Sur la problématique des rétro-actions sur champs

Al1

21 septembre 2004

(▷*relecture commentée du texte original de Février 2003 après les essais divers des textes SLTC et FeedBack Gains (16 Juin 2004). On laisse le fil original du brouillon avec les pistes non suivies pour provision et pour faciliter la continuité des lectures, et on signale des erreurs. Ces commentaires seront marqués par le signe ▷).*

1 Motivation

Au dernier Zircon, Jean-Louis Dufresne nous a présenté l'étude passionnante qu'il a menée avec Pierre Friedlingstein sur les rétroactions «Carbone-Climat». L'analyse était effectuée à partir des champs de modèles de circulation générale océan-atmosphère, complétée par un modèle de flux de carbone aux surfaces continentales et océaniques. Les hypothèses concernant les processus mis en oeuvre permettait aux auteurs de fixer a priori une formulation scalaire du problème, c'est-à-dire de raisonner en valeurs moyennes sur le globe. La question qui se pose concerne la généralité d'application de leur hypothèse. Comme on peut le constater dans la littérature, les concepts de sensibilité et de rétroaction représentent une caractérisation des systèmes couplés utilisée dans l'explication des mécanismes. Stéphane Hallegatte a présenté l'intérêt de ces concepts pour l'analyse dynamique de systèmes. Il a également évoqué la difficulté de définir rigoureusement les conditions de découpage du système propres à associer un gain formel à une analyse de processus.

La note présente se situe dans la même problématique et interroge la notion de sensibilité et rétroaction de champs de grandeurs. Il s'agit de pistes pour construire un programme de recherche. Il s'agit plus d'un scénario que de démonstrations : on aimerait pouvoir dire ce qui est dit, et on avance en marchant.

▷*la première remarque est que ce type de recherche est explicitement mentionnée dans le rapport de la réunion d'Exceter*[1] *de l'IPCC de Mai 2004*

[1] à laquelle participaient Sandrine Bony et StepH

comme prioritaire pour les études à entreprendre sur le réchauffement climatique.

1.1 modèle Carbone et notations

On va supposer que la rétroaction carbone-climat met en jeu des processus qui ne dépendent que d'une température locale – disons, un indice des températures des couche de surface atmosphérique et de mélange océanique. On appellera Θ (ou SST) les **variations** de cette température, et Φ celles des flux de carbone.
Notations :

- Θ, φ ou$F$ etc : à entendre comme variations des grandeurs par rapport à une trajectoire de référence (Les modèles s'entendent donc comme les linéaires tangents aux complets) ;
- var_{ins} = variations insensibles (g=0) ; on écrira par ex. Θ_{ins} pour Θ insensible, c'est-à-dire la variation de la SST induite par croissance de CO2 **sans** l'effet de la modification de la SST sur les flux Oc-Atm de carbone - qui ne varient donc alors que de l'effet de l'accroissement du gradient de CO2 à la surface.

1.2 Cas simples

- le gain est local et homogène.

$$(\mathcal{I} - g\mathcal{I}) \mid \varphi >=\mid \varphi_{ins} > \tag{1}$$

il suffit de multiplier par $< \frac{1}{n}\mathcal{I} \mid$ (n=nbre de mailles), qui commute avec $g\mathcal{I}$, pour obtenir :

$$(1-g)\,\overline{\varphi} = \overline{\varphi_{ins}} \tag{2}$$

avec $\overline{x}$ moyenne sur le globe de x.

- cas diagonal : le gain reste local mais varie spatialement

$$(1-g_{ii})\,\varphi_i = \varphi_{dec\_i} \tag{3}$$

on peut former $\mid (\varphi - \varphi_{ins}) \,/\, \varphi >$ pour avoir la carte des gains locaux, et les caractériser dynamiquement par EOFs. On récupère dans ce cas les structures et $g(t)$.

- application au cas Carbone : que doit on observer ? ($\mid \varphi >=$ flux $atm \leftrightarrow oc$, et la boucle de rétro passe par SST)
  - EOF_1 = contraste océan (plat) vs continents (véget. zonale) ;
  - EOF_2 = structure de la rétroaction identique à structure EOF de var ins de SST bref, EOF standard de réchauffement clim (ou un mélange entre EOF 1& 2) ;
  - $\triangleright$*on devrait voir ensuite les remontées d'eaux froides (upwelling) qui favorisent la croissance planctonique et le puits de carbone, et à l'inverse les zones d'eaux chaudes à solubilité de CO2 plus faibles.*

- $EOF_3 = ?$ on verra peut être les courants océaniques si la concentration CO2 intervient via le gradient atm-oc du puits ;
- $EOF_4 = ?$ effet des précips sur continents et eau douce océan ?

1.3 cas complet quelconque

Pour une boucle de rétroaction bien définie du reste du système sur la grandeur vectorielle ϕ, on a sous Zeus[1] :

$$(\mathcal{I} - \mathcal{G}) \mid \varphi >=\mid \varphi_{ins} > \tag{4}$$

où $\mathcal{G}$ est ce qu'on a envie d'appeler une matrice de gains.

$\triangleright$ *il faut par ailleurs bien comprendre les équations (1) et (4). Les termes de gain ne sont pas dépendants d'une variable τ ou δt. Ils sont définis par une différentielle de Gâteaux sur le SLTC, et donc paramétrés par le temps t ou tout autre paramètre de la trajectoire (StepH par exemple a défini la trajectoire des états stationnaires paramétrée par un contenu atmosphérique de CO2 - ce qui est possible en le supposant uniformément réparti. La dynamique que recèle le gain est ici complexe puisqu'elle propage les perturbations successives depuis le début de la trajectoire ; $\mathcal{G}$ est un opérateur et non pas une matrice, $\mathcal{G}^\dagger$ est l'opérateur adjoint etc, nous reviendrons sur ce point ultérieurement. On reste donc très symbolique dans la suite*

L'effet des rétroactions sur φ est : $\mid \varphi - \varphi_{ins} >= \mathcal{G} \mid \varphi >$. Si on s'intéresse aux plus grands modules de cet effet, on cherche le maximum de :

$$\frac{< \varphi - \varphi_{ins} \cdot \varphi - \varphi_{ins} >}{< \varphi \cdot \varphi >} \tag{5}$$

C'est bien en effet une mesure de la rétro-anomalie qui nous inquiète. Or

$$\frac{< \varphi - \varphi_{ins} \cdot \varphi - \varphi_{ins} >}{< \varphi \cdot \varphi >} = \frac{< \mathcal{G}^\dagger \mathcal{G} \varphi \cdot \varphi >}{< \varphi \cdot \varphi >} \tag{6}$$

où $\mathcal{G}^\dagger$ est l'adjoint de $\mathcal{G}$ pour un produit scalaire défini. c'est-à-dire que la structure des gains de rétro qui nous intéresse est donnée par les vecteurs propres de $\mathcal{G}^\dagger \mathcal{G}$, c'est-à-dire les Vecteurs Singuliers à droite de $\mathcal{G}$ (on dira : structures singulières de perturbation).
Ce genre d'analyse est repris d'un courant de recherches en climatologie, depuis K.Hasselmann (ses "fingerprints"). L'intérêt des structures exhibées par la décomposition, c'est qu'elles révèlent au climatologue des interprétations en terme de mécanismes climatiques ($\triangleright$*[[σ]] de manière inductive donc*).

