

Eléments d'analyse des systèmes non linéaires

Céline Conrardy

décembre 2006

Le succès des prévisions météorologiques à long terme passe par la connaissance des sources de variabilité d'un système chaotique non linéaire au delà de l'échelle de temps déterministe (environ 14 jours). Dans cette étude sont présentés principalement deux outils pouvant permettre d'améliorer cette connaissance. Le premier, l'analyse de Floquet, permet de savoir tout sur un système à matrice d'avance de phase périodique dès la première période. On développe ici des éléments d'analyse des systèmes périodiques, puis on tente une analyse d'un système "pseudo-périodique" chaotique. Cette première partie se termine par une illustration de la 'réalité physique' pouvant être associée au vecteur de Floquet. Le second outil, la décomposition en valeurs singulières, permet de qualifier la nature de la croissance de perturbations autour d'une trajectoire de référence. On développe ici une méthode de calcul permettant de suivre l'évolution de perturbations au delà des capacités machines habituelles.

1 Théorie de Floquet

1.1 Considérations générales

L'analyse de Floquet s'applique aux systèmes dynamiques $\partial_t x = A(t)x$ lorsque la matrice d'avance de phase est périodique : $A(t+T) = A(t) \quad \forall t$. Les propriétés du propagateur associé sont classiquement obtenues en considérant la matrice $X(t)$ des solutions fondamentales du système qui forment une base de toutes les solutions au système. On a la relation :

$$\partial_t X(t+T) = A(t) X(t+T) \quad (1)$$

qui prouve que $X(t+T)$ est également solution, et peut donc s'exprimer dans la base $X(t)$:

$$X(t+T) = X(t)M \quad (2)$$

où M est une matrice constante (et régulière, puisque les X le sont par définition).

a. Factorisation de Floquet

On définit la matrice constante C telle que $X(T) = e^{CT}$, et on a

$$X(T) = M = e^{CT} \quad (3)$$

on peut alors remarquer qu'en définissant la nouvelle matrice $B(t)$ telle que :

$$\begin{aligned} X(t) &= B(t)e^{Ct} \\ \Rightarrow B(t+T) &= B(t) \end{aligned} \quad (4)$$

On a en effet

$$\begin{aligned} X(t+T) &= B(t+T)e^{Ct}e^{CT} \\ &= X(t) e^{CT} \\ &= B(t)e^{Ct}e^{CT} \end{aligned}$$

On a ainsi décomposé la solution fondamentale en une partie périodique $B(t)$ et une partie à coefficients constants e^{Ct} . C'est ce qui est appelé la **factorisation de Floquet**.

On a alors pour le propagateur :

$$\begin{aligned} \Phi(t, 0) &= X(t)X(0)^{-1} \\ \Phi(t, 0) &= B(t)e^{Ct}X(0)^{-1} \end{aligned} \quad (5)$$

b. Vecteurs de Floquet

On diagonalise¹ le propagateur en $t = T$, ce qui permet de déterminer les valeurs propres $\sigma_i = e^{\Lambda_i T}$

$$\begin{aligned}\Phi(T, 0) &= Z e^{\Lambda T} Z^{-1} = Z \Sigma Z^{-1} \\ Y(t) &\stackrel{def}{=} \Phi(t, 0) Z \\ Y(0) &= Z\end{aligned}\tag{6}$$

La relation de $Y(t)$ avec sa réplique à $t + T$ est alors

$$\begin{aligned}Y(t + T) &= \Phi(t + T, 0) Z = \Phi(t + T, T) \Phi(T, 0) Z \\ &= \Phi(t, 0) Z e^{\Lambda T} \\ Y(t + T) &= Y(t) e^{\Lambda T}\end{aligned}\tag{7}$$

Par ailleurs, Y s'intègre comme le propagateur, car

$$\partial_t Y = A(t) \Phi(t) Z = A(t) Y(t)\tag{8}$$

On construit à partir des vecteurs colonne de Y d'autres vecteurs non amortis, ce sont les vecteurs de Floquet. On obtient une matrice Ψ^F que l'on définit en "dés-amortissant" Y et dont les vecteurs colonne sont les vecteurs de Floquet.

$$\Psi^F(t) \stackrel{def}{=} Y(t) e^{-\Lambda t}\tag{9}$$

on obtient bien un vecteur périodique, car :

$$\begin{aligned}\Psi^F(t + T) &= Y(t + T) e^{-\Lambda T} e^{-\Lambda t} \\ &= Y(t) e^{-\Lambda t} = \Psi^F(t)\end{aligned}\tag{10}$$

$$\begin{aligned}\partial_t \Psi^F &= AY e^{-\Lambda t} - Y(t) \Lambda e^{-\Lambda t} \\ &= A \Psi^F(t) - \Psi^F e^{\Lambda t} \Lambda e^{-\Lambda t}\end{aligned}\tag{11}$$

et du fait de la diagonalité des trois matrices de droite, le résultat final est

$$\partial_t \Psi^F = A \Psi^F(t) - \Psi^F \Lambda \quad \text{avec } \Psi^F(0) = Z\tag{12}$$

Ainsi, connaissant la période T de la matrice d'avance de phase d'un système dynamique linéaire, et ayant calculé un ou plusieurs vecteurs propres du propagateur à $t = T$, on est capable d'intégrer en avant un ou plusieurs vecteurs de Floquet. On a alors pour le propagateur :

$$\Phi(t, 0) = X(t) X(0)^{-1} \Phi(t, 0) = Y(t) Z^{-1} = \Phi(t, 0) = \Psi^F(t) e^{\Lambda t} Z^{-1}$$

On peut ainsi caractériser la stabilité des systèmes de Floquet en calculant $\Lambda = \frac{1}{T} \log \Sigma$. Les valeurs propres σ_i sont appelées les **multiplieurs de Floquet** et sont uniques. Les λ_i sont les **exposants de Floquet** et ne sont pas uniques dans la décomposition de Floquet puisque si

$$\begin{aligned}\sigma_i &= \rho_i e^{-i\theta_i} \\ \lambda_i &= \frac{\ln(\rho_i)}{T} + i \frac{\theta_i + 2k\pi}{T}\end{aligned}$$

avec k un entier quelconque. De plus Ψ^F et Λ sont en toute généralité imaginaires. La croissance de chaque vecteur de Floquet au cours du temps est déterminée par la partie réelle de l'exposant de Floquet correspondant, et la fréquence par la partie imaginaire.

¹cette diagonalisation est toujours possible avec un calcul machine car l'ensemble des matrices non diagonalisables est de mesure nulle dans l'ensemble des matrices.

c. Wronskien

On tire de l'analyse de Floquet la propriété suivante pour le Wronskien :

$$\begin{aligned}W(t+T) &= \det(\Phi(t+T, 0)) = \det(\Phi(t, 0) \Phi(T, 0)) \\W(t+T) &= W(t) \det(\Phi(T, 0)) = W(t) \det(\Sigma) = W(t) e^{T \operatorname{Tr}(\Lambda)}\end{aligned}$$

et comme pour le Wronskien¹, on a $W(T) = \exp \int_0^T \operatorname{Tr} A(t) dt$, cela permet d'identifier le déterminant de Σ à cette intégrale prise sur la première période.

1.2 Code dans Mini_ker

Dans notre cas, le code de Mini_ker² permet de calculer le propagateur par la méthode TEF³ On réalise alors la décomposition en valeurs propres du propagateur pour déterminer la période T et Z . Puis on initialise "à la main" $\Phi(t, 0) = Z$ dans le **ZINIT**. Enfin on utilise l'équation $\Psi^F(t) = \Phi(t, 0) Z \exp(-\Lambda t)$ et on effectue ce calcul en complexe dans **ZSTEER**.

```
+SELF, IF=FLOQUET.

DO j=1,np
< DO i=1,np
  < a1a(i,j)=Flo_Z(i,j)*exp(-Flo_lambda(j)*time)
  >;
>;
call omatmlt(n,n,n,Phi_t(1,1),np,a1a,np,Flo_Psi,np);

write(62,1000) time,Flo_Psi;
if ZPRINT
< Z_pr/Floquet-vector Psi-F/:Flo_Psi;
>;
+SELF.
```

2 Application de la théorie de Floquet à des systèmes périodiques

2.1 Analyse de Floquet des systèmes périodiques

a. Théorie

Prenons un système périodique régi par l'équation :

$$\partial_t \eta = g(\eta) \tag{13}$$

Le système est périodique, on a donc par définition $\eta(t+T) = \eta(t)$. Une perturbation sur la trajectoire de référence est régie par :

$$\partial_t \delta \eta = \partial_\eta g \delta \eta \tag{14}$$

Avec $\delta \eta(t) = \Phi(t, \tau) \delta \eta(\tau)$ où $\Phi(t, \tau)$ est le propagateur et en posant $A = \partial_\eta g(\eta)$ on a :

$$\partial_t \Phi(t, \tau) = A(t) \Phi(t, \tau) \tag{15}$$

A est appelée **matrice d'avance d'état au point courant** et est elle-même périodique ($\forall t, A(t+T) = A(t)$). On considère alors le système de Floquet de période T .

¹On rappelle que $\partial_t W(t) = \operatorname{Tr} A(t) W(t)$.

