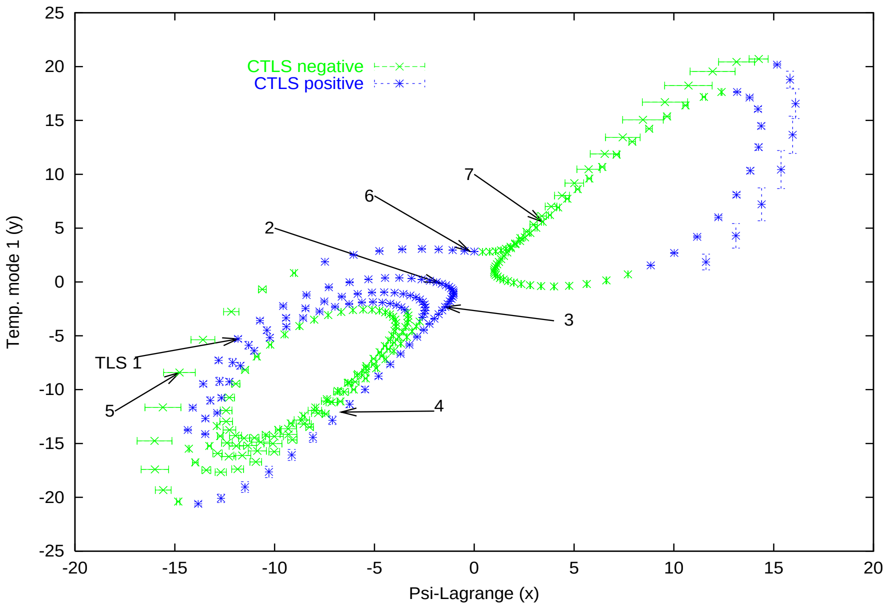

FIG. 12 – CTLS response before transition (scaled, see text).

Ainsi, l'étude de la rétroaction non-L du modèle de Lorenz sur ce transfert xy accomplit une véritable maïeutique interprétative aussi bien vis à vis de l'attracteur tout entier que plus finement le long des orbites avec leurs transitions.

0.2 comparaison avec les réponses stationnaires

On va illustrer les rapports entre les réponses linéaires et non-L sur deux portions de la trajectoire, en considérant les amplitudes complexes des éléments de l'effet-en-retour SLT ($\varrho(\tau)$). Ces éléments sont donnés par les doubles produits scalaires $< c^\dagger \mid e_i >< b \mid f_i >$ de l'équation (106) du papier *effluents*, ou de la formule (10)de la PRL avec $\tilde{u}(\mu) = \frac{1}{\mu}$.

Pour un triplet donnés de paramètres du modèle, on peut voir l'espace d'état comme peuplé par les pôles et amplitudes complexes d'une fonction SLT de rétroaction - à la manière dont les bosons de Higgs et des chénèmes peuplent le vide quantique. La réponse non-L se construit en passant à travers ces TLS aux

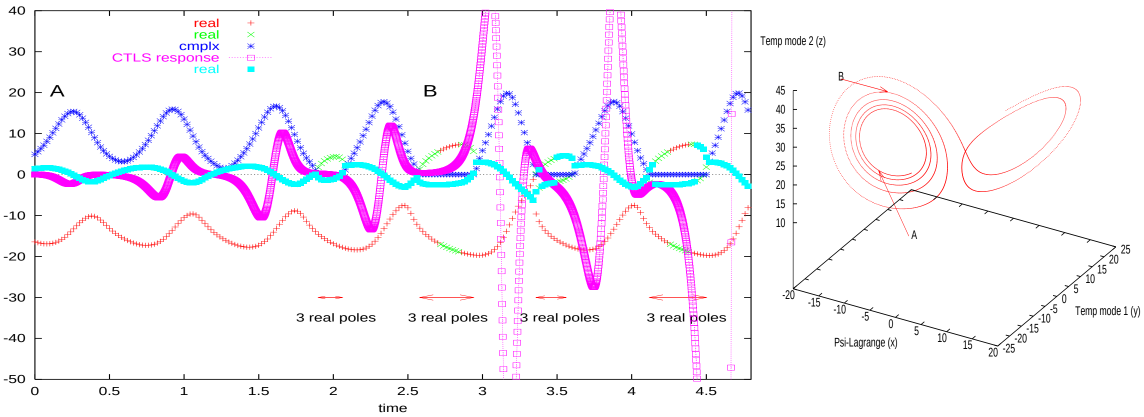

FIG. 13 – Feedback response and SLT structure amplitudes.

caractéristiques très changeantes. Le rapport entre ces éléments de la rétroaction TLS et de l'effet non-L est peu facile à intuiter, par le fait que le propagateur non-L se construit par multiplication des propagateurs stationnaires, d'où l'intérêt de la comparaison détaillée. La première révolution montre une amplitude complexe

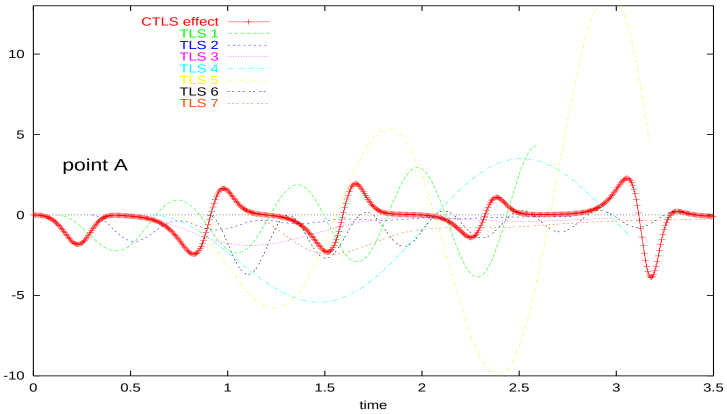

FIG. 14 – Different Feedback responses along the same orbit.

ne s'annulant pas, qui construit l'effet rotatif du SLTC-eff. Elle montre ensuite des séquences nulles d'une amplitude réelle de plus en plus grande. Cette séquence des trois pôles réels se construit en s'allongeant jusqu'à la phase de transition. On constate après transition une réduction de cette durée des trois pôles, mais peu marquée ici. Cela indique en réalité qu'une transition future est proche. Ainsi, l'effet de fuite se construit à partir des séquences de trois pôles réels.