Bon, maintenant, analysons la structure cachée de

$$(I - \mathcal{G}) \mid \varphi >=\mid \varphi_{ins} >$$

[1]Marque déposée par la secte ZOOM

pour simplifier le raisonnement, intéressons nous à des gains mous (spectre de $\mathcal{G}$ $|.| < 1$) ; alors

$$| \varphi > - | \varphi_{ins} > \sim \mathcal{G} | \varphi_{ins} >$$

si on décompose $\mathcal{G} = \mathcal{U}\,\Upsilon^d\,\mathcal{V}^\dagger$ (Vect. Sing.), où la matrice diagonale Υ^d est constituée de coefs non tous nuls : $[g_i]$, donnerait donc les gains associés à chaque mode singulier – qui sont ici des structures, puisque chaque vecteur représente une carte bidimensionnelle du champ considéré.
On peut montrer même que des modes normaux : $(\mathcal{I}-\mathcal{G})^{-1} = \mathcal{I}+\mathcal{U}\,[sp\Upsilon]^d\,\mathcal{V}^\dagger$ (sp=somme des puissances de) pour avec, pour $g < 1$, $sp\Upsilon^d$ formée de $g_{ii}/(1-g_{ii})$.

Et si on projette φ sur la base V[1], on obtient (pour $\varphi_k =| V_k >$) :

$$| V_k > - | V_{dec\_k} > = g_k | U_k >$$

avec g_k les éléments de Υ^d.

• La sémantique de cette belle formule est que la rétroaction considérée explique la structure de la rétro-anomalie par un gain portant sur la structure associée $| U_k >$, qui est un vecteur propre de $\mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger$, c'est-à-dire la structure caractérisant la rémanence des rétroactions.

Pour expliciter ce dernier point, on ajoute un forçage f à φ_{ins}, que l'on choisit tel qu'il annule la rétroaction, c'est-à-dire tel que $| \varphi > - | \varphi_{ins} >= 0$:

$$0 \;=\; \mathcal{G} \,| \varphi > \;+\; | f >$$

La structure du forçage qui a le plus de difficulté à inhiber la rétroaction est donnée par :

$$\max \frac{< f \cdot f >}{< \varphi \cdot \varphi >} = max \frac{< \mathcal{G}^\dagger \mathcal{G} \varphi \cdot \varphi >}{< \varphi \cdot \varphi >} \tag{7}$$

C'est donc la structure associée à la valeur singulière maximale. Elle est une structure signalant le plus efficacement la rétroaction due au processus analysé.

Conjecture : $\mathcal{G}$ est quasi normale ($\mathcal{G}\mathcal{G}^\dagger \sim \mathcal{G}^\dagger\mathcal{G}$. c'est-à-dire que les structures insensibles et pleines seraient proches :

$$| \varphi - \varphi_{ins} >= \mathcal{G} | \varphi >$$

et on a $| \varphi - \varphi_{ins} > \sim \mathcal{G} | \varphi_{ins} >$ dès que $|\mathcal{G}| < 1$.
Y-a-t-il une mesure de l'écart à la normalité ? (comme le déterminant du commutateur) ;
que peut-on apprendre d'une analyse des éléments singuliers du commutateur ?.

• de façon plus générale, on décompose φ sur la sous-base $\{| V >\}$: $\varphi = \sum_k a_k \,|\, | V_k > >$.

[1]si $\mathcal{G}$ est régulière, $\{| V >\}$ forme une base de $\{\varphi\}$

On obtient in fine : $a_k [1 - g_k < U_k \cdot V_k >] = a_{dec\_k}$ et à nouveau, la rétroaction passe par la projection de chaque structure singulière de perturbation $\mid U_k >$ de chaque mode singulier $\mid V_k >$ de φ. (of course, les structures singulières $\mid U_k >, \mid V_k >$ sont dépendantes de la boucle de rétroaction choisie, c'est-à-dire des équations sous Zeus ...).

Remarque : g_k est un gain «physique» ; le gain effectif lui est au plus égal, affaibli qu'il est par un effet de projection entre structures.

• Évidemment, on est pas très avancés concrètement si on n'a pas accès à la matrice $\mathcal{G}$! Car pour avoir les Vect.Singes, c'est actuellement difficile : il faut avoir le modèle adjoint du SLT, calculer colonne par colonne une matrice etc.
Mais du point de vue de l'interprétation générale de la notion de gain sur champs, on fait un pas en avant. On peut en effet associer un gain scalaire (g_k) à la structure singulière $\{\mid U_k >, \mid V_k >\}$, hiérarchiser ces structures en fonction de la force et du signe de la rétroaction associée, etc.
Goodman et Marshall ont vérifié la pertinence de ce type d'analyse avec un modèle de pseudo vorticité potentielle maillé sur le globe (MM93), le même que Fabio d'Andrea au LMD. La matrice de propagation est déterminée colonne par colonne en calculant, avec le SLT, l'évolution d'une base euclidienne (en harmoniques sphériques) des solutions fondamentales. Les mêmes auteurs ont étendu l'analyse à un modèle MM93 couplé à un modèle océanique. Leur analyse des structures de couplage pourrait donc servir de support au développement précédent. Il serait intéressant d'en discuter avec Fabio. Mais aussi avec Filipe d'Aires dès qu'il sera au labo, pour envisager les prolongements possibles en mode dynamique.

$\triangleright$ *rappelons que l'on a raisonné implicitement sur un point de la trajectoire en considérant que les matrices sont accessibles (ou disons sur une portion de la trajectoire osculée par un SLT autonome). On a vu cependant le lien des structures propres de ces matrices avec les champs d'anomalies, ce que nous exploiterons dans la dernière partie du papier.*

1.4 mécanismes cachés (analyse de couplage).

Dans cette partie, on analyse le couplage entre deux processus (associés à deux équation matricielles sous Zeus), et on cherche le gain résultant de l'élimination des variables associées au modèle du processus opposé.
soit les équations sous Zeus :

$$\begin{cases} \mid \Theta > + \mathcal{B} \mid \Phi > & = \mid \Theta_{ins} > \\ \mathcal{C} \mid \Theta > + \mid \Phi > & = \mid \Phi_{ins} > \end{cases} \tag{8}$$

Commentons un peu la sémantique de ce système : dans le cas Carbone, on prend une trajectoire de référence (x_0) ; on effectue un doublement de CO2 avec couplage complet pour obtenir les trajectoires de Θ et Φ. Les variables ci-dessus sont les variations des grandeurs par rapport à la référence ($\Delta\Theta$

et $\Delta\Phi$). Le système précédent est obtenu en prenant le Système Linéaire Tangent (SLT) au modèle complet en suivant la trajectoire de référence.

On calcule maintenant une première trajectoire supplémentaire d'analyse avec CO2 doublé, mais en imposant les flux de carbone référence $\rightarrow \Delta\Theta_{ins}$, et une dernière pour calculer les flux avec la température de référence $\rightarrow \Delta\Phi_{ins}$. $\Delta\Phi_{ins}$ est donc la variation du flux de carbone insensible ($\mathcal{C} = 0$) à la variation de SST induite par la variation de $\mid \Phi >$; $\Delta\Theta_{ins}$ est la variation de SST induite par doublement de CO2, qui reste insensible ($\mathcal{B} = 0$) à la variation des flux de carbone.

(on revient aux notations simplifiées).

$\mathcal{B}$ (resp. $\mathcal{C}$) exprime donc la sensibilité de Θ (Φ) à une perturbation de Φ (Θ). On rappelle que si le modèle est directement écrit avec le TEF, $\mathcal{B}$ Θ_{ins}($\mathcal{C}$ Φ_{ins}) ne dépendent pas du modèle de Φ (resp. Θ).

A partir de ce système (8), on récupère le gain de rétroaction des processus biologiques de surface sur la SST en éliminant $\mid \Phi >$ dans la première équation :

$$(\mathcal{I} - \mathcal{BC}) \mid \Theta >=\mid \Theta_{ins} > -\mathcal{B} \mid \Phi_{ins} >=\mid \hat{\Theta}_{ins} > \tag{9}$$

$\mid \Theta_{ins} >$, par rapport à $\mid \Theta_{ins} >$, hérite de l'influence de la modification de flux, mais sans rétroaction, qui passe par $\mathcal{C}$. On peut obtenir la trajectoire correspondante en appliquant le flux de carbone Φ_{ins}.