²voir l'annexe pour une explication de l'organisation générale du code sous Mini_ker

³cf chap 4.

b. Propriété de la vitesse lorsque le système est périodique

La "vitesse" du système est par définition $V(t) = \partial_t \eta$ et la périodicité¹ du système entraîne $V(t+T) = V(t)$. Comme par ailleurs

$$\partial_t V = \partial_t g(\eta) = \partial_\eta g(\eta) \partial_t \eta = A(t)V(t) \quad (16)$$

on a que V se propage de la même façon que $\delta\eta$. On peut déduire de cette particularité une propriété de la décomposition de Floquet du système linéaire tangent des systèmes périodiques, celle d'avoir un multiplicateur de Floquet égal à 1. En effet, on a que $V(t) = \Phi(t, 0)V(0)$ est périodique de période T . Or

$$V(T) = \Phi(T, 0)V(0) = V(0)$$

et donc $V(0)$ est vecteur propre de $\Phi(T, 0)$ avec la valeur propre 1. Cette propriété permet aussi de vérifier qu'un système de Floquet est un système périodique de par l'existence d'un multiplicateur de Floquet égal à 1. Une question pouvant légitimement se poser : la vitesse suit-elle le vecteur de Floquet de multiplicateur 1? Ce résultat aurait été intéressant, mais est malheureusement faux.

2.2 Un prédateur-proie à trois espèces

a. le modèle

Le modèle de Lotka-Volterra décrit l'évolution d'une population de proies et d'une population de prédateurs en interaction. Ce modèle a été largement étudié, car il est relativement simple et est considéré comme la base des systèmes d'interaction proie-prédateur. La caractéristique du modèle de Lotka-Volterra est d'être périodique, antisymétrique au point fixe non trivial et donc de trace nulle.

$$\begin{cases} \partial_t x = ax(1-y) + bx(1-z) \\ \partial_t y = -ay(1-x) + cy(1-z) \\ \partial_t z = -bz(1-x) - cz(1-y) \end{cases} \quad (17)$$

ce qui donne les équations perturbatives suivantes :

$$\partial_t \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(1-y) + b(1-z) & ax & bx \\ -ay & -a(1-x) + c(1-z) & cy \\ -bz & -cz & -b(1-x) - c(1-y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (18)$$

On vérifie facilement l'existence du point fixe $(1, 1, 1)$, où le système devient :

$$\partial_t \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{bmatrix} \quad (19)$$

b. valeurs propres du propagateur

Le modèle a été numérisé avec `Mini_ker`, et on a calculé les éléments propres du propagateur avec la librairie mathématique `LaPack`. La Fig.1 montre comment évoluent les valeurs propres du propagateur. On rappelle que $\Phi(t, 0) = Z(t)\Sigma(t)Z(t)^{-1}$ où Σ est une matrice diagonale dont les σ_i sont les coefficients.

La courbe inférieure donne la distance du point courant aux C.I. pour marquer la période ($T = 4.22$). On constate que deux des trois valeurs propres sont conjuguées. La courbe fine en mauve est la partie imaginaire de cette paire conjuguée lorsqu'elle existe. On voit qu'après chaque période, la valeur réelle unité est à nouveau atteinte, mais aussi qu'à mi-période environ, elle passe par -1. En regardant de plus près sur la Fig.2, on constate que les valeurs propres réelles autour de T n'ont pas un comportement simple. A T se produit une singularité car les trois valeurs propres passent quasiment par l'unité (mais la discrétisation en temps ne permet pas de voir ce qui se passe exactement).

La Fig.3 montre² les vecteurs propres de $\Phi(T, 0)$ d'une part, mais également ceux du propagateur semi-cycle, c'est-à-dire à l'instant où une valeur propre de la paire passe par la valeur

¹Prendre garde au fait que la périodicité du système n'entraîne pas la périodicité des perturbations : $\delta\eta(t+T) \neq \delta\eta(t)$

²On essaie de remettre au goût du jour les figures en relief à la Morse & Feshbach ; il suffit de tirer légèrement les commissures externes des yeux et de laisser gentiment les deux images se superposer pour voir émerger du relief.

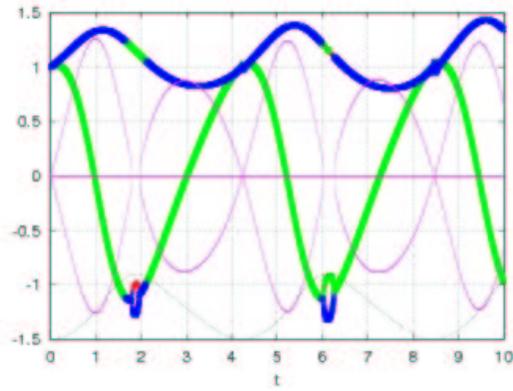


FIG. 1 – valeurs propres du propagateur

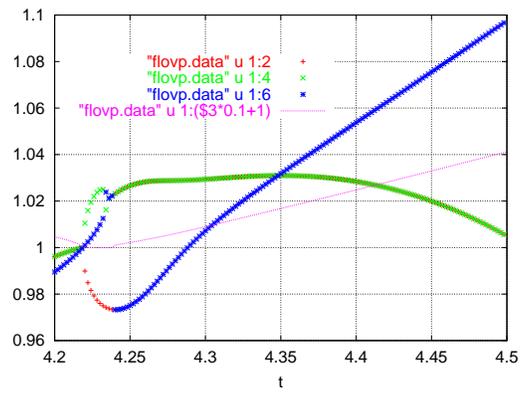


FIG. 2 – zoom sur les valeurs propres du propagateur aux environs de la période

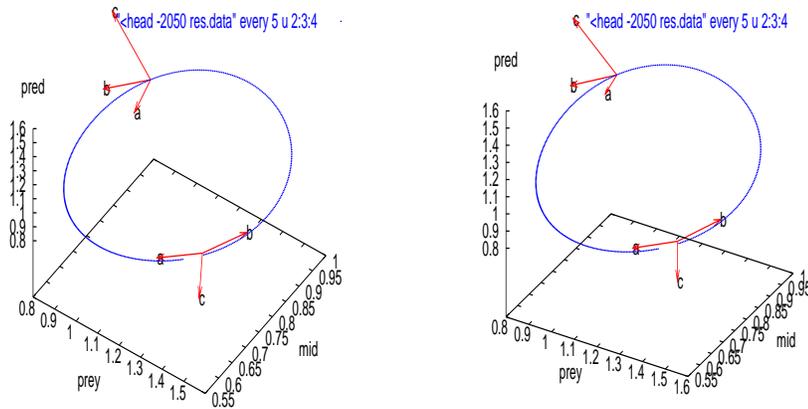


FIG. 3 – Vecteurs propres du propagateur.

réelle -1 . On trouve bien un vecteur propre (b) tangent à la trajectoire (donc colinéaire à la vitesse) pour la valeur propre 1. Pour le semi-cycle, on a un vecteur propre (b) colinéaire à V , celui qui correspond à une valeur propre égale à -1 . On a en plus une deuxième direction (c) changeant le “diamètre” du cycle avec une valeur propre de -1.27 , et une troisième (a) translatant le cycle et légèrement instable (v.p.= 1.16).

c. analyse de Floquet du système

La période utilisée pour l’analyse est $T = 4,2206$. On voit les vecteurs de Floquet sur la Fig. 4. Le point bleu correspond à $t=0$, la portion en noir aux premiers instants, ce qui permet de voir de quel côté ”part” le vecteur.

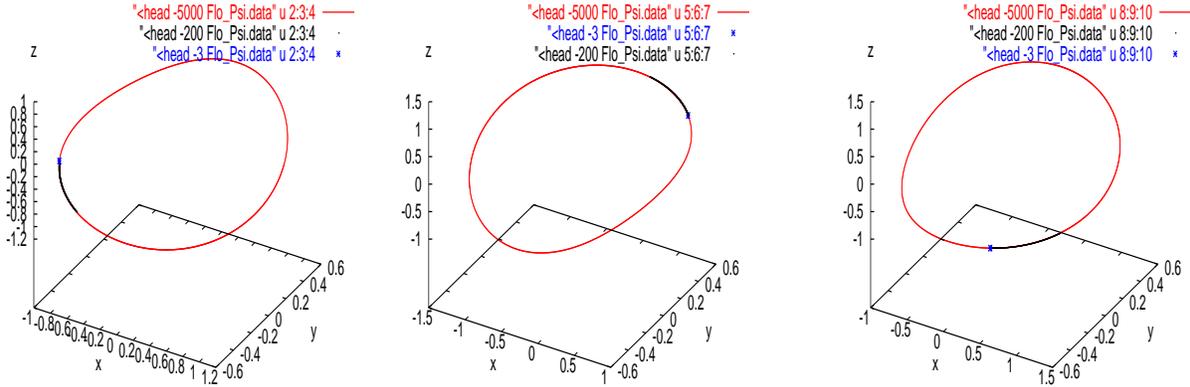
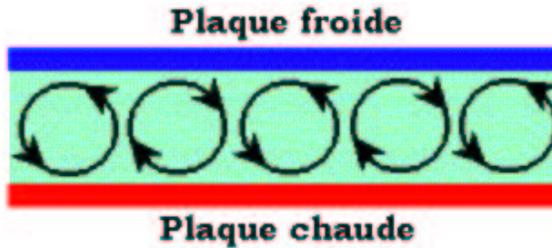


FIG. 4 – Vecteurs de Floquet pour les multipliers 0,9899; 1,01047 et 1,00098

2.3 Lorenz 63 et Lorenz périodique

L’attracteur de Lorenz tient son nom du météorologue Edward Lorenz qui l’a étudié le premier. C’est une simplification à l’extrême d’équations régissant les mouvements atmosphériques. Lorenz les a étudié afin de mettre en évidence sur un système simple la sensibilité aux conditions initiales qu’il avait observée. Les équations correspondent aux équations de la convection de Rayleigh-Bénard dans lesquelles on considère un fluide entre deux plaques portées à deux températures légèrement différentes. Les deux plaques sont horizontales et la plaque la plus chaude est située en bas. On observe alors des tourbillons. Le comportement du fluide est très bien déterminé par les équations de la mécanique des fluides (équation de Navier-Stokes, équation de l’incompressibilité du fluide, équation de propagation de la chaleur)