Dans l'espace réel, et donc après inversion, on peut tracer ces réponses stationnaires le long de la trajectoire. Sur la figure 9, l'effet SLTC est tracé une seule fois avec une normalisation régularisant sa croissance exponentielle ($\times \exp(-\lambda_L t)$). Chaque réponse SLT est tracée au point de son départ sur la trajectoire de $\varrho(t)$ en fonction de son délai de réponse au step stationnaire, avec application de la même normalisation en τ.

On a sept SLT sur la figure 14 le long des deux premières orbites (point A). Le premièr SLT-eff est une oscillation instable avec une période comparable à la durée d'un lacet du SLTC. Les deuxième et troisième SLT-eff marquent une séquence d'oscillations amorties, de période lentement croissante. Au point 4, la période du SLT atteind environ quatre fois la plus courte, se terminant par la partie plate du SLTC-eff. Vers SLT 5, on voit une courte séquence d'oscillations instables précédent la montée du lacet du SLTC. Avec les SLT 6 et 7, on a un retour à des oscillations amorties annonçant le plat suivant du SLTC.

Il est remarquable de voir comment l'effet non-L de la rétroaction absorbe les instabilités linéaires du système, et le peu de rapport direct qu'il entretient avec elles, ce qui justifie encore l'intérêt de sa détermination.

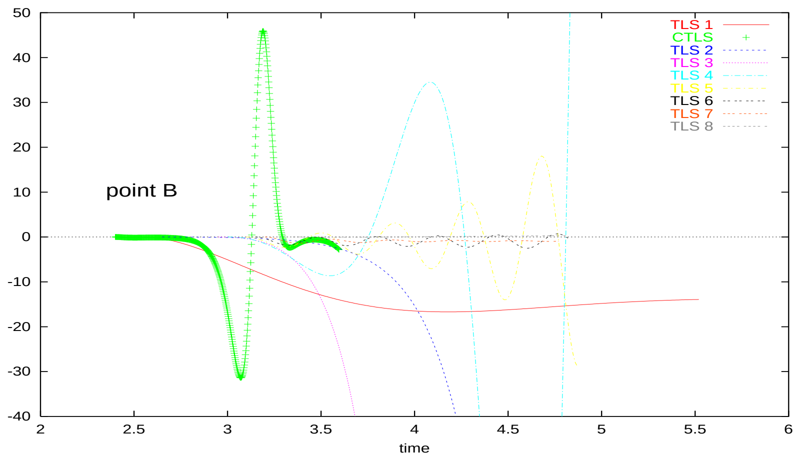

FIG. 15 – Across effect of TLS in approach to transition.

Allons-enfants au point B. La figure 15 montre quelques SLT-eff sur la dernière orbite avant transition. Noter que l'on a redémarré le CTLS au point B, et que le lacet a changé de signe. Avec le SLT 1 démarre une série d'oscillations d'un type

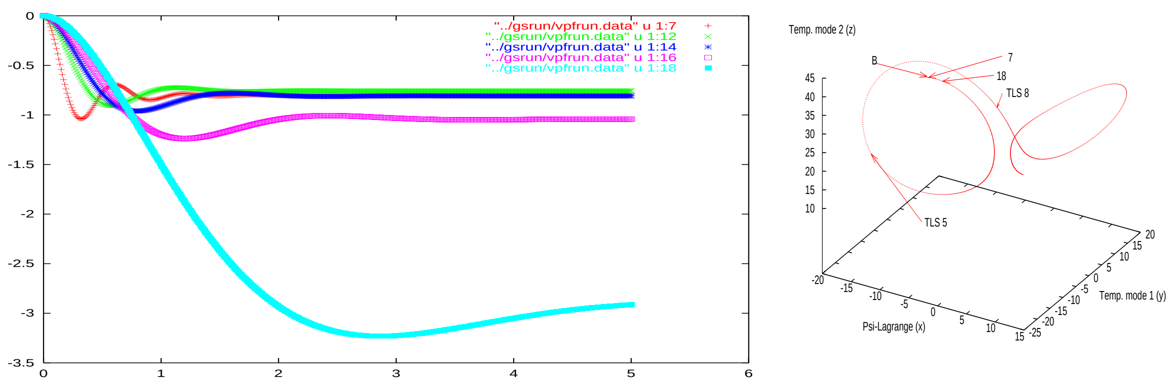

FIG. 16 – More explicit across-effect towards transition.

tout à fait différent de celles du point A. La première réponse, qui a été magnifiée par 10 pour bien la voir tend vers une asymptote négative (-0.8), source d'un effet rotatif de la perturbation.

On voit bien sur la figure 16 comment s'amorce et s'amplifie cet effet rotatif. Il devient divergent avec les SLT 2 et 3, au démarrage de la transition. Puis retour aux oscillations instables (4, 5), et enfin stables à partir de 6. Le septième SLT est stable, alors que le dernier amorce une instabilité linéaire (mais normalisée). En ce point, la transition est terminée.

Comment le système récupère-t-il de la transition ? On le voit sur la figure 17. La fin de transition est marquée par le SLT a de croissance positive, caractéristique

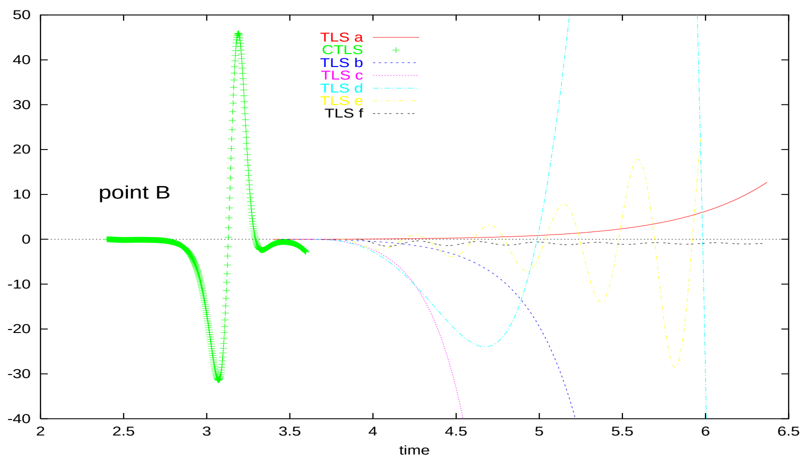

FIG. 17 – End of transition.

des fins de transitions. Puis on observe deux SLT rotatifs divergents (b et c). Le TLS répond ensuite de manière oscillante instable (d et e), avec période croissante, pour enfin redevenir oscillant-amorti sur la première orbite opposée de l'attracteur.

lien avec les trois pôles

Comme le montre la figure 18, ces séquences de trois pôles réels correspondent à des divergences rotatives terminant une séquence d'oscillations divergentes. Faut donc conclure à une attraction orbitale de croissance linéaire s'intensifiant à chaque orbe jusqu'à échappement et transition.