1.5 sensibilités

On prend chacune des équations de (8) indépendamment. On regarde les structures qui rendent Θ les plus sensibles à Φ :

$$\mathcal{B} = \mathcal{P}\sigma^d\mathcal{R}^\dagger$$

où σ^d est diagonale (hiérarchie des sensibilités).

$$\mid \Theta > - \mid \Theta_{ins} >= \mathcal{B} \mid \Phi > \tag{10}$$

Ces structures «de perturbation» de Θ par Φ sont les Vecteurs Propres de $\mathcal{B}^\dagger\mathcal{B}$ correspondant à hiérarchiser les σ_i. (élevées au carré, mais on peut restituer une hiérarchie avec leur signe dans la fabrication du gain final). Donc Φ perturbe un mode $\mid R >$ qui donne à Θ une déformation $\mid P >$ avec le gain σ.

id. pour Φ par Θ : S perturbé par Φ donne Q avec τ.

1.6 Analyse de leur combinaison dans une matrice de gains.

Le gain sur Θ est donc :

$$\mathcal{BC} = \mathcal{R}\sigma^d\mathcal{P}^\dagger.\mathcal{Q}\tau^d\mathcal{S}^\dagger \tag{11}$$

- analyse en structures k (colonnes) pour faciliter l'interprétation, on prend d'abord $\mid \Theta_{ins} >=\mid S_k >$; on trouve :

$$\sum_i \mid P_i > [\sigma_i \tau_k < R_i \cdot Q_k >]$$

l'effet sur Θ se compose en structures $\mid P_i >$ avec des composantes : «physiques» produit de sensibilités $(\sigma_i \tau_k)$, et structurelles $< R_i \cdot Q_k >$ de projection des déformations de Φ par Θ (Q_k) sur les str. de perturb. de Θ par Φ (R_i). Le produit scalaire et donc les coefficients de la matrice formée de ces produits sont tous au plus égaux à 1. Dans ce sens, on obtient le même gain physique pour Θ et Φ, mais leurs structures singes modèrent ces gains par des effets de structures différentes. C'est là le sens profond de tout ça.

Question : un «gain physique» peut-il être annulé par l'effet de structures ? réponse : NON ! explication in 1.8.

- analyse en effets globaux (par maille)

*** a faire si nécessaire

1.7 reste à considérer la «physicalité» du pb., c'est-à-dire

1. que peut on dire a priori d'un couple $\mathcal{B}, \mathcal{C}$?
   - en dehors du fait qu'elles sont ici toutes deux carrées et que leurs produits sont sans dimension ;
   - les deux matrices représentent des applications linéaires entre les deux même espaces vectoriels ;
   - y-a-t-il des contraintes style Onsager ? du genre qui expliquerait la normalité de $\mathcal{G}$. j'en trouve pas mais ...
     ex : on voit vraiment pas pourquoi la matrice $[\sigma_i \tau_k < R_i \cdot Q_k >]$ serait symétrique !
2. pour chaque pb. spécifique, leurs propriétés ;
3. y-a-t-il moyen d'avoir accès simplement à ces matrices en retenant les raisonnements et modèles de JLD & PF ?
4. intérêt de questionner Fabio pour des évaluations avec un modèle MM93 couplé s'il en dispose ?

• attention au baratin qui suit, pour les raisons données à la fin.

On peut aussi aller plus loin en faisant intervenir ce qu'on va pouvoir appeler la «conjecture de Goodman et Marshall».
Ils ont montré que pratiquement (sur MM93), les premiers Vsinges de $\mathcal{G}$ sont aussi les EOF de $\mid \varphi > - \mid \varphi_{ins} >$! Enfin je fais quand même un saut de ce qu'ils ont montré à ce dont on a besoin, mais ça peut se développer (cf 2.3).

Et même plus, cette conjecture devient plus simple dans le cas d'une perturbation homogène (donc avec une pertub [CO2] !). Il faut vérifier que les perturbations induites soient aussi dé-corrélées spatialement. à creuser donc, c'est-à-dire est-ce que la source cohérente de CO2 augmentée dans Θ_{ins} et Φ_{ins} se traduit synoptiquement par des perturbations statistiquement non spatialement corrélées ? (et à quelles échelles sur Φ_{ins} et Θ_{ins} ?)

1.8 Lien entre les gains $\mathcal{BC}$ et $\mathcal{CB}$

Dans la figure 1, on a opposé deux structures singes de la SST – en haut – à celles des flux de carbone – en bas. Lorsqu'on coupe la boucle de rétroaction à droite (au niveau $< P \cdot S >$), on analyse le gain sur Θ. Le gain physique entre deux structures $| S_k >$ et $| P_j >$ est donné par le produit des sensibilités singes $\tau_k \sigma_j$. Ce gain est atténué par le facteur de structure $< Q \cdot R >$.

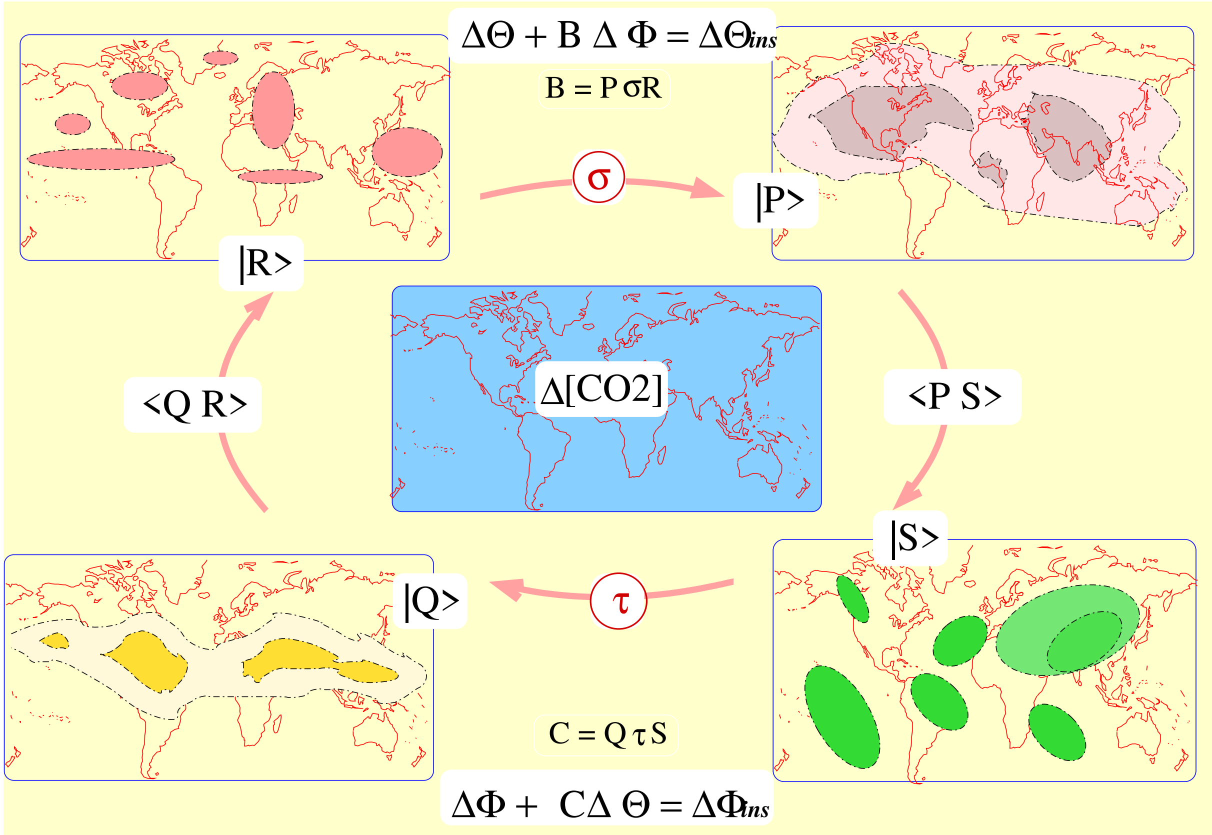

FIG. 1 – Analyse des rétroactions par deux phénomènes couplés.