Les équations précédentes donnent le système réduit suivant :

$$\begin{cases} \partial_t x = P_r(y - x) \\ \partial_t y = rx - y - xz \\ \partial_t z = -bz + xy \end{cases} \quad (20)$$

avec y qui représente la température et x la vitesse du fluide. Pour les valeurs suivantes des

paramètres, on obtient un attracteur "papillon" :

$$\begin{cases} P_r = 10 \text{ nombre de Prandtl} \\ r = 28 \text{ nombre de Rayleigh} \\ b = \frac{8}{3} \end{cases} \quad (21)$$

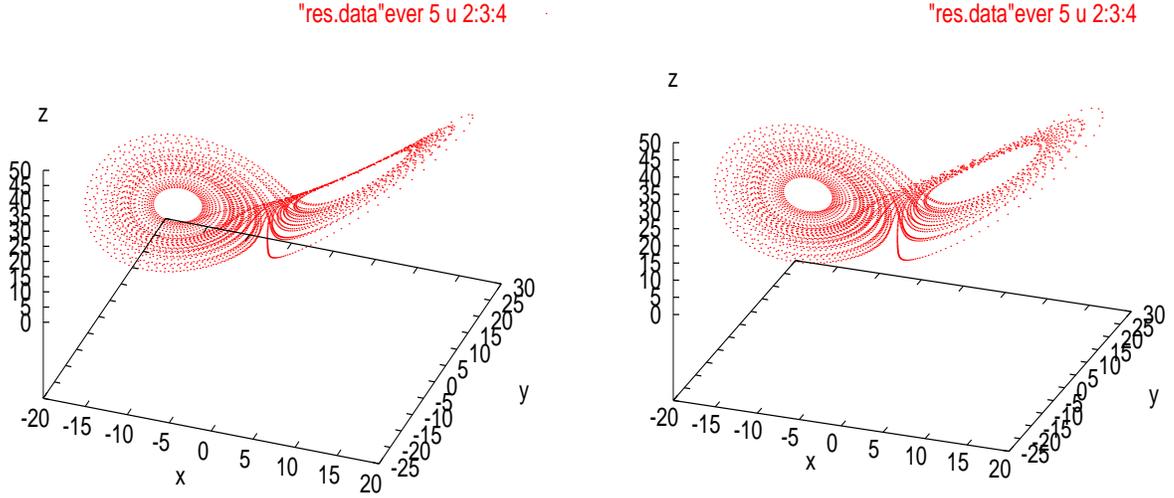


FIG. 5 – Attracteur de Lorenz.

Ce modèle n'est pas périodique, mais on peut considérer qu'avant une transition, il est pseudo-périodique.

Par contre, ce système est périodique pour :

$$\begin{cases} P_r = 10 \\ r = 24.07 \\ b = \frac{8}{3} \end{cases} \quad (22)$$

a. détermination de la quasi-période

On réalise la décomposition en valeurs propres du propagateur. La Fig. 6 montre comment évoluent les valeurs propres du propagateur sur quatre périodes ; par comparaison, on montre le même résultat pour le Lorenz périodique : La courbe inférieure donne la distance du point courant

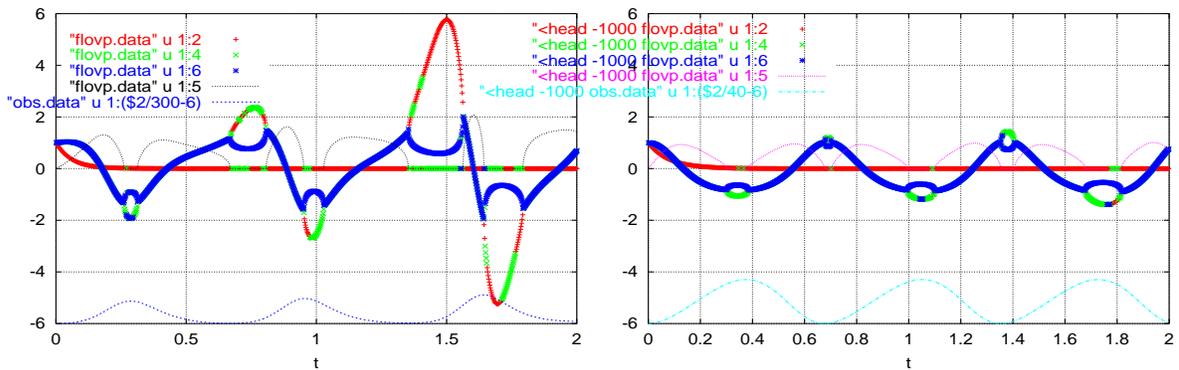


FIG. 6 – Valeurs propres Lorenz-63, chaotique à gauche et périodique à droite.

aux conditions initiales pour marquer la période. La courbe fine en noir est la partie imaginaire de la paire conjuguée lorsqu'elle existe. On constate que le passage par 1 a lieu pour la troisième valeur propre. On trouve alors $T = 0.672$ et les multiplicateurs de Floquet pour ce système sont 1 ; 1.36 et $7.30E-05$. Comme pour Lotka-Volterra, on aura donc des vecteurs et des exposants de Floquet réels puisque les multiplicateurs sont réels positifs.

On voit qu'après chaque période, la valeur réelle unité est à nouveau atteinte, mais aussi qu'à mi-période environ, elle passe par -1. En comparaison du prédateur-proie, Lorenz 63 se caractérise d'abord par le fait qu'une valeur propre tend vers zéro. On est donc en réalité dans un repère 2D tournant le long de la trajectoire.

b. visualisation de la dérive des vecteurs de Floquet

On visualise sur les Fig.8 et 9 les différents vecteurs de Floquet associés et leur dérive due au fait que le système n'a pas une matrice d'avance de phase périodique. Les pseudo vecteurs de Floquet ont été construits de manière à ce que $\Psi^F(T) = \Psi^F(0)$, ce que l'on constate bien sur les figures.

La non-périodicité apparaît bien avec le deuxième vecteur de Floquet associé en particulier à la valeur propre unité. On remarque que dans les deux cas, le premier vecteur diverge après quelques orbites, du fait de l'annulation de la dimension associée (valeur propre nulle tendant vers 0). Les imprecisions de la machine deviennent alors trop importantes.

c. Wronskien sous-dimensionné

Etant donné qu'une valeur propre des Lorenz tend rapidement vers zéro, le Wronskien complet ne fournit plus d'information après sa décroissance. On a donc calculé un Wronskien en dimension 2 à partir de la paire complexe des valeurs propres. La Fig.7 montre le résultat. On a cette fois une croissance moyenne exponentielle, qui est en gros sur la figure l'axe horizontal.

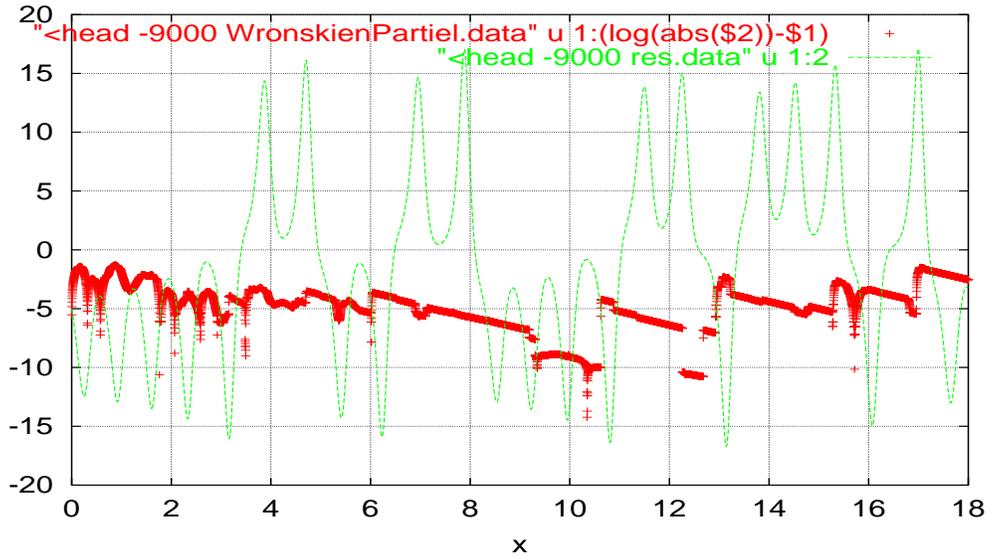


FIG. 7 – Wronskien 2D du Lorenz chaotique et trajectoire de x .