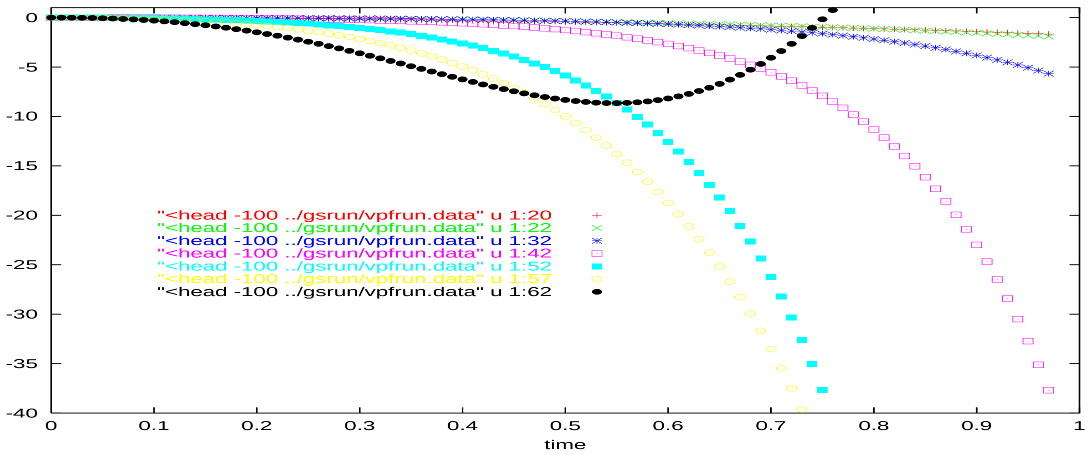

FIG. 18 – After transition.

Synthèse SLTC versus effet-en-retour SLT

Sur la figure 19, on compare systématiquement tous les SLT au long des quatre orbes. Le scatter plot montre les effets-en-retour stationnaires à l'endroit de la trajectoire où est appliquée la perturbation-marche du gain. L'axe vertical est le délai de leur réponse. La normalisation en amplitude pat tanh est telle que l'échelle reste linéaire entre -1 et $+1$, avec ± 2 représentant l'infini. De cette manière, on arrive à suivre les SLT oscillants dans le détail, malgré leur forte variabilité en amplitude.

Les révolutions sont toujours de même type : lorsque l'on va vers l'apogée qui s'excentre d'orbe en orbe, on a des oscillations exponentiellement croissantes dont la période diminue jusqu'à devenir comparable à celle d'un lacet du SLTC. Ces oscillations deviennent stables et leur période ré-augmente en allant vers le périgée, préparant une séquence explosive de fuite par les trois pôles.

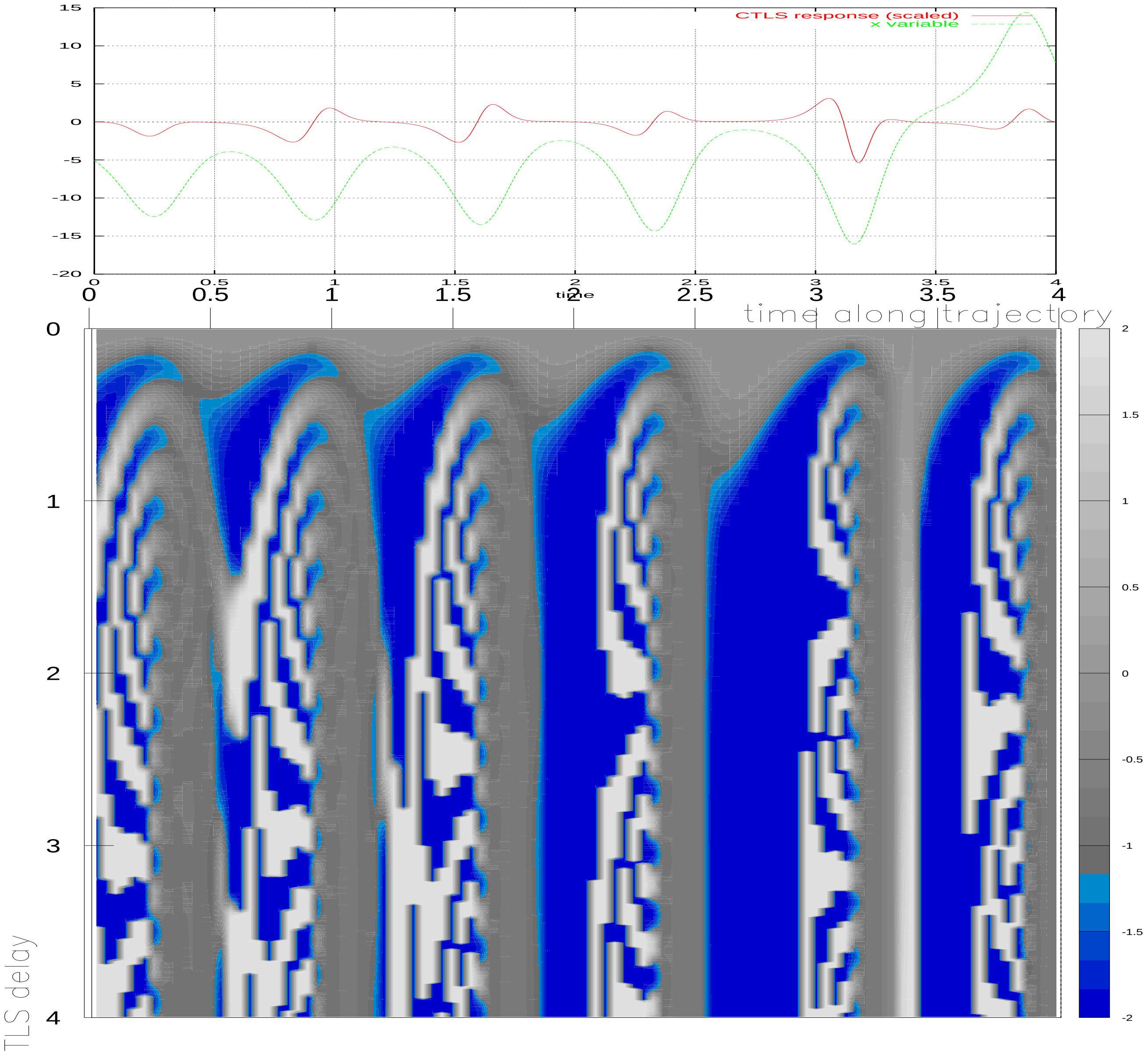

FIG. 19 – SLTC-eff et SLT-eff le long des quatre orbites et transition.

