Introduction à l'adjoint, aux sensibilités, et à d'autres effluents crâniens par le propagateur*

Août 2005 (date initiale)

La forme de ce texte est celle d'un "brouillon perpétuel", les modifications successives sont alors datées en conservant le plan général. Cette forme a été préférée à un ensemble de textes disjoints. Il s'agit de développements accompagnant la Recherche, mais on s'efforce de conserver une certaine pédagogie, lorsque vos remarques le permettent. La version courante est régulièrement remise dans la web ZOOM/entre_nous_c_ ... Il me faut signaler ici les lectures soignées de Patrice Dumas, alias Pat, qui a vérifié chaque démonstration et me fait régulièrement de nombreuses remarques de rédaction. Merci à lui !

Argument *La notion de propagateur le long du SLTC a l'avantage d'être intégrale et de faire le lien entre un système aux dérivées partielles et la solution générale correspondant au modèle perturbé. On montre que les deux systèmes de l'adjoint et du calcul des sensibilités en avant s'introduisent très simplement en utilisant la matrice de transition d'état, étendue au TEF. Ces résultats ont donné lieu à révision du calcul des sensibilités en avant et de fournir en particulier une interprétation claire et définitive des "transferts de sensibilité". Ils ont aussi donné lieu à la version de calculs étendus*[1] *avançant les propagateurs avec la trajectoire. Par rapport aux précédents textes, celui-ci fournit le système des sensibilités aux transferts, donne une interprétation au* **dfdpi** *permettant de l'étendre au-delà du cas de la sensibilité paramétrique, et enfin, il propose une généralisation de la notion de gain de rétroaction aux systèmes non-linéaires, calculé en avant ou en arrière le long de la trajectoire de référence. Le cas particulier du système linéaire est aussi exploré, donnant lieu à la résolution en Borel comme cas particulier du formalisme développé. On en profite pour établir quelques liens entre les éléments propres de la matrice d'avance d'état et les pôles d'une fonction de gain de rétroaction.*

1 Introduction méthodologique par le système de l'espace d'état - hors TEF

Comme on va le voir, le propagateur permet d'introduire directement avec élégance et sobriété à la fois le système des sensibilités et l'adjoint. L'optique de ce texte est ainsi tracée : il s'agit de décliner la sémantique introduite par le TEF en la refondant à partir du théorème fondamental des systèmes dynamiques linéaires, appliqué au Système Linéaire Tangent Circulant (SLTC) déjà introduit dans d'autres textes (slt,sltc, cf web ZOOM). Cette introduction donne les clés de la méthode permettant de fonder les définitions formelles qui seront introduites tout au long du papier.

On rappelle que le long du SLTC on a (hors TEF) :

$$\partial_t x(t) \quad = \quad A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) \qquad (1)$$

*All, Août 2005. Ce texte repart de morceaux du papier Adjoint et Mini_ker pour les prolonger. Dernières modifs d'Avril 2006

[1] la Mini_ker **1.01**

Il y correspond un propagateur - appelé aussi résolvante ou matrice de transition d'état - tel que

$$x(T) = \Phi(T,0)x(0) + \int_0^T \Phi(T,t)B(t)u(t)dt \tag{2}$$

dans laquelle $x(t) = \Delta\eta(t)$ est l'écart à la trajectoire d'une variable considérée, $u(t)$ la perturbation d'un forçage ayant été appliqué pour trouver la trajectoire de référence $(\eta(t), t \in [0,T])$.

Sensibilité aux états

On considère l'effet d'une perturbation des seules Conditions Initiales (C.I.) $x(\tau)$, et même d'une seule composante $x_j(\tau)$. Alors

$$x(t) = \Phi(t,\tau)x(\tau) \tag{3}$$

où le vecteur $x(\tau)$ ne comporte qu'une composante non nulle. On voit donc que $x(t)$ est l'effet à t de cette perturbation de l'état $x_j(\tau)$, et ainsi que la j-ième colonne de Φ est le vecteur :

$$\frac{\Delta\eta(t)}{\Delta\eta_j(\tau)} = |\,\Phi(t,\tau)_j > \tag{4}$$

dans laquelle il faut interpréter le terme de gauche comme rapport de variations au sens de Gâteaux. On définit ainsi la sensibilité des états aux conditions initiales en $\tau = 0$ du j-ième état.

Si on considère la définition de Φ

$$\partial_t\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau); \qquad \Phi(\tau,\tau) = I; \tag{5}$$

on voit que ce système peut s'écrire colonne par colonne et s'identifie au système (1) lorsqu'on prend comme état initial des perturbations la j-ième colonne de la matrice identité (et B=0). On a donc construit l'équation d'évolution des sensibilités à un état initial, donné par une colonne $s_\eta(t,0)$ de $\Phi(t,0)$.

Adjoint

De ce premier résultat concernant l'interprétation de Φ par colonnes on tire le second : une ligne $< v_i \mid$ de $\Phi(t,\tau)$ est l'impact sur $x_i(t)$ d'une perturbation appliquée aux composantes de $x(\tau)$[1]. C'est ce qu'on a appelé le gradient $\nabla_x x_i$ en suivant les notations, par exemple, d'Olivier Talagrand. On en déduit donc immédiatement que le système adjoint est l'équation d'évolution d'une ligne du propagateur. Comment initialiser son évolution ? Le seul gradient déterminé est celui du temps final t, correspondant à la i-ième ligne de la matrice identité. On est donc conduit à déterminer $\partial_\tau\Phi(t,\tau)$, qui est donné par

$$\partial_\tau\Phi(t,\tau) = -\Phi(t,\tau)A(\tau) \tag{6}$$

Il suffit alors de transposer pour obtenir un système colonne par colonne du système adjoint :

$$\partial_\tau\Phi^\dagger(t,\tau) = -A^\dagger(\tau)\Phi^\dagger(t,\tau) \tag{7}$$

chaque colonne v_i de $\Phi^\dagger$ étant un gradient de x_i par rapport aux états antérieurs, avec un système à intégrer en arrière, initialisé par la i-ième colonne de I.

[1] pour le lecteur intrigué par l'utilisation de $\Phi(t,\tau)$ pour propager à la fois en arrière ou en avant, précisons que nous n'avons pas ici à considérer ses C.I., qui sont en effet différentes dans un cas par rapport à l'autre, mais seulement les propriétés d'un opérateur de propagation qui est attaché – caractéristique – du SLTC particulier correspondant au système et à une trajectoire de référence.

Sensibilité à la commande, considérée comme transfert exogène

La formule (2) suggère que la sensibilité au transfert scalaire ($u(t)$) est dépendante de la fonction, et pour le cas $u(t) = \varpi \Upsilon(t, 0^+)$ (step initial), est une colonne s de l'intégrale :

$$s_\varphi(t, 0) = \int_0^t \Phi_i(t, \tau) B(\tau) d\tau \tag{8}$$

Le système différentiel correspondant s'obtient par application de ∂t à (8) :

$$\partial t s_\varphi(t, 0) = A(t) \int_0^t \Phi_i(t, \tau) B(\tau) d\tau \; + B(t) = A(t) s_\varphi(t, 0) \; + B(t) \tag{9}$$

On obtient ainsi un système différent de celui des sensibilité aux états (s_η), mais qui s'intègre de manière semblable, à la source (B) près et aux C.I. nulles. Que ceux qui n'ont pas encore reconnu le fameux **dfdpi** de stb se dénoncent !

aspects Mini_ker *En plus de la sobriété de cette introduction aux sensibilités, on peut remarquer qu'il est possible de déterminer le propagateur en résolvant le système classiquement avec les librairies matricielles qui permettent d'étendre ad libidum le nombre de vecteurs colonnes. Cette méthode constitue ainsi une alternative au calcul du propagateur par produits finis (cf manuel Mini_ker :* **sltcirc***), et d'avoir accès en particulier à* $\delta\Phi(t, 0)$*, mais également à une analyse de sensibilité paramétrique, ce qui n'est pas sans intérêt.*

ce résumé d'appréciation de l'approche développée dans ce cahier a été déplacé en cette fin d'introduction (Mars 06, puis Mars 07).

en résumé sur l'approche par propagateurs[1]

Avoir basé ce développement sur l'introduction des propagateurs était-il justifié, par comparaison avec l'approche de Cacuci développée dans le cahier "Adjoint" ?

- *hors TEF, on gagne clairement en simplicité, et donc en pédagogie pour définir le Système Linnéaire Tangent ;*
- *in TEF et en avant, ça reste clair, et on a gagné la compréhension de ce que sont des transferts de sensibilité, la justification et la généralisation du* **dfdpi** *;*
- *on a aussi compris que les sensibilités en avant diffèrent essentiellement selon qu'elles sont relatives aux états ou aux transferts, et on a donné une méthode pragmatique simplifiée pour les obtenir, qui remplace notre précédente approche à base de dérivées partielles difficile à justifier dans un cadre fonctionnel ;*
- *pour l'adjoint, par contre, on a vu arriver des difficultés formelles qui conduisent à préférer l'approche de Cacuci pour la démonstration de la forme finale de dJ (54) ;*
- *le succès véritable de l'approche tient à la proximité formelle des convolutions avec* Φ *et celles de Borel qui fournit le cadre formel de la généralisation de la notion de gain dynamique de rétroaction pour les systèmes non-*$\mathcal{L}$*. Et pour y arriver, il s'avère a posteriori indispensable d'avoir réussi à TEFiser la notion de propagateur ;*
- *de ce dernier point de vue, l'analyse par Floquet des systèmes à dynamique périodique constitue un intermédiaire entre systèmes linéaires et non-*$\mathcal{L}$*, qui est évident par l'approche propagateurs ;*
- *reste pour le filtyrage de Kalman, on a pu innover des formules d'avance des variances-covariances nettement plus pertinente, mais le passage au TEF reste à faire ;*

[1] Al1, relecture de Mai 2007

2 Sensibilités dans l'espace d'état - transferts du TEF

On rappelle que le système dynamique sous TEF est défini par :

$$\begin{aligned} \partial_t \eta(t) &= g(\eta(t), \varphi(t), h^\eta(t)) \\ \varphi(t) &= f(\eta(t), \varphi(t), h^\varphi(t)) \end{aligned} \tag{10}$$

où h est une loi de commande (exogène), et qu'il se linéarise le long du SLTC en donnant

$$\begin{bmatrix} \partial_t \cdot -A & -B \\ -C^\dagger & 1-D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^u u^\eta \\ D^u u^\varphi \end{bmatrix} \tag{11}$$

où u est une perturbation (exogène) de h. Les matrices prennent leur définition la plus simple des Jacobiennes du TEF :

$$\begin{aligned} A = \partial_\eta g \quad &; \quad B = \partial_\varphi g; \\ C^\dagger = \partial_\eta f \quad &; \quad D = \partial_\varphi f; \\ B^u = \partial_u g \quad &; \quad D^u = \partial_u f \end{aligned} \tag{12}$$

Suivant le même schéma que précédemment, reprenons l'équation (11) en remplaçant $\Delta\eta$ et $\Delta\varphi$ par $\Phi(t,\tau)$ et $\Psi(t,\tau)$, une matrice que l'on introduit *a priori* arbitrairement :

$$\begin{bmatrix} \partial_t \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\dagger & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi \\ \Psi \end{bmatrix} (t,\tau) \tag{13}$$

les dimensions de la matrice Ψ étant celles de $\mid \eta >< \varphi \mid$. Remarquons d'emblée que ce système est identique, colonne par colonne, à (11), et qu'il est donc défini si on lui adjoint des C.I. en Φ. On constate que l'élimination de Ψ fournit l'équation d'évolution classique du propagateur :

$$\partial_t \Phi(t,\tau) = [A + B(I-D)^{-1}C^\dagger](t)\,\Phi(t,\tau) \tag{14}$$

Le système (13) est donc, colonne par colonne, celui des sensibilités aux états (le système s_η, σ_η de Mini_ker, avec les C.I. $\Phi(\tau,\tau) = I$). La matrice Ψ est donc définie par le système linéaire (13) :

$$\begin{cases} \partial_t \Phi(t,0) = A\Phi(t,0) + B\Psi(t,0) \\ \Psi(t,0) = C^\dagger \Phi(t,0) + D\Psi(t,0) \end{cases} \tag{15}$$

2.1 De l'interprétation des transferts de sensibilité

Dans (13,15), une j-ième colonne de Φ représente l'impact sur $\eta(t)$ d'une perturbation unité des C.I. en η_j. Comment interpréter Ψ ? Partant du résultat[1] :

$$\Delta\eta(t) = \Phi(t,\tau)\Delta\eta(\tau) + \int_\tau^t \Phi(t,s)B^u(s)u^\eta(s)ds \tag{16}$$

on veut aboutir au système (11) que l'on réécrit ainsi

$$\begin{bmatrix} \partial_t \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\dagger & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\eta \\ \Delta\varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B^u u^\eta \\ 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

en choisissant de ne garder qu'une perturbation u^η indépendante (on la suppose de même dimension que φ). Dérivons (16) par rapport à t en appliquant (13)

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta\eta(t) = A(t) &\left[\Phi(t,0)\Delta\eta(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)B^u(\tau)u^\eta(\tau)d\tau \right] + B^u(t)u^\eta(t) \\ &+ B(t) \left[\Psi(t,0)\Delta\eta(0) + \int_0^t \Psi(t,\tau)B^u(\tau)u^\eta(\tau)d\tau \right] \end{aligned} \tag{18}$$

[1] on reviendra sur la forme explicite de B^u.

On reconnaît $\Delta\eta(t)$ dans la première somme, ce qui permet d'identifier avec le système linéaire (17) en posant

$$\boxed{\Delta\varphi(t) = \Psi(t,0)\Delta\eta(0) + \int_0^t \Psi(t,\tau)B^u(\tau)u^\eta(\tau)d\tau} \tag{19}$$

permettant de réécrire :

$$\partial_t\Delta\eta(t) = A(t)\Delta\eta(t) + B^u(t)u^\eta(t) + B(t)\Delta\varphi(t) \tag{20}$$

On a ainsi l'interprétation de $\Psi(t,0)$ donnant la sensibilité de $\varphi(t)$ à la perturbation des C.I. en η. Dans l'égalité précédente, on peut exprimer Ψ grâce à (13)

$$\Delta\varphi(t) = [C^\dagger\Phi + D\Psi]\Delta\eta(0) + \int_0^t [C^\dagger\Phi + D\Psi]B^u(\tau)u(\tau)d\tau \tag{21}$$

et en identifiant les termes en Φ et Ψ :

$$\Delta\varphi(t) = C^\dagger\Delta\eta + D\Delta\varphi \tag{22}$$

pour retrouver le système du SLTC (20,22) identique à (17). Cette démonstration montre que l'extension au TEF de la notion de propagateur est cohérente avec l'introduction de Ψ dans (13). Par ailleurs les matrices du propagateur TEFisé s'intègrent en avant, colonne par colonne, comme le système s, σ des sensibilités aux C.I. d'une composante d'état.

Ceci épuise donc l'interprétation des transferts de sensibilité introduits grâce au TEF. Ces variables forment une colonne (σ_η) de $\Psi(t,\tau)$ et représentent la sensibilité des transferts aux conditions initiales..

2.2 De la perturbation des transferts

Jusqu'alors, seule la perturbation des états intervient. La question qui se pose est comment obtenir de ces systèmes un gradient de η en fonction d'une perturbation de φ_j.

Perturbation impulsive des transferts

Une première approche peut s'obtenir de l'examen des formules (16) et (19). La fonction $u(\tau)$ est une perturbation externe du système ; on voit que le choix d'un pulse[1] $\delta(\tau)$ fournit l'interprétation que :

– $\Phi(t,\tau)B^u(\tau)$ est la sensibilité de $\Delta\eta(t)$ à un pulse sur u appliqué en τ ;

– $\Psi(t,\tau)B^u(\tau)$ est la sensibilité de $\Delta\varphi(t)$ à un pulse sur u appliqué en τ[2].

On peut remarquer que la matrice $\Psi(t,\tau)B^u(\tau)$ est bien carrée.

La notion de sensibilité à une fonction (ici $h(t)$) semble poser un problème, et encore plus pour un pulse (pb de mesure dixit jyg) ; nous renvoyons alors à Cacuci, qui définit cette sensibilité par une variation d'une "réponse" du système à $\varpi\delta(t-0+)$ et propose une méthode de calcul pratique fondée sur la différenciation de Gâteaux, voir plus loin.

On peut noter aussi que l'application d'une perturbation à un transfert actif pose un problème physique : les variables de transferts étant contraintes aux états qui définissent entièrement le système, perturber φ signifie que le **modèle** du transfert est modifié (soit par sa formulation, soit par adjonction quand c'est possible d'une source exogène). On est encore renvoyé à l'ample vision de Cacuci des sensibilités du système.

[1] on rappelle que la distribution de Dirac est définie par $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(s-\tau)d\tau = f(s)$.

[2] ce terme n'est autre que $(I - D(t))^{-1}C^\dagger(t)\Phi(t,\tau)B^u(\tau)$, ce qui le rend moins magique, puisqu'on retrouve l'effet d'une perturbation de u à τ, suivi d'une propagation de la perturbation de l'état, enfin convertie à t en perturbation du transfert.

Il ne s'agit dans ce passage que d'une discussion historique qui n'intéressera que les anciens de l'unsecte. Il est remarquable que l'on puisse écrire le système des sensibilités aux u-transferts simplement à partir de (13) en multipliant à droite par $B^u(\tau)$:

$$\begin{bmatrix} \partial_t[\Phi(t,\tau)B^u(\tau)] \\ \Psi(t,\tau)B^u(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C^\dagger & D \end{bmatrix}(t) \quad \begin{bmatrix} \Phi B^u \\ \Psi B^u \end{bmatrix}(t,\tau) \tag{23}$$

grâce auquel on voit que le système des sensibilités aux u-transferts est à la fois différent mais s'intègre comme celui des sensibilités aux états, en remarquant cependant le problème de l'initialisation de ce système. En effet, cette initialisation semble devoir se faire, donc, à partir des colonnes de $B^u(\tau\!=\!0)$. On a semble-t-il une alternative au **dfdpi**[1] de stb. La vision comparée des deux définitions de la sensibilité aux transferts mérite quelque développement.

Considérons l'équation des transferts (11) où on applique une perturbation-pulse $u(t) = \delta(t{-}0^+), D^u = I_j$, où I_j est la j-ième colonne de la matrice unité et $\delta(t)$ un Dirac en une seule composante de u^φ :

$$(I - D)\Delta\varphi = C^\dagger\Delta\eta + u^\varphi \tag{24}$$

il est bien clair que les contraintes statiques entre composantes du transfert vont "pulser" aussi avec des poids différents d'autres composantes que la j-ième. On est donc conduit à initialiser le système des sensibilités aux transferts par la matrice $B(I - D)^{-1}$. Dit autrement, le pulse va provoquer, lors du démarrage de l'intégration des états (au-delà de 0^+), un step sur plusieurs composantes de η. C'est (me semble-t-il) LA formulation correcte du système des sensibilités des états aux transferts perturbés par une impulsion initiale.

A la relecture (Sept.2005), il ne me semble pas complètement évident que l'impulsion perturbatrice doive s'appliquer systématiquement via la matrice D aux autres composantes, et le choix est physique. En effet, la partie statique du modèle découle d'un choix concernant le "grossissement dynamique" permettant d'analyser le problème posé. Il en découle un pas de temps d'intégration de l'ordre du dixième du plus petit temps caractéristique retenu comme pertinent. De même, la perturbation devrait être considérée dans le cadre d'une expérience numérique prenant sa motivation d'une véritable expérimentation imaginée. Et la question de la présence de la matrice D dans l'expression des C.I. devra être tranchée à partir de cette analyse. On pourra utilement s'inspirer des travaux sur la "méthode flash" utilisée en Sciences de l'Ingénieur (cf Olivier Fudym par exemple).

Ces précautions étant prises et dans la mesure où la cohérence des dynamiques semble plus conservative avec l'intervention de la D, Mini_ker l'utilise systématiquement. En effet si on considère par exemple la perturbation d'une composante de vitesse d'un écoulement fluide incompressible, la matrice D va imposer l'a-divergence de l'écoulement perturbé. Cette procédure sera prolongée lors de l'initialisation de l'adjoint.

Perturbation-marche des transferts

On a dès l'intro évoqué le rôle de l'intégrale des propagateurs pour propager l'impact d'une fonction de Heaviside. On peut paraphraser ce qui est dit en perturbation-pulse :

- $\int_0^t \Phi(t,\tau)B^u(\tau)d\tau$ est la sensibilité de $\Delta\eta(t)$ à un step en u appliqué en 0^+ ;
- $\int_0^t \Psi(t,\tau)B^u(\tau)d\tau$ est la sensibilité de $\Delta\varphi(t)$ à un step en u appliqué en 0^+.

Ce dernier terme n'est autre que $(I - D(t))^{-1}C^\dagger(t)\int_0^t \Phi(t,\tau)B^u(\tau)d\tau$, qui donne l'effet d'une marche perturbante u à partir de $t = 0$, suivi d'une propagation de la perturbation de l'état, enfin converti à t en perturbation du transfert.

[1] il s'agit d'une source unité s'appliquant à la variable de transfert de sensibilité associée à un paramètre du modèle, voir papier *sensibilité* de stb sur le web.

Comment réintroduire la perturbation (u_φ) aux transferts dans le système (17) ? Montrons que la solution générale du système des sensibilités est :

$$\begin{aligned}\Delta\eta(t) &= \Phi(t,\tau)\Delta\eta(\tau) + \int_\tau^t \Phi(t,s)\left[B^u(s)u^\eta(s) + B(s)(I-D)^{-1}D^u(s)u^\varphi(s)\right]ds \\ \Delta\varphi(t) &= \Psi(t,\tau)\Delta\eta(\tau) + \int_\tau^t \Psi(t,s)B^u(s)u^\eta(s)\,ds \quad + (I-D)^{-1}D^u(t)u^\varphi(t) \qquad (25)\end{aligned}$$

Pat me demande ici de signaler que la présence d'un Dirac éventuel dans $u^\varphi(t)$ dans la deuxième équation est correcte au sens des distributions, mais nécessite son "relèvement" en cellule pour le calcul. Le système complet (11) introduit une "commande" u_φ par l'intermédiaire d'une matrice de distribution entre variables D^u. L'équation (22) devient

$$\Delta\varphi(t) = C^\dagger\Delta\eta(t) + D\Delta\varphi(t) + D^u u^\varphi(t) \qquad (26)$$

ce qui conduit directement à (25). Dans le cas d'une perturbation d'une composante de transfert, on a $D^u = I$; le développement formel suit alors rigoureusement celui de l'adjoint, et le lecteur peut directement se reporter à la démonstration du système (52, 53).

réhabilitation du dfdpi : *Par exemple, si on considère $u^\varphi = \varpi\Upsilon(t,0^+)$ comme un transfert-paramètre ($D^u \to 1$), on aurait à placer une source unité à la composante correspondante de σ_ϖ, et l'on reconnaît le fameux* **dfdpi** *de stb*[1].

Retour à Cacuci

On peut à ce stade prendre le temps de faire l'exercice de justifier ces résultats en repartant de la formulation de base de Cacuci, car nous en aurons l'utilité pour l'introduction du gain de rétroaction généralisé. On considère le système

$$\partial_t\eta(t) = g(\eta,\varphi,t) = g(\eta, f(\eta,t),t) \qquad (27)$$

et une réponse $R(t) = \int_0^t r(\eta,t)d\tau$.

On s'intéresse à $\mathcal{V}R$, la variation de la réponse fonctionnelle à une perturbation de la fonction de rétroaction $f(\eta) \to f(\eta,t) + h(t)$. Ce problème classique est résolu en suivant l'approche de Cacuci, basée sur le SLTC.

On obtient le SLTC correspondant au problème en appliquant l'opération suivante au système originel :

$$\partial_\epsilon\left[\quad \partial_t\left[\eta(t) + \epsilon\Delta\eta(t)\right] = g(\eta+\epsilon\Delta\eta, f(\eta+\epsilon\Delta\eta,t) + \epsilon h(t),t) \quad\right|_{\epsilon=0}$$

qui donne le SLTC :

$$\partial_t\Delta\eta(t) = A(t)\Delta\eta(t) + B(t)[C^\dagger(t)\Delta\eta(t) + h(t)]$$

où on a introduit les notations du TEF. On peut toujours poser

$$\Delta\varphi = C^\dagger\Delta\eta + h(t) \qquad (28)$$

et résoudre ce système classiquement TEFisé. A présent, la fonction perturbatrice $h(t)$ est quelconque et peut être choisie suivant le problème physique que l'on pose, ou même suivant les propriétés dynamiques particulières du système que l'on souhaite révéler par le choix bien inspiré d'une réponse. Ainsi, le système de la réponse à un pulse ne pourra s'intégrer qu'en déplaçant la source h en Bh sur la cellule. A l'inverse, la source unité pourra s'appliquer en (28).

[1]on peut tout aussi bien placer une source sous forme de la colonne de $B(t)$ correspondant au transfert ϖ dans l'équation de s_φ.

Revenant maintenant à la réponse, l'intégrande pourra s'exprimer par un produit avec un pulse de Dirac $\delta(t-s)$ pour récupérer dans R une fonction courante $r(t)$ à un instant $t = s$. Pour évoquer les possibilités offertes par l'adjonction d'une réponse fonctionnelle au système, remarquons pour finir que rien ne nous empêche de prendre par exemple $r(t) = \varphi(t)$! On a alors une panoplie possible d'analyses, permettant soit d'exprimer les sensibilités en avant via le SLTC, soit en arrière via l'adjoint, lorsque l'on suit directement l'approche de Cacuci[1].

Lien entre les sensibilités aux diverses perturbations

Considérant (19), on voit que la sensibilité de $\varphi(t)$ à un step sur $u_j^\eta(t) = \Upsilon(t, 0^+)$ est donnée par une colonne de l'intégrale de$\Psi(t,\tau)$. Quel rapport peut avoir cette sensibilité de la variable à un step avec la sensibilité de l'intégrale de cette variable à un pulse ?

Pour les SLT autonomes vus par l'horreur Borelienne, le résultat est bien sûr immédiat. Rappelons que la transformée de l'anomalie $x(t)$ provoquée par une perturbation $u(t)$ est liée à la sensibilité σ par

$$x(\tau) = \sigma(\tau)\, u(\tau) \sqsubset \sigma \odot u' = \sigma' \odot u\ (t) \tag{29}$$

où $\odot$ est le produit de convolution et les fonctions primes des dérivées temporelles. On a donc la propriété que $\sigma(t-s)$ est la sensibilité de $x(t)$ à un pulse en $u'(t) = \delta(t-s)$, soit donc à un step de $u = \Upsilon(t-s)$, et que $\sigma'(t-s)$ est celle d'un pulse. Mais alors :

$$\tau x(\tau) = \tau\sigma(\tau)\, u(\tau) \sqsubset \int_0^t x(s)ds = \sigma \odot u(t) \tag{30}$$

qui signifie que la sensibilité de l'intégrale de la variable perturbée à un pulse est σ ! *Ainsi, pour les systèmes linéaires, σ est à la fois la sensibilité de la variable à un step et celle de l'intégrale à un pulse.*

Cette propriété se généralise-t-elle aux systèmes non-L ? Considérons la variation de l'intégrale de φ ; on a

$$\begin{aligned} \Delta \int_0^t \varphi(s)ds &= \int_0^t \Delta\varphi(s)ds \\ &= \int_0^t ds\{C^\dagger(s) \int_\tau^s \Phi(s,\tau)B^u(\tau)u(\tau)d\tau\} \end{aligned}$$

pour un pulse en $\tau = 0$, il reste

$$\Delta \int_0^t \varphi(s)ds = \int_0^t \{C^\dagger(s)\Phi(s,0)B^u(0))\}ds \tag{31}$$

(avec éventuellement $C^\dagger \to (I-D)^{-1}C^\dagger$). Ainsi, entre step et pulse, il y a échange sous l'intégrale de B et $C^\dagger$, d'où il découle que la propriété examinée ne s'applique qu'aux systèmes à SLT stationnaires[2].

Obtention *a minima* des systèmes de sensibilité

Il peut paraître surprenant[3] que malgré la diversité des systèmes de sensibilité, on puisse dans tous les cas les déterminer en dérivant simplement le système par rapport

[1] cf Adjoint et Mini_ker sur le web.

[2] contrairement à ce qu'une version précédente affirmait de manière un peu hâtive — *note du 27 Janvier 2006.*

[3] il s'agit ici d'un règlement de compte vis a vis des "physiciens" pour qui la notation de sensibilité avec des dérivées partielles semble intuitive.

à une composante, soit de $\Delta\eta$, soit de $\Delta\varphi$, soit même d'une fonction de perturbation step $h(t)$, comme le fait stb dans son papier sensibilité. A ceci près quand même qu'il ne s'engage pas sur la sensibilité aux transferts en général mais seulement dans le cas d'un transfert-paramètre.

Voici la dérivation que nous proposons[1]. Dans la mesure où les sensibilités sont évaluées à partir de variations du système au changement, on détermine le SLTC tout d'abord. Ensuite, on remplace chaque variable du SLTC par son expression définissant une variable de sensibilité. Enfin, quand l'élément sensible peut être partout mis en facteur, on a fini, il suffit alors de vérifier que le système obtenu est bien intégrable, et que l'on sait écrire ses C.I.