2.4 Analyse d'article : Etudes des oscillations intra-saisonniers sur un modèle barotrope

"Intraseasonal Oscillations in a Barotropic Model with Annual Cycle, and Their Predictability", Strong et al

a. oscillations intra-saisonniers

Le phénomène d'oscillations intra-saisonniers dans l'hémisphère Nord est un phénomène bien connu des météorologues. On peut l'observer sur de nombreuses variables atmosphériques dont le moment angulaire global de l'atmosphère. En effet, si le moment angulaire total de la Terre se conserve, ce n'est pas le cas de celui de l'atmosphère car il y a échange avec les continents et les océans : quand le vent augmente, la rotation terrestre diminue et vice-versa. Le moment angulaire global de l'atmosphère est donc un bon indicateur de la dynamique atmosphérique à grande échelle. Les observations ont montré des oscillations de 40 jours autour de la valeur moyenne du moment

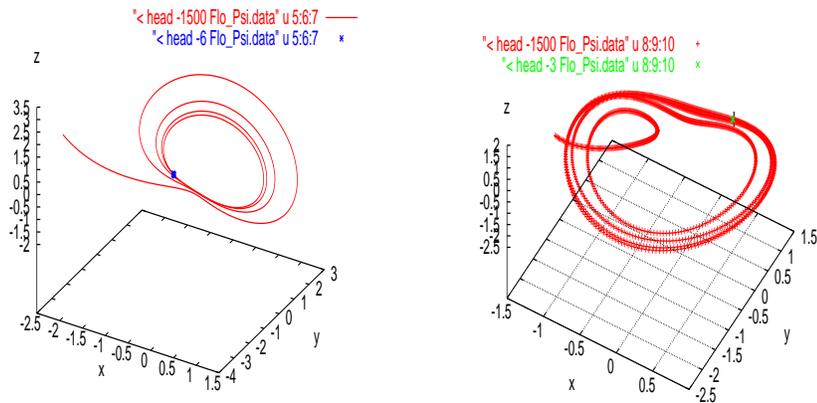


FIG. 8 – Vecteurs de Floquet de Lorenz 63 associés aux multiplicateurs 1,36 et 1

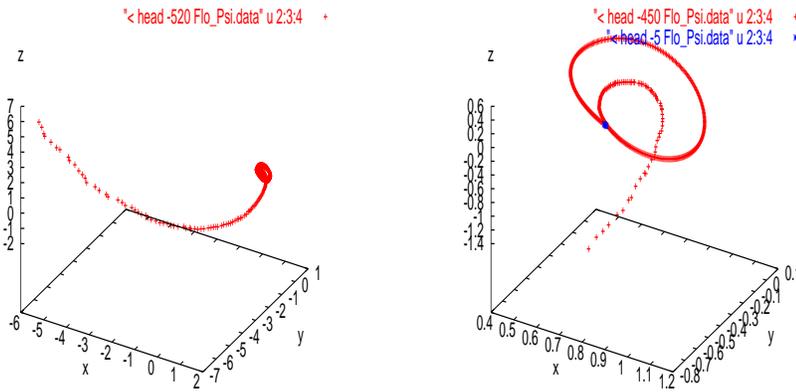


FIG. 9 – Vecteur de Floquet de Lorenz 63 associé au multiplicateur $7, 3 \cdot 10^{-5}$ et zoom sur la première "pseudo-période"

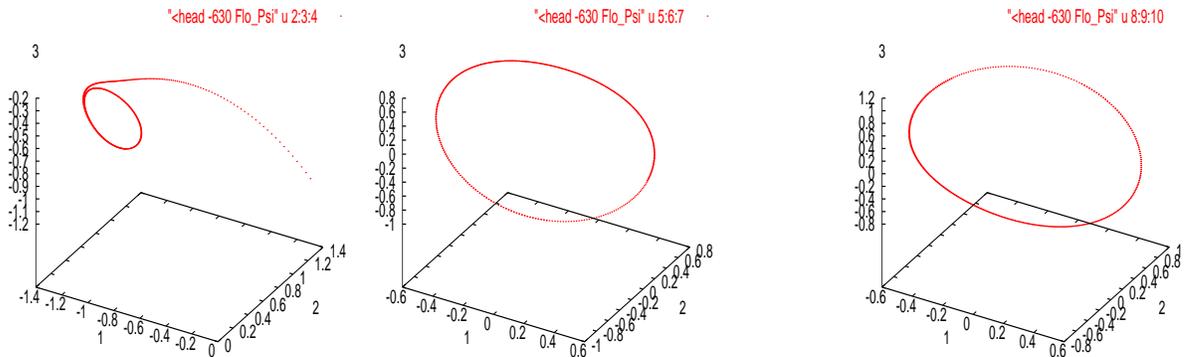


FIG. 10 – Vecteurs de Floquet du Lorenz périodique (de gauche à droite : vp nulle, l'unité et l'instable).

angulaire, particulièrement en hiver et au début du printemps. Dans ce qui suit, l'analyse de Floquet d'un modèle barotrope de l'atmosphère permet d'établir une corrélation entre ces oscillations intra-saisonnères d'une périodicité d'environ 40 jours et le cycle annuel moyen.

b. modèle et analyse de Floquet

Le modèle utilisé est un modèle atmosphérique barotrope dont l'équation adimensionnée du flot atmosphérique est :

$$\partial_t(\Delta - \Gamma^2)\Psi + J[\Psi, \Delta\Psi + 2\mu(1 + \gamma h)] = -\alpha\Delta(\rho\Psi^* - \Psi) - \nu\Delta^k\Psi \quad (23)$$

où Ψ^* est une donnée du modèle.

On génère grâce à ce modèle 100 années synthétiques du climat, on construit le flot d'une année moyenne Ψ_p qui peut être considéré en bonne approximation comme le motif répété d'un système périodique. On linéarise alors le système autour de ce flot moyen. Une perturbation initiale au flot moyen est régit par :

$$\partial_t\delta\Psi = (\Delta - \Gamma^2)^{-1} (-J(\Psi_p(t), \Delta\delta\Psi) - J[\delta\Psi, \Delta\Psi_p(t) + 2\mu(1 + \gamma h)] + \alpha\Delta\delta\Psi - \nu\Delta^k\delta\Psi) = L\delta\Psi$$

où L est un opérateur linéaire.

On intègre cette équation sur une base de vecteurs initiaux, ce qui permet d'obtenir le propagateur $\Phi(t, 0)$. La décomposition en valeurs propres de $\Phi(T, 0)$ donne les exposants de Floquet. Il suffit ensuite de résoudre :

$$\partial_t\Psi^F = -\lambda\Psi^F + L\Psi^F \quad (24)$$

pour obtenir les vecteurs de Floquet

c. interprétation des vecteurs de Floquet conduisant à des instabilités

La discrétisation utilisée pour résoudre l'équation aboutit à un système de dimension 231. En prenant $t_0 = 15\text{juin}$ Strong *et al* trouvent trois exposants de Floquet de partie réelle positives. Il y a donc trois modes instables. Le premier mode est oscillant avec $1/\lambda_{reel}$ égal à 28 jours. La structure du vecteur de Floquet associé présente une forte activité en hiver et au début du printemps comme on peut le constater sur la Fig. 11. Ceci permet aux auteurs de conclure à une instabilité principale de 28 jours de temps de croissance caractéristique, à l'origine d'une oscillation intra-saisonnaire, bien observée, de 40 jours de l'Hémisphère Nord (trouvée sur $\Psi^F(t)$) et confirme son activité hivernale au sens large.

Toutefois, il faut garder à l'esprit qu'on analyse l'évolution d'une perturbation le 15 juin par rapport au flot moyen annuel. Or il existe à tout instant des perturbations par rapport à ce flot moyen et il eut été intéressant que les auteurs étudient le vecteur de Floquet avec un autre point de départ. Cependant la perturbation initiale étant prise dans une période de faible activité intra-saisonnaire, l'analyse de Floquet permet d'étudier l'amplification d'une perturbation faible ce qui est cohérent avec la logique d'étude de stabilité.

Les autres modes instables ont des temps de croissance de 54j (activité principale en hiver) et 148 jours (actif en été avec une période d'oscillation de 13-15 jours).

2.5 Perspectives de développement de l'analyse de Floquet pour l'attracteur de Lorenz

Un certains nombres d'outils ont été développés afin d'étudier les points stationnaires d'attracteurs de type Lorenz donnant lieu à des théories intéressantes permettant d'obtenir des informations sur le système au-delà de la limite de prévision déterministe¹. L'un des principaux problèmes est que les modèles ne restent pas longtemps près des points stationnaires (qui sont en nombre fini) et le comportement du modèle ne peut pas être expliqué au-delà. Or il semble exister une forte analogie entre les régimes quasi-stationnaires au voisinage des points d'équilibres instables et l'apparition de modes oscillatoires au voisinage de "cycles limites instables". L'analyse de Floquet pour ces quasi-orbites (stables ou instables) de basse fréquence pourrait se révéler fructueuse car elle permet notamment de relier les exposants de Lyapunov aux multiplieurs de Floquet qui eux se calculent en une période. Mais ceci suppose de coder un algorithme de recherche² des orbites périodiques instables dans `Mini_ker`.