Au cours des quatre révolutions, on observe la séquence “des trois pôles réels” qui est ici la bande verticale bleue : c'est l'effet répulsif du point central qui s'amplifie jusqu'à la transition. La bande blanche verticale vers $t = 3.4$ est la séquence exponentielle instable caractéristique de chaque transition. Sur la nouvelle orbite, la séquence des trois pôles est réduite mais existante, et correspond en fait à une transition après deux révolutions seulement (hors figure).

Synthèse SLTC versus gain SLT

La figure 20 donne la même synthèse, mais cette fois en fonction du gain stationnaire. La normalisation est de nouveau en tanh, mais on a linéarité entre -5 et 5, log au delà, infini en ± 10. La première remarque est l'absence d'oscillation : si on exclut la réponse de φ du système perturbé, on coupe un retour qui provoque ces oscillations. Le seul gain positif correspond à $t \simeq 3.4$, de fin de transition, de durée

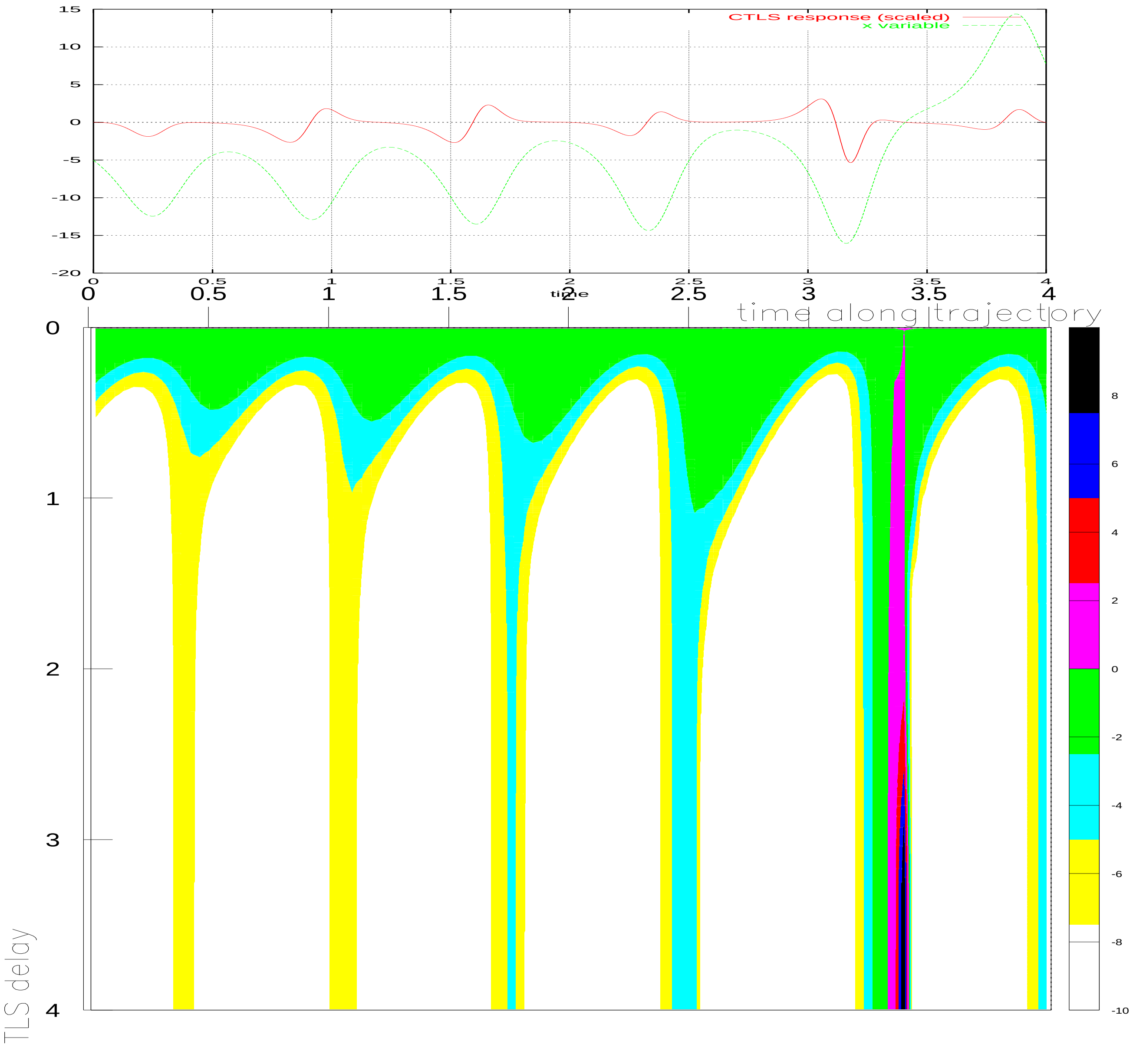

Fig. 20 – SLTC-eff et gain-SLT le long des quatre orbites et transition.

très limitée. On voit bien comment chaque montée vers un apogée est provoquée par un gain très répulsif dont la durée croît le long des quatre orbes, alors que le retour d'apogèe s'accompagne d'une diminution du gain. Les parties modérées négatives du gain sont responsables des oscillations de la réponse par bouclage sur le système : $\frac{g}{1-g} = g + g^2 + g^3 + ...$, où les puissances sont en réalité des produits de convolution itérés.