Illustrons la méthode avec la dérivation du système de la sensibilité aux états (s, σ) ; dans le SLTC[2].

$$\begin{aligned} \partial_t \Delta\eta(t) &= A\Delta\eta + B\Delta\varphi \\ \Delta\varphi &= C^\dagger \Delta\eta \end{aligned}$$

Dans ce cas classique, poser $s(t) = \dfrac{\Delta\eta(t)}{\Delta\eta_k(0)}$ conduit à remplacer $\Delta\eta(t)$ par $s(t)\Delta\eta_k(0)$, et à prendre $s_k(t=0) = 1$; de même $\Delta\varphi = \sigma(t)\Delta\eta_k(0)$:

$$\begin{aligned} \partial_t s(t)\zeta &= As(t)\zeta + B\sigma(t)\zeta \\ \sigma(t)\zeta &= C^\dagger s(t)\zeta \end{aligned}$$

où on a noté pour plus de généricité ζ comme élément-source de perturbation (ici $\zeta = \Delta\eta_k(0)$). Dès que l'opérateur $\partial_t\zeta = 0$ ou même conserve ζ en facteur[3], on obtient un système dont on veut qu'il soit vérifié $\forall\zeta$, d'où le système différentiel, où l'on reconnaît une colonne de (13). La sensibilité à un paramètre s'en déduit classiquement en associant ce paramètre à $\Delta\eta_k(0)$, mais on peut aussi plus directement poser $\Delta\eta(t) = s(t)\Delta\varpi$ etc, et là on justifie pleinement la pragmatique de stb.

La généralisation aux fonctions perturbatrices dépendant du temps semble pouvoir être faite en suivant la méthode de Gâteaux, c'est-à-dire que l'on évalue les variations du système en réponse à une amplitude scalaire constante de la fonction $h(t) \to \zeta h(t)$. Les sensibilités s'expriment alors en fonction de l'amplitude constante ζ :

$$\begin{aligned} \partial_t s(t)\zeta &= As(t)\zeta + B\sigma(t)\zeta \\ \sigma(t)\zeta &= C^\dagger s(t)\zeta + h(t)\zeta \end{aligned}$$

où ζ est un scalaire. On conçoit que ça marche bien pour un step, puisqu'on est ramené au problème précédent, mais pour un pulse ? La solution consiste alors à suivre ce qu'on a déjà proposé plus haut : on relève $h(t) = \delta(t - 0^+)$ dans l'équation du dessus, et on est ramené à une perturbation des C.I.

C'est la que l'obtention *a minima* du système exige une intuition féroce, alors que lorsqu'on connaît leur véritable nature, les C.I. sont immédiates (cf 24) ;

- quand $s \leftrightarrow \Phi$, elles sont celles de $\Phi(0,0) = I$ (sensib. à états) ;
- quand $s \leftrightarrow \Phi B(I-D)^{-1}$ elles sont $B(I-D)^{-1}(t=0)$ (pulse sur φ) ;
- et quand $s \leftrightarrow \int \Phi B(I-D)^{-1} d\tau$, elles sont nulles (step) ;

En résumé, dans la méthode à base de propagateurs, on part de la solution générale du SLTC, et on en déduit les PDE. Ici, on postule l'existence de fonctions $s(t), \sigma(t)$, et on vérifie que le système obtenu est intégrable et correspond à un problème bien posé.

---

[1] stepH, JYG et Al1 : proposition solennelle du 10 Août 2005 à 18h23 du matin.
[2] Dans le cas de matrice D, $\Delta\varphi \to (I-D)^{-1}\Delta\varphi$
[3] conditions plus générales à confirmer

en résumé

On a montré que le système (s, σ) des sensibilités introduit par l'unsecte correspond en réalité à au moins trois systèmes différents :

- un premier système de sensibilité aux C.I. des états (s^η, σ^η), qui s'obtient colonne par colonne du couple des propagateurs du SLTC du TEF $(\Phi(t,\tau), \Psi(t,\tau))$.
- deux autres de sensibilité aux transferts $(s^\varphi, \sigma^\varphi)$, qui s'obtiennent colonne par colonne du couple des propagateurs intégrés (ou non) du SLTC :

$$\begin{aligned}
\Phi^\varphi(t,0) &= \int_0^t \Phi(t,\tau)B(I-D)^{-1}(\tau)d\tau \\
\Psi^\varphi(t,0) &= (I-D)^{-1}C^\dagger(t)\int_0^t \Phi(t,\tau)B(I-D)^{-1}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

- ces deux derniers systèmes s'intègrent en prenant comme C.I. les colonnes de $B(I-D)^{-1}(t=0)$ pour les transferts perturbés par un pulse, et en ajoutant la source unité à σ pour les transferts perturbés par un step ;
- on conçoit que les systèmes de sensibilité à des fonctions plus élaborées du temps (rampe etc) puisse aussi bien s'obtenir en suivant l'une ou l'autre méthode ;
- on remarque enfin qu'en faisant le choix que $\sigma_\varphi(t)$ corresponde à une colonne d'un propagateur de sensibilité aux transferts du type $\Psi^\varphi(t,0)$, cette variable donne alors directement une fonction du gain non-$\mathcal{L}$ pour les termes diagonaux ;

Mini_ker : pratiquement, l'ensemble de ces résultats a pu être validé numériquement (cf annexe, manuel, etc).

3 Introduction du système adjoint par le propagateur

Notre objectif est ici de justifier la résolution du système adjoint en adoptant à nouveau le point de vue intégral, basé sur les propriétés du propagateur, par opposition aux PDE et à la méthode de Cacuci adoptée dans le papier "Adjoint etMini_ker". Suivant la méthode déjà employée, on raisonne d'abord hors TEF, et sur le problème le plus simple de maximiser une fonction de coût J en les conditions initiales du problème du système (1) :

$$J = \psi[\eta(T), \varphi(T), h(T)] + \int_0^T l[\eta(\tau), \varphi(T), h(\tau)]\, d\tau \tag{32}$$

On repart d'abord de la formule simplifiée (hors φ et h) :

$$dJ = \psi_x(\eta(T))\, x(T) + \int_0^T l_x(\eta(\tau))\, x(\tau)\, d\tau \tag{33}$$

dans laquelle les produits scalaires sont implicites. On précise le problème en ayant en tête les remarques du paragraphe 1 que le problème est fondamentalement à rebrousse-temps.

Comme nous l'avons proposé dans l'introduction, il suffit de prendre la dérivée par rapport à τ de $\Phi(t,\tau)$ et de transposer pour obtenir colonne par colonne le modèle adjoint donnant les gradients d'une composante par rapport aux perturbations de $\eta(\tau)$, et obtenir le système adjoint en remarquant que le vecteur colonne v – adjoint à η – est une ligne de Φ :

$$-\partial_t \Phi^\dagger(\tau, t) = A^\dagger(\tau, t) \tag{34}$$

Ainsi, on a introduit la variable $v(t)$ (vecteur ligne) représentant la sensibilité de $J(T)$ à l'état $\eta(t)$ (et sa variation $x(t)$). En remarquant que $v(T) = \psi_x(\eta(T))$ sont les C.I. du problème rétrograde, l'expression (33) s'écrit

$$dJ = v(t)\, x(t) = v(T)\, \Phi(T,t)\, x(t) - \int_T^t l_x(\eta(\tau))\, \Phi(\tau, t)\, d\tau\, x(t) \tag{35}$$

On cherche à déterminer le vecteur gradient le long du SLTC, c'est-à-dire $\forall x(t), t \in 0, T$; on arrive donc à la définition du système adjoint

$$< v(t)\,| = < v(T)\,|\ \Phi(T,t) - \int_T^t < l_x(\eta(\tau))\,|\ \Phi(\tau,t)\, d\tau \tag{36}$$

Le gradient courant $l_x(t)$ est ainsi déterminé indépendamment de la perturbation $x(t)$ de la trajectoire provoquée par une modification des CI $x(0)$.

Pour passer de (36) à un système aux EDP dit adjoint, il suffit d'utiliser à rebours le théorème de la solution fondamentale exprimée par le couple (1, 2), qui permet ici d'écrire sans réfléchir le système dont (36) est solution :

$$- < \partial_t v(t)\,| \quad = \quad < v(t)\,|\ A(t) + < l_x(\eta(t))\,| \tag{37}$$

que l'on reconnaît comme la formule définissant le système adjoint hors-TEF. On vérifie la fidélité du couple en dérivant classiquement (36) par rapport à t

$$< \partial_t v(t)\,| = - < v(T)\,|\ \Phi(T,t)\, A(t) - < l_x\,| + \int_T^t < l_x(\tau)\,|\ \Phi(\tau,t)\, d\tau\, A(t) \tag{38}$$

où on a utilisé la règle de dérivation (6) du propagateur. En mettant la matrice $A(t)$ en facteur a droite, on reconnaît bien un avatar de (37) en réutilisant (36).

La formule (36) peut aider me semble-t-il les réfractaires à appréhender le merveilleux du système adjoint, en rappelant que $\Phi(t,\tau)^{-1} = \Phi(\tau, t)$. Et à nouveau, pourquoi ce type d'introduction aux sensibilités et à l'adjoint n'est pas donné dans toutes les bonnes crémeries ?

Sensibilité à la commande

On prend à présent l'expression (32) avec commande ($h \to h+u$) et hors TEF, donnant

$$dJ = \psi_x(\eta(T), h(T))\, x(T) + \int_0^T \{l_x(\eta(\tau), h(\tau))\, x(\tau) + l_u(\eta(\tau), h(\tau))\, u(\tau)\}\, d\tau$$

dans laquelle il s'agit maintenant de mettre $u(t)$ en facteur pour obtenir $\nabla_{u(t)} J(T)$[1]. Il faut ainsi remplacer $x(t)$ dans l'équation (35) par

$$x(t) = \Phi(t,0)x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} dJ \;=\; & v(T)\left[\Phi(T,0)x(0) + \int_0^T \Phi(T,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau\right] + \\ & \int_0^T l_x(s)\left[\Phi(s,0)x(0) + \int_0^s \Phi(s,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau\right] ds + \int_0^T l_u(\tau)\, u(\tau)\, d\tau \end{aligned} \tag{39}$$

dans laquelle on peut repérer $v(t)$ donné par (36) en regroupant les termes, d'abord :

$$<v(0)\,|\,x(0)> = <\; v(T)\Phi(T,0) + \int_0^T l_x(s)\Phi(s,0)\, ds \quad |\; x(0)\; > \tag{40}$$

Ensuite on considère l'intégrale double

$$\begin{aligned} &\int_0^T l_x(s) \int_0^s \Phi(s,\tau))B(\tau)u(\tau)\, d\tau ds \\ &\qquad = \int_0^T ds \int_0^T l_x(s)\Upsilon(s-\tau)\Phi(s,\tau)B(\tau)u(\tau)\, d\tau \\ &\qquad = \int_0^T d\tau \int_\tau^T l_x(s)\Phi(s,\tau)\, ds \quad B(\tau)u(\tau) \end{aligned} \tag{41}$$

où Υ est la fonction de Heaviside pour échanger les signes somme, ce qui permet de repérer

$$\begin{aligned} &\int_0^T <v(\tau)\,|\; B(\tau)\; |u(\tau)>\, d\tau \\ &\qquad = \int_0^T d\tau \qquad <v(T)\Phi(T,\tau) + \int_\tau^T l_x(s)\Phi(s,\tau)\, ds|\; B(\tau)\; |u(\tau)> \end{aligned} \tag{42}$$

et ainsi finalement on obtient :

$$\begin{aligned} dJ = <v(0)\,|\,x(0)> \quad + & \int_0^T <v(\tau)\,|\; B(\tau)\; |u(\tau)>\; d\tau \\ + & \int_0^T <l_u(\eta(\tau), h(\tau))\,|\,u(\tau)>\, d\tau \end{aligned} \tag{43}$$

où on retrouve bien la formule (8) du papier “Adjoint et Mini_ker”, obtenue en suivant la méthode de Cacuci.

[1]On peut s'étonner de cette notation un peu synthétique, qui signifie *l'influence sur $J(T)$ de la variation d'une loi de commande $h(t)$, variation ayant démarré en t*. Et bien sûr, il s'agit de l'influence de cette loi de t à T. Il est possible de contourner cette difficulté en utilisant le même procédé que pour les sensibilités, à savoir, remplacement $u(t) \to \zeta u(t)$, la loi perturbatrice de commande u(t) étant considérée comme donnée tout le long de la trajectoire de référence, et adopter la notation $\nabla_\zeta J(T)$.

3.1 Passage au TEF

On suit une démarche proche de celle du paragraphe 2.1, en réécrivant d'abord la relation donnant $v(t)$ en vecteur colonne :

$$v(t) = \Phi^\dagger(T,t)v(T) + \int_t^T \Phi^\dagger(\tau,t) l_x(\tau)\, d\tau \tag{44}$$

Maintenant, on veut aboutir au système adjoint suivant

$$\begin{bmatrix} -\partial_t v \\ w \end{bmatrix}(t) \quad = \begin{bmatrix} A^\dagger & C \\ B^\dagger & D^\dagger \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} \quad + \quad \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} \tag{45}$$

et dans la mesure où on a introduit une forme de sensibilité l_y nouvelle pour incorporer les transferts, on postule la nouvelle forme de (44) :

$$v(t) = \Phi^\dagger(T,t)v(T) + \int_t^T \Phi^\dagger(\tau,t) \left[l_x(\tau) + C(I - D^\dagger)^{-1}(\tau) l_y(\tau) \right] d\tau \tag{46}$$

Dérivons (46) par rapport à t en appliquant (34)

$$\begin{aligned} -\partial_t v(t) \quad &= \quad A^\dagger(t) \left[\Phi^\dagger(T,t)v(T) + \int_t^T \Phi^\dagger(\tau,t)[l_x(\tau) + C(I - D^\dagger)^{-1} l_y] d\tau \right] \\ &+ \quad l_x(t) + C(t)\,(I - D^\dagger)^{-1}\, l_y(t) \\ &+ \quad C(t) \left[\Psi'^\dagger(T,t)v(T) + \int_t^T \Psi'^\dagger(\tau,t)[l_x(\tau) + C(I - D^\dagger)^{-1} l_y] d\tau \right] \end{aligned} \tag{47}$$

Attention au fait que $\Psi'^\dagger$ n'est pas la transposée de Ψ, ce n'est vrai que pour Φ. On reconnaît $v(t)$ dans le premier crochet, ce qui permet d'identifier avec le système linéaire (45) en posant

$$w(t) = \Psi'^\dagger(T,t)v(T) + \int_t^T \Psi'^\dagger(\tau,t)[l_x(\tau) + (I - D^\dagger)^{-1} l_y]\, d\tau + (I - D^\dagger)^{-1} l_y(t) \tag{48}$$

ce qui donne en effet

$$-\partial_t v(t) = A^\dagger v(t) + C w(t) + l_x(t) \tag{49}$$

on a donc justifié le choix de l'introduction du terme en l_y postulé dans (46).

Dans l'égalité (48), on peut exprimer $\Psi'^\dagger$ grâce à (34) encore :

$$w(t) = (I - D^\dagger)^{-1} \left\{ B^\dagger(t) \left[\Phi^\dagger(T,t)v(T) + \int_t^T \Phi^\dagger(\tau,t) l_x(\tau) d\tau \right] + l_y(t) \right\} \tag{50}$$

et en identifiant avec v les termes en $\Phi^\dagger$:

$$w(t) = B^\dagger v + D^\dagger w + l_y \tag{51}$$

pour retrouver la deuxième ligne du système adjoint. Là on est un peu emmerdés car dans le système en avant, la variable $(\Delta\varphi)$ permettait d'interpréter Ψ, alors qu'ici, on a une relation entre w et $\Psi'^\dagger$ sans que ni l'une ni l'autre ne soit clairement significative.

On a finalement obtenu les solutions générales du système adjoint suivantes :

$$\boxed{v(t) = \Phi^{\dagger}(T,t)v(T) + \int_t^T \Phi^{\dagger}(\tau,t)\,[l_x(\tau) + C(I-D^{\dagger})^{-1}(\tau)l_y(\tau)\,]\,d\tau} \tag{52}$$

et

$$\boxed{w(t) = \Psi'^{\dagger}(T,t)v(T) + \int_t^T \Psi'^{\dagger}(\tau,t)[l_x(\tau) + (I-D^{\dagger})^{-1}l_y]\,d\tau + (I-D^{\dagger})^{-1}l_y(t)} \tag{53}$$

Mini_ker *La solution au problème de coût_Ψ = $\varphi_i(T)$ découle de (52). Physiquement, coût_Ψ ne peut dépendre que de $\eta(t)$. Il ne peut donc être sensible à un transfert que dans la mesure (voire sémantique ci-après) où cette variation d'un φ_i ne serait pas causée par un $\Delta\eta(T^-)$: il ne peut donc s'agir que d'un pulse en l_y, que l'on remonte dans l'équation de v, d'où il résulte qu'il faut initialiser $v(T)$ avec la i-ème colonne de $C(I-D^{\dagger})^{-1}$.*

De manière plus générale, on est conduit à prendre

$$v(T) = \partial_\eta \Psi^{co\hat{u}t} + \sum_{i=1}^{m} \partial_{\varphi(i)} \Psi^{co\hat{u}t}\,|C(I-D^{\dagger}(T))>_i$$

La vérification pourra se faire par comparaison avec la variable $sigma_i(T)$ et $\Psi(T,0)$ pour des C.I., avec σ pour un pulse. Et ensuite, avec le calcul de l'extension pour les step.

La variation complète de la fonction de coût J

On a montré l'équivalence entre le système des propagateurs de l'adjoint et ses EDP. Par contre, le passage de l'expresssion de la variation de J de sa forme brute en $\Delta\eta, \Delta\varphi$ aux variables adjointes et propagateurs est utile pour l'interprétation fine de leur signification. Il y a malheureusement une difficulté dans la démonstration, du fait que dans l'expression étendue de dJ, on remplace x et y par leur valeur en fonction de Φ et Ψ, alors que w se repère en fonction de Ψ' ; et comme on passe peu facilement de l'un à l'autre, je me permets de différer le calcul complet en attendant un environnement propice (genre le cac 40 au-dessus de 5000 ?). L'expression complète de dJ est donnée par la méthode Cacuci (cf Adjoint et Mini_ker) :

$$\begin{aligned} dJ &= <v(0)\,|\,x(0)> \\ &+ \int_0^T \{<v(\tau)\,|\; B^u(\tau)\;|u^x(\tau)> + <l_{ux}(\eta(\tau),h^x(\tau))\,|\,u^x(\tau)>\}\,d\tau \\ &+ \int_0^T \{<w(\tau)\,|\; D^u(\tau)\;|u^y(\tau)> + <l_{uy}(\eta(\tau),h^y(\tau))\,|\,u^y(\tau)>\}\,d\tau \end{aligned} \tag{54}$$

3.2 Vers une sémantique de l'adjoint

Les variables adjointes

La formule (54) fournit leur sens :

- un pulse de u^x portant sur une seule composante d'état s'exerce sur $\partial_t\eta_k \Rightarrow v_i(\tau)$ représente la sensibilité de $J(T)$ à un step sur $\eta_i(t)$ démarrant à $t=\tau$.
- et $w_k(\tau)$ la sensibilité de J à un pulse sur φ_k à $t=\tau$.

(On prend $B^u = I$ et $D^u = I$ et on retient une seule composante perturbée par $u(t) = \delta(t-0^+)$.

Un commerce équitable

En ce qui concerne les EDP du système adjoint, examinons l'influence de la matrice $C^\dagger$ par exemple :

– une ligne donne l'influence de $\Delta\eta$ sur une composante $\Delta\varphi_k$ de $\Delta\varphi$;

– une colonne celle de $\Delta\eta_i$ sur $\Delta\varphi$;

La question est de remonter au vrai responsable d'une variation de J. Ainsi, si J dépend de φ_k ($w_k \neq 0$), et s'il se trouve influencé par $\Delta\eta_i$, alors c'est v_i qui doit en bénéficier, c'est bien ce qu'exprime le produit $< w(t) \,|\, C_i^\dagger > (t)$ dans l'équation donnant $\partial_t < v_i \,|$.

Les propagateurs de l'adjoint

L'examen des égalités (52,53) montre que

– $\Phi^\dagger(T, t)$ propage la sensibilité de $\nabla_{\eta(t)} J(T)$ en arrière.

– et $\Psi'^\dagger$ propage la $\nabla_{\eta(t)} J(T)$ et son impact sur $w(t)$.

Alors, le système (34) est le système des sensibilité de v, w à une variation de la sensibilité finale immédiate de J à $\Delta\eta(T)$. Pour $\Phi(t,\tau)$, on a la dualité propagation de sensibilité à η en avant, c'est-à-dire de τ à t, avec $\Phi^\dagger(\tau, t)$ qui propage celle de $\eta(t)$ en arrière, c'est-à-dire de τ vers t. Mais pour le couple Ψ, Ψ', ils ont peu de rapport, puisque le premier propage la sensibilité des transferts aux états, alors que le second propage en arrière celle des états aux transferts.

Une relation entre Ψ et Ψ' découle de leurs définitions :

$$\Psi(t,\tau) = (I - D)^{-1} C^\dagger(t)\, \Phi(t,\tau) \tag{55}$$

et

$$\Psi'(t,\tau) = \Phi(t,\tau)\, B(I - D)^{-1}(\tau) \tag{56}$$

qui montrent que

$$\Psi(t,\tau)\Psi'(\tau,t) = (I - D)^{-1} C^\dagger B (I - D)^{-1}(t) \tag{57}$$

qui semble exprimer comment les cellules couplent entre eux les transferts de manière instantannée. Ceci dit pour insister sur le peu d'évidence de relation sémantique entre les deux propagateurs. On devrait en comprendre un peu mieux la relation au cours de la démonstration de la formule (54).

4 Propagateurs du TEF et propriétés dynamiques du système

On commence cette partie avec ce qui peut prétendre un un prototype méthodologique de l'application des propagateurs à l'analyse dynamique des systèmes, et aussi parce qu'on l'utilise pour proposer une approche du gain de rétroaction pour les systèmes de Floquet.

4.1 L'analyse de Floquet (*inspirée de Michæl Ghil*)

Cette partie a été réécrite le 14/04/06. La première version était essentiellement une paraphrase de l'article originel, en étendant le formalisme à la matrice des vecteurs de Floquet et en corrigeant quelques erreurs de typo ($T \to t$ à partir des formules A16). Après discussion avec Michæl, la nouvelle démonstration prend en compte le fait qu'un système de Floquet n'est pas stationnaire, et ainsi que la notation $\Phi(t)$ est impropre. Enfin, les remarques de fin de ce texte suggèrent une approche un peu différente d'où le nouveau paragraphe. Augmentations du 23/10/06 : Wronskien et partie factorisation.

L'analyse de Floquet s'applique aux systèmes dynamiques $\partial_t x = A(t)\,x$ lorsque la matrice d'avance de phase est périodique : $A(t+T) = A(t) \quad \forall t$. Les propriétés du propagateur associé sont classiquement obtenues en considérant la matrice $X(t)$ des solutions fondamentales du système — qui forme une base de toute les solutions au système. On suppose d'abord que $X(0) = I$ pour simplifier l'écriture. Alors, on a

$$\partial_t X(t+T) \quad = \quad A(t)\,X(t+T) \tag{58}$$

qui prouve que $X(t+T)$ est également solution, et peut donc s'exprimer dans la base $X(t)$:

$$X(t+T) \quad = \quad X(t)\,M \tag{59}$$

où M est une matrice constante (et régulière, puisque les X le sont par définition).

Factorisation de Floquet

On définit la matrice constante C (sur le corps des complexes) telle que $X(T) = e^{CT}$, et on a

$$X(T) \quad = \quad M = e^{CT} \tag{60}$$

on peut alors remarquer qu'en définissant la nouvelle matrice B telle que :

$$\begin{aligned} X(t) &= B(t)\,e^{Ct} \\ &\Rightarrow B(t+T) = B(t) \end{aligned} \tag{61}$$

On a en effet

$$\begin{aligned} X(t+T) &= B(t+T)e^{Ct}e^{CT} \\ &= X(t)\,e^{CT} \\ &= B(t)e^{Ct}e^{CT} \end{aligned}$$

La matrice $M = exp(CT)$ est dénommée **matrice de monodromie**[1]. On a ainsi décomposé la solution fondamentale en une partie périodique $B(t)$ et une partie à coefficients constants e^{Ct}. C'est ce qui est appelé la **factorisation de Floquet**.

[1] qui renvoie au sens d'une dérive monotone de la réponse périodique je suppose.

La stabilité du système est cellée dans les modules des valeurs propres de C. On peut utilement remarquer que par définition, on a

$$\begin{array}{rcl} X(t+T) & = & X(t)\,M \\ X(t+T)X(t)^{-1} & = & X(t)\,M\,X(t)^{-1} \\ \Phi(t+T,t) & = & X(t)\,M\,X(t)^{-1} \quad \forall t \end{array}$$

si bien que toute propagation[1] sur un intervalle T met en œuvre une matrice semblable à une même matrice M. En conséquence, les v.p. correspondant à ces transitions par $\Phi(\tau+T,\tau)$ (dîte "matrice maille[2]") sont les mêmes. On peut ainsi caractériser la stabilité des systèmes de Floquet en analysant une matrice maille prise à partir d'un instant quelconque, en calculant la $C = \frac{1}{T}\log M$ correspondante. Rien n'indique cependant que les vecteurs propres aient quelques rapport entre eux, mais ça reste à voir (on le verra plus loin).

La matrice constante M est réelle pour les modèles d'états (A réelle), mais ce n'est pas forcément le cas de C. Cette question est étudiée par les chercheurs en commande optimale, car pour les applications pratiques il est utile de passer à une factorisation réelle. Ils montrent[3] que C est réelle pour les matrices mailles sur $2T$, et qu'il est toujours possible de trouver une matrice Y, dite matrice de Yakubovich, telle que $\log YM$ soit réelle, avec $(Y\Phi)^2 = \Phi^2$, ce qui permet *in fine* de caractériser le système sur seulement une période. Ils posent $Y\Phi = exp(T\,F_Y)$, et montrent alors que $B_Y(t+T) = B_Y(t)exp(t\,F_Y)B_Y(T)exp(-t\,F_Y)$. *Nous ne suivrons pas plus ici ce fil sauf avis contraire.*

Du fait que tous les propagateurs "maille" $\Phi(t+T,t)$ sont semblables, on peut tirer une propriété maille du Wronskien :

$$\begin{array}{rcl} \Phi(t+T,0) & = & \Phi(t+T,t)\Phi(t,0) \\ W(t+T) & = & W(t)\,det(M) \\ W(t+T) & = & W(t)e^{T\,Tr(C)} \end{array}$$

et comme pour le Wronskien, on a $W(T) = exp\int_0^T TrA(t)dt$, celà permet d'identifier le déterminant de M à cette intégrale prise sur la première période[4].

Établissons enfin la relation de Floquet sur le propagateur :

$$\forall t,\tau : \Phi(t+T,\tau+T) = \Phi(t,\tau) \tag{62}$$

qui s'écrit en effet $X(t+T)X(\tau+T)^{-1} = X(t)MM^{-1}X(\tau)^{-1}$. Alors que la stationnarité du propagateur impliquerait la relation $\forall\tau : \Phi(t+\tau,s+\tau) = \Phi(t,s)$, on a seulement ici qu'elle n'est vraie que pour $\tau = T$.

Vecteurs de Floquet

Reprenant la lecture en parallèle de Michæl, la propriété (61) conduit à une caractérisation plus fine du système sur une simple période. On considère alors les vecteurs Y définis à partir des éléments propres du propagateur en $t = T$ — on pose de plus $\sigma_i = e^{\Lambda_i T}$:

$$\begin{array}{rcl} \Phi(T,0)Z & = & Z\,e^{\Lambda T} \\ Y(t) & \stackrel{def}{=} & \Phi(t,0)\,Z \\ Y(0) & = & Z \end{array} \tag{63}$$

[1]on rappelle que $\Phi(t,0) = X(t)\,X^{-1}(0)$.
[2]cours de Leleux à l'INSTN, 1976, fourni par Alain Jejcic.
[3]Montagnier *et al* INT. J. CONTROL, 2004
[4]cf SLT_Al1, on rappelle que $\partial_t W(t) = TrA(t)W(t)$.

La relation de $Y(t)$ avec sa réplique à $t+T$ est alors

$$\begin{aligned} Y(t+T) &= \Phi(t+T,0)\,Z = \Phi(t+T,T)\,\Phi(T,0)\,Z \\ &= \Phi(t,0)\,Z\,e^{\Lambda T} \\ Y(t+T) &= Y(t)\,e^{\Lambda T} \end{aligned} \quad (64)$$

Par ailleurs, Y s'intègre comme le propagateur, car

$$\partial_t Y = A(t)\,\Phi(t,0)\,Z = A(t)\,Y(t) \quad (65)$$

Ainsi (64), $Y(t)$ n'est pas périodique mais est "amorti" à chaque période par $e^{\Lambda T}$. On a simplement amélioré la décomposition donnée par (61) en découplant les modes d'amortissement.

On peut déjà remarquer que le résultat essentiel de l'analyse de Floquet est acquis : pour un système autonome, la relation (64) est vraie $\forall t$, alors que pour les systèmes non-autonomes les éléments propres sont dépendants de t. Le cas périodique est intermédiaire : Y est la matrice des solutions fondamentales du système ayant comme C.I. : $Y(0) = Z$. Mais alors que le système n'est plus autonome, la relation (64) est vérifiée pour tout t multiple de la période T.