La coupure opposée (au niveau $< Q \cdot R >$) concerne l'analyse des flux et donne le même gain physique, mais cette fois-ci entre des structures de l'espace vectoriel $\{| \Phi >\}$: $| R_j >$ et $| Q_k >$. Le facteur d'atténuation par les structures est alors $< P \cdot S >$.

Les deux produits scalaires sont faits entre des vecteurs appartenant à deux bases du même espace vectoriel – en supposant que $\mathcal{G}$ (et donc $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$) sont régulières. Ces facteurs de structures ne font donc que répartir les gains physiques entre les diverses structures.

1.9 Lien avec la matrice de gains $\mathcal{G}$

(en prenant les structures les plus rémanentes des produits décomposés de la section précédente).

*** a faire si nécessaire

2 analyse a priori du cas Carbone.

2.1 de ce qui caractérise ce système.

Prenons le couple $\Theta \times \Phi$ (CO2) (on rappelle que Θ est à la place de ΔT etc.)

- Θ_{ins} = effet de CO2 sur SST sans variation de Φ
- $\rightarrow$ structures standards du réchauffement
- Φ_{ins} = effet sur gradient $\rightarrow$ puits
- $\rightarrow$ suit la même structure que Θ_{ins}, aux effets de variations de CO2 dans l'océan superficiel près.

2.2 Système sous Zeus

• équation séparée de la SST

$$| \Theta > + \mathcal{B} | \Phi > = | \Theta_{ins} >$$

la structure de $\mathcal{B}$ n'est pas quelconque : la variation de Φ est locale mais son impact (annuel) sur [CO2] atm est global (j'ignore si JLD&PF conservent ou non un différentiel Nord-Sud ?).

Si $\mathcal{B}$ était l'impact de Φ sur [CO2], elle serait pleine de $\frac{1}{n}$, (n=nbre de mailles). Mais Θ étant structurée, la $\mathcal{B}$ de l'équation doit projeter sur les EOF de Θ.

• équation séparée de Φ atm-océan carbone

$$| \Phi > + \mathcal{C} | \Theta > = | \Phi_{ins} >$$

on a cette fois-ci le cas simple, c'est-à-dire local, et (je suppose) de gain quasi homogène (?) $\mathcal{C} = g\mathcal{I}$ le gain sur champs est donc $\mathcal{G} = c\mathcal{B}$; si tout ce qui précède est correct, il a donc la structure de $\mathcal{B}$ qui projette sur les EOF de Θ. Or comme Φ suit justement ces EOFs, $\mathcal{B} = \mathcal{I}$, et $\mathcal{G}\mathcal{Z} = c\mathcal{I}$! on retrouve le cas simple avec c = facteur de fertilisation.

Bref, ce raisonnement justifierait formellement ce que font JLD & PF au premier ordre, les structures donnant les effets supplémentaires (précips, effet de variation de CO2 océan etc). L'important, c'est que l'on peut vérifier pas à pas les diverses hypothèses qui sont faites, en comparant les EOFs de $\Theta_{ins}, \Theta - \Theta_{ins}, \Phi - \Phi_{ins}$ etc. Bref, introduire une discussion des mécanismes planétaires, ou affiner les comparaisons inter-modèles. Cette partie du travail est faisable dans le cadre d'un stage de maîtrise, si tout les outils sont au point.

2.3 Questions en suspens

• Rappelons pour finir l'argument du papier SLTC, à savoir que l'écart à une trajectoire (définie par un système non linéaire) est caractérisé par un SLT ! En effet, tous les coefficients de couplage attachés à la trajectoires sont simplement dépendants du temps. Autrement dit, tout écart postérieur à une perturbation initiale est déterminé par le propagateur du système[1]. C'est ce propagateur que Filipe détermine pour son Lorenz 84 à 3x3 en ayant fixé un intervalle de temps. Cela suggère que l'on puisse caractériser un système non linéaire en passant les pôles instables rapides qui sont rendus stables par les non linéarités, et ainsi ne conserver que les constantes de temps les plus lourdes du système, celles qui nous intéressent donc.

▷ *les autres questions du premier texte étaient hors propos, car elles sous-entendaient que les matrices étaient en transformées de Borel, ce qui est faux comme on l'a dit.*

▷ *on a depuis aussi proposé de caractériser le propagateur du SLTC en prenant son logarithme matriciel : ce qui revient à identifier un SLTC autonome filtrant le complet, dans une approche donc très similaire à Lyapunov. Les éléments propres pourraient, selon le système, converger ou non vers des fixes, avec même peut-être identification dans la partie complexe de sous-systèmes oscillants ? pb : j'ai pas encore trouvé d'algorithme robuste de Log mx pour faire des essais sur les Lorenz et autres. L'intérêt supplémentaire de récupérer cette Log serait de nous livrer la dynamique (par Borel) longue du système, la dynamique plus rapide étant déterminée en suivant la trajectoire. Par ailleurs, cela permet de tester l'hypothèse de G&M qui se traduit par la convergence de* $1/tLog(\Phi(t,0))$. *Une fois cette matrice d'état* $\mathcal{A}$ *déterminée, on peut identifier la matrice complémentaire* $\mathcal{B}$ *de* $\Phi(t,0) = \mathcal{B}(t)exp(\mathcal{A}t)$ *caractérisant ces fameuses fluctuations non-linéaires qui sont censées s'effacer en moyenne. Je me permets d'insister sur l'intérêt de cette approche.*

2.4 Autres pistes (6 Mai 2004)

• pour les analyses à la TEF, on développe les coefs de couplage dépendants du temps (SLT non-$\mathcal{L}$ en séries orthogonales ...

• que dire des différence d'EOFs de grandeurs couplées vs insensibles ? (par exemple, on prend les EOF de la SST et profondeur thermocline dans l'analyse d'el Nino : on s'attend en couplant les deux à trouver une EOF de deux parties en opposition de phase. Ce qui veut dire que les deux grandeurs sont couplées. De là à trouver des coefs de couplage ?

• Si on peut modifier le modèle, et déterminer une boucle de rétroaction avec la technique Gâteaux, c'est-à-dire que l'atmosphère voit SST+ΔT, modifie le stress sur l'océan, etc, retour sur SST $\longrightarrow$ SST). ▷ *cette partie a été développée dans le papier FBgains.*

[1] je suggérais alors de l'appeler : SLT circulant (SLTC).

3 Une approche par les champs (20 Mai 2004, révision du 2 Juin)

(par différences finies entre trajectoires)

L'approche est basée sur l'approche du Gâteaux numérique décrite dans le papier pseudo-PRL. Considérant une trajectoire de référence, on effectue une perturbation correspondant aux équations couplant deux anomalies :

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta\theta + \mathcal{B}\Delta\varphi = & \Delta\Pi_\theta \\ \Delta\varphi + \mathcal{C}\Delta\theta = & 0 \end{array} \right. \tag{12}$$

attention, cette forme est très symbolique, où $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont des opérateurs non triviaux, voir PRL equ. (10) sur une trajectoire entière.

L'idée "orthogonale" consiste à rechercher les structures pour lesquelles les deux anomalies sont le plus corrélées. Ce que l'on obtient en recherchant les EOF (ou la SVD) de

$$\mathcal{R}_{\theta\varphi} = \int_0^T \mid \Delta\theta, \Delta\varphi >< \Delta\theta, \Delta\varphi \mid dt \tag{13}$$

On a en résumé les relations suivantes :

$$\mathcal{R}_{\theta\varphi} = \mathcal{U}\,\Upsilon^d\,\mathcal{V}^\dagger \tag{14}$$

en ordonnant γ_k décroissant. On peut décomposer les deux champs sur les pseudo bases :

$$\left\{ \begin{array}{rl} a_k(t) = & < U_k \cdot \Delta\theta(t) > \\ b_k(t) = & < V_k \cdot \Delta\varphi(t) > \end{array} \right. \tag{15}$$

sont appelées "composantes principales" des champs $\Delta\theta$ et $\Delta\varphi$ correspondants au couple de modes k de covariance, et ainsi

$$\left\{ \begin{array}{rl} \Delta\theta(t) \approx & \sum_k a_k(t) \mid U_k > \\ \Delta\varphi(t) \approx & \sum_k b_k(t) \mid V_k > \end{array} \right. \tag{16}$$

Prendre quand même garde au fait que la base des EOFs de la matrice de covariance n'est pas nécessairement complète pour la représentation des champs. $\mathcal{U}$ est aussi la matrice des vecteurs propres de $\mathcal{R}_{\theta\varphi}$. Ces modes ont quelque raison d'être semblables aux EOFs de variation de chaque champs : en effet, soit les deux champs sont complètement décorrélés, et on aura les modes de chacun (la matrice de covariance sera essentiellement diagonale), soit ils sont très corrélés, et ils auront les mêmes modes.