Comparaison des effets-SLTC pour quatre variables

La figure 21 donne les effets non-L pour la variable test recopiant x et y, et un transfert xz sur les deux orbes et la transition, normalisées comme d'hab. Les recopies sont agrandies d'un facteur 10. On peut noter une amplification du lacet pour les quatre fonctions, mais seules la variable-test xy montre ce changement de signe caractérisant l'approche d'une transition. De ce point de vue, on peut constater

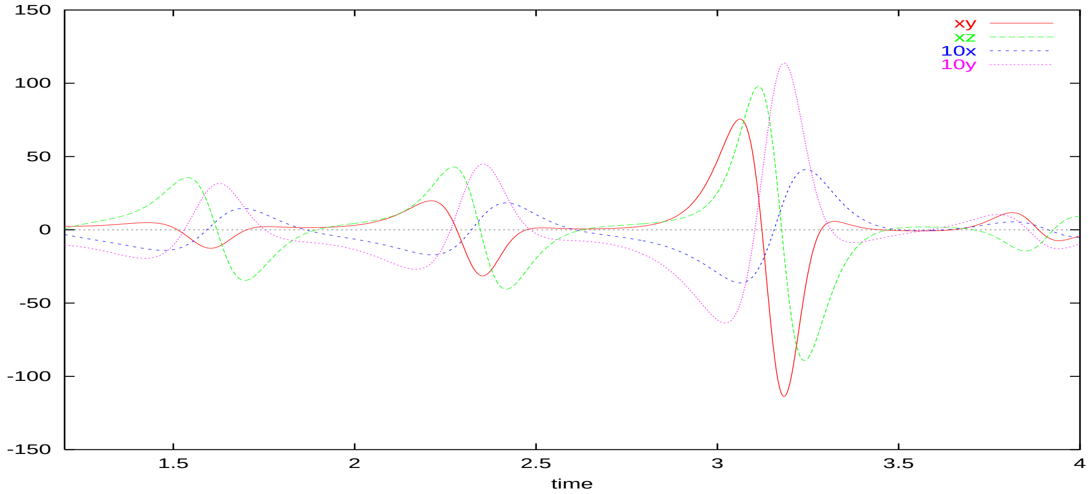

FIG. 21 – Comparaison entre rétroaction du système sur quatre transferts différents.

que le choix de xy est le meilleur, et que le type d'information demandé au système dépend évidemment, y compris sur un modèle de dimension réduite à trois, de la boucle de rétroaction choisie.

Comparaison des effets-SLTC pour xy et z

La variable z étant pour Edouard Lorenz celle qui permet de suivre les trajectoires et de détecter les transition, on a ajouté cette variable en transfert pour comparaison avec le transfert $\varphi = xy$ (fig. 22). On constate que ces deux variables partage3nt un même contenu d'information, ce qui semble normal compte-tenu de l'évolution de z qui tend exponentiellement vers la valeur de xy.

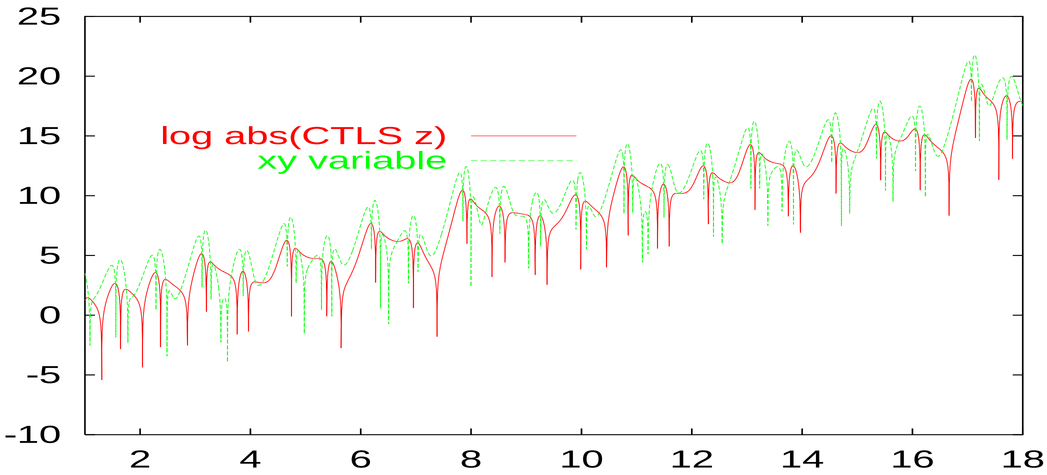

FIG. 22 – Comparaison entre rétroaction du système pour les variables tests z et xy.

Essai d'analyse physique des rétroactions

Examinons d'abord le transfert xy. Soit une perturbation de cette interaction entre vitesse de circulation (un mode de la fonction courant de Lagrange) et l'écart de température entre particules montant et descendant. Positive, la perturbation intensifie par exemple cette interaction. Cela a pour effet d'augmenter z, c'est-à-dire l'anomalie des temperatures haute et basse de fluide, puisque l'intensification du mouvement éloigne de la température moyenne du Rayleigh-Bénard qui est la droite joignant les deux températures de surface. Les flux de chaleur pariétaux vont donc augmenter et combattre l'écart horizontal y de T. y diminue donc pour x négatif (aile gauche de l'attracteur déjà considérée). Cet écart horizontal est le moteur thermique de la vorticité (d'axe horizontal) du mouvement, qui va donc décroitre. Ainsi, le produit xy diminue, d'où la stabilité linéaire à court terme observée.

Synthèse générale sur Lorenz

Il semble légitime, après cette analyse, de construire une vision du comportement du système basée sur trois distances :

- vu de loin, le bassin d'attraction joue en effet ce rôle d'attraction, qui s'observe par une diminution du Lyapunov local ;
- vu de plus près en considérant les deux orbes de l'attracteur, on observe un changement de signe du lacet CTLS précédent une transition. C'est donc un effet répulsif par le point central qui provoque la transition amorcée par une accélération orbitale à l'apogée précédente ;
- vu encore de plus près, chaque orbite est accompagnée d'un effet répulsif qui éloigne le point circulant du point central, suivie d'une attraction-orbitale (par le point de convection stable[1]) vers l'apogée. Lors que ce double effet s'ecerce assez lontemps, l'effet de répulsion par le centre dévie le point courant de son orbite et provoque une transition vers l'orbe opposée.

Dans la mesure ou ce système est chaotique, il n'est pas étonnant de retrouver une croissance exponentielle dans la réponse à une perturbation. Il est remarquable qu'alors que l'on s'attend à un comportement dépendant du démarrage de la perturbation-step, ce n'est pas ici le cas, à part l'amplification exponentielle - et quand même un changement de signe possible du lacet (à revoir donc).