Il est tentant de construire à partir des Y un autre vecteur non amorti pour capter la structure du champ associée aux phénomènes fluctuants ; ce sont les vecteurs de Floquet Ψ^F que l'on définit en "dés-amortissant" Y :

$$\Psi^F(t) \stackrel{def}{=} Y(t)e^{-\Lambda t} = \Phi(t,0)Ze^{-\Lambda t} \quad (66)$$

on obtient bien un vecteur périodique, car :

$$\begin{aligned} \Psi^F(t+T) &= Y(t+T)\,e^{-\Lambda T}e^{-\Lambda t} \\ &= Y(t)e^{-\Lambda t} = \Psi^F(t) \end{aligned}$$

C'est l'un au moins de ces vecteurs que l'on tente de déterminer en avant, mais notre développement considère l'ensemble de ces vecteurs par souci de généralité[1] :

$$\begin{aligned} \partial_t \Psi^F &= AY\,e^{-\Lambda t} - Y(t)\Lambda e^{-\Lambda t} \\ &= A\Psi^F(t) - \Psi^F e^{\Lambda t}\Lambda e^{-\Lambda t} \end{aligned} \quad (67)$$

et du fait de la diagonalité des trois matrices de droite, le résultat final est

$$\boxed{\partial_t \Psi^F = A\Psi^F(t) - \Psi^F \Lambda \quad avec\, \Psi^F(0) = Z} \quad (68)$$

Ainsi, connaissant la période T de la matrice d'avance de phase d'un système dynamique linéaire (ou d'un SLTC), et ayant calculé un ou plusieurs V.P. du propagateur à $t = T$, on est capable d'intégrer en avant un ou plusieurs vecteurs de Floquet.

Dans le papier de Michæl[2], le SLTC est obtenu par soustraction du cycle annuel moyen du modèle sur 100 ans d'intégration. Le modèle consiste en une dynamique simplifiée de l'atmosphère (du genre Saint-Venant), résolu sur une base spectrale, mais peu importe. La stabilité du cycle se fait par analyse des parties réelles et imaginaires de Λ. L'analyse est véritablement pertinente, puisqu'on obtient un cycle annuel des variables météos modulé par une activité intra-saisonnière "moyenne" (Ψ^F).

Michæl *et al* trouvent d'une part deux modulations oscillantes amorties, avec des temps d'amortissement de 28 et 148 jours et une troisième, instable, déstabilisant

[1] d'où les permutations de facteurs avec l'article de Michæl.

[2] Strong *et al, JAS* **52**, 15 d'Août 95.

exponentiellement le cycle saisonnier et excité par les Jet Streams en hiver (temps de croissance de 54 jours). L'analyse étant conduite sur une centaine d'année, avec un modèle de dimension 231, exhibe en réalité seulement trois figures principales de perturbation[1].

Ce qui permet aux auteurs de conclure à une instabilité principale de 28 jours de temps de croissance caractéristique, à l'origine d'une oscillation intra-saisonnière, bien observée, de 40 jours de l'Hémisphère Nord (et trouvée sur $\Psi^F(t)$) et confirme son activité hivernale au sens large.

Floquet et Mini_ker

L'intégration du système de Floquet exige bien sûr des calculs en complexe. Dans la mesure où $Y(t)$ s'intègre comme $\Phi(t,0)$ comme le montre (65), on passe au TEF immédiatement, et on peut en toute simplicité initialiser $\Phi_t(0) = Z$ dans le **ZINIT** *et calculer $\Psi^F(t)$ dans* **ZSTEER** *en reprenant sa définition (66). Cette méthode est ainsi nettement plus efficace que de passer par l'équation (68).*

Une alternative évite de passer de manière trop systématique l'ensemble du code en complexes. On envisage plutôt une nouvelle séquence de calculs post-extensions dans laquelle différents systèmes dont l'avance dépend des Jacobiennes seront intégrés. Alors, il suffit de remarquer que $\Psi^F(t) = \Phi(t,0)\, Z\, exp(\Lambda t)$ et d'effectuer ce calcul en complexes à partir de l'intégration de l'extension Φ standard.

solution proposée Partant de $\Psi = \Phi Z e^{-\Lambda t}$, on propose une intégration du système partiel $\Phi^r = \Phi \exp(-\lambda^r t) \in \Re$, qui calcule ainsi un propagateur réduit par le plus grand facteur de Floquet[2]. Le calcul complet des vecteurs de Floquet se fait alors en complexes : $\Psi = \Phi^r Z exp(-\Lambda^i t)$, en ne retenant que la partie imaginaire du plus grand ainsi que tous les autres exposants de Floquet. Ceci permet de ne pas faire diverger le propagateur en calculant des termes qui d'une part croissent en $exp(\lambda^r t)$ auquels on appliquerait *a posteriori* la réduction $exp(-\lambda^r t)$ du calcul des vecteurs.

Explicitons ces calculs dans Mini_ker. On se place après calcul des avances de **oker**, en supposant que $\Phi^r(t,0)$ est en travail. L'avance de ce propagateur réduit s'écrit

$$\partial_t \Phi^r = A^\sharp \Phi^r(t,0) - \Phi^r \lambda^r \quad avec\, \Phi^r(0,0) = I; \tag{69}$$

On laisse **oker** avancer classiquement les colonnes des extensions (rangées dans **Phit_t**) et mener ainsi au calcul de δX :

$$(I - \frac{\delta t}{2} A^\sharp)\delta X = \delta t A^\sharp \Phi^r$$

alors que l'avance du réduit demande la résolution de :

$$\left[I - \frac{\delta t}{2}(A^\sharp - \lambda^r I)\right] \delta \,|\Phi^r> = \delta t (A^\sharp - \lambda^r I)\,|\Phi^r>$$

Il faut compléter le calcul classique en construisant la solution δY telle que $\delta\Phi^r = \delta X + \delta Y$, soit :

$$\left[I - \frac{\delta t}{2}(A^\sharp - \lambda^r I)\right] \delta \,|Y> = -\delta t \lambda^r (\frac{1}{2}\delta X + |\Phi^r>) \tag{70}$$

Les fans de l'emboîtement pourront l'appliquer en introduisant les variables $\delta Z = C^\dagger \delta Y + D\delta Z$ avec

$$\left[I - \frac{\delta t}{2}(A - \lambda^r I)\right] \delta \,|Y> - \frac{\delta t}{2} B \delta\,|Z> = -\delta t \lambda^r (\frac{1}{2}\delta X + |\Phi^r>) \tag{71}$$

[1] sur 230 possibles, puisque l'une d'elles est associée au cycle annuel lui-même avec un exposant de Floquet nul. On n'a malheureusement pas d'analyse de la paire de Floquet associée, car le papier est centré sur la prévision numérique.

[2] cf l'algorithme dît **roduct** du premier rapport de Céline.

comme parangon de cellule ($A^\sharp = A + B(I - D)^{-1}C^\dagger$). Avec ce propagateur réduit, on calcule les Floquet par la formule : $\Psi = \Phi^r Zexp(-\Lambda t)$ en complexes, où on a annulé le plus grand exposant réel.

meilleur calcul ? On pourrait plus élégamment utiliser le propagateur Φ pour calculer la matrice des vecteurs de Floquets, de même nombre de colonnes à calculer en tenant compte que les éléments complexes sont conjugués. Les matrices du TEF restant réelles, on propose un calcul en deux temps : une avance classique colonne par colonne, qui ne mélange guère les éléments réels avec les imaginaires, suivie d'une correction par les λ — comme précédemment donc, mais en mieux.

On suppose que $\Psi^r(t) = \Psi^F(t)$ — c'est-à-dire formées des mêmes colonnes — et $\Psi^r(t+\tau) = \Phi(t+\tau, t)\Psi^r(t)$, ce calcul de $\delta\Psi^r$ séparant les deux étant effectué dans **oker**. On a alors

$$\begin{aligned}
\Psi^F(t+\tau) &= \Phi(t+\tau, t)Ze^{-\Lambda(t+\tau)} \\
\Psi^F(t+\tau) &= \Phi(t+\tau, t)\Psi^F(t)e^{-\Lambda(\tau)} \\
\Psi^F(t+\tau) &= (\Psi^F(t) + \delta\Psi^r)e^{-\Lambda(\tau)}
\end{aligned}$$

d'où il suit que

$$\Psi = \Psi^r \exp(-\Lambda\tau). \tag{72}$$

On a ainsi qu'une corrections avec matrice diagonale. Alternativement, on pourrait avancer simplement $\Phi(t, 0)Z$ et corriger par $\Psi^F(t) = \Phi(t, 0)Z \exp(-\Lambda t)$ pour les exposants très petits — en ne rangeant alors pas Ψ^F dans le tableau des Φ.

Profitons en pour changer de notation, avec pour vecteur classique de Floquet : Φ^F, de manière à dégager le Vecteur de Floquet des transferts sous sa forme Ψ^F. D'accord, on en sera un tant soit peu perturbé, mais il faut bien rendre sa primauté au TEF, ce que Gaston lui-même ne pouvait prévoir.

la suite dans les algorithmes des Cahiers de la 102.

Remarques sur l'analyse de Floquet pour caractériser la dynamique d'un système

Le cas étudié par Michæl prend le problème à revers, puisque les résultats obtenus par l'analyse sont "validés" par comparaison avec un corpus de connaissance du climat. L'analyse est intéressante en ce qu'elle fournit une interprétation rigoureuse et quantifiée de mécanismes observés. Mais pour prendre déjà le problème de la détermination d'une partie périodique d'un système à l'étude, il pourra intrinsèquement être périodique (comme Lotka-Volterra), pseudo-périodique (comme Lorenz sur un court horizon), ou encore à coefficient(s) périodique(s) (l'oscillateur de Mathieu), ou forcé par une source cyclique. On conçoit donc, comme à l'habitude, que l'analyse de Floquet ouvre à de nouvelles solutions, mais que le plus difficile reste de trouver un problème ... je compte sur vous tous[1], et comme on n'est si bien servi que par soi-même, signalons que ce sujet a été bien dégrossi par Céline Conrardy (voir ses deux rapports 2006-2007). L'étude se poursuit activement à la fois pour interprèter les résultats de StepH sur la date d'application d'un choc type évènement extrême en rapport avec les cycles économiques. De plus, le modèle planétaire global de StepH (ClimSI) pour la caractérisation de la rétroaction vapeur d'eau, implémenté dans ZOOM a été écrit sous Mini_ker et soumis à des forçages périodiques dans le cadre du stage de Pablo Garcia Ramos au LMD (Mai-Juin 2007, stage de l'ENSTA).

La justification de l'existence d'un facteur de Floquet unité strict caractérisant les systèmes périodiques, donc dans un cadre plus restrictif que Floquet qui ne porte que sur

[1] *Amicus certus in re incerta cernitur*

la périodicité de $A(t)$, est liée au fait que la vel d'évolution de l'état est un vecteur de Floquet. On a en effet :

$$\begin{aligned}\zeta &= \partial_t \eta = g(\eta) \quad \Rightarrow \\ \partial_t \zeta &= \partial_\eta g \, \partial_t \eta = A(t)\, \zeta \quad [-\,0\,\zeta]\end{aligned}$$

qui montre que ζ avance comme un vecteur de Floquet avec un exposant (λ) nul (cf 68). On peut tout autant dire dans la couche physique que cette propagation $\zeta(t) = \Phi(t,0)\zeta(0)$ étant supposée périodique, $\zeta(T) = \Phi(T,0)\zeta(0) = 1\,\zeta(0)$, ce qui explicite la proposition précédente.

Il reste que à l'usage (Céline avec Lorenz-63 et Stéphane avec NeDym-EvEx), la difficulté est de déterminer un critère de périodicité d'une trajectoire. On est d'abord parti de l'approche naïve consistant à minimiser la distance au premier retour : on crée une **probe** donnant cette distance :

```
set_probe   " les dernières composantes ne sont pas périodiques"
< eqn: mu_dist = quad_dist(8,eta(1),eta_ref(1));
>;
```

on a retenu l'état initial dans eta_ref) et au minimum, on détermine une estimation de la période et une appréciation de la périodicité.

Bien évidemment, on tente un fit pour améliorer, soit en déterminant les conditions initiales pour les mettre sur le cycle attracteur, soit un ou plusieurs paramètres. On va voir concrètement comment faire, mais l'expérience nous a montré que la détermination de la période était au moins aussi importante que celle des paramètres. Céline a montré que la méthode proposée par Kazantsev est acceptable. Prenant le cas des conditions initiales, le propagateur complet Φ donne la sensibilité de l'état "final" qui est celui du minimum au premier retour. Pour ajouter la sensibilité de cet état à la période, il suffit de considérer le vecteur $\partial_t \eta$ à $t = T$. On cherche à minimiser la norme de :

$$|\,\eta(T)\!> + [\Phi(T,0); \partial_t \eta(T)]\;|\,\Delta\eta(0), dT\!> - \;|\,\eta(0) + \Delta\eta(0)\!> \tag{73}$$

soit encore :

$$|\,\eta(T) - \eta(0)\!> + [\Phi(T,0) - I; \partial_t \eta(T)]\;|\,\Delta\eta(0), dT\!> \tag{74}$$

Alors, avec le vecteur dX_0 formé de $\Delta\eta(0)$ et dT modifiant la période et l'opérateur de sensibilité $\wp_{\rm dist} = [\Phi - I; \partial_t \eta]$, on a à minimiser :

$$||\wp_{\rm dist}(T,0) dX_0 + (\eta(T) - \eta(0))|| \tag{75}$$

Ainsi, la mise à jour après fit des conditions initiales est complétée par une meilleure estimation de la période, celle-ci étant la clé d'un calcul pertinent du pas de temps **dt**. Car il s'avère que le passage au minimum est crucial, et qu'il ne s'agit pas de le rater par un choix mauvais des pas de calcul ! On prendra ainsi un sous-multiple de la période estimée, en avançant à grand pas la trajectoire loin du minimum et en raffinant quand on s'en approche.

On trouvera cette procédure appliquée aussi bien dans **lorhcl** [1] que dans **EvEx**, avec appel à la routine **sgels** de LaPack (least-square fit). Comme pour tout fit, les calculs nécessitent la double précision[2].

La leçon à tirer des résultats n'est pas fameuse, car un fit meilleur que 10^{-18} de la distance au minimum ne fournit un multiplicateur égal à l'unité qu'à une précision

[1]cf la +SELF,IF=KAZANTSEV dans $ZSTEP.

[2]remarque : dans le cas où on doit exclure d'attribuer des valeurs négatives aux C.I. (pour des raisons physico-numériques), on pourra diminuera, lors premières itérations du fit, les modifications des paramètres en applicant un poids inférieur à l'unité, cf la variable **poids_kaz**.

difficilement meilleure que 10^{-3} ! Et ainsi, on trouve des vecteurs de Floquet qui semblent mal initialisés et ne sont que bien peu périodiques, ce qui fait mauvais effet.

D'où l'idée de fitter non pas sur une distance minimum entre états mais sur la vel, celle-ci s'avérant coïncider avec le V.P. associé à 1 du propagateur maille. On calcule ainsi un écart sur cette vitesse :

```
set_probe   " les dernières composantes ne sont pas périodiques"
< eqn: mu_dist = quad_dist(8,dot_eta(1),dot_eta_bef(1));
>;
```

avec la variable de Mini_ker **dot_eta** qui est fournie avec la version 102[1]. Il faut déterminer les sensibilités associées pour minimiser cette fois l'écart entre les vel $= \partial_t \eta = g(\eta)$:

$$g(\eta(T + \Delta T) + \Phi_T \Delta\eta_0) - g(\eta_0 + \Delta\eta_0) \tag{76}$$

que l'on développe :

$$g(\eta(T)) + A_T[\partial_t \eta \Delta T + \Phi_T \Delta\eta_0] - (g(\eta_0) + A_0 \Delta\eta_0) \tag{77}$$

ce qui fait que le nouvel opérateur de sensibilité est à présent

$$\wp_{\text{vel}} = [A_T \Phi_T - A_0; A_T \partial_t \eta] \tag{78}$$

qui se simplifie si on accepte de remplacer A_0 par A_T, qui convergent l'une vers l'autre[2]. On trouve alors une simple multiplication de l'opérateur sur la distance par A_T pour passer au fit sur l'écart entre vels :

$$\wp_{\text{vel}} = A_T[\Phi_T - I; \partial_t \eta] = A_T \wp_{\text{dist}} \tag{79}$$

il reste à valider cet algorithme[3].

Remarques finales Comme suggéré par les commentaires de la **set_probe**, il est possible de fitter également des composantes non périodiques (genre compteur temporel) de l'état. Pour la détermination en sus de paramètres, il suffit d'étendre le propagateur par le tableau des sensibilités paramétriques (**Phi_p**) en utilisant l'instruction **free_parameters**, ce qui est montré dans l'exercice dit **refiodic**, où on détermine les C.I. ET le Rayleigh réduit d'un Lorenz-63 pour le rendre périodique.

Prolongements de Mai 2007

Les résultats formels qui suivent auraient dû apparaître d'emblée, mais nous devons avouer qu'ils nous ont été suggérés des résultats de l'application de la théorie de Floquet à EvEx[4] !

Ils concernent tout d'abord **l'universalité** des éléments de Floquet, justifiant *in fine* le choix arbitraire de la date des C.I. dans l'article de Michæl (à un facteur d'amortissement près quand même).

Considérons deux décompositions de Floquet obtenues avec un décalage de τ des C.I. :

$$\begin{aligned} \Phi(T, 0)Z &= Z\,\Sigma \\ \Phi(T + \tau, \tau)Z' &= Z'\Sigma' \end{aligned}$$

[1] cf manuel, le calcul de cette variable a été ajouté pour permettre ce calcul en phase avec les autres variables.

[2] on a cependant permis de conserver une alpha_ref dans le code, gérée par un flag **ZdotEta**, cf manuel et exemples.

[3] Al1, 30 Mars 2007

[4] StepH et Al1, le 15 Mai 2007.

et décomposons la matrice maille décalée

$$\begin{aligned}
\Phi(T+\tau,T)\Phi(T,0)\Phi(\tau,0)^{-1}Z' &= Z'\Sigma' \\
\Phi(\tau,0)\Phi(T,0)\Phi(\tau,0)^{-1}Z' &= Z'\Sigma \\
\Phi(T,0)\quad \Phi(\tau,0)^{-1}Z' &= \Phi(\tau,0)^{-1}Z'\,\Sigma
\end{aligned}$$

où on a appliqué la propriété de périodicité (62) sur le propagateur. On retrouve aussi que les deux matrices maille sont semblables et ont ainsi les mêmes v.p. ($\Sigma' = \Sigma$). On constate alors que $\Phi(\tau,0)^{-1}Z'$ est la matrice des V.P. de $\Phi(T,0)$ qui n'est autre que Z ; ainsi

$$\begin{aligned}
\Phi(\tau,0)^{-1}Z' &= Z \\
Z' = \Phi(\tau,0)Z &= \Psi^F(\tau)\Sigma
\end{aligned} \tag{80}$$

Ce résultat est évident si on considère qu'un vecteur de Floquet $\mid \psi^F(t) >$ représente la perturbation à t provoquée par une perturbation initiale $\mid \psi^F(0) >=\mid z >$, au facteur $\sigma = \exp(\lambda t)$ près.

remarque subsidiaire : attention, car ce résultat montre justement que le choix d'une date de démarrage déterminant Z est crucial, car $\Phi(\tau,0)$ peut devenir quasi-singulier pour $\tau > t_{crit}$, date à partir de laquelle des phénomènes peuvent s'être fortement amortis. Ce qui permet de remarquer que l'analyse de Floquet concerne les effets intra-T qui se propagent au'delà de T ! (En climato, des phénomènes inter-intra-annuels ...)

Vecteurs propres du propagateur : Des relations entre propagateur et Floquet :

$$\begin{aligned}
\Phi^F(t) &= \Phi(t,0)Z\exp(-\Lambda t) \\
\Phi(t,0) &= \Phi^F(t)\exp(\Lambda t)Z^{-1}
\end{aligned}$$

on déduit que

$$\begin{aligned}
\Phi(t+T,t) &= \Phi(t+T,0)\Phi(t,0)^{-1} \\
&= \Phi^F(t)\exp(\Lambda T)\Phi^{-F}(t)
\end{aligned}$$

qui dit que[1] les vecteurs de Floquet restent V.P. du propagateur sur une maille $\forall t$.

Le cas de la vel : en particulier, en rappelant que la V.P. maille correspondant à la v.p. unité coïncide avec la vel, on a $|\,\psi^0(\tau)>= \Phi(\tau,0)\,|\,\psi^0(0)>$, ou encore en décomposant le propagateur :

$$\begin{aligned}
|\,\psi^0(t)> &\stackrel{?}{=} \Phi(t,0)\,|\,z^0> \\
|\,\psi^0(t)> &\stackrel{?}{=} \Psi(t)e^{\Lambda t}Z^{-1}\,|\,z^0> \\
|\,\psi^0(t)> &\equiv |\,\psi^0(t)>
\end{aligned}$$

par sélection d'une seule colonne. On retrouve encore que la vel avance de manière identique au vecteur maille de Floquet, avec coïncidence à $t = 0\,[T]$, ce qui montre que **le vecteur maille de Floquet n'est autre que la vel**. Ceci à une normalisation près, de même que tout V.P.

Ainsi, alors que on se perdait à comprendre comment le V.P. du propagateur, bien que coïncidant périodiquement avec la vel à $t = 0\,[T]$, puis avec un passage vers la v.p. $= -1$ ou $\pm i$, pouvait être associé à une paire de vecteurs propres, laquelle ? On a ce résultat simplicîme en considérant la trajectoire d'un vecteur de Floquet ; ce n'est peut-être pas sans rapport avec ce qui a inspiré Floquet, mais ça reste un mystère. Pour le lecteur

[1] remarque d'octobre 2009.

circonspect, la figure 1 ci-après montre une composante de ce vecteur maille superposée à la vel[1,2].

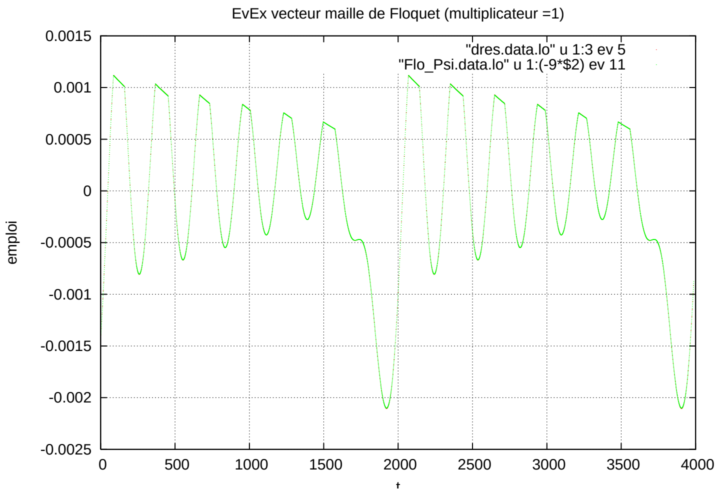

FIG. 1 – Composante de l'emploi du vecteur maille de Floquet comparé à la vel.

Pour compléter ces considérations validant les calculs effectués avec Mini_ker, signalons que les vecteurs de Floquet ont été comparés à l'écart entre trajectoires, l'une de référence, l'autre avec perturbation initiale proportionnées à chaque $| \psi^F(0) >$. On montre l'un de ces résultats encore obtenus avec EvEx (soit 8 variables d'état) :

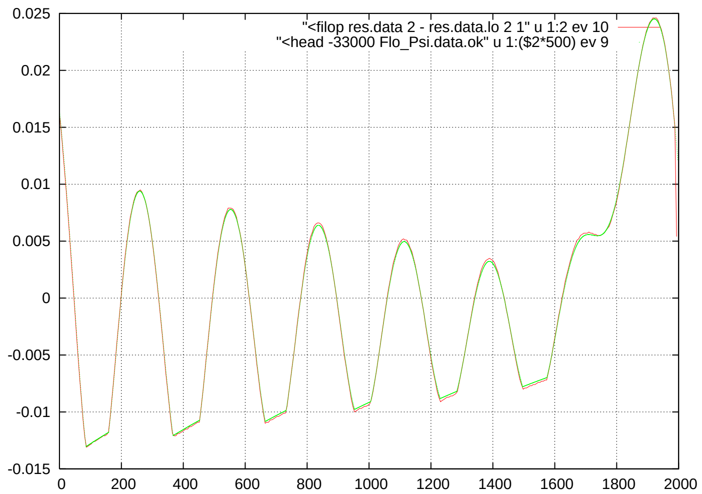

FIG. 2 – Composante de l'emploi du vecteur maille de Floquet comparé à l'anomalie.

Prolongements de Juin 2007[3]

Les remarques précédentes sur la vel en tant que vecteur de Floquet ne sont pas générales. En effet, considérons l'exercice où, partant d'un modèle (mini-ClimSI) construit

[1]cf Evex. On a utilisé $\delta\eta$ pour estimer la vel, mais on peut à présent demander un fichier de sortie dit doteta.data.

[2]remarquer aussi en légende l'utilisation de la routnie **filop** qui permet d'effectuer dans gnuplot des opérations entre colonnes issues de fichiers différents — j ;aoute cette remarque en ce jour du 3 Septembre 2009, ayant complètement oublié cet opérateur, ce qui m'a obligé de créer des probes dans mini-Clim pour tout avoir dans un même fichier, d'où la découverte du bug d'Août : heureux les oublieux, malheur aux oubliés.

[3]une chaude après-midi avec Pablo et StepH.

à l'origine pour analyser la rétroaction Vapeur d'Eau en régime stationnaire, on décide de le soumettre à un forçage périodique (ici la source short wave) pour en faire une analyse de Floquet.

Dans ce cas, les remarques qui restent valablent concernent la périodicité de la vel, mais PAS son association à un vecteur de Floquet. En effet, coinsidérons cette fois le modèle d'état

$$\partial_t \eta = g(\eta, s(t)), \tag{81}$$

avec $\forall t, \quad s(t+T) = s(t)$ le forçage périodique. La vel comme toute perturbation initiale, avance comme

$$\partial_t \nu = A\nu + \partial_s g\, s'(t) = A\nu + Bs'(t) \tag{82}$$

et on cette fois

$$\nu(T) = \nu(0) = \Phi(T,0)\nu(0) + \int_0^T \Phi(T,\tau)B(\tau)s'(\tau)d\tau \tag{83}$$

si bien que la vel n'est plus vecteur propre de $\Phi(T,0)$! On se retrouve alors dans la théorie classique de Floquet — à savoir que A est périodique — et cette particularité supplémentaire que l'état est également périodique ne se traduit plus par la vel vecteur de Floquet. Il s'en faut de la nullité de l'intégrale apportée par le forçage périodique[1].

Floquet et Poincaré. Ceci dit, on a deux cas intéressants : le premier où la périodicité est endogène (comme EvEx), le deuxième où l'espace d'état perd une ou plusieurs dimensions dans un transitoire initial (Lorenz, ClimSI). L'ensemble des vecteurs de Floquet restants — en excluant la vel quand elle en est un — forme une section particulière de Poincaré (c'est-à-dire ne contenant pas la vel). Dans cette section, les vecteurs de Floquet forment une base — non orthogonale — pour l'analyse des retours dans la section. Le long de chacune de ces directions de Floquet, le point repasse avec une élongation multipliée par $\exp(\lambda_i T)$.

remarques de octobre 2009, après quelques essais numériques. On a observé trois cas, correspondants à des multiplicateurs réels, complexes, mais aussi réels négatifs. Est-ce raisonnable ? On considère une section 2D de Poincaré, le point noir est la trajectoire périodique ; le cercle unité sépare, pour chaque direction de Floquet, les multiplicateurs inférieurs ou non à l'unité. La zone verdâtre zigzaguée est censée représenter le multiplicateur résultant pour chaque direction d'un changement de C.I.

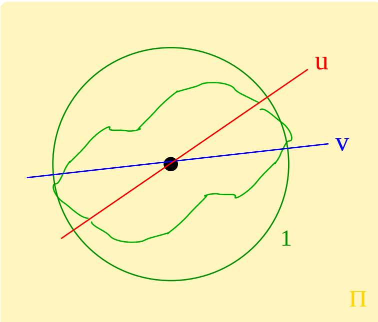

FIG. 3 – Stabilité en section de Pointcaré.

Cette courbe verte est nécessairement centro-symétrique. On a représenté ci-contre une section de Poincaré perpendiculaire à la vel, pour ne pas y voir le Floquet correspondant, mais les projections de deux autres. Un modèle intrinsèquement oscillant peut montrer un multiplicateur supérieur à 1 ; c'est le cas du Lotka-Volterra. Avec un forçage périodique, tous les mult. sont inférieurs à 1 en v.a., mais on en a des négatifs, et pourquoi pas en effet, ça n'empêche pas sa stabilité par convergence oscillante vers zéro. Dans ce cas, on aura un V.F.(t) réel, mais il faudra appliquer une correction oscillante.

C'est donc ces trois cas qu'il faudra prendre en compte dans les algorithmes de détermination des Floquet[2].

[1] Mars 2008 : mais alors, pourquoi Michæl et al prétendent trouver un exposant nul ?

[2] Raison pour laquelle on conserve les v.p. en complexes dans la séquence **flo_vec** de Mini_ker.

pour prolonger Floquet (reste après Mai 2007

- On peut voir une forte analogie entre la SVD de $Y(t) = [UV^\dagger][Vw^dV^\dagger]$ et la formule (66), à savoir une partie de rotation ou périodique accolée à une partie "amortissement". $\rightarrow$ **à prolonger** voir suite Floquelec
- En particulier, analyser non plus $\Phi(t,0)$ mais en réponse à une rampe en amorçant par le cas périodique. En gros, peut-on superposer plusieurs types d'information de structure ?
- Que se passe-t-il lorsque la période T est incertaine ou inconstante[1] ?
- Combiner l'analyse de stb avec sensibilité de Y à un paramètre.
- du 01-02-2006 : Floquet comme situation intermédiaire entre SLT et SLTC : comment extraire du **noyau effet-en-retour** une partie périodique ? cf en section Gains.
- les temps caractéristiques liés aux λ_i sont *a priori* déconnectés de T ; hors, l'analyse fournit une sensibilité aux perturbations des C.I., autrement dit à un pulse (à $t = 0 \quad [T]$). Les éléments propres majoritaires (sur les 100 ans d'analyse de l'article) ne peuvent être révélés que pour les instabilités ne décroissant pas trop vite après une excitation occurrent un 15 Juin. Le spectre pratique des λ ne devrait révéler ainsi que des temps de réponse inférieurs à T et supérieurs, disons, à $\frac{T}{100}$; (cf analyse de Céline, où un V.F. du Lorenz décroît très vite, de telle façon qu'on ne peut le déterminer).
- les auteurs le mentionnent : si la période n'est pas bien choisie, on a un diagnostic sortant de l'analyse, par le fait qu'un multiplicateur de la base doit être l'unité ; **à prolonger en direction série de Fourier[2] ?**
- on poursuivra ces commentaires dans le cadre d'une vision alternative consistant à considérer une **décomposition de Floquet** du propagateur : $\Phi(t) = \Psi^F(t)\exp(\Lambda t)Z^{-1}$. cf sections Gains.