Pour commencer, il faudra faire des essais assez systématiques de comparaison entre modes obtenus à partir d'éléments différents sur la trajectoire pour construire une explication. Il y a évidemment une thèse derrière cela à extraire de ces a priori et à construire non pas en termes purement méthodologiques, mais climatologiques (je veux dire que les modes extraits n'ont d'intérêt que dans la mesure où ils signent ("les fingerprints" de Klaus Hasselmann) des stuctures significatives de la climatologie.

3.1 Liens avec le TEF

Par ailleurs, la résolution, là également extrêmement symbolique, du système (12) fournit

$$\left\{\begin{array}{rl} \Delta\theta = & [I-\mathcal{B}\mathcal{C}]^{-1}\Delta\Pi_\theta \\ \Delta\varphi = & -[I-\mathcal{C}\mathcal{B}]^{-1}\mathcal{C}\Delta\Pi_\theta \end{array}\right. \tag{17}$$

et ainsi :

$$\mid \Delta\theta >< \Delta\varphi \mid = \mathcal{M}_\theta \mid \Delta\Pi_\theta >< \Delta\Pi_\theta \mid \mathcal{C}^\dagger \mathcal{M}_\varphi^\dagger \tag{18}$$

avec la définition évidente des opérateurs $\mathcal{M}$ et des moyennes temporelles implicites (on explore, on ne démontre rien). La comparaison de (13) avec (18) légitime déjà l'approche proposée du fait que les opérateurs de couplage apparaissent avec les deux formes correspondant aux deux analyses possibles des gains de la même boucle.

Pour avancer, faisons d'abord le lien entre les diverses matrices en partant de la décomposition la plus élémentaire, celle des champs $\Delta\theta$ et $\Delta\varphi$ trouvés par application d'une série de perturbation paramétrée par π, pour garder d'emblée la généralité étendant l'aspect purement temporel. On part donc de

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\theta = \mathcal{U}_\theta\, \Upsilon_\theta{}^d\, \mathcal{V}_\theta{}^\dagger \\ \Delta\varphi = \mathcal{U}_\varphi\, \Upsilon_\varphi{}^d\, \mathcal{V}_\varphi{}^\dagger \end{array}\right. \tag{19}$$

en rappelant que les colonnes de $\mathcal{U}$ sont des modes $\mid U_k >$ de variance le long de la série π, ordonnées selon les k décroissants ; une ligne de $\mathcal{V}_k$ donne la composante de la série produisant le mode k.

• dans le cas où on cherche les EOFs des deux champs ensemble - auquel cas on doit, soit les normaliser, soit les pondérer avec une métrique physique pertinente, on obtient les éléments propres de la matrice

$$\mathcal{R} \quad = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{\theta\theta} & \mathcal{R}_{\theta\varphi} \\ \mathcal{R}_{\varphi\theta} & \mathcal{R}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \tag{20}$$

on a successivement

$$\left\{\begin{array}{rc} \mathcal{R}_{\theta\theta} = & \mathcal{U}_\theta\, \Upsilon_\theta^{2d}\, \mathcal{U}_\theta{}^\dagger \\ \mathcal{R}_{\theta\varphi} = & \mathcal{U}_\theta\, \Upsilon_\theta{}^d\, \mathcal{V}_\theta{}^\dagger\, \mathcal{V}_\varphi\, \Upsilon_\varphi{}^d\, \mathcal{U}_\varphi{}^\dagger \\ \mathcal{R}_{\varphi\theta} = & \mathcal{R}_{\theta\varphi}^\dagger \\ \mathcal{R}_{\varphi\varphi} = & \mathcal{U}_\varphi\, \Upsilon_\varphi^{2d}\, \mathcal{U}_\varphi{}^\dagger \end{array}\right. \tag{21}$$

décomposition qui a l'avantage de bien montrer que l'on mélange de l'information si on cherche les éléments propres de (R) tout entière. En gros, la diagonalisation va mélanger des structures propres de chaque anomalie et leurs modes corrélés.

$\triangleright$ *bien au contraire, on va voir que de cette information complète, on va pouvoir extraire celle que l'on cherche ; mais cette remarque peut être* *prise comme anticipant la nécessité de procéder en deux étapes, en suivant R. Vautard, cf plus loin.*

En particulier $\mathcal{R}_{\varphi\varphi}$, qui est la matrice qui nous intéresse a priori, a une structure intéressante qui rappelle la structure cachée des produits $\mathcal{BC}$ évoquée dans le paragraphe 1.6. Le produit intérieur $\mathcal{V}_\theta{}^\dagger \mathcal{V}_\varphi$ est le plus instructif : les séries de π des deux champs apparaissent en produit scalaire et donne donc la corrélation entre ces séries. Si les anomalies sont très corrélées, la matrice produite sera diagonale et les structures des deux champs seront les mêmes. D'autres modes non-corélés (les k les plus grands) auront des structures très différentes. La forme $\mathcal{R}$ est donc un bon point de départ, à condition de vérifier ensuite la cohérence des structures avec la recherche d'EOFs de $\mathcal{R}_{\theta\varphi}$. On peut cependant noter que les modes singuliers de $\mathcal{R}_{\theta\varphi}$ ne seront strictement obtenus qu'en modifiant les $\vec{U}$ et $\vec{U}$ de telle manière que les produits modifiés de $< \mathcal{V}_\theta \Upsilon_\theta{}^d \cdot \mathcal{V}_\varphi \Upsilon_\varphi{}^d >$ soient diagonaux.

Il va s'agir à présent d'exploiter les deux visions adjointes, soit en covariance, soit en SLT.

• Quelles sont a priori les propriétés nécessaires de la décomposition à retenir pour qu'elle soit pertinente vis a vis de la recherche de gains de rétroaction ?

- on veut privilégier la covariance entre les deux champs
- les deux bases à retenir n'ont de sens que si les composantes principales associées sont non-corrélées :

$$\begin{cases} \int_0^T a_k(t) a_l(t) dt & = 0; k \neq l \\ \int_0^T a_k(t) b_l(t) dt & = 0; k \neq l \end{cases} \tag{22}$$

- les modes les plus corrélés doivent être ceux qui "expliquent" la plus grande partie des gains de rétroaction

Posé ainsi, le problème devient extrêmement contraint, en supposant qu'il soit soluble. On a en effet deux demandes contradictoires : la non-corrélation est satisfaite avec la décomposition (18), alors que la ségrégation des forces de corrélations invoque la décomposition (14).

▷ *la bonne nouvelle, c'est que la solution existe et est connue depuis 1936, publiée par H. Hotelling (in* **Biometrika***).*

3.2 Liens entre TEF et covariances de champs d'anomalies(8 Juin)

On va expliciter la forme générale (12) en essayant d'obtenir une expression intégrale permettant de ne pas traîner de δt. On se laissera alors guider par ces résultats pour élaborer l'analyse à partir des trois trajectoires standard de l'analyse off-shore de couplage.

•*d*écoupage-raccordement en vision intégrale.