Mais cette étude illustre bien notre propos, à savoir l'intérêt de l'aspect dynamique du gain de rétroaction. Cette illustration avec Lorenz n'avait pas d'autre objectif. De plus, devant la variabilité des gains linéaires le long de la trajectoire, ce gain non-L s'avère plus simple à interpréter, mais au prix, dans ce système chaotique, d'une normalisation avec le premier Lyapunov qui amène à un traitement pouvant déboucher sur une nouvelle méthode.

En effet, on a été conduit à raisonner en multipliant les fonctions d'effet par $exp(-\Lambda_L t)$, ce qui fait penser à l'approche de Floquet (cf papier *Effluents*) où alors Λ est imaginaire. Il y a matière à formalisation pour introduire dans l'analyse de stabilité - ici en réalité d'instabilité relative - ce que nous avons introduit *a posteriori*. Celà devrait permettre d'enrichir l'analyse de Lyapunov, et ce n'est pas une mince affaire.

[1] Attention encore á cette apellation "d'attractive" qui n'est que relative à la divergence exponentielle : un point de non-convection est lui aussi instable, mais répond de manière orbitale, voir plus loin.

0.3 Analyse numérique en boucle ouverte

En boucle ouverte[1], c'est-à-dire en bloquant le modèle de φ à une valeur choisie, le système se linéarise rapidement. En effet, la variable z tend exponentiellement vers $\frac{\varphi}{b}$, et avec $z = c^{cste}$, le reste du système est à présent linéaire. Comme l'explique Edward Lorenz dans son papier, il y a un seuil de transition que l'on va retrouver numériquement.

En partant d'un point des orbites déjà étudiées et avec une valeur modérée de $\varphi = 100$, la trajectoire (fig. 23) converge au point central en passant par l'aile droite de l'attracteur.

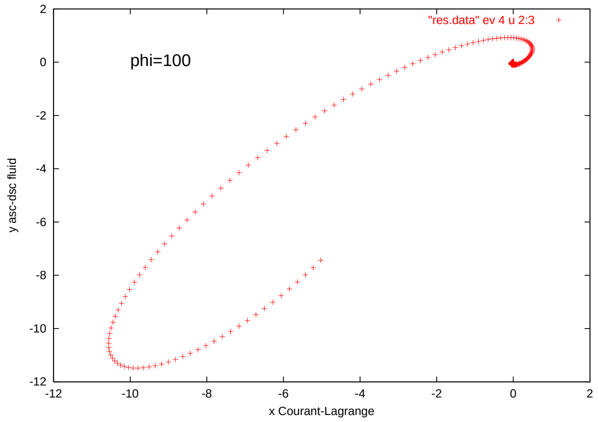

FIG. 23 – Lorenz avec blocage de φ, ici à la valeur 100.

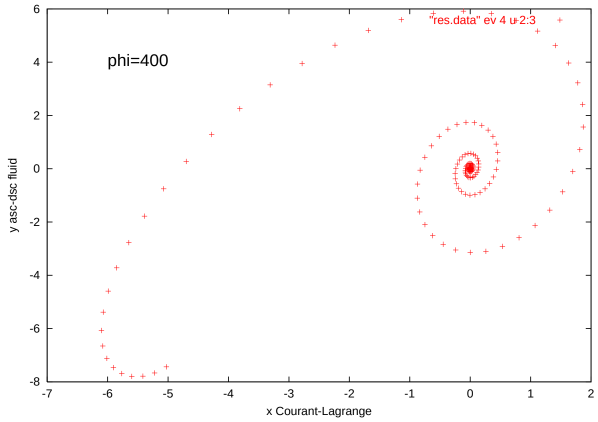

FIG. 24 – Lorenz avec blocage de φ, ici à la valeur 400.

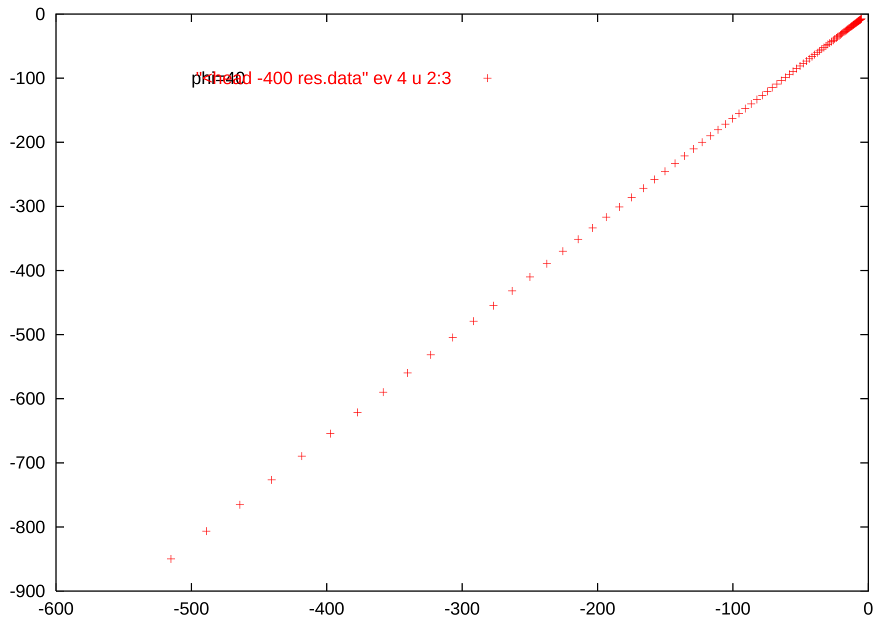

FIG. 25 – Lorenz avec blocage de φ, ici à la valeur 40.

Avec une valeur plus grande, de 400, l'effet rotatif du départ est accéléré et le point orbite autour de l'aile droite avant de converger. Pour une valeur plus faible

[1] partie effectuée avec stepH.