Pour tenter une analyse alternative modifiant la sensibilité des résultats à la date initiale, on va dans un prochain paragraphe tenter une approche par sensibilité à une perturbation marche. Mais d'abord, pour satisfaire une obsession de l'auteur se réclamant de l'école climatologique, une approche duale de la théorie de Floquet

[1] éternel attribut du genre, car *Ea vero femina est intemperantia.*

[2] On a trouvé depuis une piste bibliographique qui suit cette filière, mais en proposant une analyse de "Fourier incorporant l'exponentielle de Floquet" dénommée **décomposition de Floquet-Magnus**, cf Casa *et al*, **J. Phys. A**, 2001.

L'analyse de Floquelec

On insistait dans le cahier "Élémentaire" sur la dualité des visions éclairées par décomposition soit en éléments propres, soit singuliers. Peut-on construire une approche à la Floquet de la SVD ?

De manière analogue à $\Psi^F(t) = \Phi(t,0)Z\exp(-\Lambda t)$ où Z joue le rôle de perturbateur, on définit

$$\Psi^S(t,0) = \Phi(t,0)Ve^{-Wt}; \tag{84}$$

à partir de la décomposition SVD de la matrice maille $\Phi(T,0) = Ue^{WT}V^\dagger$ où V est la base des excitations singulières que l'on peut appeler "maille".

On a alors à la période suivante :

$$\begin{aligned}\Psi^S(t+T,0) &= \Phi(t+T,T)\Phi(T,0)Ve^{-W(t+T)} \\ &= \Phi(t,0)Ue^{-Wt} \\ &= \Psi^S(t,0)e^{Wt}V^\dagger Ue^{-Wt}\end{aligned}$$

en retournant (84)[1], et on constate que du fait du passage de la base d'excitation (V) à celle de l'effet (U), on perd la périodicité par rotation ($V^\dagger U$), rotation qui est prise en charge par les parties imaginaires de la décomposition modale (de manière intuitive seulement).

Mais on a une propriété intéressante : appelant

$$R_t = e^{Wt}V^\dagger Ue^{-Wt} \tag{85}$$

cette matrice caractérisant un saut de maille, on a sauf erreur pour n mailles

$$R_t^n = e^{Wt}[V^\dagger U]^n e^{-Wt} \tag{86}$$

La matrice R_t prend en charge le passage aux périodes successives des $|\psi^S(t)>$ déterminés sur la première période. Son déterminant reste égal à l'unité mais sa dépendance en t peut être plus ou moins importante.

Ainsi, on est en droit de construire tout aussi bien une théorie singulière de Floquet, moins triviale certes, qui conduit à étudier les propriétés de $R(t,n)$. On peut parier qu'une série de valeurs de n rotations passent près de l'identité et montrent une Grand Période bien singulière ! **à poursuivre ?**

avance du vecteur On a en dérivant (84) :

$$\partial\Psi^S(t) = A(t)\Psi^S - \Psi^S W \tag{87}$$

soit une avance de même forme mais réelle.

Que déduire de la vel ? Soit υ le vecteur de norme unité aligné avec la vel ; on a

$$\upsilon(0) = Ue^{WT}V^\dagger\upsilon(0) \tag{88}$$

on ne voit pas de rapport entre les V.S. et la vel, mais un système de contraintes entre la rotation par $UV^\dagger$ et les expansions scalaires sur les axes :

$$\upsilon(0) = \sum_i e^{w_iT}\,|u_i><v_i|\upsilon(0)> \tag{89}$$

[1]On rappelle que $UU^\dagger = VV^\dagger = I$.

vers une extension fonctionnelle de la SVD [1] On se pose la question en rapport avec les EOFs suivante : après construction de la matrice $MM^\dagger$ des EOF, on a réalisé de fait $\int_0^T \mid x(t) >< x(t) \mid dt$. Ce qui donne les élements propres (ou singuliers) Uw^{2^d}. Alors, la fonction vectorielle $\mid x(t) >$ se peut écrire $\mid x(t) >= U_T {w_T}^d V^\dagger(t)$, d'où la question : comment effectuer cette décomposition et comment l'utiliser[2][3].

[1]Sept 2010.
[2]JYG dit qu'il faut aller voir dans Dunford et Schwartz's Linear Operators.
[3]On pense par exemple au théorème de dissipation.

4.2 Propagateur et gain de rétroaction

On va d'abord étudier le cas particulier du SLT statique (autonome) et faire le lien avec Borel. Il s'agira ensuite d'étendre la notion de gain de rétroaction aux systèmes non-linéaires.

a. SLT statique

SLT et Borel

Dès que la matrice A est indépendante de t, le système (1) s'intègre et donne

$$\Phi(t,\tau) = expA(t-\tau) \tag{90}$$

et la propagation par (2) peut se transformer par Borel (matrice B c^{ste}) pour donner

$$\tilde{x}(\tau) = (I - A\tau)^{-1}x(0) + \tau(I - A\tau)^{-1}B\tilde{u}(\tau) \tag{91}$$

soit encore

$$(I - A\tau)\tilde{x}(\tau) = x(0) + \tau B\tilde{u}(\tau) \tag{92}$$

où l'on reconnaît la transformée de Borel ($\sqsupset$) de (1). Ceci découle de la transformée d'un produit de convolution $\displaystyle\int_0^t f(t-s)g(s)ds \sqsupset \tau\tilde{f}(\tau)\tilde{g}(\tau)$ (théorème de Borel). On retrouve l'équivalence avec le système du TEF complet (17).

Gain de rétroaction dynamique

Rappelons l'introduction du gain de rétroaction dans le cadre du TEF Borelien, dans lequel le SLT statique s'écrit

$$\begin{aligned} (I - \tau A)\Delta\tilde{\eta}(\tau) &= \tau \,|b\!> \Delta\tilde{\varphi}(\tau) \\ \Delta\tilde{\varphi}(\tau) &= <\!c^\dagger\,|\Delta\tilde{\eta}(\tau)\!> + \tilde{h}(\tau) \end{aligned} \tag{93}$$

dans le cas où seul le transfert scalaire φ est conservé. L'élimination de la fonction $\Delta\tilde{\eta}(\tau)$ fournit :

$$(I - <\!c^\dagger\,|\,\tau(I - \tau A)^{-1}\,|b\!>)\Delta\tilde{\varphi}(\tau) = [1 - \tilde{g}(\tau)]\Delta\tilde{\varphi} = \tilde{h}(\tau) \tag{94}$$

d'où, lorsque $\tilde{h}(\tau) = 1$ (step), l'expression du gain $\tilde{g}(\tau)$ et sa transformée

$$\tilde{g}(\tau) =<\!c^\dagger\,|\,\tau(I - \tau A)^{-1}\,|b\!> \quad \sqsubset \quad g(t) =<\!c^\dagger\,|\int_0^t \exp(As)ds\,|b\!> \tag{95}$$

d'où

$$\boxed{g(t) =<\!c^\dagger\,|\,A^{-1}\,(\exp(At) - I)\,|b\!>} \tag{96}$$

par contre, la réponse effective $f(t) \sqsupset \dfrac{1}{1-\tilde{g}(\tau)}$ ne s'exprime pas aussi simplement (cf 4.4) — mais si, on a montré depuis qu'il suffit de remplacer dans cette formule $A \to A + |\ b><c^\dagger\ |$ pour obtenir la réponse $\varrho(t)$.

La généralisation au gain non-linéaire peut déjà être induite de (96), c'est-à-dire que si la Nature est bien faite, à $\exp A(t-\tau)$ correspond le propagateur $\Phi(t,\tau)$, d'où la série de conjectures :

- le gain non-$\mathcal{L}$ pourrait être donné par $g(t,0) =<\!c^\dagger(t)\,|\int_0^t \Phi(t,\tau)\,|b(\tau)\!>d\tau$ pour une perturbation step $\varpi\Upsilon(t-0^+)$;
- ce gain se définit à partir de $\Delta\varphi - h = g\Delta\varphi$, c'est-à-dire comme la variation d'une “réponse” $r(t) = f(\eta)$ du système quand on introduit la “loi de rétroaction” f : $\varphi = \varpi \to \varphi = \varpi + f(\eta)$.

b. Généralisation

Premier système

Comme notre définition courante du gain est liée aux perturbations-step d'un transfert, et considérant le système (25) avec $\Delta\eta(0)$ nul, $u^\eta = 0$ et $B^u = I_j$, on choisit les variables suivantes :

$$\begin{aligned} s_g(t,\tau) &= \int_\tau^t \Phi(t,s)\,|b(s)>\; ds \\ \varrho(t,\tau) &= <c^\dagger(t)|\int_\tau^t \Phi(t,s)\,|b(s)>ds \end{aligned} \tag{97}$$

correspondant aux propagations d'un step initial $\varpi\Upsilon(t,0^+)$, qui permet donc de calculer

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= s_g(t,\tau)\varpi \\ \Delta\varphi &= \varrho(t,\tau)\varpi \end{aligned}$$

et on exprime le système aux DP correspondant

$$\begin{aligned} \partial_t s_g(t,\tau) &= |b(t)> +(A(t) + |\; b(t) >< c^\dagger(t)\;|) \int_\tau^t \Phi(t,s)\,|b(s)>\; ds \\ &= |b(t)> +A(t)\, s_g + |b(t)>\, \varrho \\ \varrho(t,\tau) &= <c^\dagger(t)\,|\,s_g> \end{aligned} \tag{98}$$

Remarquons que l'on a choisit, suivant nos conjectures, de laisser la source $|\, b(t) >$ côté cellule. On obtient alors, dans le cas de la restriction à Borel [1], le système

$$\begin{aligned} (I-\tau A)\tilde{s_g}(\tau) &= \tau\,|b>\,\tilde{\varrho}(\tau) + \tau\,|b> \\ \tilde{\varrho}(\tau) &= <c^\dagger\,|\,\tilde{s_g}(\tau)> \end{aligned} \tag{99}$$

d'où l'élimination de $\tilde{s}$ donne

$$(1-\tilde{g}(\tau))\,\tilde{\varrho} = \tilde{g} \tag{100}$$

et donc on récupère $\mathcal{B}^{-1}\dfrac{g}{1-g}$ dans la variable ϱ. Bref, pas mal visé, mais à-côté quand même, et j'avoue avoir quelque difficulté à bien comprendre comment une induction aussi évidente que la nôtre ait pu échouer.

Deuxième système

On a aussi bien sûr le système adverse obtenu en laissant la source unité dans l'équation de σ

$$\begin{aligned} (I-\tau A)\tilde{s}_f(\tau) &= \tau\,|b>\,\tilde{\sigma}_f(\tau) \\ \tilde{\sigma}_f(\tau) &= <c^\dagger\,|\,\tilde{s}_f(\tau)> + 1 \end{aligned}$$

qui donne alors $\sigma_f(t,\tau) = f = \dfrac{1}{1-g}(t,\tau)$. Bon choix Mesdames, ...

remarque : On note que s_g et s_f sont identiques, et que ϱ et σ_f seuls diffèrent — de ϖ.

[1] du fait que $s(0) = 0$, Laplace réel s'identifie à Borel dans ce cas (c'est l'original de la transformée de la perturbation qui change alors).

Troisième système

On a déjà les deux formes de la réponse effective généralisée, manque un calcul du gain lui-même. Il suffit d'ouvrir la boucle de rétroaction, de remplacer φ par $|\, b > u(t)$ sur le système, et de conserver $\varphi =< c^\dagger \,|\, \Delta\eta$ pour obtenir $g(t,\tau)$ dans la variable σ : Ceci revient à intégrer le système (97), mais avec un propagateur partiel (ou en boucle ouverte) qui s'intègre avec $A(t)$ au lieu de $A^{spha} = A(t) + |\; b(t) >< c^\dagger \;|(t)$

$$\begin{aligned}
\partial_t s_g(t,\tau) &= |\, b(t) > + A(t) \int_\tau^t \Phi^\flat(t,s)\, |\, b(s) >\; ds \\
&= |\, b(t) > + A(t)\, s_g \\
\sigma_g(t,\tau) &= < c^\dagger(t) \,|\, s_g > \qquad (101)
\end{aligned}$$

Après ces quelques calculs de “mathématique simpliste”[1], on a une généralisation aux SLTC non-statiques (ou autonomes) des concepts de gain avec trois systèmes donnant les trois formes intéressantes pour caractériser la réponse effective d'un système perturbé en général, et plus lorsque la structure détermine une boucle de rétroaction : le gain de la boucle et “l'auto-rétro-sensibilité” de la variable test.

Remarquons encore pour finir que, bien qu'il semble possible de formuler différemment ce système du gain, on reste contraint par les formules (25) avec $\Delta\eta(0)$ nul, et le lien entre Φ et $(A + BC^\dagger)$. Il est laissé au lecteur le soin de généraliser les formules pour $D \neq 0$.

Intérêt de la double approche gain–réponse

Il faut d'abord remarquer que la relation entre la réponse $f(t,0) \sqsupset \dfrac{1}{1-\tilde{g}(\tau)}$ et le gain $g(t,0) \sqsupset \tilde{g}(\tau)$ n'est pas triviale (fait appel a une convolution). Le point de vue est en fait différent, puisque l'un caractérise la réponse, l'autre un “écart relatif en convolution”$(\Delta\varphi - u) \circ \dfrac{1}{\Delta\varphi}$. Ainsi, dans le cas de Lotka–Volterra au point d'équilibre (*cf papier L-V*), on trouve que g a deux pôles simples (un négatif et un positif), alors que f a une paire non-amortie ! On en déduit que le système est instable ET (ou mais) oscillant, ce qui correspond bien à la notion de stabilité marginale associée aux cycles limites. Bref, on n'a pas encore épuisé les plaisirs ni l'appât du gain (c'est pas les économistes qui nous démentiront sur ce point).

Gain et adjoint (*sur le calcul de* $g(T,\tau)$ *en arrière*)

On peut *a priori* envisager le calcul de la fonction de réponse “en arrière” $f(T,\tau)$, en prenant une fonction de coût terminal $J^{|\psi} = \varphi(T)$; mais on rencontre alors la difficulté de la fonction excitatrice qui est dans ce cas impulsive en $t = \tau$. Il faudrait peut-être envisager des systèmes adjoints de type intégraux, à la manière des trois sensibilités.

Retour sur (97)

Lorsqu'on écrit (97) comme une colonne de (25), pour la perturbation step, on sous-entend $\Delta\varphi = \sigma_g \Delta\varphi_{ins}$, mais que signifie $\Delta\varphi_{ins}$? Pas la même chose que dans la (94). Dans ce dernier cas, on perturbe le transfert, alors que nous avions choisi de perturber la cellule. C'est donc le système adverse qui correspond à (94), et on a alors compatibilité du gain non-$\mathcal{L}$ avec sa restriction par Borel. Il s'agit en réalité d'un problème de structure de boucle de rétroaction, que nous nous proposons d'analyser pour tenter une généralisation

[1]Bill Rossow 2005.

supplémentaire, avec l'optique de répondre au programme énoncé dans le papier "Champs et rétroaction"[1].

4.3 Gain et éléments propres

Une question récurrente est celle du lien entre éléments propres de la matrice d'avance d'état et le gain dynamique. Repartant de la formule donnant $g(t)$ (95), on introduit les V.P gauches et droits de la matrice A avec l'hypothèse de non-dégénérescence et avec la normalisation $F^\dagger E = I$. Alors, on a

$$g(t) = <c^\dagger| \int_0^t \exp(A\tau)d\tau\, |b> = <c^\dagger| \int_0^t E\exp(\Lambda\tau)\, d\tau\, F^\dagger\, |b>$$

soit, en développant :

$$g(t) = \sum_{i=1,n} <c^\dagger|e_i><f_i|b> \int_0^t \exp(\lambda_i\tau)d\tau \tag{102}$$

dans laquelle on peut séparer les termes de "structure" (les produits scalaires) de la réponse dynamique $\frac{1}{\lambda_i}(exp(\lambda_i(t) - 1)$, avec $i \in 1, n$ où n est la dimension de l'espace d'état.

Dans ce calcul, il faut remarquer que A est "incomplète"[2], ce n'est qu'une restriction de la matrice d'avance, par le fait que φ (scalaire) reste non éliminé. La matrice complète est $A^{spha} = A + |\ b><c^\dagger\ |$, et les v.p. complètes sont les racines du polynôme caractéristique de A^{spha} :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A^{spha}) &= det(\mu I - A - |\ b><c^\dagger\ |) = det(\mu I - A)det[I - (\mu I - A)^{-1}|\ b><c^\dagger\ |] \\
&= det(\mu I - A)\, det[1 - <c^\dagger|\, (\mu I - A)^{-1}\, |b>] \\
&= det(\mu I - A) \quad (1 - <c^\dagger|\, (\mu I - A)^{-1}\, |b>)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème de jyg sur la permutation circulaire[3], et finalement on obtient

$$\mathcal{P}(A^{spha}) = (1 - \tilde{g}(\tau))\ \mathcal{P}(A) \tag{103}$$

Ici et dans la suite, on assimile τ et l'inverse de μ. On obtient ainsi explicitement la fraction rationnelle en μ de la réponse

$$\boxed{\frac{1}{1 - \tilde{g}(\tau)} = \frac{\mathcal{P}(A)}{\mathcal{P}(A^{spha})}} \tag{104}$$

qui montre que cette fraction est simple, mais en μ, pas en τ. On en déduit que sa décomposition en éléments simples est unique, et qu'il est donc possible de déduire la fonction du temps correspondante.

Les conséquences dérivées de cette formule anodine sont assez inattendues.

Déjà, à partir de (95), où A est développée dans la base de ses V.P. :

$$\boxed{\tilde{g}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{<c^\dagger|e_i><f_i|b>}{\mu - \lambda_i}} \tag{105}$$

[1] cf web ZOOM/entre_nous...

[2] sauf à se restreindre à un système ne comportant effectivement qu'un seul transfert scalaire, ce que nous avons noté A n'est en général ni la A du TEF, ni la A^{spha}.

[3] on démontre que pour une paire de matrices B, C $n \times p$, on a $det(I_n + BC^\dagger) = det(I_p + C^\dagger B)$ en "décécroismoinsunbisant" : $det\begin{bmatrix} I_n & -B \\ C^\dagger & I_p \end{bmatrix}$ reste conservé avec l'une ou l'autre des complémentations de Schür.

On trouve que les pôles de $\tilde{g}(\frac{1}{\mu})$ sont les v.p. de A — aux produits scalaires nuls près. Il est remarquable que la décomposition du gain en éléments simples se décline sur toutes les v.p. de A, alors que la structure (les produits scalaires) effectue *in fine* la pondération entre ces éléments. Le calcul explicite de $\tilde{g}(\tau)$ par la formule (105) représente une alternative au fit après balayage (*le Borel-sweep de Mini_ker*). Cette formule est d'autant plus intrigante qu'elle fournit un **gain complexe**[1].

En reportant (105) dans (103), on devrait trouver la relation entre les traces et les déterminants.

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(A^{spha}) &= \prod_{i=1}^{n}(\mu-\lambda_i)\left(1-\sum_{i=1}^{n}\frac{<c^\dagger|e_i><f_i|b>}{\mu-\lambda_i}\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n}(\mu-\lambda_i)-\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}(\mu-\lambda_j)<c^\dagger|e_i><f_i|b>)\end{aligned}$$

La relation entre les traces s'obtient en identifiant les termes en facteur de μ^{n-1} :

$$\boxed{TrA^{spha}=TrA+\sum_{i=1}^{n}<c^\dagger|e_i><f_i|b>} \tag{106}$$

et celle entre déterminants, de μ^0 :

$$detA^{spha}=\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{<c^\dagger|e_i><f_i|b>}{\lambda_i}\right)detA \tag{107}$$

Comment ont varié les V.P. entre A et A^{spha} ? La variation de $E\to E+\Delta E$ donne :

$$(A+|\ b><c^\dagger\ |)(E+\Delta E)=(E+\Delta E)\Lambda$$

soit pour la colonne i :

$$(A^{spha}-\lambda_i I)\,|\Delta e_i>=-\,|b>\,<c^\dagger|e_i>$$

d'où

$$\boxed{|\Delta e_i>=-(A^{spha}-\lambda_i I)^{-1}\,|b>\,<c^\dagger|e_i>} \tag{108}$$

avec $i\in 1,n$. On pourra trouver utile d'établir les équivalences sur les V.P à gauche[2].

4.4 Réponse effective et éléments propres

Il n'est on l'a vu pas trivial de passer de l'analyse du gain $\tilde{g}(\tau)$ à la réponse effective $\tilde{f}(\tau)=\dfrac{\tilde{g}(\tau)}{1-\tilde{g}(\tau)}$. Repartons alors de la formule (97) :

$$\sigma_g(t,\tau)=<c^\dagger(t)|\int_\tau^t\Phi(t,s)\,|b(s)>ds \tag{109}$$

Sa transformée de Borel dans le cas statique est

$$\tilde{f}(\tau)=<c^\dagger|\,\frac{\tau}{I-\tau A^{spha}}\,|b> \tag{110}$$

[1] bien sûr, l'appariement des paires complexes conjuguées résulte en une fonction réelle, mais on a accès à la pulsation des instabilités modales. Borel est devenu Laplace.

[2] il serait intéressant de reprendre tout cet exercice avec la transformée de Fourier et calcul de l'autocorrélation sur $\Delta\varphi$.

où apparait cette fois la matrice complète d'avance de phase, dont on peut extraire les V.P

$$\tilde{f}(\tau) = \sum_{i=1}^{n} \frac{<c^\dagger\,|\,e_i><f_i\,|\,b>}{\mu - \lambda_i} \tag{111}$$

où on a noté $\mu = \dfrac{1}{\tau}$ et où, contrairement à la section précédente, les éléments propres sont relatifs à A^{spha}. On a ainsi deux calculs complémentaires fournissant $\tilde{g}(\tau)$ et $\tilde{f}(\tau)$ décomposés en éléments[1]. On peut également noter que les formules donnent le gain statique (et la réponse) en prenant simplement $\mu = 0$.

remarque pour les amateurs : On obtient très vite la (111) en appliquant la prise de déterminant à la formule de Woodburry).

4.5 Passage à l'espace physique des fonctions de gain et de réponse

Les formules (105) et (111) fournissent une décomposition en éléments simples permettant de calculer $g(t)$ et $f(t)$ dans l'espace physique. Ils illustrent bien la boucle de rétroaction, car la diagonalisation $A = E\Lambda F^\dagger$ indique que $\mid b>$ pondère la base de la sensibilité $\mid f>$ du système à une perturbation $\Delta\varphi$, et après amplification par Λ, le transfert reçoit en retour l'effet dans la base $|e>$ du système perturbé, pondéré par $<c^\dagger\,|$, sa sensibilité propre :

$$\Delta\varphi \rightarrow <f_i\,|\,b> \rightarrow \lambda_i \rightarrow <c^\dagger\,|\,e_i> \rightarrow \Delta\varphi \tag{112}$$

Contrairement à l'habitude, pour inverser la transformation symbolique, il semble plus direct de raisonner en variable de Laplace, ici $p = \mu$. Et comme on a la relation $\mathcal{L}(p) = \dfrac{1}{p}\mathcal{B}(\dfrac{1}{p})$, il restera une intégration après inversion des éléments simples. On a ainsi, dans le cas d'un pôle simple réel (a est réel) :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\mu - \lambda} \quad \subset \quad & \int_0^t a \exp(\lambda t) dt \\ & = \frac{a}{\lambda}(\exp(\lambda t) - 1) \end{aligned} \tag{113}$$

Dans le cas d'une paire conjuguée, en posant $a = a_r + ia_i, \lambda = \lambda_r + i\lambda_i$ et $p = \mu - \lambda_r$:

$$\begin{aligned} \frac{a_r + ia_i}{\mu - \lambda_r - i\lambda_i} \quad + \quad & \frac{a_r - ia_i}{\mu - \lambda_r + i\lambda_i} \\ = \quad & \frac{2pa_r}{p^2 + \lambda_i^2} - \frac{2a_i\lambda_i}{p^2 + \lambda_i^2} \\ \subset \quad & 2\int_0^t [a_r cos(\lambda_i\tau) - a_i sin(\lambda_i\tau)] \exp(\lambda_r\tau) d\tau \\ & = (\alpha\, cos(\lambda_i t) + \beta sin(\lambda_i t)) \exp(\lambda_r t) - \alpha \end{aligned} \tag{114}$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha &= 2\frac{a_r\lambda_r + a_i\lambda_i}{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} = 2\frac{\Re(a\overline{\lambda})}{\lambda\overline{\lambda}} \\ \beta &= 2\frac{a_r\lambda_i - a_i\lambda_r}{\lambda_r^2 + \lambda_i^2} = 2\frac{-\Im(a\overline{\lambda})}{\lambda\overline{\lambda}} \end{aligned} \tag{115}$$

[1] ce qui est drôle je trouve, c'est dans la mesure où on a le passage entre les E.P. de A et A^{spha}, on peut obtenir une formulation du passage des éléments de $\tilde{g}(\tau)$ à $\tilde{f}(\tau)$ **A FAIRE**, et voire aussi ce passage dans WVGains (Al1, Mars 2008).

4.6 Transformée de Fourier de la Réponse effective

Cette question[1] est d'importance pour étudier l'impact des rétroactions sur la variabilité d'un système. En climatologie, on a d'une part des analyses de réchauffement climatique en moyennes saptio-temporelles, et on se pose la question du lien des rétroactions moyennes lentes avec celles expliquant la variabilité du climat non-perturbé.

Si on suppose que l'échelle d'intérêt est supérieure à quelques semaines en climato, on supppose que ce "climat" est forcé par un bruit météorologique $\varpi(t)$, auquel répond le système avec ses rétroactions. On soustrait par exemple un cycle saisonnier moyen et on analyse la variablité des anomalies de T_s par exemple. Cette réponse est donnée par $\Delta T_s = [1 + \varrho(t)]\varpi(t)$. En supposant ce bruit de Wiener, la variance stochastique $\nu =< \Delta T_s^2 >$ sera donnée par une prise de moyenne sur $\nu(\tau) = 1+2\varrho\varpi + \varrho(t)\varrho(t+\tau)\delta(\tau)$, qui fait apparaitre une fonction de corrélation. Or cette fonction est associée à la tranformée de Fourier grâce à la relation $\mathcal{F}[c(f,g)] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]^*$, semblable à la convolution en Laplace.

Alors dans le cas d'un SLT, se pose la question de la transformée de Fourier de l'effet–en–retour connaissant sa Laplace. C'est trivial car l'effet–en–retour est nul pour $t < 0$, on passe à Fourier en changeant $\mu \to i\omega$. Et alors $\nu_\varrho(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\varrho(i\omega)\varrho^*(i\omega)]$.

Explicitement, les fractions simples réelles deviennent $\dfrac{a\lambda + ia\omega}{\lambda^2 - \omega^2}$ et perdent leur réalité. Pour les paires complexes, la situation se dégrade également par le fait qu'elles ne sont plus adjointes et ainsi leur somme reste complexe. Plus grave encore, $\varrho(i\omega)\varrho^*(i\omega)$ va multiplier deux sommes de ces fractions, dont cependant nous n'aurons qu'à calculer la partie réelle. Mais ensuite, aller donc faire le lien avec les effets–en–retour partiels originels ! **une idée de méthode ?**

Prolongement vers l'analyse de couplage

En gros, on a deux systèmes avec des matrices avec tous les transferts éliminés, une autre ou un seul transfert reste. Cela suggère une voie possible vers l'analyse de couplage en conservant deux transferts "sous Zeus". **Ce serait bien que quelqu'un s'y intéresse**.

Miniker : *La routine Boreleig applique la technique précédente et fournit les expressions Fortran permettant de calculer les deux fonctions de τ et de t. La forme adoptée – et préconisée après interaction avec une douzaine de reviewers – est* $f(t) = 1 + \dfrac{g}{1-g} = 1 - \sum a_i(1 - exp(\lambda_i t))^2$ *ou équivalent pour systèmes oscillants :* $[\alpha\,(cos(\lambda_i t) - 1) + \beta sin(\lambda_i t)]\exp(\lambda_r t) - \alpha(1 - \exp(\lambda_r t))$. *Cette forme permet à la fois d'expliquer qu'il s'agit d'une réponse effective à un step, tout en mettant en exergue la partie intéressante de la réponse qui est* $\dfrac{g}{1-g}$*, c'est-à-dire l'écart au step, et pour la partie oscillante une composante démarrant à zéro et la contribution additionnelle au gain asymptotique*[3].

Validation numérique Avec le souci perpétuel de convaincre le lecteur suspicieux, on donne une comparaison des calculs par balayage et avec la Boreleig pour le modèle de

[1] Al1, 24 octobre 2008.

[2] forme proposée par stepH.