¹Legras and Ghil, 1985

²*Unstable periodic orbits and attractor of the Lorenz model*, Kazantsev

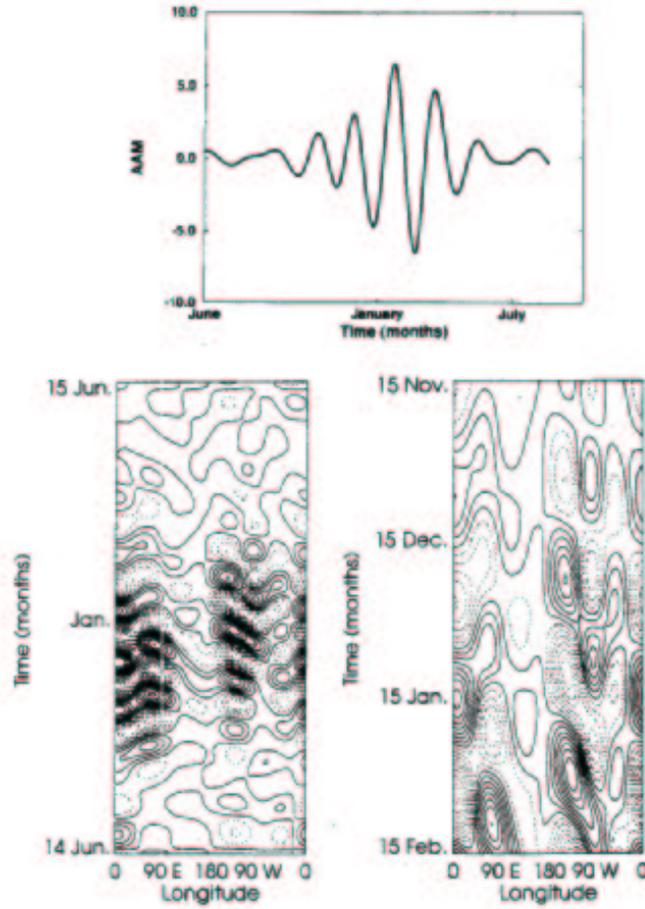


FIG. 6. (a) AAM (nondimensional) of the most unstable eigenvector during one year, with $t_0 = 15$ June. (b) Associated eigenvector structure in two Hovmöller diagrams at 50°N . Values are converted to geopotential and span the range from -90 to 95 m; contour interval is 10 m. (left) Eigenvector structure with 3-day time step for 1 year, with time on the ordinate and longitude on the abscissa. (right) Blowup of left panel, for 15 November–15 February.

FIG. 11 – Moment angulaire du premier vecteur de Floquet et structure de ce vecteur dans un diagramme de Hovmöller

3 Décomposition en valeurs singulières (SVD)

Il semble utile d'avoir conscience d'une véritable dualité d'analyse reposant sur, d'une part, la décomposition en Éléments Propres (EP) sur laquelle repose la théorie de Floquet, et d'autre part la décomposition en éléments singuliers (SVD) qui est l'objet principal des pages qui vont suivre.

3.1 Théorie

Si M est une matrice $m \times n$ réelle ou complexe, alors il existe une factorisation de la forme :

$$M = U \Sigma V^\dagger,$$

où U est une matrice $m \times n$, Σ une matrice ayant des nombres non-négatifs sur la diagonale et des zéros ailleurs et V^\dagger est la matrice conjuguée de V , une matrice $n \times n$. On a de plus $U U^\dagger = V V^\dagger = I$. On appelle cette factorisation **décomposition en valeurs singulières** de M .

Par convention, on ordonne les valeurs singulières par ordre décroissant et alors Σ est uniquement déterminée par M .

3.2 L'analyse asymptotique de Lyapunov

L'estimation de l'amplitude de la prévision de l'erreur d'un système est toujours un problème intéressant dans le domaine de la prédiction. La croissance de l'erreur traduit, du point de vue théorique, l'instabilité du modèle. Pour un phénomène chaotique, les trajectoires issues de conditions initiales proches divergent localement au sein de l'attracteur. Le calcul des exposants de Lyapunov permet de mesurer le taux de divergence entre deux trajectoires.

a. Cas d'une application unidimensionnelle

Soit une application discrète f de \mathfrak{R} dans \mathfrak{R} qui applique x_t sur x_{t+1} . Choisissons deux conditions initiales très proches et regardons comment se comportent les trajectoires qui en sont issues. On suppose qu'elles s'écartent en moyenne à un rythme exponentiel. On pourra alors trouver un réel λ tel que après t itérations :

$$|f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)| \approx \epsilon e^{t\lambda} \quad (25)$$

En passant au logarithme, on trouve :

$$\ln\left(\frac{|f(x_0 + \epsilon) - f(x_0)|}{\epsilon}\right) \approx t\lambda \quad (26)$$

Si l'on fait tendre ϵ vers 0, il vient :

$$\frac{1}{t} \ln(\partial_{x_0} f(x_0)) \approx \lambda \quad (27)$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini et en utilisant la règle de dérivation en chaîne on obtient :

$$\lambda \approx \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t-1} \ln(|\partial_x f(x_i)|) \quad (28)$$

λ est appelé **exposant de Lyapunov**. Il indique le taux moyen de divergence par itération. Si ce nombre est positif, il y a élongation des sensibilités aux conditions initiales. Si, par contre, il est négatif, on perd de l'information sur les conditions initiales : les trajectoires se rapprochent.

b. Généralisation aux applications multidimensionnelles

On peut généraliser les concepts du paragraphe précédent à des trajectoires multidimensionnelles. Quantitativement, deux trajectoires dans l'espace des phases écartées de $\delta \mathbf{Z}_0$ divergent de

$$|\delta \mathbf{Z}(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta \mathbf{Z}_0| \quad (29)$$

Le taux de divergence peut être différent pour différentes orientations du vecteur de séparation initial. C'est pourquoi il y a tout un "spectre des exposants de Lyapunov". Un système m -dimensionnel possédera m exposants de Lyapunov. Chacun d'entre eux mesure le taux de divergence suivant un des axes du système, de sorte qu'en moyenne un hyper-volume évolue selon une loi de type :

$$V = V_0 e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m)t} \quad (30)$$

On se réfère souvent au plus grand des exposants car il détermine la prédictabilité d'un système dynamique. Pour avoir du chaos, il est nécessaire qu'au moins un des λ_i soit positif, mais il faut également que la somme des λ_i soit négative. En effet, dans le cas contraire, le volume initial finirait par remplir tout l'espace dans lequel il est immergé. On n'aurait alors plus un attracteur de faible dimension, et donc plus affaire à du chaos déterministe.

La définition des **exposants de Lyapunov** se base sur le résultat du théorème d'Oseledec qui stipule que la limite : $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Phi(t, 0)^\dagger \Phi(t, 0))^{1/2t}$ existe et vaut une matrice L . Les exposants de Lyapunov sont alors :

$$\lambda_i = \ln(l_i(t)) \quad (31)$$

où les l_i sont les valeurs propres de la matrice L . Cette définition traduit bien le fait qu'une perturbation initiale $\langle x(0) | x(0) \rangle$ devienne $\langle x(t) | x(t) \rangle = \langle x(0) \Phi^\dagger \Phi x(0) \rangle$ et permet de hiérarchiser les directions de perturbation.

On peut tout aussi bien considérer la décomposition en valeurs singulières du propagateur à tout instant :

$$\Phi(t, 0) = U(t) \text{diag}(w_i(t)) V^\dagger(t) \quad (32)$$

On remarque alors qu'on a à tout instant : $\Phi^\dagger \Phi V = \text{diag}(w_i^2) V$ donc w_i^2 est valeur propre de $\Phi^\dagger \Phi$ avec pour vecteur propre V_i . Et comme $\Phi^\dagger \Phi = V^\dagger w^2 V$, il revient donc au même de définir les exposants de Lyapunov globaux par :

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(w_i(t)) \quad (33)$$

Par ailleurs, on peut montrer¹ que les exposants de Lyapunov sont les parties réelles des valeurs propres du propagateur pour un système linéaire invariant et les parties réelles des exposants de Floquet pour les systèmes de Floquet. Enfin on remarque que :

$$\sum \lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(\text{Det}(\Phi(t, 0))) \quad (34)$$

où le déterminant peut être calculé soit par SDV $\text{Det}(\Phi(t, 0)) = \text{Det}(\text{diag}(w_i(t)))$ soit par EP $\text{Det}(\Phi(t, 0)) = \text{Det}(\text{diag}(\sigma_i(t)))$.

4 Formalisme d'évolution par transfert (TEF)

La modélisation des systèmes est généralement conçue dans la perspective de simulations numériques. La modélisation d'un système dans Mini_ker utilise le Formalisme d'Évolution par Transfert qui permet de faciliter la compréhension du fonctionnement des systèmes via un découpage et raccordement de sous-systèmes choisis en fonction d'un questionnement particulier. Après un brève explication de la méthodologie TEF dans Mini_ker et de son principe de résolution, on développe un code permettant d'obtenir les exposants de Lyapunov d'un système chaotique.

4.1 Découpage-raccordement de systèmes par le TEF : cellules et transferts.

On part de la définition d'un système global par son équation d'évolution sous forme d'état :

$$\frac{d\vec{\eta}}{dt} = \vec{G}(\vec{\eta}(t)) \quad (35)$$

A conditions initiales $\vec{\eta}(t_0)$ données, la trajectoire du système est déterminée : on dit que le problème est "bien posé".

Le découpage du TEF consiste à partitionner l'espace vectoriel $\{\vec{\eta}\}$, ce qui aboutit à la définition d'équations d'état pour chaque sous-espace $\{\vec{\eta}_\alpha\}$:

$$\frac{d\vec{\eta}_\alpha}{dt} = \vec{G}(\vec{\eta}(t)_\alpha, \vec{\varphi}(t)) \quad (36)$$

où on remarque l'adjonction de conditions limites supplémentaires $\vec{\varphi}$. Le TEF exige en effet que chaque élément α du système partitionné corresponde à un problème bien posé. Cela a deux conséquences :

- a) chaque élément, dénommé "cellule", ne doit explicitement pas dépendre de l'état d'un autre élément ;
- b) l'interface introduit par le découpage avec les autres cellules représente de nouvelles conditions aux limites (C.L.) dépendantes.