On considère toujours l'exemple océan-atmosphère couplés par deux transferts "croisés". La réponse des deux état-sphères (η, ξ) à une perturbation

$\Delta\pi(t)$ le long du SLTC de la trajectoire de référence est, en boucle ouverte :

$$\begin{cases} \Delta\eta(t) & = \Phi_\eta^d(t,0)\Delta\theta(0) + \int_0^t \Phi^d(t,\tau)\mathcal{B}_{\eta\pi}(\tau)\Delta\pi_\theta(\tau)d\tau \\ \Delta\xi(t) & = \Phi_\xi^d(t,0)\Delta\xi(0) + \int_0^t \Phi^d(t,\tau)\mathcal{B}_{\xi\pi}(\tau)\Delta\pi_\xi(\tau)d\tau \end{cases} \tag{23}$$

On va tout de suite simplifier les notations en notant les intégrales en convolution :

$$\begin{cases} (\Psi_\eta \circ \Delta\pi_\eta)_{ins}(t) & = \int_0^t \Phi_\eta^d(t,\tau)\mathcal{B}_{\eta\pi}(\tau)\Delta\pi_\eta(\tau)d\tau \\ (\Psi_\xi \circ \Delta\pi_\xi)_{ins}(t) & = \int_0^t \Phi_{xi}^d(t,\tau)\mathcal{B}_{\xi\pi}(\tau)\Delta\pi_\xi(\tau)d\tau \end{cases} \tag{24}$$

ces solutions insensibles sont celles du système TEF suivant :

- *cellules*

$$\begin{cases} \partial_t\Delta\eta(t) & = \mathcal{A}_\eta\Delta\eta + \mathcal{B}_{\eta\theta}\Delta\theta + \mathcal{B}_{\eta\pi}\Delta\pi_\eta(t) \\ \partial_t\Delta\xi(t) & = \mathcal{A}_\xi\Delta\xi + \mathcal{B}_{\xi\varphi}\Delta\varphi + \mathcal{B}_{\xi\pi}\Delta\pi_\xi(t) \end{cases} \tag{25}$$

- *transferts*

$$\begin{cases} \Delta\theta(t) & = \mathcal{C}_{\theta\xi}\Delta\xi \\ \Delta\varphi(t) & = \mathcal{C}_{\phi\eta}\Delta\eta \end{cases} \tag{26}$$

il s'agit d'un cas où on ne perturbe pas directement l'interface. Les propagateurs du système insensible sont définis par

$$\begin{cases} \partial_t\Phi_\eta^d(t,\tau) & = \mathcal{A}_\eta\Phi_\eta^d(t,\tau) \\ \partial_t\Phi_\xi^d(t,\tau) & = \mathcal{B}_\xi\Phi_\xi^d(t,\tau) \end{cases} \tag{27}$$

• Considérons maintenant le système couplé sous forme d'équation d'état :

$$\partial_t \begin{bmatrix} \Delta\eta(t) \\ \Delta\xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_\eta & \mathcal{B}_{\eta\theta}\mathcal{C}_{\theta\xi} \\ \mathcal{B}_{\xi\varphi}\mathcal{C}_{\phi\eta} & \mathcal{A}_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\xi \end{bmatrix}(t) + \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{\eta\pi}\Delta\pi_\eta \\ \mathcal{B}_{\xi\pi}\Delta\pi_\xi \end{bmatrix}(t) \tag{28}$$

Il a pour solution

$$\begin{bmatrix} \Delta\eta(t) \\ \Delta\xi(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_\eta & \Phi_{\eta\xi} \\ \Phi_{\xi\eta} & \Phi_\xi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\xi \end{bmatrix}(0) + \begin{bmatrix} \Psi_\eta & \Psi_{\eta\xi} \\ \Psi_{\xi\eta} & \Psi_\xi \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Delta\pi_\eta \\ \Delta\pi_\xi \end{bmatrix}(t) \tag{29}$$

avec les deux systèmes de définitions :

$$\begin{cases} \partial_t\Phi_\eta(t,\tau) & = \mathcal{A}_\eta\Phi_\eta(t,\tau) + \mathcal{B}_{\eta\theta}\mathcal{C}_{\theta\xi}\Phi_{\xi\eta}(t,\tau) \\ \partial_t\Phi_{\xi\eta}(t,\tau) & = \mathcal{A}_\xi\Phi_{\xi\eta}(t,\tau) + \mathcal{B}_{\xi\varphi}\mathcal{C}_{\phi\eta}\Phi_\eta(t,\tau) \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} \partial_t\Phi_\xi(t,\tau) & = \mathcal{A}_\xi\Phi_\xi(t,\tau) + \mathcal{B}_{\xi\varphi}\mathcal{C}_{\phi\eta}\Phi_{\eta\xi}(t,\tau) \\ \partial_t\Phi_{\eta\xi}(t,\tau) & = \mathcal{A}_\eta\Phi_{\eta\xi}(t,\tau) + \mathcal{B}_{\eta\theta}\mathcal{C}_{\theta\xi}\Phi_\xi(t,\tau) \end{cases} \tag{31}$$

chaque système représente un point de vue sur la boucle, vue de l'atmosphère ou de l'océan. Prenons le premier et supposons la perturbation ne perturbant pas l'océan ($\Delta\pi_{xi} = 0$). Le premier terme de droite représente l'évolution insensible, on va donc introduire (27)

$$\begin{cases} \partial_t\Phi_\eta^d(t,\tau) = \mathcal{A}_\eta\Phi_\eta^d(t,\tau) \\ \partial_t\Phi_\eta^x(t,\tau) = \mathcal{A}_\eta\Phi_\eta^x(t,\tau) \quad + \mathcal{B}_{\eta\theta}\mathcal{C}_{\theta\xi}\Phi_{\xi\eta}(t,\tau) \end{cases} \tag{32}$$

de telle manière que $\Phi_\eta = \Phi_\eta^d + \Phi_\eta^x$. $\triangleright$ *cette définition ne sera utilisée qu'en section 3.2.* Les intégrales de convolution sont définies par :

$$\begin{cases} \Psi_\eta \circ \Delta\pi_\eta(t) & = \int_0^t \Phi_\eta(t,\tau)\mathcal{B}_{\eta\pi}(\tau)\Delta\pi_\eta(\tau)d\tau \\ \Psi_{\eta\xi} \circ \Delta\pi_\xi(t) & = \int_0^t \Phi_{\eta\xi}(t,\tau)\mathcal{B}_{\xi\pi}(\tau)\Delta\pi_\xi(\tau)d\tau \\ \Psi_{\xi\eta} \circ \Delta\pi_\eta(t) & = \int_0^t \Phi_{\xi\eta}(t,\tau)\mathcal{B}_{\eta\pi}(\tau)\Delta\pi_\eta(\tau)d\tau \\ \Psi_\xi \circ \Delta\pi_\xi(t) & = \int_0^t \Phi_{xi}(t,\tau)\mathcal{B}_{\xi\pi}(\tau)\Delta\pi_\xi(\tau)d\tau \end{cases} \tag{33}$$

Ayant obtenus ces brillants résultats, on peut enfin exprimer les transferts sous une forme intégrale, en appliquant (26)

$$\begin{bmatrix}\Delta\varphi(t)\\ \Delta\theta(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{C}_{\varphi\eta}(t) & 0\\ 0 & \mathcal{C}_{\theta\xi}(t)\end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix}\Psi_\eta & \Psi_{\eta\xi}\\ \Psi_{\xi\eta} & \Psi_\xi\end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix}\Delta\pi_\eta\\ \Delta\pi_\xi\end{bmatrix}(t)\right\rangle \tag{34}$$

Ces notations permettent de conserver une vision intégrale proche de (17) exhibant les opérateurs de couplage ; on se rapproche ainsi de la vision par matrices de covariance (du moins j'espère). Ça peut sembler factice, car on a remplacé les vecteurs insensibles par les convolutions, et reporté le fameux δt dans la définition des propagateurs en tant qu'intégrales (où se retrouve le dt, mais avec un statut plus avantageux). A partir de là, on peut exprimer les différents termes de la matrice de variance-covariance des deux champs couplés, analogue après intégration à (20). Par exemple

$$\mathcal{R}_{\theta\varphi} = \int_0^T \mathcal{C}_{\theta\xi} \left|\Psi_{\xi\eta} \circ \Delta\pi_\eta\right\rangle \left\langle\Delta\pi_\eta \circ \Psi_\eta\right| \mathcal{C}_{\varphi\eta}\, dt \tag{35}$$

(on a choisi des anomalies nulles au départ). C'est la forme explicite correspondant à la forme symbolique (18). Elle est décevante dans la mesure où elle base l'analyse de rétroaction sur un cœur qui n'est autre que $\mathcal{R}_{\eta\xi}$, d'où l'interface a disparu, que l'on réintroduit a posteriori via les matrices $\mathcal{C}$ du SLTC. On voit par contre comment le produit des convolutions combine les perturbations décalées dans le temps (à τ différents, donc toute la tripaille de la construction des effets différés dans la fonction de gain.