[3] Novembre 2005 : les deux systèmes donnent des fonctions en accord numérique satisfaisant, tout en faisant apparaitre des éléments simples pouvant différer grandement, cf papier Lotka-V.

rétroaction à la vapeur d'eau[1] :

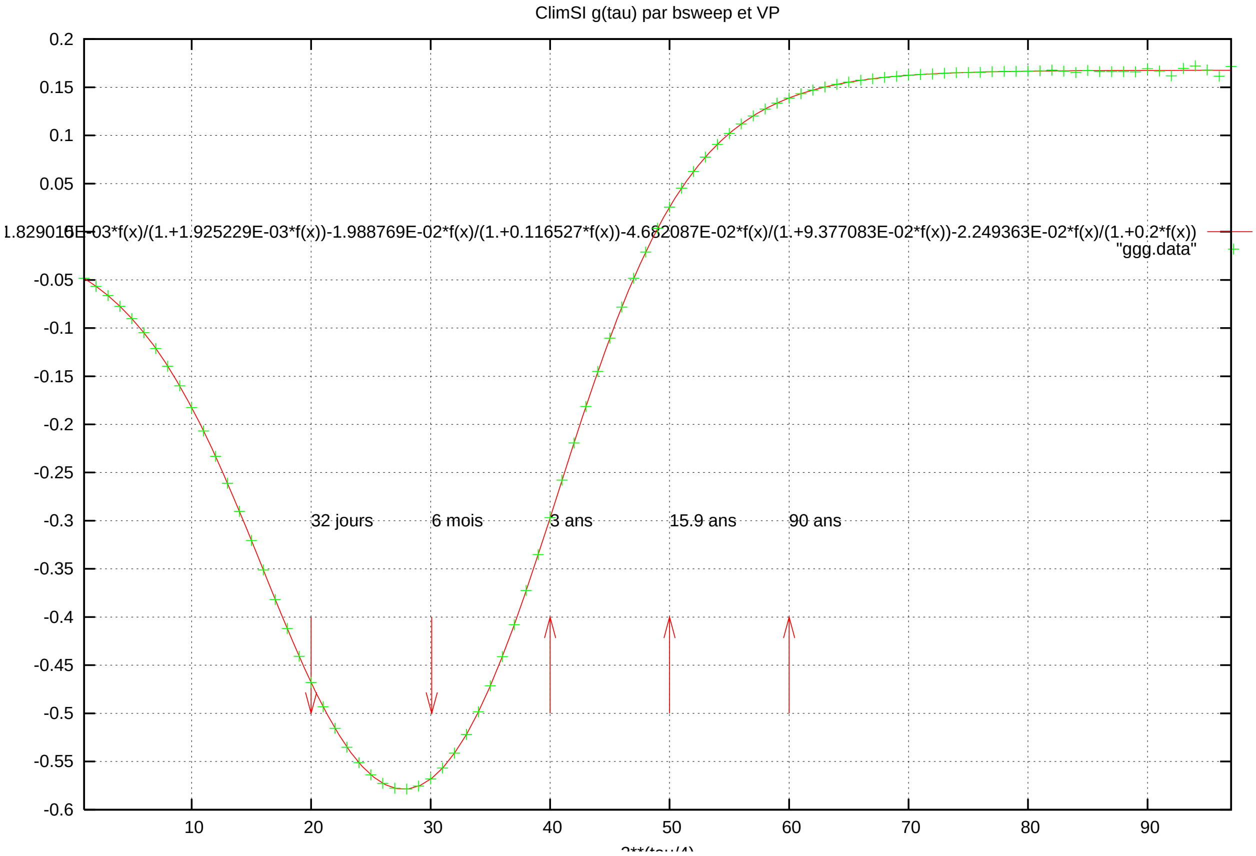

FIG. 4 – Comparaison entre deux déterminations de g(τ) pour une CMO de 30 m.

On peut utilement remarquer que StepH trouvait avec le fit deux exponentielles, alors qu'ici on en a quatre : trois de 5, 6 et 11 jours, le dernier de 526 jours. Ceci dit à un moment où la comparaison rigoureuse entre les deux modèles n'est pas définitive. On a une différence entre les épaisseurs de couche de mélange océanique (ici 30 contre 50 m), sur la nébulosité basse, etc.

Enfin, une autre comparaison est utile, entre la réponse efficace $(\mathcal{B}^{-1}\frac{g}{1-g}(\tau))$ calculée par la Boreleig et sa détermination par le SLTC en suivant la trajectoire stationnaire. La voici *in* Fig. 5.

On a cette fois-ci de nouveau quatre exponentielles mais avec 4, 7 et 10 jours, et 3 ans pour la dernière. L'amplitude du minimum est comparable à celle de StepH, mais la valeur asymptotique n'est que la moitié en gros de la sienne[2].

[1]ClimSI, celui de la thèse de stepH, transporté dans Mini_ker, qui comporte quatre variables d'état et 13 transferts très couplés.

[2]nous poursuivons la chasse aux différences (dans les dévivées partielles) entre les calculs originels dans ZOOM et ceux de Mini_ker, on vous tiendra au courant n'ayez crainte.

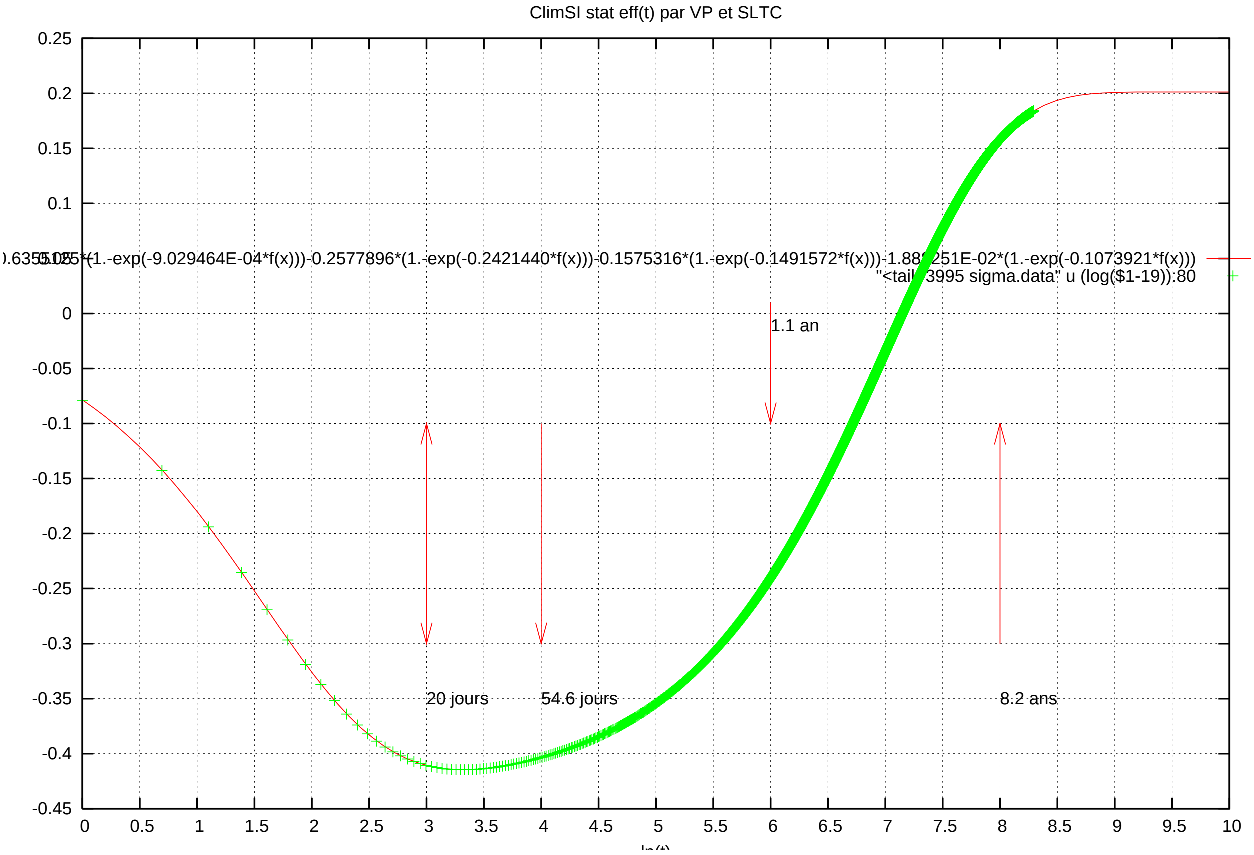

FIG. 5 – Comparaison entre deux déterminations de la réponse efficace.

Lien entre effets L et non-L de rétroaction

Comment les effets stationnaires se combinent-t-ils pour constituer la résultante non-L (SLTC) ? On considère une variation incrémentale de la fonction

$$
\begin{aligned}
\rho_g(t+\delta t, s) &= <c^\dagger(t+\delta t)\,|\int_s^{t+\delta t} \Phi(t+\delta t,\tau)\,|b(\tau)>d\tau \\
&= (<c^\dagger(t+\delta t)\,| - <c^\dagger(t)\,| + <c^\dagger(t)\,|) \\
&\quad \left[\int_t^{t+\delta t} \exp(A(t+\delta t-\tau))\,|b(t)>d\tau + \int_s^t \Phi(t+\delta t,\tau)\,|b(\tau)>d\tau\right] \\
&= (<\Delta c^\dagger(t;dt)\,| + <c^\dagger(t)\,|) \\
&\quad \left[A^{-1}(I-\exp(A\delta t))\,|b(t)> + (I+A\delta t)\int_s^t \Phi(t,\tau)\,|b(\tau)>d\tau\right]
\end{aligned}
\qquad (116)
$$

le facteur à $<c^\dagger(t)\,|$ constante multiplie la partie stationnaire de l'expression entre crochets pour donner l'effet SLT : $\rho_g^s(\delta t)$, et donne, avec la matrice unité du développement de $\exp(A\delta t)$, l'effet SLTC : $\rho_g(t,s)$. On a donc au premier ordre et à $<c^\dagger\,|$ constante une construction additive de l'effet non-L par les stationnaires, avec un terme en δt supplémentaire :

$$
\rho_g(t+\delta t, s) \overset{(1)}{\simeq} \rho_g(t,s) + \rho_g^s(\delta t) + <c^\dagger\,|\,A\delta t \int_s^t \Phi(t,\tau)\,|b(\tau)>d\tau \qquad (117)
$$

C'est en particulier la construction de l'effet non-L lorsque le gain est calculé avec un transfert copie d'une composante d'état. On peut à présent considérer le terme en variation de cette matrice :

$$
\begin{aligned}
+ \quad &\overset{(2)}{=} \quad <\Delta c^\dagger(t;dt)\,|\left[A^{-1}(I-\exp(A\delta t))\,|\,b(t)> +(I+A\delta t+...)\int_s^t \Phi(t,\tau)\,|\,b(\tau)>d\tau\right] \\
&\simeq \quad <\Delta c^\dagger(t;dt)\,|\int_s^t \Phi(t,\tau)\,|\,b(\tau)>d\tau
\end{aligned}
$$

en supposant δt tel que $<\Delta c^\dagger(t;dt)\,|\sim \delta t$.

Finalement au premier ordre :

$$
\rho_g(t+\delta t,s) \overset{(1)}{\simeq} \rho_g(t,s)+\rho_g^s(\delta t)+ <c^\dagger(t)A(t)\delta t+\Delta c^\dagger(t;dt)\,|\int_s^t \Phi(t,\tau)\,|\,b(\tau)>d\tau \quad (118)
$$

Ainsi, et même à $< c^\dagger\,|$ constante, on a certes un effet immédiat d'accumulation, mais complété par un effet cumulatif, et rien ne permet de présager de leur importance relative.

Si on voulait effectuer ce calcul, le choix de δt serait essentiel pour "piquer" la durée significative de ρ_g^s, et devrait se baser sur la variation des trois Jacobiennes. On peut éventuellement ajouter au calcul l'evolution des Jacobiennes et reprendre le développement précédent ?

4.7 Généralisations extrêmes

[1] Posons très formellement une généralisation de la formule donnant l'effet de rétroaction, en reprenant les symboles de la EPL[2] :

$$
\begin{aligned}
\rho_g(t,s) \quad &= \quad <c^\dagger(t)\,|\int_s^t \Phi(t,\tau)\,|\,b(\tau)>d\tau \\
\longrightarrow & \\
\rho_x(t,s) \quad &= \quad <c^\dagger(t)\,|\int_s^t \Phi(t,\tau)B(\tau)\,|\,v(\tau)>d\tau \qquad (119)
\end{aligned}
$$

où on a encore supposé que tous les transferts — à l'exception de φ scalaire qui est une recopie — ont été éliminés. Dans cette expression, une partie de la matrice $A^\sharp$ a été déplacée dans une matrice B, et un vecteur de perturbation est explicitement présent. On peut alors considérer ρ_x comme un effet de rétroaction. En effet, le remplacement de certaines occurences de la variable sensible par sa recopie φ correspond à ce déplacement de $A^\sharp$ vers B. Couper "les rétroactions" revient à annuller B, et ceci pour un forçage particulier (exogène ou endogène) $|\,v(t)>$.

La fonction définie par (119) est l'écart à v de la réponse du système en boucle fermée le long de sa trajectoire de référence (elle-même perturbée ou non, suivant que v est endogène ou non). Cet effet de rétroaction est à la marge (SLTC), mais le protocole des trois trajectoires permet de le définir tout aussi bien exactement, c'est-à-dire : **un effet de rétroaction généralisé le long d'une trajectoire**.

[1] Juillet 2006, après examen d'un problème posé par pat.

[2] Feedback characteristics of nonlinear systems, by l'unsecte, EPL, **81** (2008)

4.8 Gain de rétroaction pour les SLT périodiques

[1] La forme SLT obtenue des diverses fonctions de gains mettent bien en évidence une séparation entre une structure, donnée par le double produit scalaire constant, et une dynamique (d'amortissement et d'oscillation). La théorie de Floquet étend cette séparation aux systèmes non-L mais à Jacobiennes périodiques. Le but du jeu présent consiste à tenter d'introduire une séparation de ce type dans les trois noyaux de rétroaction.

Des définitions introduites aboutissant à la (65), on a la relation

$$\Phi(t,0) = \Psi^F(t)\exp(\Lambda t)Z^{-1} \tag{120}$$

entre le propagateur, la matrice des vecteurs de Floquet (périodique), la matrice d'amortissement avec Λ, Z éléments propres caractérisant la dynamique de première période ($[0,T]$) :

$$\Phi(T,0)Z = Z\exp(\Lambda T)$$

attention, la généralisation de la formule (120) est :

$$\Phi(t,\tau) = \Psi^F(t)e^{\Lambda(t-\tau)}\Psi^{-F}(\tau) \tag{121}$$

contrairement à une précédente version ! (on rappelle que $\Psi^F(0) = Z$).

Rappelons enfin la propriété caractéristique $\forall t,\tau \ : \Phi(t+T,\tau+T) = \Phi(t,\tau)$ pour tout système tel que $\forall t \ : A(t+T) = A(t)$. On a aussi pour toute matrice X de solutions fondamentales :

$$\begin{array}{rcl}
\Phi(t+T,\tau) & = & X(t)MX^{-1}(\tau)\ ;\ \text{avec } M = e^{CT}\ , \\
\Phi(t,\tau) & = & X(t)X^{-1}(\tau)\,,\ \text{passer en Floquet dit que} \\
\rightarrow\ X(t) & = & \Psi^F(t)e^{\Lambda t}Z^{-1}\,, X_0 = I \quad (\Psi^F(0) = Z)\,; \\
\text{et que} & & e^{CT} = Ze^{\Lambda T}Z^{-1}\,;
\end{array}$$

Passer en analyse de Floquet consiste alors à prendre une solution fondamentale particulière du système — soit dans $[\theta]$, de calculer la sensibilité du système à des perturbations initiales particulières, simples pour les È.P. réels, avec corrélation pour des complexes.

On va essayer de bien expliciter l'intérêt de cette décomposition-Floquet du propagateur, car elle représente un paradigme simple d'analyse structurelle du noyau de propagation des perturbations. On peut y voir une analyse "le long d'une structure" hypothétique, ou encore l'amorce d'une analyse en série de Fourier d'une portion de SLTC... En effet, la susdite décomposition peut être tout à fait arbitraire, et alors simplement, Ψ^F ne sera pas périodique[2]. On a ainsi une piste méthodologique à suivre. De plus, les applications strictes de la théorie de Floquet sont multiples, à commencer par l'analyse de stabilité des cycles météorologiques et climatiques, de nombreuses machines à cycles...

Ce que recèle la décomposition (120), c'est qu'une perturbation des C.I. le long d'un V.P. $|z>$ excite une structure, c'est-à-dire un vecteur de Floquet $\Psi^F(t)$ périodique. Cette structure, en sa double composante $\{i = 1, n\} \times \{0, T\}$, est fixe. On peut la voir comme un Hovmöller espace $\times$ temps sur une période $(0, T)$ pour un champs d'état discrétisé, ou par une série de cartes représentant la période. Cette structure de l'effet de perturbation des C.I. est modulée par un facteur complexe $\exp(\lambda t)$, avec possible oscillation modulant la structure de base, de périodes sans rapport direct ou évident avec T.

[1] Janvier 2006, corrigé en Juillet 2006, puis en Mars 2008— ajout du forçage et typos.

[2] et alors l'un des multiplicateurs de Floquet ne sera plus égal à l'unité.

analyse préliminaire La propriété du propagateur $\Phi(t+T,\tau+T)=\Phi(t,\tau)$ découlant de la périodicité de A permet d'étudier ce qui se passe entre la première et la deuxième période (on conserve un terme de forçage de même période $s(t)$) :

$$\begin{aligned}
\sigma^F(t+T) &= \int_0^T \Phi(t+T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)\,d\tau \\
&\quad + \int_T^{T+t} \Phi(t+T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)\,d\tau \\
\sigma^F(t+T) &= \int_0^T \Phi(t+T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)\,d\tau + \sigma^F(t)
\end{aligned}$$

en ayant changé de variable d'intégration ($\tau \to T+\tau$) dans la seconde intégrale et en ayant pris en compte la périodicité de Φ et $|b>$. En remarquant à présent maintenant que $\Phi(t+T,\tau)=\Phi(t+T,T)\Phi(T,\tau)=\Phi(t,0)\Phi(T,\tau)$, on a

$$\sigma^F(t+T)=\sigma^F(t)+\Phi(t,0)\sigma^F(T) \tag{122}$$

soit encore, après p périodes :

$$\sigma^F(t+pT)=\sigma^F(t)+\left[\Phi(t,0)+\Phi(t+T,0)+\cdots+\Phi(t+(p-1)T,0)\right]\sigma^F(T) \tag{123}$$

ou encore, avec $\Phi(t+nT,0)=\Phi(t,0)\Phi(T,0)^n$:

$$\sigma^F(t+pT)=\sigma^F(t)+\Phi(t,0)\frac{\Phi_T^p-I}{\Phi_T-I}\sigma^F(T) \tag{124}$$

On a raisonné sur la sensibilité σ, et l'effet en retour s'en déduit classiquement : $f^F(t)=<c^\dagger(t)\,|\,\sigma^F(t)>$.

A chaque nouvelle période, on a donc un terme intégral qui s'ajoute à l'effet-en-retour précédent. On a montré (59 ...) que $\Phi_T \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(T,0)=M=\exp(CT)$, d'où :

$$\begin{aligned}
\sigma^F(t+pT) &= \sigma^F(t)+\Phi(t,0)\frac{e^{pCT}-I}{e^{CT}-I}\sigma^F(T) \\
f^F(t+pT) &= <c^\dagger(t)\,|\,\sigma^F(t)>+<c^\dagger(t)\,|\;\Phi(t,0)\frac{e^{pCT}-I}{e^{CT}-I}\;|\,\sigma^F(T)>
\end{aligned} \tag{125}$$

On trouve ainsi[1] que l'effet en retour est modifié par un terme d'amortissement de l'accroissement "pérodique" $\sigma^F(T)$ propagé sur la durée t (au-delà de la dernière période passée) par $\Phi(t,0)$.

L'intérêt de la décomposition de Floquet porte sur l'interprètation de cet effet de propagation de périodicité lorsque les C.I. sont Z et qu'alors, $\exp(CT)=Z\exp(\Lambda T)Z^{-1}$. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\sigma^F(t+pT) &= \sigma^F(t)+\Phi(t,0)Z\frac{e^{p\Lambda T}-I}{e^{\Lambda T}-I}Z^{-1}\sigma^F(T) \\
f^F(t+pT) &= <c^\dagger(t)\,|\,\sigma^F(t)>+<c^\dagger(t)\,|\;\Phi(t,0)Z\frac{e^{p\Lambda T}-I}{e^{\Lambda T}-I}Z^{-1}\;|\,\sigma^F(T)>
\end{aligned} \tag{126}$$

Si la forme trouvée semble pertinente comme exhibant à la Floquet une réponse périodique corrigée par un terme cumulatif, on peut s'interroger cependant sur l'intéret de cette forme en contemplant cet exemple obtenu avec ClimSI sur l'effet-en-retour WV avec cycle saisonnier : quel peut être l'intéret d'une décomposition de cette figure ? Si on

[1] La forme fraction est légitime car toutes les matrices commutent.

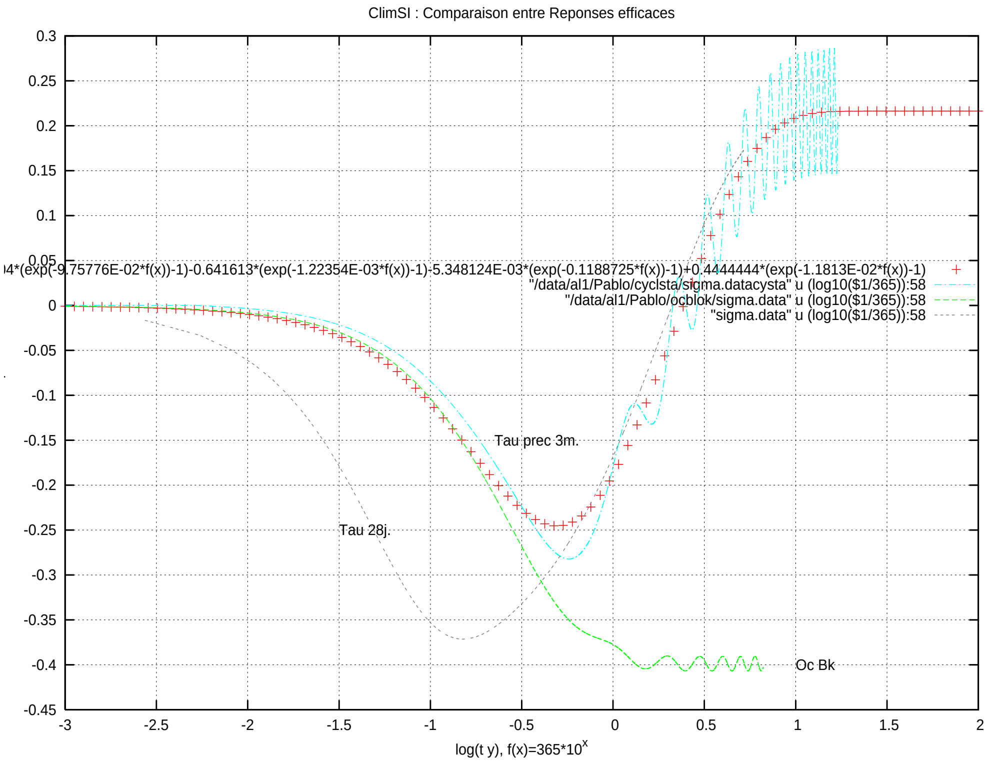

FIG. 6 – ClimSI WV feedback model responses.

s'intéresse à la réponse rapide, il suffit d'intégrer le système classique ; si c'est la partie périodique de la réponse asymptotique, alors toute l'information se trouve dans le second terme ayant σ^F en facteur. Bien sûr, cet exemple n'est pas un modèle particuièrement pertinent pour Floquet dans la mesure où il n'est pas intrinsèquement périodique mais forcé par une source cyclique ; c'est pourtant un exemple général en analyse du climat. Et on a quand même alors un système non linéaire dont la matrice $A(t)$ du SLTC est périodique, ce qui justifie amplement l'approche à la Floquet.

Dans l'exemple du papier du Michæl ceci dit encore, il existe des oscillations dynamiques qui apparaissent dans les vecteurs de Floquet complexes, ces modes qu'on parvient apparemment à exciter suffisament en perturbant les C.I. par des vecteurs (ou des paires conjuguées) de Z, et cette information apparait bien dès la première période, alors ?

Alors en premier, il semble y avoir une contradiction entre la vision par effet-en-retour répondant à un forçage constant, et l'analyse de Floquet qui tire son information de perturbations spécifiques des C.I. Le premier Floquet — le plus lent — représente bien le comportement asymptotique du système ! Faut-il alors combiner les deux, ou bien choisir un forçage périodique spécifique ? Ou même constant mais égal au premier Floquet $\psi_1^F = | z_1 >$, le plus lent ?

Il faudra revenir à cette question stémologique fondamentale, mais on peut espérer tirer des vers du nez de la décomposition du propagateur à la Floquet et des diverses formes utilisables.

Ceci dit, analysons en parallèle les résultats tirés de l'analyse en É.P du SLT pour en induire ce qu'on peut au mieux espèrer de (*Floquet*).

1. la décomposition en É.P. de $A = C^{ste}$ fournit une sommation de Schür (*idem*) ;
2. les sommes représentent une décomposition en éléments simples (*en fonctions élémentaires*) ;
3. l'intégration se fait en Laplace ou Borel par $\times\mu$ (*numérique*) ;

4. le retour au domaine temporel est alors direct ;

et rapprochons les deux expressions obtenues ; la VP-Borel (111) du noyau d'effet-en-retour permet d'écrire

$$f^{SLT}(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t < c^\dagger \,|\, e_i >< f_i \,|\, b > \exp(\lambda_i \tau) s(\tau)\, d\tau \tag{127}$$

alors que via (120) elle peut être ainsi décomposée :

$$f^F(t) = \sum_{i=1}^{n} \int_0^t < c^\dagger(t) \,|\, \psi_i^F(t) >< \psi_i^{-F}(\tau) \,|\, b(\tau) > \exp(\lambda_i^F (t-\tau)) s(\tau)\, d\tau \tag{128}$$

avec $< \psi_i^{-F}(\tau) \,|$ vecteurs lignes de l'inverse de $\Psi^F(\tau)$, $< c^\dagger \,|$ et $|\, b >$ périodiques, comme Ψ^F, de période commune T. Le passage en éléments propres de Floquet a simplement permis de sortir $\exp(\lambda_i t)$, dans la décomposition spectrale du propagateur.

On peut dans la première expression remplacer τ par $(t-\tau)$ sans modifier le résultat, si bien que le parallèle entre les deux approches apparaisse clairement — la source seule a été déphasée. Il apparait que Floquet donne une décomposition comme avec les É.P ; les éléments simples sont devenus des couples λ_i, $|\, \psi_i >$. La seule difficulté restante concerne l'intégration, qui ici est à calculer alors que seule l'exponentielle restait à intégrer du SLT.

On peut alors s'attendre à ce que la périodicité permette de simplifier le calcul général de l'intégrale en le limitant à une maille temporelle par exemple. Alors, l'appariement des paires conjuguées devrait fournir les séries temporelles élémentaires composant une réponse globale ?

Floquet donc La question amont, c'est petit peut-on conserver le doublet *structure* × *modulation* de Floquet, alors qu'ils sont convolués par l'intégrale[1] ?

On peut déjà s'extasier devant l'analogie entre (127) et (128). Pour obtenir la modulation exponentielle complexe en facteur, il a fallu cross-normer $F^\dagger E = I$ et supposer les v.p. distinctes, alors que par Floquet, on obtient directement cette forme modale. Ce fait à lui seul justifie je trouve un approfondissement méthodologique de l'approche.

Que se passe-t-il en passant de t à $t+T$? Examinons un terme de la décomposition, correspondant à une v.p. λ_i

$$f_i^F(t) = < c^\dagger(t) \,| \int_0^t |\, \psi_i^F(t) > < \psi_i^{-F}(\tau) \,|\, b(\tau) > \exp \lambda_i (t-\tau) s(\tau)\, d\tau \tag{129}$$

on a alors, puisque seule l'exponentielle n'est pas périodique

$$\begin{aligned} f_i^F(t+T) &= < c^\dagger(t) \,| \int_0^t |\, \psi_i^F(t) > < \psi_i^{-F}(\tau) \,|\, b(\tau) > \exp \lambda_i (t+T-\tau) s(\tau)\, d\tau \\ &\quad + < c^\dagger(t) \,| \int_t^{t+T} |\, \psi_i^F(t) > < \psi_i^{-F}(\tau) \,|\, b(\tau) > \exp \lambda_i (t+T-\tau) s(\tau)\, d\tau \end{aligned}$$

et après un changement de la variable d'intégration ($\tau - t \to \tau$) de la seconde intégrale

$$\begin{aligned} f_i^F(t+T) &= \exp(\lambda_i T) f_i^F(t) \\ &\quad + < c^\dagger(t) \,| \int_0^T |\, \psi_i^F(t > < \psi_i^{-F}(t+\tau) \,|\, b(t+\tau) > \exp \lambda_i (T-\tau) s(t+\tau)\, d\tau \\ f_i^F(t+T) &= \exp(\lambda_i T) f_i^F(t) + \overline{f_i^F}(t) \end{aligned} \tag{130}$$

[1]il y a en parallèle une discussion synthétisée dans WVsimple ...

avec une fonction $\overline{f_i^F}(t)$ effectuant une intégrale pondérée du produit scalaire $<\psi_i^{-F}(t+\tau)\,|\,b(t+\tau)>$ sur une période suivant la variable t et qui est elle-même périodique. Remarquons que puisque $f_i^F(0) = 0$, la formule vérifie bien $f_i^F(t+T)|_{t=0} = \overline{f_i^F}(T) = f_i^F(T)$.