Si ces nouvelles C.L. sont connues, alors chaque cellule va suivre une trajectoire dite "découplée". Pour que les cellules suivent leur trajectoires d'ensemble, déterminée par le système global, il faut donc que ces conditions d'interface soient contraintes par le reste du système, ce qui se fait par l'introduction de modèles d'interface, dénommés "transferts" :

$$\vec{\varphi}(t) = \vec{f}(\vec{\eta}(t), \vec{\varphi}(t)) \quad (37)$$

¹M. Farkas, Periodic Motions, Springer-Verlag, New York, 1994

L'équation (37) exprime que les transferts sont à tout instant déterminés par les états, et n'ajoutent donc pas de conditions initiales supplémentaires. La définition de ces transferts correspond ainsi à la notion de raccordement. Ces nouvelles variables, "les transferts", induites par le découpage, introduisent des modèles de couplage entre des éléments-cellules.

Mathématiquement, la solution du système (36,37) fournit la même trajectoire que (35). C'est de cette manière que le TEF met en œuvre la notion de découpage-raccordement. On aboutit en résumé à deux classes distinctes de modèles, et aux deux types de variables associés. Les **cellules** sont représentées par leur état et définies par des équations d'état, c'est-à-dire donnant leur évolution, alors que les **transferts** sont des équations de contrainte statique.

Les équations de cellule restent semblables à un problème aux limites. Cependant la présence de transferts, qui sont des conditions aux limites variant au cours du temps, exige et permet une analyse dynamique du couplage. Il faut ainsi connaître à la fois la trajectoire de chaque cellule soumise aux conditions dépendantes d'interface, mais également pouvoir expliciter la variation de cette trajectoire à un changement des conditions limites.

L'expression de la sensibilité de l'état de chaque cellule vis-à-vis des transferts permet de caractériser le comportement dynamique global du système. Mathématiquement, c'est par linéarisation du système (36,37) que nous allons exprimer ces sensibilités et résoudre le problème.

4.2 Codage en cellule et transfert sous Mini_ker

a. Lotka Volterra

Le modèle est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t x = ax(1-y) + bx(1-z) \\ \partial_t y = -ay(1-x) + cy(1-z) \\ \partial_t z = -bz(1-x) - cz(1-y) \end{cases} \quad (38)$$

ce qui, après introduction de trois transferts "rencontres", est modélisé dans le Zinit suivant :

```
set_Phi
< eqn: ff_meet_lo = eta_pray*eta_inter;
  eqn: ff_meet_up = eta_pred*eta_inter;
  eqn: ff_meet_mi = eta_pred*eta_pray;
>;
set_probe
< eqn: mu_dist=(mult_sum:(eta[i] -eta_ini[i])**2,[i]=1,3);
>;
!%%%%%%%%%%
! Cell definition
!%%%%%%%%%%
set_eta
< var: eta_pray, fun: deta_pray = (apar+bpar)*eta_pray
  - apar*ff_meet_lo - bpar*ff_meet_mi;
  var: eta_inter, fun: deta_inter = (cpar-apar)*eta_inter
  + apar*ff_meet_lo - cpar*ff_meet_up;
  var: eta_pred, fun: deta_pred = - (bpar+cpar)*eta_pred
  + cpar*ff_meet_up + bpar*ff_meet_mi;
>;
```

Il y a une vraie proie, un vrai prédateur, et une espèce qui s'efforce de survivre entre les deux.

b. Lorenz

Le modèle de Lorenz est modélisé dans Mini_ker avec un choix de quatre transferts couplant les évolutions d'états entre eux. On a laissé dans chaque équation d'évolution la dépendance (exponentielle) en l'état :

```
{
%%%%%%%%%%
! Transfer definition
!%%%%%%%%%%
```

```

! commandes uy_com :
! Zcommand = .True.;
<i=1,np; ux_com(i)=0.;>;<j=1,mp; uy_com(j)=0.;>;
! uy_com(6) = 0.20; Zlaw=.True.;

set_Phi
<
  eqn: ff_courant_L = eta_courant_L;          "x"
  eqn: ff_T_czcx   = eta_T_czcx;            "y"
  eqn: ff_Psi_Tczcx = eta_T_czcx*eta_courant_L;  "xy"
  eqn: ff_Psi_Tsz   = eta_T_sz*eta_courant_L;  "zx"
>;

! Distance quad à init pour "Periode"
! -----
Set_Probe
< eqn: mu_dist=(mult_sum:(eta[i] -eta_ini[i])**2,[i]=1,3);
>;

!%%%%%%%%%%
! Cell definition
!%%%%%%%%%%

set_eta
< var: eta_courant_L,
  fun: deta_conv = pi_prandtl*ff_T_czcx
                    - pi_prandtl*eta_courant_L;
;
  var: eta_T_czcx,
  fun: deta_energy_zx = - ff_Psi_Tsz + pi_Rayleigh_ratio*ff_courant_L
                    - eta_T_czcx;
;
  var: eta_T_sz,
  fun: deta_energy_z = ff_Psi_Tczcx - pi_wave_nb_ratio*eta_T_sz;
>;
}

```

4.3 Linéarisation

L'étude des relations entre sous-systèmes est excessivement complexe si on regarde le système complet non-linéaire. Toute l'étude va donc se faire sur le système linéarisé sur une portion de la trajectoire. Le système linéaire obtenu dépend encore continuellement du temps, et dans un deuxième temps ce système linéaire est discrétisé.

L'ensemble de ces transformations permet d'avoir, à un instant donné, un système algébrique équivalent au système complet. Les éléments de ce système peuvent être interprétés en fonction de la problématique du découpage raccordement du TEF. Ce système permet également de déterminer la trajectoire à l'instant suivant.

On considère le système (36, 37), non linéaire, sur une petite section de sa trajectoire (soit entre t_0 et $t_0 + \delta t$), et on détermine l'accroissement $\vec{\delta\eta}$ de $\vec{\eta}$ et $\vec{\delta\varphi}$ de $\vec{\varphi}$ par développement de Taylor :

$$\frac{\partial \vec{\delta\eta}}{\partial t}(\tau) = \left. \frac{\partial \overline{G}}{\partial \eta} \right|_{t_0} \vec{\delta\eta}(\tau) + \left. \frac{\partial \overline{G}}{\partial \varphi} \right|_{t_0} \vec{\delta\varphi}(\tau) \quad (39)$$

$$\vec{\delta\varphi}(\tau) = \left. \frac{\partial \overline{f}}{\partial \eta} \right|_{t_0} \vec{\delta\eta}(\tau) + \left. \frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi} \right|_{t_0} \vec{\delta\varphi}(\tau) \quad (40)$$

On obtient un système d'Equations aux Dérivées Partielles (EDP) baptisé Système Linéarisé Tangent (SLT) en une portion de la trajectoire, avec $\tau \in [t, t + \delta t]$ paramétrisant la trajectoire.

En renomant les matrices Jacobiennes on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\delta\eta}}{\partial t}(\tau) = H \vec{\delta\eta}(\tau) + B_b \vec{\delta\varphi}(\tau) \quad (41)$$

$$\vec{\delta\varphi}(\tau) = C^+ \vec{\delta\eta}(\tau) + D \vec{\delta\varphi}(\tau) \quad (42)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} H = \left. \frac{\partial \overline{G}}{\partial \eta} \right|_{t_0} \\ B_b = \left. \frac{\partial \overline{G}}{\partial \varphi} \right|_{t_0} \\ C^+ = \left. \frac{\partial \overline{f}}{\partial \eta} \right|_{t_0} \\ D = \left. \frac{\partial \overline{f}}{\partial \varphi} \right|_{t_0} \end{array} \right. \quad (43)$$

Suivant le même schéma que précédemment et en remplaçant $\delta\eta$ et $\delta\varphi$ par les matrices $\Phi(t, \tau)$ et $\Psi(t, \tau)$ on obtient le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi(t, 0) = H \Phi(t, 0) + B_b \Psi(t, 0) \\ \Psi(t, 0) = C^+ \Phi(t, 0) + D \Psi(t, 0) \end{array} \right. \quad (44)$$

où Φ et Ψ définissent la matrice de transition "téfisée".

$$\begin{bmatrix} \partial_t \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H & B_b \\ C^+ & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} (t, \tau) \quad (45)$$

les dimensions de la matrice Ψ étant celles de $|\eta\rangle \langle \varphi|$. On constate que l'élimination de Ψ fournit l'équation d'évolution classique du propagateur :

$$\partial_t \Phi(t, \tau) = [H + B_b(I - D)^{-1}C^+](t) \Phi(t, \tau) = H^\# \Phi(t, \tau) \quad (46)$$

5 Calcul précis des valeurs singulières

5.1 Roduction

On choisit de calculer le propagateur $\Phi(t, 0)$ dans ZINIT et de déterminer toutes les valeurs singulières par SVD. Pour les modèles chaotiques, il existe un problème numérique lié à l'existence d'un Lyapunov positif. Dans ce cas en effet, les perturbations initiales sont infiniment amplifiées avec le temps, si bien que les coefficients de la matrice de transition d'état atteignent rapidement les limites de leur représentation en machine.