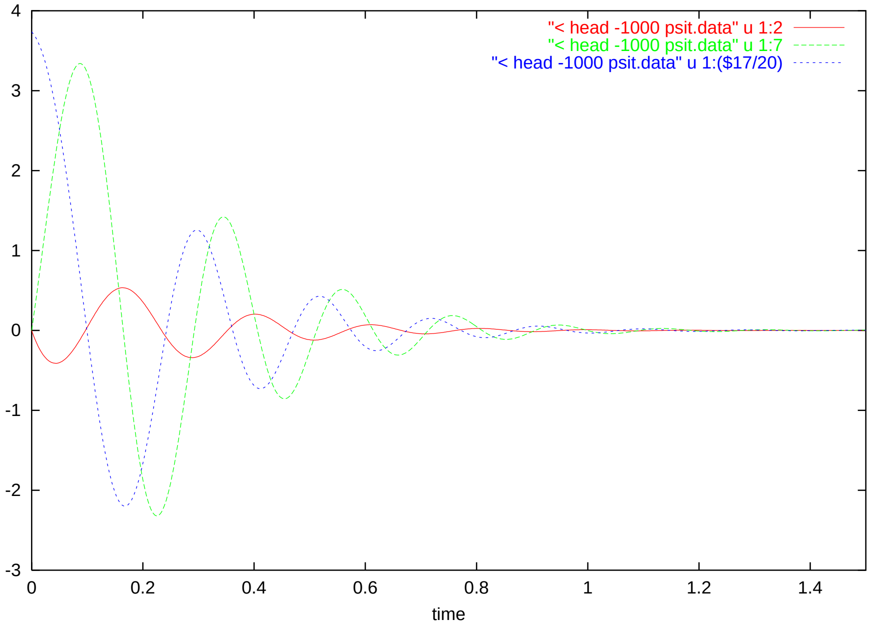

FIG. 26 – SLTC :2,7,17 avec blocage de φ, ici à la valeur 400.

de $\varphi = 40$, la figure 25, on constate une fuite exponentielle le long de la droite de pente environ 2. On trouve l'existence d'un autre seuil cette fois-ci entre fuite et rotation. Ce seuil explique que la partie des quatre orbites proche du périgée soit bleue - et qu'on l'ait qualifiée de répulsion par le point central.

En repartant de la valeur 400 qui fait orbiter le point courant à droite avant de converger au point central, on regarde les effets-en-retour non-L des transferts de recopie de x et y, et celui correspondant à xz. Le figure 26 montre bien les oscillations amorties dans les trois cas dès que xy est bloqué. Comparé au gain non oscillant de la boucle ouverte, ceci confirme l'absence des oscillations en boucle ouverte du TLS, et montre justement qu'après la décroissance des oscillations, le système devient linéaire.

0.4 Analyse du SLTC aux points fixes

Au point gauche de non-convection (NCC)[1]

L'effet en retour non-L à une perturbation en un point fixe de convection stable ($x = -6\sqrt{2}, y = x, z = 27$) est une oscillation divergente, correspondant à l'instabilité de ce point (fig. 27). On peut tracer la trajectoire correspondante des

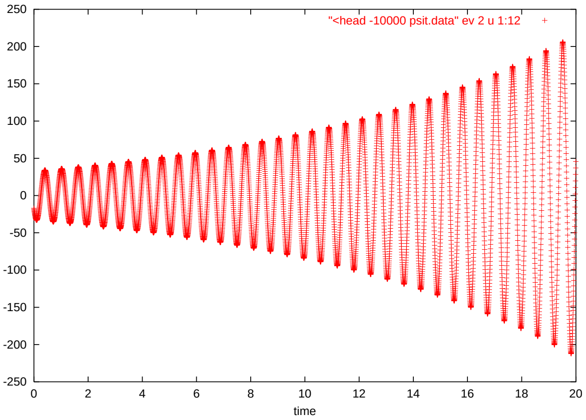

FIG. 27 – SLTC :12=xy au point gauche de convection stable.

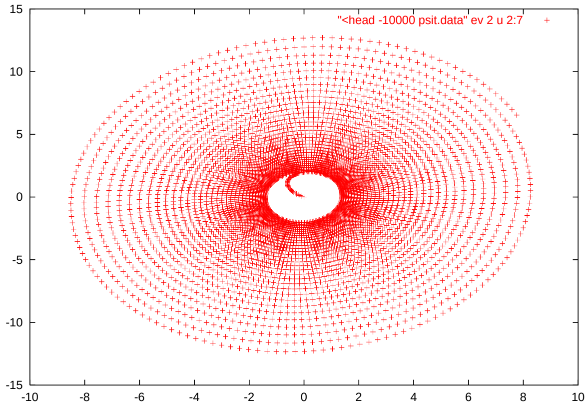

FIG. 28 – SLTC :2=x versus 7=y au point gauche de convection stable.

effets SLTC de transferts recopiant x et y, comme sur la figure 28. On constate clairement l'effet de répulsion orbitale du point NC. On l'a précédemment qualifié d'attractif orbital, mais c'était en comparaison de la divergence Lyapunovienne de fond.

La croissance du rayon est donnée dans la figure 29 et on retrouve le Lyapunov

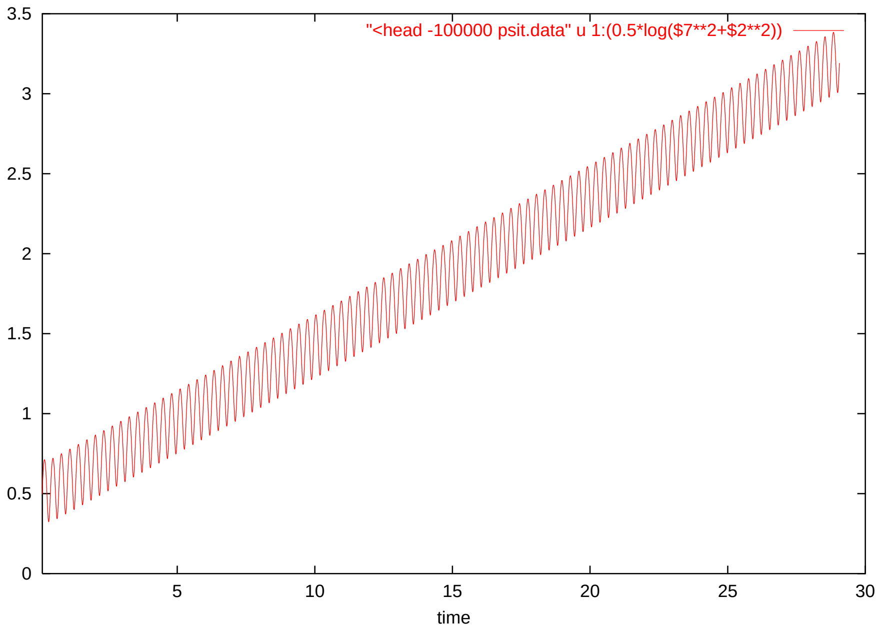

FIG. 29 – SLTC :x versus y au point de NC, en log rayon.

de 0.95, notre qualification était donc correcte : il y a "stabilisation orbitale" le long du Lyapunov.