Après N périodes, on a

$$f_i^F(t+NT) = \exp(\lambda_i NT) f_i^F(t) + \overline{f_i^F}(t)\frac{1-\exp\lambda_i NT}{1-\exp\lambda_i T} \tag{131}$$

avec on l'a vu $\lambda_i T > 1$ pour leur composante réelle[1][2]. La perturbation step de la définition de l'effet-en-retour se traduit par une pseudo-convolution qui explique l'absence de modulation non-amortie. Néanmoins, si le système est périodique, un couple de v.p. λ sera de partie réelle nulle. La composante périodique basique de l'effet-en-retour sera cantonnée à cette paire, alors que les autres caractériseront la dynamique sous-périodique ; n'est-ce pas ce type de décomposition que nous recherchions ?

Ainsi, le calcul de l'effet-en-retour de la première période suffit à déterminer la fonction *ad vitam eternam*, et il en appert que le Lyapunov sera la plus grande partie réelle des λ_i.

Remarquons finalement que la réponse à un pulse est constituée d'un facteur de structure périodique modulé par $\exp(\lambda_i t)$.

décomposition alternative de l'intégrale

Voyons ce que l'on obtient avec l'autre décomposition de l'intégrale de $f_i^F(t+T)$:

$$\begin{aligned} f_i^F(t+T) &= <c^\dagger(t)\,|\int_0^T |\psi_i^F(t)> <\psi_i^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)> \exp\lambda_i(t+T-\tau)s(\tau)\,d\tau \\ &\quad + <c^\dagger(t)\,|\int_T^{T+t} |\psi_i^F(t)> <\psi_i^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)> \exp\lambda_i(t+T-\tau)s(\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

avec cette fois le changement de la variable d'intégration ($\tau - T \rightarrow \tau$) de la seconde intégrale et en prenant en compte la périodicité :

$$\begin{aligned} f_i^F(t+T) &= \exp(\lambda_i T) <c^\dagger(t)\,|\int_0^T |\psi_i^F(t)> <\psi_i^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)> \exp\lambda_i(t-\tau)s(\tau)\,d\tau \\ &\quad + <c^\dagger(t)\,|\int_0^t |\psi_i^F(t)> <\psi_i^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)> \exp\lambda_i(t-\tau)s(\tau)\,d\tau \\ f_i^F(t+T) &= f_i^F(t) + \exp(\lambda_i T) <c^\dagger(t)\,|\,\overline{\sigma_i}(t)> \end{aligned} \tag{132}$$

avec cette fois un terme additionnel à l'effet-en-retour de première période faisant intervenir le vecteur intégral $\overline{\sigma_i}(t) = \int_0^T |\psi_i^F(t)> <\psi_i^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)> \exp\lambda_i(t-\tau)s(\tau)\,d\tau$. Après N périodes, on a

$$f_i^F(t+NT) = f_i^F(t) + \exp(\lambda_i T)\frac{1-\exp\lambda_i NT}{1-\exp\lambda_i T} <c^\dagger(t)\,|\,\overline{\sigma_i}(t)> \tag{133}$$

Dans les deux décompositions effectuées, on constate que pour caractériser l'effet du passage de période à période suivante, on a dans (131) comme dans (133) une intégrale qui, simplifiée grâce à l'analyse par Floquet, impose un calcul en variables complexes.

Utilisation pratique

L'analyse complète de l'impact de l'hypothèse de périodicité prenant en compte N périodes, on est bien obligés de constater qu'il est nécessaire de passer par la décomposition

[1] l'analyse du propagateur de 0 à T ne donne accès qu'à des temps plus courts.

[2] Mars 2008 remarque peut-être pertinente mais un peu rapide... **à revoir**

spectrale de Floquet du propagateur. Cela exige non seulement le calcul de $\Psi^F(t)$, mais de plus celui de $\Psi^{-F}(t)$.

On est ainsi conduit à une analyse classique de Floquet en premier lieu. Il s'agira d'identifier les éléments de Floquet avec une interprètation physique du modèle.

Les fonctions dynamiques de rétroaction s'analysent en sus, en commençant par caractériser la première période. Le problème final est de considérer les modifications successives de ces premiers éléments jusqu'au comportement asymptotique, la question principale étant l'intégrale intervenant dans l'une ou l'autre des formules (131) et (133).

Le système du calcul d'un élément de l'effet-en-retour s'obtient par dérivation de (129) [1] :

$$\left\{\begin{array}{lcll} d_t\sigma_i^F(t) & = & A(t)\sigma_i^F(t) & +\,|\,\psi_i^F(t)\!>\,<\!\psi_i^{-F}(t)\,|\,b(t)\!> \\ f_i^F(t) & = & <\!c^\dagger(t)\,|\,\sigma_i^F(t) & \end{array}\right. \tag{134}$$

L'intégration de ce système se fait en complexe pour chaque élément de Floquet analysé, mais on doit remarquer que tous les éléments doivent être calculés auparavant (du fait de ψ_i^{-F})[2]

Reste ensuite le calcul de l'intégrale modifiant chacun de ces éléments. Le moins commode semble être le calcul de $\overline{f_i}(t)$, car on a à dériver la matrice $|\ b(t)>$; on se retourne donc vers le calcul de $\overline{\sigma_i}(t)$: une dérivée temporelle de l'intégrale dans la ligne suivant (132) donne en effet

$$\left\{\begin{array}{lcl} d_t\overline{\sigma_i}(t) & = & A(t)\overline{\sigma_i}(t) \\ \overline{\sigma_i}(0) & = & \sigma_i(T) \quad (C.I.) \end{array}\right. \tag{136}$$

C'est bien le système précédent sans source, celle-ci étant *in fine* condensée dans $exp(\lambda_i T)$. L'intégrale $\overline{\sigma_i}^F(t)$ se fait sur une seule période — et une de plus pour vérifier numériquement la formule (133) ⸮ [3]

[1] formule corrigée de Juin 2007.

[2] On pourra alternativement intégrer une ligne de Ψ^{-F} par

$$\partial_t <\psi_i^{-F}| = <\psi_i^{-F}|\ A - \lambda_i <\psi_i^{-F}| \tag{135}$$

initialisée par Z^{-1}.

[3] On doit ici remercier Jacques Frère pour cette solution simple d'évoquer le signe d'ironie proposé en 1899 par le très célèbre poëte Alcanter de Brahm ⸮

Un dernier essai et résumé

En résumé, considérant l'une des formes dynamiques possibles de (cf 97) :

$$\begin{cases} s_g(t,\tau) &= \int_\tau^t \Phi(t,s)\,|b(s)>\,ds \\ \varrho(t,\tau) &= <c^\dagger(t)|\int_\tau^t \Phi(t,s)\,|b(s)>ds \end{cases}$$

on espère qu'une décomposition du propagateur *à la Floquet* permettra d'affiner le regard sur les dynamiqes plus fines sous-jacentes au modèle. On a deux décompositions utiles en pratique — une seule sera *in fine* retenue :

$$\begin{aligned} \Phi(t,\tau) &= \sum_i e^{\lambda_i(t-\tau)}|\ \psi_i^F(t)><\psi_i^{-F}(\tau)\ | \\ &= \sum_i |\ y_i(t)><y_i^{-1}(\tau)\ | \end{aligned}$$

où nous avons ajouté celle en Y^F liée aux Floquets par $|\psi_i^F(t)>=|y_i(t)>\exp(-\lambda_i t)$.

On doit de plus remplacer les amortissements simples mailles de Floquet par une forme plus complexe, et pour se faire, déterminer les passages à $t+T$, que l'on renouvelle ici en Y^F.

En revenant à la décomposition $Y(t)=\Phi(t,0)Z$ (de 209), avec les propriétés $Y(t+T)=Y(t)\exp(\Lambda T)$, $\quad Y(0)=Z\quad$ et $\Phi(t,\tau)=Y(t)Y^{-1}(\tau)$[1], on peut écrire :

$$\begin{aligned} s_i^g(t+T) &= \int_0^T \sum_i e^{\lambda_i T}\,|y_i(t)><y_i^{-1}(\tau)|b(\tau)>d\tau \\ &\quad+\int_T^{T+t} Y(t+T)Y^{-1}(\tau)\,|b(\tau)>d\tau \end{aligned}$$

et après changement dans la deuxième intégrale et en résolvant les périodicités :

$$\begin{aligned} s_i^g(t+T) &= s_i^g(t)+e^{\lambda_i T}\overline{\sigma_i}(t) \\ \overline{\sigma_i}(t) &= |y_i(t)>\int_0^T <y_i^{-1}(\tau)|b(\tau)>d\tau \end{aligned}$$

qui mène directement en amont de la formule (132).

La décomposition précédente est celle qui permet de passer aux EDP sans dériver de matrice, et conduit de plus au système déjà TEFisé (s,σ). On a ainsi deux déterminations à mener : i) une réponse de base (ou maille) de $t=0$ à la période ; ii) une fonction d'amortisssement d'une période à l'autre : $\overline{\sigma_i}(t)$.

On utilise la forme intégrale du vecteur des sensibilités pour dériver les EDP, comme ici en Y :

$$\begin{cases} \partial_t s_i^g(t) &= A(t)s_i^g(t)+|y_i^F(t)><y_i^{-1}(t)|b(t)> \\ \varrho(t,\tau) &= <c^\dagger(t)|\ s_i^g \end{cases}$$

La forme intégrale de $\overline{\sigma_i}(t)$ est déterminée par $\partial_t\overline{\sigma_i}(t)=A\overline{\sigma_i}(t)$, sans source donc ; mais il faut encore déterminer $\overline{\sigma_i}(0)$, soit :

$$\begin{aligned} \overline{\sigma_i}(0) &= |y_i(0)>\int_0^T <y_i^{-1}(\tau)|b(\tau)>d\tau \\ &= e^{-\lambda_i T}\,|y_i(T)>\int_0^T <y_i^{-1}(\tau)|b(\tau)>d\tau \\ &= e^{-\lambda_i T}s_i^g(T) \end{aligned} \tag{137}$$

[1] puisque Y est la matrice des solutions fondamentales ayant Z comme C.I.

On commence donc par déterminer par intégration de (137) les sensibilités-réponses mailles de Floquet en avant de 0 à T. On refait un run pour déterminer $\overline{\sigma_i}(t)$ en partant de $\overline{\sigma_i}(0) = e^{-\lambda_i T} s_i^g(T)$; on a alors tous les éléments d'analyse possible ... Bref, il y a un peu d'essais concrets à faire avant de trouver ce que l'on cherche, et je compte sur la nocturne du prochain Zircon pour y contribuer[1]. Ceci dit, on devrait s'orienter vers un vrai calcul des vecteurs tefisés, dans la mesure où les termes en $-\lambda \mid \psi >$ régularisent par essence les divergences–contractions du propagateurs *à la roduct*. Ce qui signifie pour Mini_ker un calcul de type **oker** en complexes, qui serait effectué après (ou en parallèle) à la résolution standard. L'avance de Ψ complet peut pauser problème pour les systèmes très contractants — pour lesquels on ne peut déterminer les éléments de Floquet ayant déjà numériquement disparu à T — et il faut probablement se rabattre sur une avance conjointe des lignes de Ψ^{-F}. Pour revenir aux systèmes rapidement contractants, qui vont exhiber des multiplicateurs de Floquet très faibles menant à une impossibilité numérique de calculer les V.P. correspondants, que faire ?

dans WVsimple[2], on donne des solutions à la fois pour passer les calculs de matrices complexes en réels, et pour calculer la réponse cyclique asymptotique sans faire intervenir les composantes incertaines. Mais ça relance l'intérêt de l'analyse par SVD, ou comment combiner les Floquets détectant par leur temps caractéristique des mécanismes, et l'orthogonalité permettant d'évaluer le "pourcentage d'explication" des réponses par leurs composantes.

quid du Wronskien ? fait le 23/10/2006, cf (62).

il y a également l'examen dans ce contexte de la notion de "cycle" climatologique (de l'eau, du carbone, de l'énergie mécanique atmosphérique ...

En entendant par là qu'il est légitime de considérer un modèle qui, en suivant une molécule finalement recyclée par exemple, sous entend de manière certes très implicite l'idée de récurrence, voire de périodicité. La question est comment formuler[3] un tel modèle ?

une abstraction possible ? JYG dixit, cf Maslov[4] On y trouve en effet dès l'introduction ce qui suit.

Connaissant de la matrice A ses éléments propres, trouver ceux de $A(\epsilon) = A + \epsilon B$, dont la solution est "bien connue" ; Elle consiste à écrire les vp $\lambda_k(\epsilon)$ de la matrice $A(\epsilon)$ en série de puissances de ϵ

$$\lambda_k(\epsilon) = \lambda_k + \epsilon c_{1k} + \epsilon^2 c_{2k} + ... \tag{138}$$

où les λ_k sont les vp de la matrice "non-perturbée" $A = A(0)$, et les coefficients c_{jk} indépendants de ϵ. On a des problèmes qui concernent le calcul de $(A + \epsilon B)^{-1}$ ou celui de $\exp(A+\epsilon B)$ par exemple. Des problèmes sans difficultés pour les matrices mais posant pb pour des opérateurs linéaires à valeur dans un espace de Banach de dimension infinie, dixit Maslov. En dimension finie en effet, les limites pour $\epsilon \to 0$ s'identifient aux grandeurs prises avec $\epsilon = 0$. Pour ces opérateurs évoqués, on a

$$(A + \epsilon B)^{-1} = A^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \epsilon^k (BA^{-1})^k \tag{139}$$

[1] des dangers du Floquage à Jussieu, on sera mieux à Tarbes.

[2] Mai 2010.

[3] cf l'article P.Humbert et al, chap. 6 : On the relative Humidity of the Atmosphere (note du 13 mai 2009).

[4] V.P. Maslov : Théorie des perturbations et méthodes asymptotiques, Collection Etudes mathematiques, 1972 Dunod.

etc,..., A et B auto-adjoints, λ_0 un point isolé de multiplicité m, etc. On remarque la formule en note de bas de page

$$(A-z)^{-1}g = \int \sum \frac{|\ \psi_k(x) >< \psi_k(\zeta)\ |}{\lambda_k - z} g(\zeta) d\zeta \tag{140}$$

pour tout $g \in H$ Hilbert[1].

[1]... et on en reste là ? (15 juin 2012)

5 Rapport entre structure et gain

5.1 Effet de rétroaction sur champ moyen

[1] Mettons en exergue la sobriété avec laquelle nous introduisions la notion de boucle de rétroaction pour la EPL (partant d'un système d'état) :

Dans la méthode que nous proposons, la manière la plus simple de définir une boucle de rétroaction consiste

1. *à ajouter une variable scalaire φ recopiant la variable perturbée du système originel, c'est-à-dire d'équation $\phi = \eta_k$ // SLTC $\Delta\varphi = x_k$;*
2. *changer dans les autres modèles DES occurences choisies de η_k en φ pour définir la boucle (pb sémantique).*

et nous prétendions dans la suite que l'ajout de cette variable (*de transfert*) introduisait une souplesse permettant de construire une "observable" plus générale. C'est cette "facilité" que nous éprouvons ici en prenant le cas précis d'un sous-vecteur d'état représentant un champ (discrétisé) d'une grandeur physique.

Vous m'avez entendu plaider depuis quelques temps pour la formulation multi-échelle et introduire une méthode pour modifier un modèle original de champ par l'introduction d'une prise de moyenne. C'est de cette méthode que l'on traite ici, parce qu'elle me semble un bon paradigme de cette fameuse souplesse du choix de l'observable-sonde de la rétroaction. On considére donc un système d'état (sans transferts ou tout transfert éliminé) dont une partie - mettons là en tête du vecteur d'état - représente un champ $(\zeta_i = \zeta(x_i), i = 1, p)$. On introduit alors la moyenne de ce champ :

$$\varphi = \frac{1}{p}\sum_i^p \zeta_i \tag{141}$$

Le problème est qu'il n'existe pas (on le suppose) d'occurence de cette moyenne dans les équations primitives, et alors, soit on la fait apparaître (par sommation ?) soit il faut trouver une autre méthode. Mais un essai de sommation, s'il fait apparaître une $\sum_i \partial_t \Delta\eta_i$ à gauche, n'en guère apparaître à droite, sauf à supposer tous les coefficients a_{ij} d'une colonne égaux, ce qui revient à supposer que chaque trajectoire de maille partage son SLT avec les autres, hypothèse qui enlève tout son intérêt à la moyenne du champ je trouve.

Alors, pour rendre le système sensible à cette variable, on effectue pour ces p composantes le changement de variable $\zeta_i \to \varphi + \eta_i$, d'où la reformulation du SLT :

$$\begin{aligned}
\partial_t(\Delta\eta_i + \Delta\varphi) &= \sum_j a_{ij}(\Delta\eta_j + \Delta\varphi) \\
&\to \partial_t(\Delta\eta + |\,b_u > \Delta\varphi) = A\Delta\eta + A\,|\,b_u > \Delta\varphi \\
\Delta\varphi &= \sum_{i=1}^p (\Delta\eta_i + \frac{1}{p}\Delta\varphi) = \Delta\varphi + < c^\dagger_{1/p}\,|\,\Delta\eta \\
&\to 0\Delta\varphi = + < c^\dagger_{1/p}\,|\,\Delta\eta
\end{aligned} \tag{142}$$

(on a laissé de côté les autres états pour faire simple[2]). Avec ainsi des vecteurs $|\,b>$ et $< c^\dagger\,|$ particulièrement simples et constants. Comme il est bien connu dans l'unsecte, on arrive à une équation de transfert singulière, ce qui n'empêche nullement le système de rester régulier[3].

[1] Février 2006.

[2] on peut encore supposer qu'on les a éliminés, mais alors $< c^\dagger\,|$ et $|\,b>$ deviennent dépendantes de t.

[3] c'est le syndrome du **K**_transfert et de l'adage que *la famille ne se soucie guère de la singularité de sa branche.*

Étant donné que la définition d'une boucle de rétroaction pose avant tout un problème de structure, on se place dans le cadre le plus simple de formalisation et on examine la forme SLT-Borel du gain :

$$\begin{aligned}
\mu(\tilde{\Delta\eta} + |b_u> \tilde{\Delta\varphi}) &= A\tilde{\Delta\eta} + A\,|b_u> \tilde{\Delta\varphi} \\
&\rightarrow \mu\tilde{\Delta\eta} = A\tilde{\Delta\eta} - [\mu I - A]\,|b_u>]\tilde{\Delta\varphi} \\
0\tilde{\Delta\varphi} &= <c^{\dagger}_{1/p}|\,\tilde{\Delta\eta} \\
&\rightarrow <c^{\dagger}_{1/p}|b_u>\tilde{\Delta\varphi} = \tilde{\Delta\varphi} = 0\,[+\tilde{u}(\mu)]
\end{aligned} \tag{143}$$

où on a posé $\mu = \frac{1}{\tau}$. Le facteur $|b>$ est constitué de composantes unité, et $<c^{\dagger}|$ de $\frac{1}{p}$, et ainsi $<c^{\dagger}|b> = 1$. On remarque que l'introduction de la valeur moyenne revient bien à la contrainte de somme des anomalies $(\Delta\eta)$ nulle :

La valeur moyenne est la variable de Lagrange conjuguée à la contrainte de somme nulle des anomalies.

Même dans le cas réaliste avec d'autres cellules, il apparait une difficulté de concevoir la boucle ouverte, c'est-à-dire de perturber φ sans réaction immédiate des cellules, ce qui semble cohérent avec la formulation retenue, car avec $|b>$ nul, leur modèle devient impropre à la détermination d'une évolution découplée de leur état. Ou encore, faut-il perturber la moyenne SANS que la somme des anomalies reste nulle ? Ça en devient banal dans l'unsecte que cette ouverture de boucle est difficile !

Faut donc y réfléchir, mais on voit que la "souplesse" introduite est nécessaire, certes, mais pas définitive ... On peut même ne pas s'empêcher de penser que cette souplesse introduite dans la couche $[\mu]$ ouvre une vaste étendue sémantique au niveau supérieur $[\theta]$, mais n'est-ce pas là un effet récurrent du TEF ?

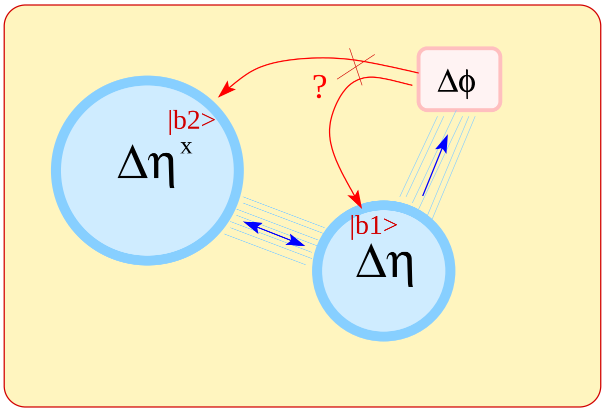

Fig. 7 – Structure de boucle pour champ moyen.

En y réfléchissant donc, on peut remarquer qu'une perturbation $\Delta\varphi$ de la valeur moyenne des ζ_k laisse inchangées les anomalies $\Delta\eta_k$ — du moins c'est ce qu'on a jusqu'ici supposé. La conséquence est alors logique : pas de rétroaction, puisque l'effet immédiat lui-même de la perturbation est nul ! Et tout aussi logiquement, gain de rétroaction nul[1].

remarque méthodologique

Le problème soulevé est clairement lié à la *formulation* particulière du modèle, avec ici un parti-pris de *remplacer* les grandeurs par les anomalies. Mais on peut le voir aussi comme une simple recherche d'intégration sobre d'une observable dans les modèles pour

[1]cette légère réflexion m'a pris moins d'un week-end ... J'avais en tête un certain *a priori* sur l'existence d'un rapport entre gain moyen et gain de la moyenne, alors que ça n'a rien à voir, on y reviendra.

les rendre sensibles à cette nouvelle variable et pouvoir ainsi déterminer un gain (faire devenir *pronostique* comme disent certains, cette observable introduite *diagnostiquement*).

Sinon, en conservant le système des équations primitives, on connait une manière *diagnostique* de déterminer un gain, en appliquant la méthode du 3$^{\text{ème}}$ système du 4.2b., c'est-à-dire en coupant le brin aval de (Φ) et en perturbant la cellule avec $|\, b> \Delta\varphi$, on sait qu'on obtient $\Delta\varphi$ en réponse, qui donne directement l'effet-en-retour $\varrho(\mu) =< c^\dagger \mid (\mu I - A)\,|\, b>$ (la forme habituelle du gain se trouve donner dans ce cas l'effet-en-retour).

On a donc simplement un problème de formulation pertinente.

un problème sémantique

La question étant de poser un problème mettant en œuvre une moyenne de champs. De quoi traite-t-on ? Il ne peut s'agir, comme on vient de le découvrir, de l'effet-en-retour moyen de perturbation des anomalies. Par contre, il peut s'agir de l'effet moyen d'une perturbation de cet ensemble, considéré comme un sous-système, sur une autre partie ? C'est cette structure que l'on va considérer à présent.

Introduisons alors la différence entre les cellules $(\Delta\eta)$, dont le modèle inclut cette grandeur moyenne $(\Delta\varphi)$, et les autres $(\Delta\eta^X)$ correspondant au schéma de la fig 7. Reformulons le problème en explicitant la séparation entre $x = \tilde{\Delta\eta}$ et $y = \tilde{\Delta\eta}^X$, à partir de (143) :

$$\begin{aligned} \mu x &= A_{xx}x + A_{xy}y - [\mu I - A_{xx}]\,|\, b_1> \tilde{\Delta\varphi} \\ \mu y &= A_{yy}y + A_{yx}x + A_{yx}\,|\, b_2> \tilde{\Delta\varphi} \\ 0\ \tilde{\Delta\varphi} &= < c^\dagger_{1/p}\,|\, x \end{aligned} \tag{144}$$

on remarque que les $|\, b_i> = |\, b_u>$ sont tous deux avec p composantes unité et que l'on a aussi $< c^\dagger \,|\, b_i> = 1$.

La sémantique correcte devrait je crois viser à envisager,

- soit une perturbation des cellules (ζ_k) de somme nulle d'une part $(\Delta\varphi = 0)$, mais alors en introduisant un "bruit statistique"de perturbation,
- soit au contraire une forme de répartition d'une perturbation de la moyenne sur chaque cellule (caractérisée par $\Delta\varphi = u(t)$ ET une loi de répartition (qui sera simplement donnée par $|\, b>$[1] ;

c'est de ce dernier cas que l'on doit traiter ici. Perturber la moyenne sous-entend bien que la somme des anomalies doit rester nulle, sinon, on n'a pas perturbé QUE la valeur moyenne. Autrement dit, sur le schéma 7, il faut annuler $|\, b_2>$, et pas $|\, b_1>$. La boucle par $|\, b_1>$ représente la contrainte lagrangienne qui porte sur $\Delta\varphi$, et dont le gain est nul.

Devant ce problème de contenu sémantique de la boucle de rétroaction, un examen semble nécessaire. Définissons la sémantique générale de la boucle sur le modèle originel :

$$\Delta\eta_{moy} \to \Delta\zeta_i \to \ \textit{réaction des cellules}\ \zeta, \Delta\eta^X\ \textit{ensemble}\ \to \Delta\eta_{moy}$$

mais avec le modèle modifié, on a :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi \quad &\to \quad (\Delta\eta_i + \Delta\varphi)\ \textit{ensemble}\ \to\ \textit{réaction des cellules}\ \Delta\eta^X \\ &\to (\Delta\eta + \Delta\varphi) \quad \to \quad \Delta\varphi\ \textit{(avec}\ \sum_k \Delta\eta_k = 0) \end{aligned} \tag{145}$$

On devrait trouver que l'élimination des cellules se structure en une somme de gains (boucles emboitées) dont la somme est nulle, mais subtilement.

Procédons maintenant à cet exercice toujours pénible de l'élimination. On se demande perpétuellement pourquoi c'est déjà si compliqué avec seulement deux cellules ! La bon

[1]avec $< c^\dagger \,|\, b_i> = 1$, qui doit pouvoir se justifier en tant que relation de cohérence entre la répartition de la perturbation moyenne et la prise de cette moyenne.

choix consiste à éliminer d'abord x, car on sait déjà que ça régularise l'équation de transfert[1] :

$$\begin{array}{rcl}(\mu I - A_{xx})\, x &=& A_{xy} y \;-\; (\mu I - A_{xx})\,|b_1\!> \tilde{\Delta\varphi} \\ \rightarrow && x = A_x^{-1} A_{xy}\; y \quad -\,|b_1\!> \tilde{\Delta\varphi} \\ \mu y &=& (A_{yy} + A_{yx} A_x^{-1} A_{xy})\; y \;-\; A_{yx}\,|b_1\!> \tilde{\Delta\varphi} + A_{yx}\,|b_2\!> \tilde{\Delta\varphi} \\ 0\; \tilde{\Delta\varphi} &=& <\!c^{\dagger}_{1/p}|\; A_x^{-1} A_{xy}\; y \;-\; <\!c^{\dagger}_{1/p}|b_1\!>\}\tilde{\Delta\varphi}\end{array} \tag{146}$$

en ayant posé $A_x = (\mu I - A_{xx})$, et en se rappelant que $<\!c^{\dagger}_{1/p}|b_1\!> = 1$: on a bien régularisé. Il reste plus qu'à éliminer x pour obtenir

$$\{\,1 - <\!c^{\dagger}_{1/p}|\; A_x^{-1} A_{xy} A_{y\underline{x}y} A_{yx}\,(|b_2\!> - \,|b_1\!>)\,\}\; \tilde{\Delta\varphi} = \tilde{u}(\mu) \tag{147}$$

où on a posé :

$$A_{y\underline{x}y} = (\mu I - A_{yy} - A_{yx}[\mu I - A_{xx}]^{-1} A_{xy})$$

Ce résultat parait assez magique, et prend à rebours les accros à la boucle. Celle-ci correspond au diagramme de la fig. 8.

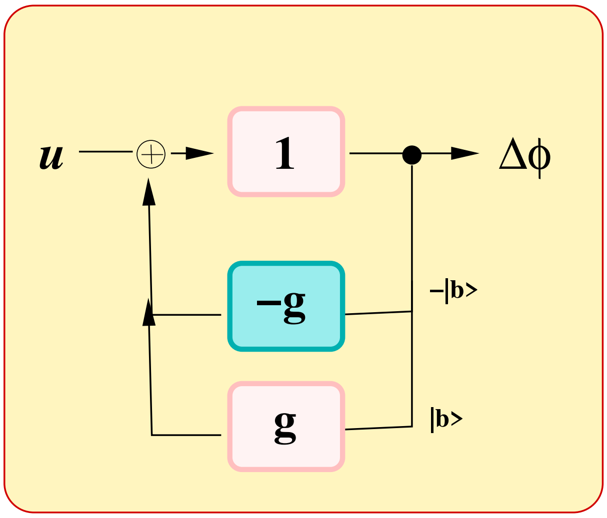

FIG. 8 – Le gain de champ moyen reste nul.

analyse du résultat

Remarquons tout d'abord que les bloc-matrices de type A_{xy} sont les parties de la matrice d'avance **complète** du système originel ; c'est heureux (ou logique suivant l'humeur), parce qu'il est impossible d'éliminer le transfert introduit. Ensuite, que l'annulation de $|\,b_1>$ a pour résultat de couper l'effet d'une perturbation de Φ sur x,

[1]bien évidemment, j'ai commencé par la mauvaise option, d'où une dizaine d'heures de calculs fastidieux pour une formule finale imbitable, grâce à Woodburry (j'ai laissé ce calcul en texte caché dans le .tex pour ceux que ça peut amuser). Et puisque ce texte est partagé par des citoyens de bonne compagnie, je me permets une conjecture stémologique : si on est dans le TEF et qu'on trouve malin d'utiliser la Woodburry pour arriver à ses fins, on doit pouvoir faire plus élégant et plus simple. Ceci parce que la démonstration de la formule : $(M + UV^{\dagger})^{-1} = M^{-1} - M^{-1}U[I + V^{\dagger}M^{-1}U]^{-1}V^{\dagger}M^{-1}$, vous allez encore rire, se fait dans l'unsecte en "décécroismoinsunbisant" la matrice composée : $\begin{bmatrix} I & -V^{\dagger} \\ U & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, avec X l'inverse recherchée, Y une matrice auxiliaire. Une complémentation de Schür donne la définition de X, et la Schür opposée fournit Y, que l'on introduit dans le système de la deuxième bande. Ma conjecture est que cette manipulation doit pouvoir se faire directement dans la matrice du système structurée par le TEF.

et ainsi de permettre un effet sur $\zeta = x + \Phi$, le champ originel. Alors, à $|b_1>$ nul toujours, les y réagissent, transmettent leur réaction à $x+\Phi$, et de là à Φ : le gain cherché correspond bien au résultat (147) avec ce type d'ouverture :

$$\boxed{g = < c^{\dagger}_{1/p} |\ A_x^{-1} A_{xy} A_{y\underline{x}y}^{-1} A_{yx}\ | b_2 >} \tag{148}$$

On peut aussi se convaincre de sa conformité avec l'analyse sémantique *a priori* de cette boucle (145).