Pour essayer de remédier à ce problème, nous introduisons un calcul du type "Que reste-t-il lors qu'on a enlevé ce que l'on connaît déjà?". Plutôt que de calculer Φ , nous allons calculer $\Phi^b(t, \tau) = \Phi(t, \tau)e^{-\rho(t-\tau)}$, où ρ est un scalaire quelconque, que nous choisirons proche du premier Lyapunov. Ceci permet de "retirer" l'effet du Lyapunov. L'équation d'évolution du propagateur réduite est alors :

$$\partial_t \Phi^b(t, \tau) = [H^\# - \rho I] \Phi^b(t, \tau) \quad (47)$$

La résolution sous forme de TEF de ce système s'obtient immédiatement par le classique remplacement de $H^\#$ par $H^\# = H + B(I - D)^{-1}C^+$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \Phi^b(t, \tau) = [H - \rho I] \Phi^b(t, \tau) + B \Psi^b(t, \tau) \\ \Psi^b(t, \tau) = C^+ \Phi^b(t, \tau) + D \Psi^b(t, \tau) \end{array} \right. \quad (48)$$

On ne s'intéresse ici qu'au calcul du Lyapunov dans ZSTEER, c'est-à-dire en laissant Mini_ker effectuer ses calculs classiques d'avance du propagateur. Nous voulons déterminer le système algébrique après application du schéma temporel du TEF

$$\left\{ I - \frac{\delta t}{2} [H^\# - \rho I] \right\} \delta \Phi^b(t, \tau) = \delta t [H^\# - \rho I] \Phi^b(t, \tau) \quad (49)$$

alors que le calcul effectué avant passage dans ZSTEER est

$$\{I - \frac{\delta t}{2} H^\# \} \delta X = \delta t H^\# \Phi^b \quad (50)$$

(puisque en effet on calcule bien Φ^b). Il reste ainsi à déterminer la matrice inconnue δY telle que $\delta \Phi^b = \delta X + \delta Y$, c'est-à-dire :

$$\{I - \frac{\delta t}{2} [H^\# - \rho I]\} [\delta X + \delta Y] = \delta t [H^\# - \rho I] \Phi^b(t, \tau) \quad (51)$$

soit

$$(I - \frac{\delta t}{2} H^\#) \delta X + \rho \frac{\delta t}{2} \delta X + \{I - \frac{\delta t}{2} [H^\# - \rho I]\} \delta Y = \delta t [H^\# - \rho I] \Phi^b(t, \tau) \quad (52)$$

d'où, en éliminant les termes égalisés par (50) :

$$\rho \frac{\delta t}{2} \delta X + \{I - \frac{\delta t}{2} [H^\# - \rho I]\} \delta Y = -\rho \delta t \Phi^b(t, \tau) \quad (53)$$

et enfin

$$\{I - \frac{\delta t}{2} [H^\# - \rho I]\} \delta Y = -\rho \delta t [\frac{1}{2} \delta X + \Phi^b] \quad (54)$$

C'est ce calcul que nous effectuons dans ZSTEER pour déterminer le propagateur réduit. On remarque encore que, une fois Φ^b dans ZSTEER, le retour de boucle temporelle se termine par un calcul du propagateur associé $(I - D)\Psi^b = C^\dagger \Phi^b$. A présent donc, tous les exposants de Lyapunov seront "réduits" par ρ :

$$\lambda_i^L = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log(w_i) + \rho \quad (55)$$

Dans la méthode de Floquet, on obtenait des vecteurs périodiques grâce à la réduction du propagateur par $\exp -\lambda^F t$ (matrice complexe) trouvé comme l'inverse d'un terme de croissance d'une période à la suivante; ici, c'est le comportement asymptotique qui est réduit. On conçoit alors que la croissance de Φ^b soit limitée dès que $\rho \geq \lambda_1^L$; ainsi, non seulement le calcul numérique devient possible, mais de plus la précision du calcul du premier Lyapunov est améliorée, puisque les accroissements $\delta \Phi^b$ restent commensurables avec Φ^b — ce qui n'est pas le cas avec la divergence de Φ .

5.2 Code Mini_ker

```

+SELF,IF=RODUCT.
! *****
!suppression de l'effet d'une estimation du premier lyapunov(=roductor)
!dans le propagateur par +dPhitild
!but ; eviter les nan par saturation htes valeurs, et meilleure precision
! *****
;
! vecteur connu dPhitild = -rho dt (1/2 dPhi_t + Phi_t)
! -----
    any=0.5;
    call oscamat(any,n,n,dPhi_t(1,1),np,dPhitild,np);
    call omatadd(n,n,dPhitild,np,Phi_t(1,1),np,dPhitild,np);
    call oscamat(-roductor*dt,n,n,dPhitild,np,dPhitild,np);
;
if Zprint
< Z_pr/avant/:dPhitild;
  Z_pr/avant/:(Phi_t(i,j),i=1,np),j=1,np);
>;

! matrice [I-dt/2 (aspha -rho I)]
! -----
    call omatcopy(n,n,aspha,np,abuf,np);
    <i=1,np; abuf(i,i)=aspha(i,i)-roductor; > ;          "aspha-rho I"

```

```

any=-dt/2.;
call oscamat(any,n,n,abuf,np,abuf,np);      "-dt/2( **** )"
call diagmat(one,abuf1,n,np);
call omatadd(n,n,abuf,np,abuf1,np,abuf,np);"I- * * *      "
call sgesv(np,np,abuf,np,iPiv,dphitild,np,infores);
call omatadd(n,n,dphitild,np,Phi_t(1,1),np,Phi_t(1,1),np);
if Zprint
< Z_pr/apres/:dPhitild;
  Z_pr/apres/:(Phi_t(i,j),i=1,np),j=1,np);
>;

```

5.3 Application au Lorenz 63

Un premier calcul sans réduction montrant un premier Lyapunov supérieur à 8 avant de diverger, on prend cette première valeur comme facteur de réduction. La Fig.12 montre les trois exposants réduits. Ils fluctuent moins et l'algorithme ne diverge plus. La chaoticité du système

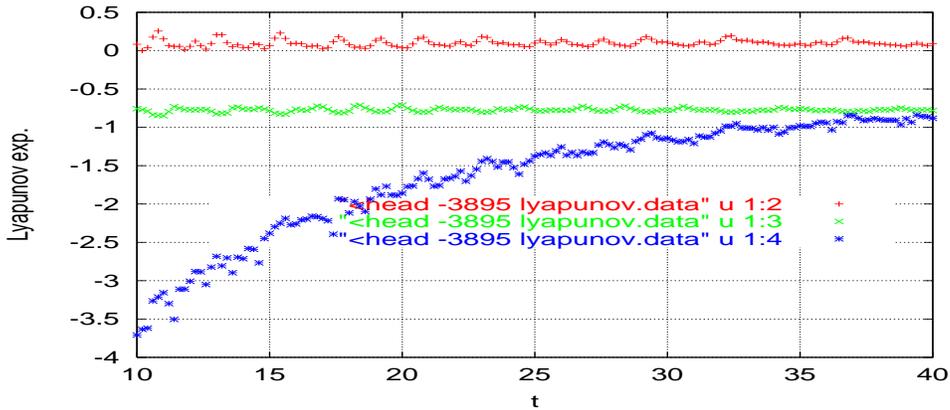


FIG. 12 – Evolution des trois exposants de Lyapunov réduits par 0.8.

repose sur le premier Lyapunov, ici clairement positif. Ce premier exposant est encore au-dessus de 8.7 (Fig. 13), on affine donc son calcul en adoptant ce dernier facteur de réduction. La Fig.14

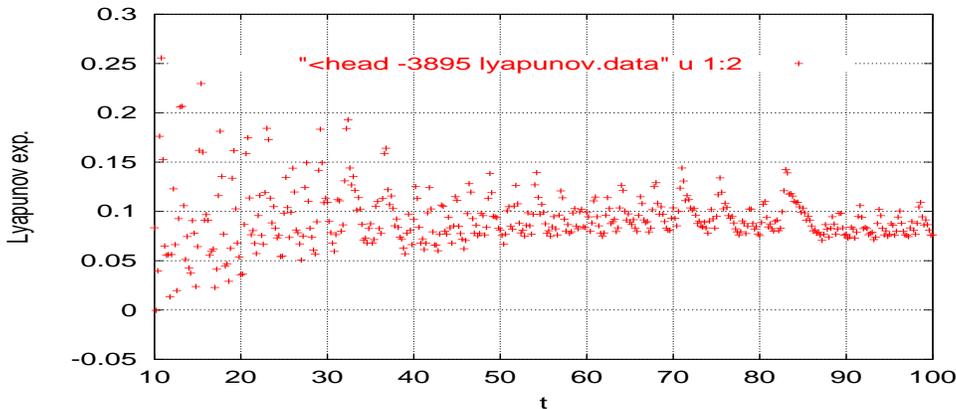


FIG. 13 – Premier exposant de Lyapunov ($\rho = 0.8$).

montre le comportement du premier exposant de Lyapunov réduit par $\rho = 0.87$ en comportement asymptotique : Par rapport au calcul non réduit, qui s'arrêtait plus vite mais que nous pouvions suivre un peu plus loin en double précision (non montré ici), les fluctuations rapides sont ici nettement réduites en amplitude, ce qui confirme l'amélioration de la précision du calcul. On a en effet pu constater que l'avance au deuxième ordre en temps du propagateur s'effectuait avec des incréments croissants et une perte de continuité caractéristique d'un problème de précision algorithmique.