Mais mon humble regret, c'est que cette formule démontre que la covariance n'est pas la bonne expression des gains ! En effet, si on ouvre la boucle, en annulant $\mathcal{B}_{\eta\theta}$, la matrice de covariance reste non nulle - ce qui semble normal, l'océan continuant à réagir à la perturbation de l'atmosphère. Il faut aussi annuler $\mathcal{B}_{\xi\varphi}$, sauf que dans ce cas, on a carrément $\Delta\xi = 0$! Décevant, n'est-il pas ? (mille excuses de vous avoir imposé ces calculs). Que peut-on espérer en suivant cette piste ? (Je continue a penser que c'est pertinent).

En fait, dans cette première partie, l'ambition était de se passer des trois trajectoires, et on voit que ça semble impossible ; alors que c'était bien évident a priori (cf 4) que les gains ne semblent accessibles que par différences entre deux anomalies.

- formulation post mortem du problème :
  - en restant dans l'esprit des covariances, on cherche une décomposition en structures $\mid E_i >$ qui permette d'écrire :

$$(\mathcal{I} - \mathcal{Q}) \mid E_i >= quoi? \tag{36}$$

  dans laquelle $\mathcal{Q}$ soit fonction inconnue des quatre (trois) matrices de variance covariance.
  - le terme "insensible" de droite doit être de moyenne nulle - pas de covariance si boucle ouverte. On aurait ainsi un problème aux valeurs propres

$$\left(\mathcal{I} - \sum_k g_k(t) \mid E_k >< E_k \mid \right) \mid E_i >= 0 \tag{37}$$

  - la décomposition doit séparer des mécanismes de rétroaction différents, et on traduit cela en terme de non corrélation temporelle entre les fonctions de gain :$\int_0^T g_k(t) g_l(t) dt = 0$ quand $k \neq l$.
  - on peut aussi ajouter que deux formes symétriques de $\mathcal{Q}$ semblent requises. du fait des deux points de vue sur la même boucle.
  - même si la forme (36) n'est peut-être pas facile à justifier complètement, il reste que l'on cherche $max \frac{<EQE>}{<E.E>}$, qui est bien un pb aux V.P. de $\mathcal{Q}^{1/2}$

Par ailleurs, le seul lien - très implicite - que l'on a pu établir avec le SLTC est :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{\theta\theta} & \mathcal{R}_{\theta\varphi} \\ \mathcal{R}_{\varphi\theta} & \mathcal{R}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} = \int_0^T \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\varphi\eta} & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{\theta\xi} \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} \Psi_\eta & \Psi_{\eta\xi} \\ \Psi_{\xi\eta} & \Psi_\xi \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Delta\pi_\eta \\ \Delta\pi_\xi \end{bmatrix} (t) \right\rangle \left\langle \begin{bmatrix} \Delta\pi_\eta \\ \Delta\pi_\xi \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} \Psi_\eta & \Psi_{\eta\xi} \\ \Psi_{\xi\eta} & \Psi_\xi \end{bmatrix}^\dagger \right| (t) \begin{bmatrix} \mathcal{C}_{\varphi\eta} & 0 \\ 0 & \mathcal{C}_{\theta\xi} \end{bmatrix}^\dagger dt \tag{38}$$

et on a vu que notre système le plus direct à écrire, qui était :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{\theta\theta} & \mathcal{R}_{\theta\varphi} \\ \mathcal{R}_{\varphi\theta} & \mathcal{R}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \end{bmatrix} \right\rangle = \left| \begin{bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \end{bmatrix} \right\rangle_{ins} \tag{39}$$

ne semblait guère répondre à la question. Et en combinant judicieusement les quatre matrices disponibles ? On doit pouvoir trouver une manière de justifier ce qu'on a l'habitude de faire avec le TEF (la fameuse cécroixamoinsunmisation). Du genre

$$\mathcal{Q}_{\theta\varphi} = \mathcal{R}_{\theta\theta}^{-1} \mathcal{R}_{\theta\varphi} \mathcal{R}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathcal{R}_{\varphi\theta} \tag{40}$$

pour le point de vue atmosphérique, et

$$\mathcal{Q}_{\varphi\theta} = \mathcal{R}_{\varphi\varphi}^{-1} \mathcal{R}_{\varphi\theta} \mathcal{R}_{\theta\theta}^{-1} \mathcal{R}_{\theta\varphi} \tag{41}$$

pour l'océan. Correspondant aux problèmes aux V.P. : $(I - \mathcal{Q}) \mid E_k >= 0$.

Déjà, ces deux matrices $\mathcal{Q}$ ont mêmes valeurs propres, ce qui est conforme à la vision circulaire de la boucle (chère à JYG). On trouve donc la décomposition et un “gain moyen” par mode $\gamma_k = \int_0^T g_k^2(t)dt$. On est ainsi en train de dire que ces “gains moyens” sont les mêmes des deux côtés de la boucle, sympa, non ? Reste à démontrer la nullité a droite et la décorrélation entre les gains modaux, mais là, je cale...

à suivre donc. **suite, donc** : Ça va peut-être vous sembler miraculeux, mais la littérature évoque en effet ce calcul des éléments propres de (40) et (41) ! Sous le nom de CCA : Canonical Correlation Analysis. Et de plus un certain R.Vautard fait remarquer que ces éléments sont les vecteurs propres de $\mathcal{R}$ dans la base des EOFs des deux champs. En effet, soit $\mid E >$ V.P de $\mathcal{R}$ (matrice symétrique) :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}_{\theta\theta} & \mathcal{R}_{\theta\varphi} \\ \mathcal{R}_{\varphi\theta} & \mathcal{R}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \left| \begin{bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \end{bmatrix} \right\rangle_k = \lambda_k \left| \begin{bmatrix} E_\theta \\ E_\varphi \end{bmatrix} \right\rangle_k \tag{42}$$

système où on a arbitrairement séparé les composantes des champs. Développons :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\theta\theta} \mid E_\theta >_k + & \mathcal{R}_{\theta\varphi} \mid E_\varphi >_k = \lambda_k \mid E_\theta >_k \\ \mathcal{R}_{\varphi\theta} \mid E_\theta >_k + & \mathcal{R}_{\varphi\varphi} \mid E_\varphi >_k = \lambda_k \mid E_\varphi >_k \end{cases} \tag{43}$$

les EOFs sont par ailleurs telles que :

$$\begin{cases} \mathcal{R}_{\theta\theta} \mid F >_i = \mu_i \mid F >_i \\ \mathcal{R}_{\varphi\varphi} \mid G >_i = \nu_i \mid G >_i \end{cases} \tag{44}$$

dans cette base évidemment, les matrices de variances covariances sont diagonales. En tildant les vecteurs et matrices dans cette base, on simplifie ainsi le système (42) en développant les $\mid E >_k$ dans cette base :