On arrive finalement à cette boucle "quantique" :
– en boucle fermée, le gain est nul ;
– en coupant un brin de la fig.7, le gain est $-g$ *;*
– en ouvrant l'autre, on trouve g *!*
si on peut pas fabriquer un ordinateur quantique[1] avec ça, c'est à désespérer.

Examinons le mécanisme suivant la boucle exprimé dans (148)
– $A_{yx}\ |b_2>$: la perturbation appliquée à ζ en moyenne se transforme en une somme des colonnes de A_{yx}, matrice d'influence de x sur y ;
– $A_{y\underline{x}y}^{-1}$ est la réponse de la famille x, y (c'est-à-dire celle de y quand elle inclut la réaction de x mais sans celle de Φ ;
– $< c^{\dagger}_{1/p} |\ A_x^{-1}$: retour sur x et réponse moyenne par la moyenne des effets de x, ce qui semble cohérent avec un retour sur la valeur moyenne ;

Ainsi, ce mécanisme passe par la vision d'une famille des deux cellules couplées (la famille U, comme Univers, pour les ZOOMophiles). L'attaque à partir de la perturbation de la valeur moyenne sommée et le retour par x moyenné semblent également pertinente pour se convaincre que g est bien le gain recherché[2].

[1] pour répondre à une interrogation soulevée, je la trouve quantique en ce qu'elle comporte un état $(g, -g)$ indéterminé si on ne lui fait subir une 'mesure' : ici, couper le fil rouge ou bleu.

[2] pour les réfractaires à ce genre de sémantique, ils pourront se contenter de vérifier que l'expression du gain est identique à celle que fournit la méthode diagnostique sur le système primitif.

Le même sur le SLTC et Mini_ker

En cohérence avec l'approche proposée, on souhaite éviter l'intégration du propagateur complet, et globaliser la cellule (x). Justement, il s'est passé un phénomène asez peu banal qui vous a peut-être échappé lors de l'obtention du système (146), c'est que le champ des anomalies est entièrement déterminé dès que l'on connait le champ y et $\Delta\varphi$ (le ∂_t a disparu) ! La cellule (x) est devenue un transfer[1] ! Dans l'espace physique, on a $(\partial_t - A)\Delta\eta = -(\partial_t - A)\Delta\varphi$, et chaque composante de l'anomalie évolue de concert avec $\Delta\varphi$. Et cela alors que la perturbation de Φ est sans effet sur x ! On a là une occasion de vertige dans ce saut quantique qui sépare les couches physique et mathématique, et je subodore qu'on n'a pas fini d'en reparler, et je me défausse sur le prochain Zircon.

Alors, en considérant sans vertige ce système (146) d'où x a été justement éliminé, et prenant $|\, b_1 >$ nul, il suffit d'intégrer le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \partial_t \Phi_y \\ < \psi \,| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (A_{yy} + A_{yx} A_{xx}^{-1} A_{xy}) & A_{yx} \,|\, b_u > \\ < c^{\dagger}_{1/p} \,|\, A_{xx}^{-1} A_{xy} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_y \\ < \psi \,| \end{bmatrix} \tag{149}$$

qui est le système des propagateurs associés aux C.I. de y. La suite en découle en suivant la méthode des trois systèmes de gain, sauf qu'ici le gain lui-même reste inaccessible du fait de l'impossibilté de produire la matrice réduite $A^{\flat}$.

En ce qui concerne Mini_ker, on a un système à intégrer non standard, qui ne s'exprime pas comme les extensions aux variables du TEF. Ajoutons-y Floquet, de mêmes dimensions mais en variables complexes alors qu'on n'a pas l'utilité de passer tout le code en complexes, pour arriver à la nécessité d'envisager un nouveau bloc de calculs permettant d'intégrer des systèmes dont les matrices sont calculées à partir des jacobiennes du SLTC. Il faudra en discuter.

5.2 Gain moyen

Le problème est le suivant : une perturbation perturbe un champ de grandeur ; comment caractériser son effet moyen ? et comment cet effet moyen rétroagit-il sur la grandeur perturbée ? On voit qu'il s'agit d'un pur problème de structuration d'un gain classique, dans lequel on veut globaliser un élément distribué[2].

On considère un système $\mu x = Ax$, et on examine la réponse du système à une perturbation de chaque composante (k) d'état tour à tour. On considère ainsi

$$\begin{aligned} \mu x &= A\,(I - |\; u_k >< u_k \,|)\; x \;+ A\,|\, u_k > \Delta\tilde{\varphi}_k \\ \Delta\tilde{\varphi}_k &= < u_k \,|\; x \end{aligned} \tag{150}$$

on rappelle que x est le vecteur des variations $\Delta\eta$ par rapport à la trajectoire de référence, $\Delta\varphi_k$ scalaire est la seule variable de transfert du système (k), qui recopie la k$^{\text{ème}}$ composante de x (présentation EPL). Le vecteur $|\, u_k >$ est le k$^{\text{ème}}$ vecteur de la base euclidienne. Le plus dur est fait, car on a rendu le plus générique possible le système en k.

L'élimination de x dans $(\Delta\varphi)$ donne

$$(1 - < u_k \,|\; (\;\mu I - A + A \;|\; u_k >< u_k \;|)^{-1} A \;|\, u_k >)\; \Delta\tilde{\varphi}_k = \tilde{u}(\mu) \tag{151}$$

Et alors là, enfin ! Euréka, on conçoit d'emblée la nécessité évidente d'appliquer la Woodburry flop, démentant ainsi ma précédente conjecture, que je maintiens. Le gain s'écrit alors

$$g_k \;= < u_k \,|\; (\;\mu I - A)^{-1} A \;|\, u_k > - \frac{< u_k \,|\; (\;\mu I - A)^{-1} A \;|\, u_k >^2}{1 + < u_k \,|\; (\;\mu I - A)^{-1} A \;|\, u_k >} \tag{152}$$

[1] mais recellant quand même un opérateur temporel.

[2] les mouches ? je vois pas ...

de forme $g = \frac{m}{1+m}$, $m = < u_k \,|\, (\ \mu I - A)^{-1} A \,|\, u_k >$, d'où l'effet-en-retour moyen :

$$\varrho_{mean} = \frac{1}{p} \sum_k < u_k \,|\, (\ \mu I - A)^{-1} A \,|\, u_k > \tag{153}$$

Et pour finir, si on considère la décomposition en éléments propres[1] de A, tout se simplifie, du fait que $\sum_k < f_i \,|\, u_k >< u_k \,|\, e_j > = < f_i \,|\, e_j > = \delta_{ij}$, et on trouve

$$\boxed{\varrho_{mean} = \frac{1}{p} \sum_k \frac{\lambda_k}{\mu - \lambda_k}} \tag{154}$$

Ce résultat est en réalité général, puisque $\sum_k < u_k \mid M \mid u_k >= TrM$ et ainsi égale la somme des v.p., quelle que soit leur multiplicité. On peut comparer au résultat général de l'equ.(111) :

$$\varrho_{eff} = \sum_{i=1}^{n} \frac{< c^\dagger \,|\, e_i >< f_i \,|\, b >}{\mu - \lambda_i}$$

pour imaginer comment la prise de moyenne a englobé les éléments propres de A.

Retour sur champ moyen Lors de l'examen précédent du gain sur champs moyen, on n'a pas tenté de déterminer l'effet en retour sur champs moyen $\varrho_{\overline{\zeta}}$. On sait comment obtenir le système qui le détermine, il suffit de modifer (143) en introduisant la perturbation au niveau des cellules, c'est-à-dire en ajoutant à droite $+A \,|\, b_u > \epsilon$. On obtient *in fine*

$$\varrho_{\overline{\zeta}} = < c^\dagger_{1/p} \,|\, (\ \mu I - A)^{-1} A \,|\, b_u > \tag{155}$$

Cette fois-ci, ce n'est pas la trace de la matrice qui est en jeu, mais la somme de ces coefficients ! La conclusion s'en dégage clairement, c'est $\varrho_{\overline{\zeta}} \neq \varrho_{mean}$: **l'effet-en-retour moyen n'est pas celui du champ moyen[2] !** Voilà qui jette un regard éveillé sur la pratique utilisée à partir des résultats de champs moyens de GCM pour déterminer des gains de rétroaction climatique, non ? S'il apparaît que cette pratique mette en jeu une information plus riche (tous les coefficients du produit matriciel au lieu de seulement sa trace), l'aspect fluctuations spatio-temporelles peut très bien perdre de sa trace à cette grande sommation ...

En dépi de l'intérêt manifeste de tout ça, il faut bien voir que ce n'est qu'un commencement (mais déjà un commencement !) qui doit se prolonger :

- les V.P. de A retrouvent leur influence dès qu'on étend le système à plusieurs sous-systèmes ;
- on peut s'intéresser à la réponse moyenne d'une partie lorsque la valeur moyenne du champ d'une partie adverse est perturbée, etc
- et tenter de croiser ces deux approches sur chaque système ;
- d'autres observables sont tout aussi pertinentes, à commencer par la prise d'EOF, de structures singulières et autres décompositions globalisantes, et ceci pour la moyenne de l'effet comme de l'effet moyen ;
- faudrait essayer de voir ce qui se passe à la limite où la discétisation spatiale d'un domaine → inf

[1] avec les hypothèses et normalisation classiques.
[2] All, Mars 2008.

– établir le lien entre notre approche du gain et celle de René Thomas, cf C. Letellier et O. Vallée *in* J. Phys. A : Math. Gen. **36** (2003) 11229-11245. Ces braves gens parlent de l'ensemble des F-B Loop qualitatives définies par la structure de la matrice Jacobienne[1] ;

Bref, devant l'ampleur des développements droit devant pour arriver à produire des résultats physiques à partir des modèles maillés, et du peu de chemin parcouru, on peut conclure à un nouvel échec de l'unsecte[2].

5.3 Extensions au SLTC

L'expression[3] des effets-en-retour s'écrit plus généralement dans le cas de la réponse moyenne :

$$\varrho_{mean}(t,0) = \frac{1}{p}\sum_k <u_k| \int_0^t \Phi(t,\tau)A(\tau)\,|u_k> \varpi(\tau)\,d\tau \tag{156}$$

On voit dans l'intégrale apparaître $\partial_\tau\Phi(t,\tau)$ au signe près, si bien que l'intégration donne, avec une perturbation canonique $\varpi = 1$:

$$\varrho_{mean}(t,0) = \frac{1}{p}\sum_k <u_k|\,(I-\Phi(t,0))\,|u_k>= 1 - Tr\,\Phi(t,0) \tag{157}$$

résultat sympatique de par sa simplicité formelle.

Du côté des champs moyens, on peut généraliser (155) :

$$\begin{aligned}
\varrho_{\overline{\zeta}}(t,0) &= <c^\dagger_{1/p}|\,(I-\Phi(t,0))\,|b_u>= 1 - Tr\,\Phi(t,0) - \sum_{i\neq j}\Phi_{i,j}(t,0) \\
\varrho_{\overline{\zeta}}(t,0) &= \varrho_{mean}(t,0) - \sum_{i\neq j}\Phi_{i,j}(t,0)
\end{aligned} \tag{158}$$

Cette différence entre les deux effets mis en évidence ne pourra manquer d'avoir de grandes répercussions à la prise de moyenne temporelle, avec a priori $\lim_{\tau,(t-\tau)\to\infty} \varrho_{mean}(t,\tau)$ allant bon gré mal gré vers son Lyapunov, la dynamique de l'effet-en-retour sur champs moyens restant plus complexe.

On peut remarquer que l'on aura très généralement cette simplification de l'intégrale en applicant la méthode EPL de création de boucles de rétroaction, puisqu'on prétend pouvoir "sortir" de la grande matrice A les éléments sensibles pour construire le $|\,b>$, ce qui peut toujours se faire à partir de $A|\ u_k><\kappa_k\ |$, qui sélectionne la liste κ_k (formée d'éléments unité) des coefficients de la k$^{\text{ème}}$ colonne de A. Ceci génère du $|\,b>= A\,|\,u_k>$ et du $<c^\dagger|=<\kappa_k|$, d'où la simplification.

[1] Ils prétendent en particulier que Jacob aurait trouvé sa matrice en descendant une i-échelle (*à vérifier*).
[2] Ouf ! de justesse : mais «un petit échec pour l'unsecte, un grand pour l'Humanité ».
[3] Al1, Mars 2008.

5.4 Boucle et Gains

L'interprétation commune de l'unsecte concernant la sémantique du gain de la formule (94) consiste à dire qu'ouvrir la boucle de rétroaction revient à rendre les cellules insensibles aux variations du transfert, soit à annuler $\mid b >$. Ce n'est pas strictement exact, et pour le voir, on considère les deux ouvertures (amont ou aval) de la boucle du schéma 9. Dans le cas de gauche (aval), l'insensibilité du système au modèle des variations

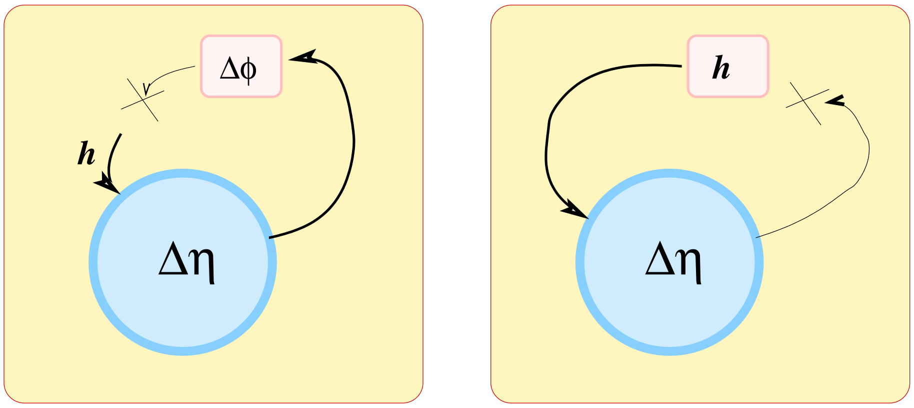

Fig. 9 – Deux modes d'ouverture de boucle.

de φ permet de remplacer ce modèle par une source exogène de perturbations. Dans le système du SLT (94), il faut donc appliquer directement la source ($\mid b > h$) aux cellules ($\mid b > \neq 0$). On a dans ce cas la réponse de φ à $h(\tau)$ en boucle ouverte :

$$\Delta^o \tilde{\varphi}(\tau) = < c^\dagger \mid \tau (I - A\tau)^{-1} \mid b > \tilde{h}(\tau) = \tilde{g}(\tau)\, \tilde{h}(\tau) \tag{159}$$

Le gain module ainsi la perturbation, et on a en boucle fermée

$$\Delta \tilde{\varphi}(\tau) = \frac{\tilde{g}(\tau)}{1 - \tilde{g}(\tau)}\, \tilde{h}(\tau) \tag{160}$$

c'est ce mode d'ouverture de boucle qui nous a permis de définir le gain par la formulation (101).

Dans le cas amont, c'est $< c^\dagger \mid$ qu'il faut annuler[1] : le modèle de φ est modifié et remplacé par $\Delta\varphi^o = h$, et on a

$$\Delta \tilde{\varphi}(\tau) = \frac{1}{1 - \tilde{g}(\tau)}\, \tilde{h}(\tau) \tag{161}$$

Les deux diagrammes correspondants sont alors donnés par la Fig 10.

Pour tenter une généralisation sur la dimension du gain, on prend à présent le point de vue du reste du système, ici côté cellule, et l'expression correspondant au diagramme de gauche est :

$$[I - \tau(A + \mid b >< c^\dagger \mid)] \Delta \tilde{\eta}(\tau) = \tau \mid b > \tilde{h}(\tau)$$

et en boucle ouverte ($< c^\dagger \mid = 0$) :

$$[I - \tau A] \Delta \tilde{\eta}_{ins}(\tau) = \tau \mid b > \tilde{h}(\tau)$$

si bien que

$$[I - \tilde{G}(\tau)]\, \Delta \tilde{\eta}(\tau) = \Delta \tilde{\eta}_{ins}(\tau) \tag{162}$$

où on a cette fois une matrice de gain

$$\tilde{G}(\tau) = \tau (I - A\tau)^{-1} \mid b >< c^\dagger \mid$$

[1] ce qui est sans inconvénient car le terme de droite de l'équation des cellules est nul.

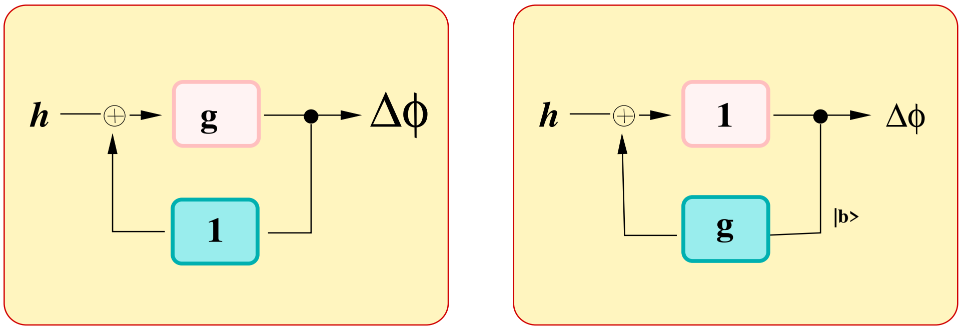

FIG. 10 – Les deux diagrammes associés aux deux ruptures de rétroaction.

qui est remarquable par le simple fait que $det(1 - \tilde{G}(\tau)) = 1 - \tilde{g}(\tau)$.

Le gain statique, c'est-à-dire quand $\mu = \dfrac{1}{\tau} \to 0$ est défini par $det(I - A^{-1}|\ b >< c^{\dagger}\ |) = 1 - < c^{\dagger}\,|\ A^{-1}\ |b>$.

Le premier petit temps caractéristique est donné par le facteur du terme en $-\mu^{n-1}$. On a

$$det(I - (\mu I - A)^{-1}|\ b >< c^{\dagger}\ |) = \frac{det(\mu I - A - |\ b >< c^{\dagger}\ |)}{det(\mu I - A)}$$

et on trouve que

$$\lim_{\tau \to 0} \tilde{g}(\tau) = \frac{< c^{\dagger}\,|b>}{1 - \tau Tr A}$$

en effet $Tr|\ b >< c^{\dagger}\ | = < c^{\dagger}\,|b>$.

Ainsi, si on veut caractériser une boucle de rétroaction, dans laquelle il ne sera peut-être ni évident, ni souhaitable, d'introduire un transfert scalaire, il faudra chercher ces caractéristiques à partir des invariants de la boucle, et leur trouver un sens physique convaincant.

Sinon, c'est Bill qui aura raison.

Invariants de boucle

L'exemple précédent servait d'illustration paradigmatique d'une boucle plus générale alternant éléments inertes et transferts vectoriels du système structuré par la recherche d'un mécanisme interprétatif.

Dans la fig. 11, on a orienté tous les transferts de la boucle pour laisser le triple choix de la coupure. Le système résiduel du schéma suppose que tout autre transfert du système originel a été éliminé – ce qui montre bien la difficulté de choisir une boucle pertinente en conservant les orientations des tranferts sélectionnés, ceci dit en passant. Il reste donc, pour les parties inertes

$$\begin{aligned}
[I - \tau A_a]\,\Delta\tilde{\eta}_a &= \tau\,|b>\Delta\tilde{\varphi} + . \\
[I - \tau A_b]\,\Delta\tilde{\eta}_b &= \tau\,B_b\,\Delta\tilde{\varphi}_1 + . \\
[I - \tau A_c]\,\Delta\tilde{\eta}_c &= \tau\,B_c\,\Delta\tilde{\varphi}_2 + .
\end{aligned} \tag{163}$$

où on a laissé vacantes les possibles perturbations. Pour les transferts :

$$\begin{aligned}
\Delta\tilde{\varphi} &= < c^{\dagger}\,|\,\Delta\tilde{\eta}_c + . \\
\Delta\tilde{\varphi}_1 &= C_1^{\dagger}\,\Delta\tilde{\eta}_a + . \\
\Delta\tilde{\varphi}_2 &= C_2^{\dagger}\,\Delta\tilde{\eta}_b + .
\end{aligned} \tag{164}$$

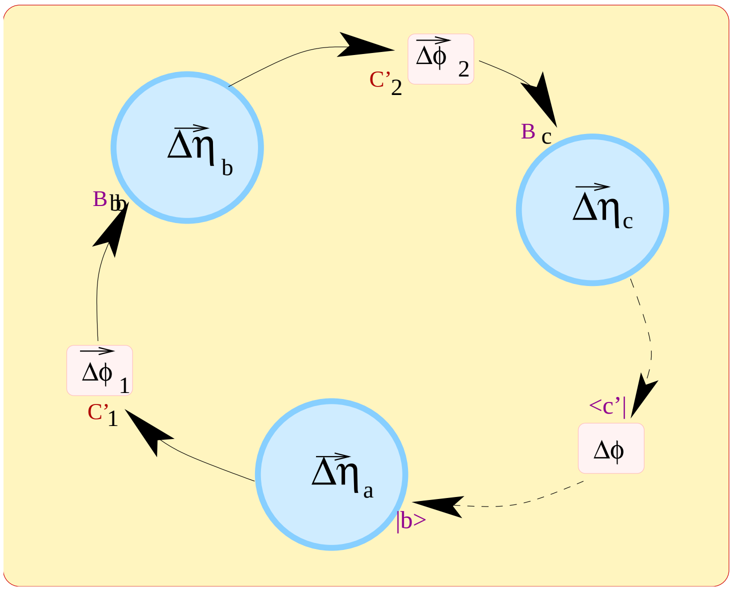

FIG. 11 – Boucle à trois gains.

Les trois coupures possibles mènent à trois gains – un scalaire et deux matrices :

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tau) &= \, <c^\dagger \,|\, \tau(I-\tau A_c)^{-1}B_cC_2^\dagger\tau(I-\tau A_b)^{-1}B_bC_1^\dagger\tau(I-\tau A_a)^{-1} \,|b> \\
\tilde{G}_1(\tau) &= C_1^\dagger\tau(I-\tau A_a)^{-1} \,|b><c^\dagger \,|\, \tau(I-\tau A_c)^{-1}B_cC_2^\dagger\tau(I-\tau A_b)^{-1}B_b \\
\tilde{G}_2(\tau) &= C_2^\dagger\tau(I-\tau A_b)^{-1}B_bC_1^\dagger\tau(I-\tau A_a)^{-1} \,|b><c^\dagger \,|\, \tau(I-\tau A_c)^{-1}B_c
\end{aligned} \tag{165}$$

Les éléments invariants de la boucle déjà répertoriés sont liés au théorème de jyg[1] a propos de l'invariance de $det(I+M)$ par permutation circulaire des matrices produisant M[2]. Il découle de cette propriété celle de l'invariance du spectre des matrices de gain (M et $sI+M$ ont mêmes V.P. et même spectre décalé ($\lambda_i \rightarrow \lambda_i + s$).

Bref et pour tourner court ce long papier, il va falloir construire un programme du genre ici proposé :
- compléter si possible les invariants ;
- utiliser ces invariants pour caractériser de façon la plus synthétique les propriétés de stabilité aux perturbations de mécanismes liés à la boucle ;
- idem sur une réponse dynamique ;
- généraliser les liens établis ci-dessus entre éléments propres et pôle(s) des $\tilde{G}_i(\tau)$;
- dans les cas d'absence de transfert scalaire, essayer d'utiliser les moyennes de composantes pour caractériser encore un gain scalaire de boucle ;
- et passer en non_$\mathcal{L}$ en suivant la démarche du b. ;

Par exemple, le déterminant de $\Phi(t,0)$ donne la manière dont un volume de perturbations $\prod_i \Delta\eta_i(t=0)$ varie le long de la trajectoire[3]*. rapport aux Lyapunov ;*

[1] Tarbes, Juillet 2003 ; c'était l'année d'après l'estocade mortelle sur le signe du binôme en fonction des racines.

[2] c'est beau le Français, quand même.

[3] à ce sujet, le wronskien est en standard dans la Mini_ker 101e, le résultat est la dernière colonne de **res.data**.

6 La normalisation

Ces considérations[1] proviennent de l'expérience numérique du fit d'un système pour le rendre périodique. On utilise par exemple un écart quadratique sur les états pour déterminer le premier retour, et, en utilisant le propagateur d'état Φ, on affine les C.I., mais aussi la période, etc (cf Floquet). Lorsque les composantes de l'état sont dans des rapports numérique de 1. à 10^6 et plus, on pense naturellement à utiliser une normalisation pour travailler avec un écart équilibrant le poids des variables (fonction **quad_dist_nrm**). On peut alors constater que le calcul des éléments propres avec LaPack fait un scaling ressemblant fort à la normalisation "naturelle". Cette observation, jointe au fait qu'un système (non-L) rendu périodique aura nécessairement un exposant de Floquet positif (sinon il ne pourrait être périodique), on est conduit à penser à utiliser ces normalisations[2] pour faire avancer le système.

Ainsi, on a successivement

$$\begin{aligned} \partial_t w_e^{-1}\Delta\eta &= w_e^{-1}A^\sharp w_e w_e^{-1}\Delta\eta \\ \partial_t w_e^{-1}\Phi w_e &= w_e^{-1}A^\sharp w_e w_e^{-1}\Phi w_e \end{aligned} \tag{166}$$

ceci hors TEF avec w_e construite en mettant le vecteur de normalisation sur la diagonale. Pour arriver au TEF, il suffit de faire de même avec les transferts, si bien que les matrices Jacobiennes deviennent

$$\begin{aligned} &H \to w_e^{-1}Hw_e, \quad B_b \to w_e^{-1}Bbw_f \\ &D \to w_f^{-1}Dw_f, \quad C^\dagger \to w_f^{-1}C^\dagger w_f \end{aligned} \tag{167}$$

A la sortie de **oker**, il suffit de calculer les variations en renormalisant, mais par contre dans un fit, on garde le propagateur reconditionné, à condition de calculer des écarts normalisés[3].

Voilà donc une possibilité à explorer dans l'avenir, en notant que cette métrique ayant pour but de régulariser le propagateur n'exclue pas, bien au contraire, d'utiliser la technique du **roductor** pour éviter la croissance trop rapide des normes de Φ.

[1] All, Avril 2007.
[2] déjà introduites, cf **oeta_norm, off_norm**.
[3] voir ce qui se passe pour les propagateurs partiels et divers.

7 L'irruption de la Réalité dans le modèle

Saluons ici l'entrée d'un monde étrange et pénétrant que l'unsecte fréquente le moins possible quand les contrats ne l'y pousse pas. Bienvenue donc au Phanéron.

7.1 Observabilité, contrôlabilité et filtre de Kalman

On peut mettre en exergue ici une question d'Olivier Talagrand, de Juin 1994 : « peut-on observer l'atmosphère à partir de l'océan, et réciproquement ? ».

On associe ici le filtre de Kalman à la notion d'observabilité dans la mesure où le filtre effectue une reconstruction de l'état d'une part, et pour introduire la notion de mesures bruitées par ailleurs, qui nous a jusqu'alors échappé. Et comme, de plus, le filtre a pour objet de commander le système à coller aux mesures, la notion de contrôlabilité y est nécessairement convoquée[1].

La théorie classique d'observabilité des systèmes linéaires pose le problème de l'estimation d'une trajectoire des états antérieure à une série temporelle de mesures d'observables – en nombre restreint – du système. Son extension dans le cadre des systèmes non-$\mathcal{L}$ selon notre méthode du SLTC nous dirige en fait plutôt vers l'assimilation d'une portion de trajectoire.

Cependant, en associant l'état du système linéaire à sa variation sur le SLTC, on pourra envisager quelques problèmes à revisiter dans ce cadre :

- supposons qu'un système, stabilisé par une rétroaction, se trouve modifié par une cause externe (Katrina a rompu une voie de rétroaction). On peut poser le problème du remplacement provisoire de la voie par une commande restaurant la stabilité originelle. Cette approche pourrait conduire à une nouvelle définition du gain liée à la contrôlabilité.
- dans quelles conditions d'observation l'effet d'une rétroaction est-elle observable ?
- quel appareil de mesure permettrait d'estimer un grand Lyapunov du système ?