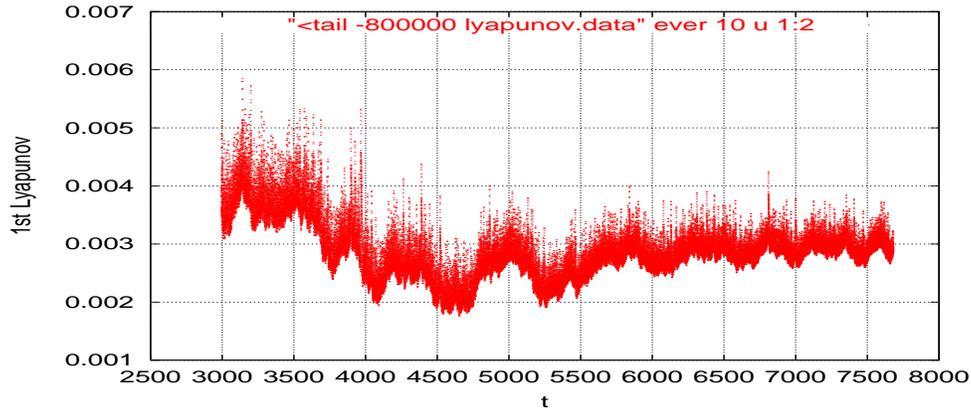


FIG. 14 – Evolution du premier exposant de Lyapunov ($\rho = 0.87$).

En comportement “asymptotique”, il n’y a pas de convergence absolue et l’exposant de Lyapunov fluctue encore entre, disons, 0.0024 et 0.0029. Finalement, on estime cette valeur à $0.8724 < \lambda_1^F < 0.8729$.

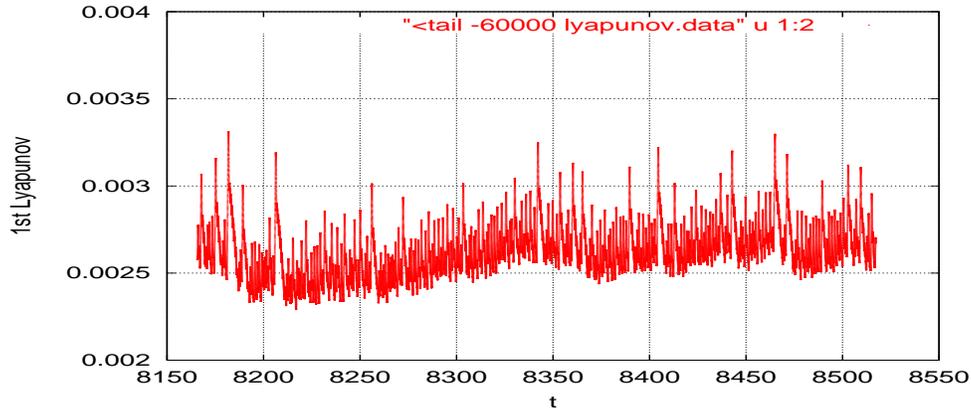


FIG. 15 – Fluctuations résiduelles du premier Lyapunov à l’horizon asymptotique ($\rho = 0.87$).

La méthode de réduction apparait comme une solution pour approcher numériquement l’analyse de stabilité des systèmes chaotiques. Il n’est cependant pas encore très clair que la précision de calcul soit alors suffisante pour obtenir une évaluation améliorée des autres exposants. Ce problème est ici posé du fait de l’éloignement de la valeur des trois exposants. On adoptera pour l’analyse de Floquet la valeur de $\lambda^F = 0.8726$ comme facteur de réduction local du propagateur, pour séparer la tendance asymptotique de la dynamique locale.

ANNEXE : principe de fonctionnement de Mini_ker

Un modèle formulé sous TEF sépare deux types d'équations :

- des équations d'évolution référant aux modèles de **cellules**
- des modèles dits de **transferts** exprimant des contraintes statiques.

Mini_ker constitue une entrée facile à la modélisation sous TEF en simplifiant la structure du modèle : une seule cellule, un seul transfert.

Mini_ker effectue automatiquement les calculs de sensibilité aux conditions initiales ou à un paramètre du modèle. Toutes les dérivées partielles nécessaires à la résolution du système sont effectuées symboliquement à la précompilation. L'utilisateur a donc terminé la programmation de son modèle dès qu'il a entré les fonctions décrivant le modèle et donné la valeur des paramètres ainsi que les conditions initiales.

Le langage élaboré pour automatiser le développement du TEF à partir des fonctions du modèle utilise **Mortran**, un pré-compilateur Fortran dans les années 1970.

Le programme principal de Mini_ker est subdivisé en morceaux, que l'on appelle séquences. L'utilisateur peut se contenter d'un accès à un nombre réduit de séquences dans lesquelles il code, en pseudo-Fortran, les instructions de dimensions du modèle et son expression mathématique. Lors de l'assemblage, ces instructions sont traduites par Mortran en Fortran à l'aide de macros qui remplacent, dans le corps des calculs, des instructions symboliques par du code piloté par la description du modèle.

Les séquences principales sont rangées dans un fichier. Ainsi, une séquence est un élément de code formant une **+KEEP** de cmz. Les séquences à programmer sont **\$dimetaphi** pour entrer les dimensions des tableaux `eta(.)` pour les états et `ff(.)` pour les transferts, et **\$Zinit** pour programmer le modèle. Deux autres séquences utiles (**\$Zsteer**, **\$ZStep**) sont introduites à la fin de la boucle d'avance temporelle du programme principal et utilisées pour effectuer des test et calculs numériques supplémentaires, gérer le niveau d'impression, interrompre la simulation etc.

On lance la précompilation, compilation et fabrication de l'exécutable en tapant **mod** dans la fenêtre CMZ. L'exécution de cette macro va assembler les parties du code fragmenté en séquences, pour former un programme principal en langage Mortan, que l'on trouve dans, avec l'exemple predator. On retrouve dans ce fichier ses séquences `dimetaphi` et `zinit`, `zsteer` en fin de la boucle de calcul, immergées dans le programme **principal**. L'assemblage est guidé par l'appel de `mod` à une macro `cmz` : **selseq.kumac**, située dans le répertoire de la `cmz` file. C'est dans cette `kumac` que l'on donne le chemin d'accès au code complet de Mini_ker, qui impose les séquences de l'utilisateur, et qui aiguille les options diverses.

Références

- M. Farkas, *Periodic Motions*, Springer-Verlag, New York, 1994
- Christopher Strong, Fei-Fei Jin, Michael Ghil, 1994 *Intraseasonal Oscillations in a Barotropic Model with Annual Cycle, and Their Predictability*
- Pierre Montagnier, Raymond J. Spiteri, Jorge Angeles 2004 *The control of linear time-periodic systems using Floquet-Lyapunov theory*
- Yakubovic et Starzhinshii, 1975 *Linear Differential Equations with Periodic Coefficient*
- Evgueni Kazantsev, 1998 *Unstable periodic orbits and attractor of the Lorenz model*, INRIA
- Alain Lahellec, 2006 *Manuel pratique de Mini_ker*
- Collaboration TEF-ZOOM, *Le Formalisme d'Evolution par Transferts : une introduction au découpage de modèle et à l'analyse de rétro-actions*, CIREC, LMD, LE
- M. Ghil, 2001 *Hilbert problems for the geosciences in the 21th century*
- B. Legras, M. Guil 1985 *Persistent anomalies, blocking and variations in atmospheric predictability.*
- S. Bharadwaj and K.D. Mease *A New Invariance Property of Lyapunov Characteristic Directions*

sites internet

http://en.wikipedia.org/wiki/Singular_value_decomposition

http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/Lyapunov/Exposant.html

<http://spacetown.free.fr/chaos/lorenz.php>

<http://de.wikipedia.org/wiki/Floquet-Theorem>

<http://www-lmc.imag.fr/lmc-edp/Kazantsev/lyapunov/main.html>
http://www.atmos.ucla.edu/tcd/RESEARCH/research_lfv.html
<http://astrosurf.com/luxorion/meteo-massesdair.htm>
http://math.cmaisonneuve.qc.ca/alevesque/chaos_fract/Lorenz/lorenz.html
<http://bill.srn.arizona.edu/classes/496yikedata.htm>

Table des matières

1	Théorie de Floquet	1
1.1	Considérations générales	1
a.	Factorisation de Floquet	1
b.	Vecteurs de Floquet	2
c.	Wronskien	3
1.2	Code dans Mini_ker	3
2	Application de la théorie de Floquet à des systèmes périodiques	3
2.1	Analyse de Floquet des systèmes périodiques	3
a.	Théorie	3
b.	Propriété de la vitesse lorsque le système est périodique	4
2.2	Un prédateur-proie à trois espèces	4
a.	le modèle	4
b.	valeurs propres du propagateur	4
c.	analyse de Floquet du système	6
2.3	Lorenz 63 et Lorenz périodique	6
a.	détermination de la quasi-période	7
b.	visualisation de la dérive des vecteurs de Floquet	8
c.	Wronskien sous-dimensionné	8
2.4	Analyse d'article : Etudes des oscillations intra-saisonniers sur un modèle barotrope	8
a.	oscillations intra-saisonniers	8
b.	modèle et analyse de Floquet	10
c.	interprétation des vecteurs de Floquet conduisant à des instabilités	10
2.5	Perspectives de développement de l'analyse de Floquet pour l'attracteur de Lorenz	10
3	Décomposition en valeurs singulières (SVD)	11
3.1	Théorie	11
3.2	L'analyse asymptotique de Lyapunov	12
a.	Cas d'une application unidimensionnelle	12
b.	Généralisation aux applications multidimensionnelles	12
4	Formalisme d'évolution par transfert (TEF)	13
4.1	Découpage-raccordement de systèmes par le TEF : cellules et transferts.	13
4.2	Codage en cellule et transfert sous Mini_ker	14
a.	Lotka Volterra	14
b.	Lorenz	14
4.3	Linéarisation	15
5	Calcul précis des valeurs singulières	16
5.1	Roduction	16
5.2	Code Mini_ker	17
5.3	Application au Lorenz 63	18