[1] *idem.*

Au point central

Si maintenant on se place au point central, on trouve que l'effet sur xy reste nul, et que la trajectoire des effets dans le plan x, y fuyent le point central en passant loin du point de convection stable (point C sur la figure 30).

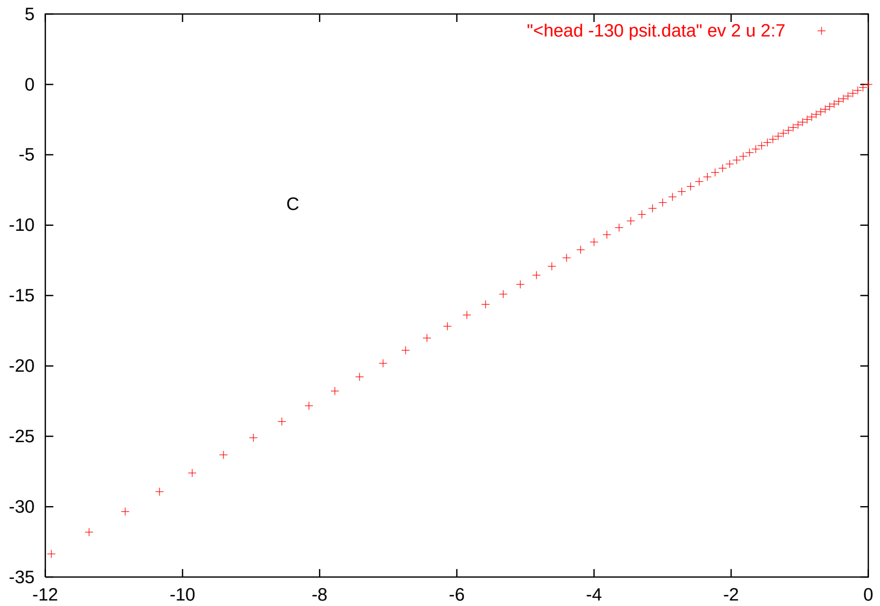

FIG. 30 – SLTC :x versus y au point central.

In fine, on peut ajouter une remarque en rapport avec les développements méthodologiques évoqués en synthèse du Lorenz. La croissance le long du premier Lyapunov semble entièrement due à l'effet répusif mais orbital ("across") des points de convection stable, avec des excursions en-dessous et au-dessus lorsque l'effet strictement répulsif ("along") du point central. C'est en gros ce que l'on attend du formalisme à développer.

Annexe : Lien entre effets L et non-L de rétroaction

Comment les effets stationnaires se combinent-t-ils pour constituer la résultante non-L (SLTC) ? On considère une variation incrémentale de la fonction

$$
\begin{aligned}
\rho_g(t+\delta t, s) &= <c^\dagger(t+\delta t) \mid \int_s^{t+\delta t} \Phi(t+\delta t, \tau) \mid b(\tau) > d\tau \\
&= (<c^\dagger(t+\delta t) \mid - < c^\dagger(t) \mid + < c^\dagger(t) \mid) \\
&\quad \left[\int_t^{t+\delta t} \exp(A(t+\delta t-\tau)) \mid b(t) > d\tau + \int_s^t \Phi(t+\delta t, \tau) \mid b(\tau) > d\tau\right] \\
&= (<\Delta c^\dagger(t; dt) \mid + < c^\dagger(t) \mid) \qquad (2) \\
&\quad \left[A^{-1}(I - \exp(A\delta t)) \mid b(t) > + (I + A\delta t) \int_s^t \Phi(t, \tau) \mid b(\tau) > d\tau\right]
\end{aligned}
$$

le facteur à $< c^\dagger(t) \mid$ constante multiplie la partie stationnaire de l'expression entre crochets pour donnner l'effet SLT : $\rho_g^s(\delta t)$, et donne, avec la matrice unité du développement de $\exp(A\delta t)$, l'effet SLTC : $\rho_g(t, s)$. On a donc au premier ordre et à $< c^\dagger \mid$ constante une construction additive de l'effet non-L par les stationnaires, avec un terme en δt supplémentaire :

$$
\rho_g(t+\delta t, s) \overset{(1)}{\simeq} \rho_g(t, s) + \rho_g^s(\delta t) + < c^\dagger \mid A\delta t \int_s^t \Phi(t, \tau) \mid b(\tau) > d\tau \qquad (3)
$$

C'est en particulier la construction de l'effet non-L lorsque le gain est calculé avec un transfert copie d'une composante d'état. On peut à présent considérer le terme en variation de cette matrice :

$$
\begin{aligned}
+ &\overset{(2)}{=} < \Delta c^\dagger(t; dt) \mid \left[A^{-1}(I - \exp(A\delta t)) \mid b(t) > + (I + A\delta t + ...) \int_s^t \Phi(t, \tau) \mid b(\tau) > d\tau\right] \\
&\simeq < \Delta c^\dagger(t; dt) \mid \int_s^t \Phi(t, \tau) \mid b(\tau) > d\tau
\end{aligned}
$$

en supposant δt tel que $< \Delta c^\dagger(t; dt) \mid \sim \delta t$.

Finalement au premier ordre :

$$
\rho_g(t+\delta t, s) \overset{(1)}{\simeq} \rho_g(t, s) + \rho_g^s(\delta t) + < c^\dagger(t) A(t) \delta t + \Delta c^\dagger(t; dt) \mid \int_s^t \Phi(t, \tau) \mid b(\tau) > d\tau \qquad (4)
$$

Ainsi, et même à $< c^\dagger \mid$ constante, on a certes un effet immédiat d'accumulation, mais complété par un effet cumulatif, et rien ne permet de présager de leur importance relative.

Si on voulait effectuer ce calcul, le choix de δt serait essentiel pour "piquer" la durée significative de ρ_g^s, et devrait se baser sur la variation des trois Jacobiennes. On peut éventuellement ajouter au calcul l'evolution des Jacobiennes et reprendre le développemnt précédent ?