$$\begin{cases} \mid \Delta\theta >= \sum_i a_i(t) \mid F >_i \\ \mid \Delta\varphi >= \sum_i b_i(t) \mid G >_i \end{cases} \tag{45}$$

on a alors

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{R}_{\theta\theta}} = [\int a^2 dt]^d = [\mu]^d \\ \widetilde{\mathcal{R}_{\varphi\varphi}} = [\int b^2 dt]^d = [\nu]^d \end{cases} \tag{46}$$

le système (42) devient

$$\begin{cases} \mu_k \mid \widetilde{E_\theta} >_k + \widetilde{\mathcal{R}_{\theta\varphi}} \mid \widetilde{E_\varphi} >_k & = \lambda_k \mid \widetilde{E_\theta} >_k \\ \widetilde{\mathcal{R}_{\varphi\theta}} \mid \widetilde{E_\theta} >_k + \nu_k \mid \widetilde{E_\varphi} >_k & = \lambda_k \mid \widetilde{E_\varphi} >_k \end{cases} \tag{47}$$

on en déduit que

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{R}_{\theta\varphi}}\widetilde{\mathcal{R}_{\varphi\theta}} \mid \widetilde{E_\theta} >_k & = (\mu_k - \lambda_k)(\nu_k - \lambda_k) \mid \widetilde{E_\theta} >_k \\ \widetilde{\mathcal{R}_{\varphi\theta}}\widetilde{\mathcal{R}_{\theta\varphi}} \mid \widetilde{E_\varphi} >_k & = (\mu_k - \lambda_k)(\nu_k - \lambda_k) \mid \widetilde{E_\varphi} >_k \end{cases} \tag{48}$$

et donc, les matrices $\mathcal{Q}$ de (40) et (41), réduites ici à ce système, ont pour éléments canoniques les vecteurs propres de la matrice de covariance croisée $\widetilde{\mathcal{R}}$. Corollairement, ces éléments sont aussi les vecteurs singuliers à droite et à gauche de $\widetilde{\mathcal{R}_{\theta\varphi}}$, ce qui valide la non corrélation entre les composantes canoniques (incroyable, non ?). On va montrer tout ça plus calmement.

On décompose en SVD (laissant tomber les tildes) : $\mathcal{R}_{\theta\varphi} = \mathcal{U}\Upsilon\mathcal{V}^{\dagger}$. La projection de $\Delta\theta$ sur les $\mid U_k >$ fournit les séries de composantes canoniques $a_k(t) = < U_k \cdot \Delta\theta >$, et la covariance des a est donc

$$\begin{array}{rc} \int a_k a_j(t)dt = & < U_k \mid \int \mid \Delta\theta >< \Delta\theta \mid dt \mid U_j > \\ = & < U_k \mid \mathcal{R}_{\theta\theta} \mid U_j > \\ = & \mu_j \delta(k,j) \end{array} \tag{49}$$

par ailleurs, $\mid U >$ est vecteur propres de $\mathcal{R}_{\theta\varphi}\mathcal{R}_{\varphi\theta}$ avec $\mu = \gamma^2$. Enfin $\int a_k b_j(t)dt$ fait apparaître le produit $\mathcal{R}_{\theta\varphi} \mid V_j >= \gamma_j \mid U_j >= \delta(k,j)$, ce qui fait que les séries canoniques de covariance des deux anomalies sont décorellées entre modes distincts.

On a aussi par construction $\int a_1 b_1(t)dt$ max associée aux structures $\mid U_1 >$ et $\mid V_1 >$ des champs d'anomalies de θ et φ respectivement, dans la base des EOFs.

• Pour faire brève conclusion provisoire, la solution consisterait donc à appliquer cette décomposition aux champs $\Delta X - \Delta X_{ins}$ dans la base de leurs EOFs, à décomposer en SVD leur covariance, puis enfin à reprojeter dans l'espace géographique. Le reste, c'est de la littérature ... c'est-à-dire justement ce que l'on recherche.

Déclinaison et détails

On envisage ici de décliner la technique précédente aux problèmes à l'origine de cette piste, à savoir les études de sensibilité, de couplage et de rétroaction. Résumons d'abord pour les gains de rétroaction.

Gains (4 Juillet)

- les EOFs de $\mathcal{R}_{\varphi\varphi}$ (avec φ pour $\Delta\varphi - \Delta\varphi_{ins}$) donnent des modes hiérarchisant les variances-covariances du vecteur. $< e \mid \mathcal{R}_{\varphi\varphi} \mid e >$ est la variance le long de $\mid e >$, donc la première EOF $\mid U_1 >$ est la structure maximisant la variance.
- le sens de cette variance est lié à la structure de boucle de rétroaction qui définit $\Delta\varphi$ et $\Delta\varphi_{ins}$ dans le cadre de la méthode des trois trajectoires.
- la modulation de cette structure est obtenue par projection du champs sur la première EOF :

$$g_1(t) = < U_1 \cdot \Delta\varphi - \Delta\varphi_{ins} > \tag{50}$$

avec décorrélation entre les gains de structures différentes.

– l'interprétation de ces gains suppose que les rétroactions s'effectuent en mettant en œuvre des mécanismes différents. L'hypothèse sous–jacente semble donc que des mécanismes différents produisent des séquences temporelles (ou paramétriques) non corrélées ; la trajectoire (les forçages, son étendue) doit permettre cette hypothèse.
– enfin, la métrique associée au produit scalaire doit aussi contribuer à la mise en valeur de ces mécanismes, bref, on retrouve des pb classiques d'interprétation de structures propres, et les nombreux essais nécessaires pour construire son intime conviction (modification de trajectoires, perturbation différente par exemple).
– cette analyse semble toutefois justifiée par le lien entre les EOFs de $\mathcal{R}_{\varphi\varphi}$ et l'opérateur $\mathcal{G}^\dagger\mathcal{G}$ de la formule (6)[1].
– il faudra également reparler de la procédure des trois trajectoires par perturbation, car les anomalies insensibles des deux systèmes séparés dépendent de la configuration.

Couplages et sensibilité (10 Juillet)

On traite cette fois le système couplé (8) ou d'une sensibilité du modèle associé à la première équation (A) à une perturbation du deuxième (O), qui peut tenir lieu d'un simple paramètre ($\Phi = \Pi$). On associe la sensibilité à la recherche des structures :

$$\frac{<\ \theta - \theta_{ins} \cdot \theta - \theta_{ins}\ >}{<\ \theta \cdot \theta\ >} = \frac{<\ \mathcal{B}^\dagger\mathcal{B}\theta \cdot \theta\ >}{<\ \theta \cdot \theta\ >} \tag{51}$$

comme pour les gains, sauf qu'ici le vecteur insensible a un sens différent. Et pour les couplages, on s'intéresse à

$$\frac{<\ \theta - \theta_{ins} \cdot \varphi - \varphi_{ins}\ >}{<\ \theta \cdot \varphi\ >} = \frac{<\ \mathcal{B}^\dagger\mathcal{C}\theta \cdot \varphi\ >}{<\ \theta \cdot \varphi\ >} \tag{52}$$

Bref, on se retrouve avec les matrices de variance-covariance $\mathcal{R}_{\S\S}$ définissant les EOFs d'un côté, les $\mathcal{R}_{xy}$ pour les couplages. C'est marrant, ces couplages seraient associés à $matB_\dagger\mathcal{C}$, et non pas $matB\mathcal{C}$ comme dans le TEF[2].

Ainsi, la procédure de Robert Vautard consisterait à rechercher d'abord les structures maximisant la sensibilité de chaque champ au champ adverse, puis dans cette base de considérer les structures de corrélation canonique entre ces EOFs. Ça fait sens, non ?

Il faut maintenant passer à une étude pratique, et j'ai l'impression que l'analyse de couplage nécessite quatre trajectoires.

[1]ne pas oublier de traiter du problème de la représentation des opérateurs dans le cas non-autonome

[2]mais attention encore au fait que ces symboles sont des opérateurs, et un opérateur adjoint contient un propagateur du SLTC propageant des sensibilités.