On va commencer par résumer l'approche de Kalman pour bien assimiler son traitement du bruit.

L'approche suppose d'abord que le modèle d'un système "réel" est correct – c'est-à-dire que les matrices Jacobiennes sont exactes dès que l'état est connu. Ce que le système réel a en supplément, c'est une source de bruit (blanc dans le cadre strict) avec des corrélations simples. Le premier objectif du filtre est d'atteindre la meilleure estimation de l'état courant du modèle en fonction des aléas (c'est la partie **reconstruction** ou filtre). Ensuite, il s'agit de calculer une "matrice de gain" permettant au modèle d'utiliser au mieux la série de mesures antérieures pour prédire son évolution (c'est la partie **innovation**).

Le modèle est décrit d'emblée dans le cadre du TEF, avec des "observables" μ, que l'on définit comme des transferts supplémentaires ayant la particularité de ne pas provoquer de matrice B ou D (comme les "probes" de ZOOM). Il est peut-être utile de leur permettre d'être entre-elles couplées par une matrice D. On pose donc

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\eta(t) = g(\eta(t),\varphi(t),h^\eta(t)) \\ \varphi(t) = f(\eta(t),\varphi(t),h^\varphi(t)) \\ \mu(t) = p(\eta(t),\varphi(t),\mu(t)) \end{array}\right. \tag{168}$$

Le modèle du "Monde réel" est censé répondre au même modèle, mais bruité (modèle de Kalman) :

$$\left\{\begin{array}{l} \partial_t\breve{\eta}(t) = \breve{g}(\breve{\eta}(t),\breve{\varphi}(t),\breve{h}^\eta(t),U) \\ \breve{\varphi}(t) = \breve{f}(\breve{\eta}(t),\breve{\varphi}(t)\breve{h}^\varphi(t),V) \\ \breve{\mu}(t) = \breve{p}(\breve{\eta}(t),\breve{\varphi}(t),\breve{\mu}(t),\breve{h}^\eta(t),\breve{h}^\varphi(t)) + W \end{array}\right. \tag{169}$$

[1]d'ailleurs, Luenberger affirme que ces notions d'observabilité et de contrôlabilité ont été introduites par Kalman lui-même.

Le vecteur $\breve{\mu}$ représente des mesures (bruitées) des observables, et U, V et W sont des variables aléatoires centrées telles que

$$Esp(|\ V, U, W >< V^\dagger, U^\dagger, W^\dagger\ |) = \begin{bmatrix} Q & T & S \\ T^\dagger & O & L \\ S^\dagger & L^\dagger & R \end{bmatrix} \tag{170}$$

expression qui définit l'espérance mathématique des variances–covariances du bruit, sans corrélation temporelle[1]. On suppose que les séquences U, V, W sont indépendantes du passé du système $\breve{\eta}, \breve{\varphi}, \breve{h}, \breve{\mu}(\tau), \tau < t$, ainsi que de la commande $h(t)$.

On introduit à présent les variables-écart $x = \breve{\eta} - \eta$, $z = \breve{\varphi} - \varphi$ et $y = \breve{\mu} - \mu$, de manière à travailler sur le SLTC et linéariser le problème. En dérivant le SLTC de chaque modèle et par soustraction du modèle au réel, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \partial_t x \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ C^\dagger & D & 0 \\ C_\mu^\dagger & D_{\mu\varphi} & D_\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} MV \\ NU \\ W \end{bmatrix} \tag{171}$$

On voit que le SLTC obtenu est basé sur une hypothèse plus forte que d'habitude, car il est ici supposé que le modèle "colle" suffisamment au réel pour que les deux modèles partagent le même, et ceci malgré le bruit. Il s'agira de vérifier que filtre n'invalide pas cette hypothèse. Vu de la *Physis*, on inclue dans U, V les phénomènes non pris en compte ou négligés ou inconnus dans le modèle, et l'amplitude M, N sera choisie en fonction de la confiance que l'on accorde au modèle. Le bruit de mesure W inclura à la fois la confiance dans le modèle de l'appareillage de mesure en plus des erreurs de mesure elles-mêmes.

Pour décrire le principe du filtre de Kalman sans trop s'encombrer de symboles, on raisonne d'abord hors TEF.

Hors TEF

La solution pour que le filtre s'ajuste au modèle de Kalman est cherchée sous la forme

$$\begin{cases} \partial_t \Delta\eta(t) = A(t)\Delta\eta + K(t)(\breve{\mu} - \mu)(t) \\ \Delta\mu(t) = C_\mu^\dagger(t)\Delta\eta \end{cases} \tag{172}$$

sous cette dernière forme, le SLTC du modèle est classique, et est associé à une variation de K par exemple, matrice de gain qui porte sur la dernière information reçue de la mesure, sous la forme écart modèle–mesure (dit vecteur **innovation**). Dit autrement, on suppose que $K(\tau), \tau < t$ a été optimalisée, et qu'on a déjà le meilleur modèle passé (c'est-à-dire la meilleure séquence de gains). On cherche juste à optimaliser l'évolution du modèle en utilisant au mieux la dernière mesure $\breve{\mu}(t)$. Le vecteur u est classiquement associé à une commande ou source ou forçage externe, que l'on suppose connue.

Deux problèmes se posent conjointement, le premier concernant l'évolution de la matrice P de var-covar de $|\ x >< x\ |$, qui dépend de l'incertitude de mesure et de la correction tentée, le deuxième étant d'obtenir la meilleure correction possible.

L'optimum est obtenu en cherchant à minimiser l'espérance de la norme euclidienne de l'évolution de l'erreur de modèle, fonction de la dernière information (vecteur innovation). Il s'agit d'une covariance d'ensemble, c'est-à-dire instantanée mais prenant en compte l'ensemble des réalisations possibles des variables aléatoires. On va donc chercher $K(t)$ qui minimise l'espérance $Esp(< x\,|\,x >)$, avec :

$$\partial_t x = Ax + MV - K(C_\mu^\dagger x + W) \tag{173}$$

[1] plus précisément, on suppose que U, V, W sont les "dérivées d'un processus de Wiener".

SLTC où seules apparaissent des variables aléatoires, soit encore, en posant $A^s = A - KC_\mu^\dagger$:

$$\partial_t x = A^s x + MV - KW = A^s x + F \tag{174}$$

où on a encore posé $F = MV - KW$ pour alléger le développement conduisant à la détermination de P. On va avec le même souci supposer que $x(t)$ est centrée. Alors, la solution de (174) est classiquement

$$x(t) = \Phi(t,0)x(t_0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)F(\tau)d\tau \tag{175}$$

Ainsi, l'écart $x(t)$ devrait ne pas croître si la matrice $A^s = A - KC_\mu^\dagger(\tau)$ est stable. $\Phi(t,\tau)$ est comme d'hab défini par $\partial_t\Phi(t,\tau) = A^s\Phi(t,\tau)$. La matrice de var-covar d'écart entre états est donnée par

$$\begin{aligned} Esp|\ x >< x\ |(t) \quad &= \quad \Phi(t,0)P(0)\Phi^\dagger(t,0) \\ &\quad + \int_0^t \Phi(t,\tau)Esp\,|F(\tau)\!>\!d\tau <\!x(0)|\ \Phi^\dagger(t,0) \\ &\quad + \Phi(t,0)\ |x(t_0)\!>\int_0^t Esp <\!F(\tau)|\ \Phi^\dagger(t,\tau)d\tau \\ &\quad + \int_0^t d\tau \int_0^t ds\ \Phi(t,\tau)Esp\,|F(\tau)\!>\!<\!F(s)|\ \Phi^\dagger(t,s) \end{aligned} \tag{176}$$

et avec l'hypothèse d'absence de corrélation temporelle entre les sources de bruit (Esp $|\ F(\tau) >< F(s)\ | = Z(\tau)\delta(\tau - S)$, il reste

$$\boxed{P(t) = \Phi(t,0)P(0)\Phi^\dagger(t,0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)Z(\tau)\Phi^\dagger(t,\tau)\,d\tau} \tag{177}$$

où on a posé $Z = Esp(|\ F >< F\ |)$, qui dépendra du temps en général. Il ne reste plus qu'à dériver P :

$$\partial_t P(t) = A^s P + P A^{s\dagger}(t) + Z(t) \tag{178}$$

pour trouver l'équation dite de Lyapunov[1]. Il ne reste alors plus qu'à revenir aux symboles du modèle initial (173) :

$$\partial_t P(t) = (A - KC_\mu^\dagger)P + P(A^\dagger - C_\mu K_\mu^\dagger) + Esp|\ MV - KW >< MV - KW\ | \tag{179}$$

qui donne finalement

$$\boxed{\begin{aligned} \partial_t P(t) \quad = \quad & (A - KC_\mu^\dagger)P + P(A^\dagger - C_\mu K_\mu^\dagger) \\ & + MQM^\dagger + KRK^\dagger - MSK^\dagger - KS^\dagger M^\dagger \end{aligned}} \tag{180}$$

ce qui donne bien les formules habituelles. *Le cas traité dans Mini_ker correspond en gros à cette équation mais avec $S = 0$. De plus, les mesures n'impactent pas directement l'évolution de P, qui est brutalement remis à jour à chaque rencontre d'un évènement de mesure. Faudra discuter de cet aspect avec Pat.*

La matrice A est prise comme la A^{spha}. Pat a choisit une écriture de P sous forme vecteur, entraînant une redistribution des matrices en facteur, puis d'une intégration temporelle suivant la méthode en pseudo Crank-Nicolson du TEF. Note de Mars 2006 : ce n'est pas la bonne solution, voir en section 7.2.

[1] que ceux qui n'apprécient pas l'intérêt du propagateur pour aboutir à ce résultat se dénoncent zirconnement.

Il reste à déterminer le gain optimal $K(t)$ pour accomplir cette introduction réduite au filtre de Kalman [1]

On veut choisir $K(t)$ minimisant $Esp{<}x\,|\,x{>} = TrP$, qui reste positive. Il suffit de minimiser depuis le début $Tr\partial_t P$. Pour ceux qui comme moi, voient mal ce que ça peut donner, commençons par établir la formule générale suivante pour un produit de matrices de dimension $n \times n$, en utilisant les vecteurs de la base euclidienne $|e_i{>}$:

$$\begin{aligned} TrBA &= \sum_{i=1}^{n} {<}e_i\,|\,BA\,|\,e_i{>} \qquad \rightarrow \\ \partial_{a_{jk}} TrBA &= \sum_i \sum_l b_{il}\,\partial_{a_{jk}} a_{li} \\ (\nabla_A TrBA)_{kj} &= b_{kj} \end{aligned} \tag{181}$$

où on a par convention posé la transposée du gradient (c'est-à-dire par lignes) et donc :

$$\nabla_A TrBA = B \tag{182}$$

Pour appliquer cette opération à (180), on la réécrit en ordonnant en puissances de K

$$\begin{aligned} \partial_t P(t) &= KRK^\dagger - (KC_\mu^\dagger P + PC_\mu K^\dagger) - (KS^\dagger M^\dagger + MSK^\dagger) \\ &\quad +(AP + PA^\dagger) + MQM^\dagger \end{aligned}$$

et enfin :

$$\nabla_K [Tr\partial_t P](t) = 2(K(t)R - P(t)C_\mu(t) - MS) \tag{183}$$

dont l'annulation fournit la matrice optimale de gain

$$\boxed{K(t) = (P(t)C_\mu(t) + MS)R^{-1}} \tag{184}$$

La régularité demandée de R exige l'existence d'une source de bruit indépendante pour chaque mesure scalaire.

Miniker : ATTENTION *Après remplacement de K par sa valeur dans (183), et son intégration à la TEF, on aura une forme* $dP = AdP + dPA^\dagger + S$, *avec* dP *et* S *symétriques. Si on intègre* $dX = AdX + \frac{1}{2}S$, *il suffit de prendre* $dP = dX + dX^\dagger$, **NON**[2] *?*

Cette remarque purement algorithmique peut amorcer une remontée en posant l'interprétation de cette matrice semi-P, d'où le paragraphe suivant.

7.2 Liens inoüis entre Kalman et les propagateurs, et intégration du système (Février 2006)

Il y a une règle à suivre pour obtenir sans coup férir la forme TEF, et il faut abandonner l'explication par les trapèzes de l'intégration des EDP du TEF. Il faut suivre les principes du papier déjà ancien "Cellules généralisées" et approximer localement la solution générale donnée par application des propagateurs. Ça parait artificiel pour les cellules, mais ici ça devient indispensable. Ce qui cloche quand on applique un pseudo Crank-Nicolson pour intégrer (180), c'est que la variable est déjà quadratique. Il faut alors repartir de la forme intégrale (177, avec $\Phi(t+\delta t, t) \simeq \exp(A(t)\delta t)$ entre t et $t + \delta t$:

$$P(t+\delta t) = \exp(A\delta t)P(t)\exp(A^\dagger \delta t) + \int_t^{t+\delta t} \exp(A\tau)Z\exp(A^\dagger \tau)\,d\tau \tag{185}$$

[1] On aurait en effet pu introduire la moyenne de $x(t)$ et la trimballer dans des termes qui s'annulent dans (177), mais aussi, et c'est un peu plus délicat, montrer l'indépendance assumée entre $x(t)$ et l'ensemble des mesures et des commandes passées, mais également indépendant de l'état reconstruit $\eta(t)$, etc.

[2] pas vraiment, la dissociation est bien valable en DP, mais dépend du scéma d'intégration, cf section 7.2.

l'étape suivante, qui correspond au TEF bien construit, est d'utiliser une approximation de Padé de l'exponentielle : $\exp(At) \simeq \dfrac{I+0.5At}{I-0.5At}$ qui est, en accord avec le TEF, une approximation à l'ordre 2. Oublions d'abord l'intégrale de (185), on calcule, en posant $\tau = 0.5\delta t$ pour alléger.

$$(I-\tau A)(P(t)+dP)(I-\tau A^\dagger) = (I+\tau A)P(t)(I+\tau A^\dagger) \tag{186}$$

on remarque que cette forme assure à la fois la symétrie et la positivité de $P+dP$. Après élimination et regroupement, on obtient :

$$dP = [I-\tau A]^{-1}[A(t)P(t)+P(t)A^\dagger(t)]\,[I-\tau A^\dagger]^{-1}\,\delta t \tag{187}$$

Il est à noter que le terme en δt^2 s'élimine, ce qui assure que l'on conserve l'odre 2 du Padé.

Après ce succès incontestable, il faut enfin arriver à un échec difficilement supportable, qui concerne le terme intégral de (185), malgré une heure de recherches au tableau avec Pat[1]. En attendant l'inspiration qui ne saurait manquer à l'unsecte, on peut préconniser deux formes au choix, soit ajouter bêtement Z au double terme en P, soit : $[I+\tau A]\,Z\,[I+\tau A^\dagger\,]$. Dans les deux cas $P+dP$ conserve les propriétés de P, et dP est symétrique. Le plus simple étant le mieux, on arrive donc à l'équation d'évolution de la matrice de covariance des états :

$$\boxed{dP = [I-\tau A]^{-1}\,\Big[A(t)P(t)+P(t)A^\dagger(t)+Z\Big]\,\,[I-\tau A^\dagger]^{-1}\,\delta t} \tag{188}$$

qui est LA forme TEF de l'EDP (178).

Avec le schéma antérieur de Pat (et moi d'ailleurs, nul n'est parfait), dP restait bien symétrique, mais la positivité de $P+dP$ n'était pas assurée, ce qui sans tenir compte de l'aspect quadratique de P, peut surprendre, avec un Crank-Nicolson à l'ordre 2 ; mais c'est peut-être dans l'élimination du terme en δt^2 que réside l'avantage. Pat a depuis (Mars) essayé cette nouvelle forme hors - TEF bien sûr, c'est-à-dire avec la matrice A^{spha}, et ça marche mieux en effet (du point de vue de la conservation de la positivité).

Cela prouve en tout cas simplement, comme on en est tous convaincus, que les formes intégrales sont physiques et sans pareilles, alors que la forme EDP est un artifice mathématique. On retrouve pour l'aspect temporel ici en cause l'avantage indiscutable de la formulation par les Volumes Finis pour l'aspect spatial. Ah, si les mécaniciens français le savaient, que d'erreurs et perte de temps évitées ! et celà malgré les efforts inspirés de R. Temam.

a. premier essai de TEFisation

Disons d'emblée que Woodburryser (188) permet certes d'introduire les matrices du TEF, mais sans emboitement évident. L'espoir réside dans les propriétés des covarMx. On repart de (186), c'est-à-dire sans source[2]. On calcule un Cholevsky de $P = XX^\dagger$.

On cherche dX tel que $P+dP = (X+dX)(X^\dagger+dX^\dagger)$. Si maintenant on résoud le système $(I-\tau A)(X+dX) = (I+\tau A)X$, on aura bien

$$(I-\tau A)\,(X+dX)(X^\dagger+dX^\dagger)\,(I-\tau A^\dagger) = (I+\tau A)XX^\dagger(I+\tau A^\dagger)$$

[1]voir quand même Penland Matrosova J.of C. 94, qui utilisent la relation Fluctuation-Dissipation en forçage bruité stationnaire qui permet de remplacer Z par $-(AP+PA^\dagger)$, et d'obtenir comme intégrande la dérivée temporelle de $\exp(-A\tau)P\exp(-A^\dagger\tau)$, **à creuser**, al1 le 22/04/09. Non, je vois pas le 13 mai 2009, mais on peut décomposer les A en $\sum_i \lambda_i|\;e_i><f_i\;|$, ce qui dans la double somme permet d'intégrer les $\exp(\lambda_i+\bar{\lambda}_j)\tau$; numériquement ça semble laborieux, et je ne vois guère sur la forme intégrée d'identification possible d'une forme compacte, les $\frac{1}{\lambda_i+\lambda_j}$ mélangeant les deux exponentielles de matrice.

[2]je trouve pas avec.

identique à (186). On peut soustraire $P = XX^\dagger$ de chaque coté, ce qui donne *in fine* une détermination de dP :

$$dP = XdX^\dagger + dXX^\dagger + dXdX^\dagger$$

le système à résoudre est maintenant simplifié en X et devient

$$\begin{cases} (I - \tau A)dX - \tau BdY = \tau AX \\ dY = C^\dagger dX \end{cases}$$

le symbole dY étant pas choisi juste pour faire joli, car avec un τBY en plus à droite, ce serait le système du propagateur d'état, et on saurait même où mettre la matrice D ! Ce qui suggère fortement une possibilité d'introduire la source Z, mais là, je craque parce que le Cholevsky de la somme n'étant pas la somme des Chauds-les-Skis, on peut vite se casser une patte à trois canards grippés, et j'ose pas imaginer les conséquences.

b. comment la source mène à rupture

Le problème de la source Z est que son adjonction à $P \to P + Z\delta t$ va introduire par produit des transposées les termes croisés $PZ^\dagger, P^\dagger Z$ qui n'ont guère l'intention d'être nuls. Maintenant, à reconsidérer notre Cholevsky $P = XX^\dagger$, on est conduit à une interprètation plus large : et si, au lieu des n vecteurs-colonnes de X on suivait carrément un nombre p d'écarts $\mid x_i >$ représentants un emsemble aux propriétés statistiques données par P ? Il suffirait alors de tirer les bruits par Monte-Carlo avec les bonnes propriétés ? Eh bien Ô lecteur attentif, nous venons ensemble de ré-inventer une idée de Geir Evensen, citoyen de Norvégie, qui a baptisé cette approche en 1994 de **Ensemble Kalman Filtering** (EnsKF)[1]. Les travaux théoriques qui ont été menés depuis lors ont aboutis à n'y trouver que des avantages, particulièrement pour les systèmes non-L.

En ce qui nous concerne, nous nous retrouvons donc en plein TEF sans acrobaties, et on va pouvoir repartir du système (171) directement, ce que nous ferons au paragraphe 7.7, après quelques digressions.

c. une solution pour la MK2 ?

Le problème est d'éviter le calcul de Kalman par la A^{spha} ; il s'agit plus d'emboîter l'avance de P que de véritablement TEFiser — tant que ça nous échappe en tout cas. En reconsidérant LA solution (188), on propose[2] :

- on Cholevskyze $P = XX^\dagger$ et $Z = TT^\dagger$;
- on résoud les systèmes
  1. $(I - \tau H^\sharp)J = H^\sharp X$;
  2. $(I - \tau H^\sharp)K = X$;
  3. $(I - \tau H^\sharp)L = T$;
- alors on $\delta P = [JK^\dagger + KJ^\dagger + LL^\dagger]\,\delta t$;

qui donne le même développement en assurant la symétrie, mais pas la positivité — pas plus que la (188) d'ailleurs, ni moins.

En effet, on a à calculer dP à partir de trois termes (H est $H^\sharp$ et $K' = K^\dagger$) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\delta t} dP &= \overbrace{[I - \tau H]^{-1} HX}^{\text{J}}\,\overbrace{X^\dagger\,[I - \tau H^\dagger]^{-1}}^{\text{K'}} + \overbrace{[I - \tau H]^{-1}\,X}^{\text{K}}\,\overbrace{X^\dagger H^\dagger\,[I - \tau H^\dagger]^{-1}}^{\text{J'}} \\ &\quad + \overbrace{[I - \tau H]^{-1}\,T}^{\text{L}}\,\overbrace{T^\dagger\;[I - \tau H^\dagger]^{-1}}^{\text{L'}} \\ &= JK^\dagger + KJ^\dagger + LL^\dagger \end{aligned} \tag{189}$$

[1] je dois cette découverte bibliographique à Pat bien sùr.
[2] Al1, 8 Mai 2008.

On peut dès lors TEFiser chaque système et résoudre en une seule fois le système linéaire des $3n$ colonnes classiquement, non ? Le premier système devient par exemple :

$$\begin{bmatrix} I-\tau H & -\tau B_b \\ -C^\dagger & I-D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J \\ J_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HX \\ \frac{1}{\tau}C^\dagger X \end{bmatrix} \tag{190}$$

d'où l'élimination de J_φ redonne bien la matrice $A^\sharp = A + B(I-D)^{-1}C^\dagger$ à gauche et $H^\sharp = H + B_b(I-D)^{-1}C^\dagger$ à droite.

remarque Comme Pat me l'a fait remarqué[1], il n'est fait aucune mention à ce que le Cholesky, il factorise avec des matrices triangulaires (X). Dans les précédents algorithmes, rien ne permet d'assurer la conservation de cette forme. En fait, j'avais plutôt en tête une SVD (encore une fois), qui permet alors d'affirmer que — posant $P = Uw^2U^\dagger$ — les vecteurs colonnes $w_i \mid u_i >$ fournissent les directions principales (les EOFs) de l'ensemble des écarts aléatoires à la moyenne, avec une variance donnée par w_i^2. Il est ainsi Tantalant de faire avancer les fluctuations significatives seulement, et de reconstruire $P(t+\delta t)$ ensuite. Il me semble que le seul problème est de définir une source de bruit le long de chaque axe ? Qu'en-dis-tu Patrice, ça doit bien être évoqué dans la pratique de l'EnsKf ? En tout cas, je défendrai ce point de vue au prochain Zircon : il me semble que les Aléoutiens pourraient faire l'effort de décoller des couches mathématico-numériques où ils ont (probablement) bien du mal à définir bruits et matrices procurant du sens, et à définir ces bruits le long de directions singulières dans l'espace tangent. Ce qui interpelle encore sur une articulation avec l'analyse en Floquet ou analogue.

d. L'approche de Nicolas Bouleau

Comme on l'a vu *de visu* au Zircon de l'applaudie, l'introduction de variables aléatoires induit — selon N. Bouleau — un biais de la variable, en provenance des non linéarités propageant la variance. On va voir comment appliquer ce point de vue au TEF.

Soit donc, et d'abord hors TEF pour raccourcir, l'évolution des états $\partial_t\eta = g(\eta)$. La variable est aléatoire, de matrice de var-covar P. On va estimer l'impact de la variance sur la vel.

On considère l'anomalie x autour de la trajectoire moyenne, et on développe au deuxième ordre avant de prendre la moyenne d'ensemble :

$$\partial_t x_i = a_{ij}x_j + \frac{1}{2}\sum_k \partial_k a_{ij}\; x_j x_k \tag{191}$$

où on a explicité les coefficients de A dérivés par rapport à la composante k de η[2]. On constate que la prise de espérance introduit en effet une source de vel supplémentaire, que l'on peut alors inclure dans la vel de l'état pour conserver une moyenne nulle aux anomalies — c'est le biais dont traite N. Bouleau. On peut constater que c'est la k$^{\text{ième}}$ ligne (ou colonne) de P qui intervient.

Alors, en passant au TEF, on aura pour chaque source S_k :

$$S_k = \left[H_k + B_k(I-D)^{-1}C^\dagger + B(I-D)^{-1}D_k(I-D)^{-1}C^\dagger + B(I-D)^{-1}C_k^\dagger\right] \mid p_k > \tag{192}$$

Et ainsi, avec ou sans emboîtement, on calculera dans une boucle sur k les matrices en utilisant la dérivation multiple : $H_k = \partial_\eta\partial_k g(\eta,\varphi)$, ou $C_k^\dagger = \partial_\varphi\partial_k f(\eta,\varphi)$, etc. Puis il faudra avec la navette résoudre successivement :

---

[1] communication personnelle du 28 mai 2008.

[2] On propose de noter ça $\partial_t x = Ax + \frac{1}{2} < x \mid \nabla_x A \mid x >$, chaque composante i$^{\text{ème}}$ du vecteur $\partial_t x$ est $< A_i | x > + < x | \, (|\nabla_x >< A_i|) \, | x >$.

1. $(I-D)u_k = C^\dagger \; |p_k>$;
2. $(I-D)v_k = C_k^\dagger \; |p_k>$;
3. $(I-D)w_k = D_k u_k$;

chaque terme source alors sera donné par :

$$S_k = H_k \; |p_k> + B_k u_k + B[v_k + w_k] \tag{193}$$

Si bien que finalement l'évolution à la TEF sera augmentée :

$$(I - \frac{1}{2}\delta t H)\delta\eta + B\delta\varphi = [f + \frac{1}{2}\sum_k S_k]\delta t \tag{194}$$

et sans changement pour les transferts. Ceci devrait accompagner toute famille Kalman, mais on pourrait déjà éprouver ce calcul dans la **102**, et le fit effectué par Pat serait l'exercice idéal ! Confirmation de l'intéressé acquise.

Ceci dit, on peut voir le système augmenté (191) comme comportant une source de bruit tendant à biaiser l'évolution de la moyenne, avec un impact sur le SLTC :

$$\Delta x = \Phi(t,0)x(0) + \int_0^t \Phi(t,\tau)\left[f(\tau) + \frac{1}{2}\sum_k S_k\right]d\tau \tag{195}$$

mais peut-on alternativement modifier l'évolution du propagateur pour débiaiser ? Il faudrait alors modifier $A \to A + \nabla_x y$, avec y laissé en provision, et le système deviendrait :

$$\partial_t x_i = a_{ij}x_j + \frac{1}{2}\sum_k \partial_k a_{ij}\; x_j y_k \tag{196}$$

en donnant un sens à y pour que $Esp|\; y >< x \;| = Esp|\; x >< x \;|$ mais avec $< y \;|\; \nabla_x A$ représentant l'énervement de A pour que $|\; x >$ sorte du biais. Ou encore, pourquoi ne pas minimiser la variance, ce que l'on obtiendrait avec une matrice de gain optimale de Kalman ? Comment évaluer ces approches[1] ? Plus généralement, l'approche de N. Bouleau est-elle *physiquement* pertinente, sachant que l'effet des non-linéarités porte à la fois sur la moyenne et la dénormalisation des distributions ? N'est-il pas fécond d'envisager ici une **évolution de la médiane** ?

7.3 Le théorème de fluctuation-dissipation

Il s'agit du lien entre matrice de var-covar et propagateur[2]. On examine la corrélation retardée $|\; \Delta\eta(t) >< \Delta\eta(0) \;|$; dans le cas des faibles amplitudes de fluctuation, on peut écrire

$$|\; \Delta\eta(t) >< \Delta\eta(0) \;| = \Phi(t,0)|\; \Delta\eta(0) >< \Delta\eta(0) \;| \tag{197}$$

et ainsi déterminer $\Phi(t,0)$. Le théorème précédent est démontré par C.E.Leith (in JAS 32, 1975) pour un système à deux intégrale quadratiques de mouvement (mettons, énergie et enstrophie) bien sùr pour de faibles perturbation et pdf normales. L'argument le plus clair sur la validité du théorème pour le climat tiend au fait qu'un modèle d Markov d'ordre 1 est un bon prédicteur du climat. Or un tel modèle est généré exactement par un équation de Langevin ayant une simple viscosité, celui vérifiant strictement le théorème. Ce problème est posé par Cécile Penland ref ... Ce qui pose d'emblée le problème de l'emboîtement de Φ ou décomposition lent-rapide si on ne considère que des grandeurs "significatives" à corrèler ? Leith considère d'ailleurs que les variables à corrèler sont directement issues d'une analyse en EOF. Et revoir à cette question la SVD de Floquelec (cf 4.1).

L'approche de Cécile Penland [3]

[1] questions du 15 mai 2009.
[2] Kerséoc'h le 15/09/2009.
[3] elle dit : voir Kloeden,P. and Platen,E. pour leur Numerical Solutions of SDEs, Springer Verlag, 292p.

7.4 Contrôlabilité et SLTC

a. Introduction via la détermination de paramètres

On peut considérer que la détermination de paramètres minimisant un coût comme un cas particulier de commande, l'objectif portant sur le vecteur d'état ; il s'agit donc bien d'un problème de contrôlabilité.

On se fixe l'objectif de modifier l'état final $\eta(T) \to \eta(T) + x_1$, en modifiant le vecteur des paramètres $\varpi \to \varpi + \Delta\varpi$.

Le SLTC est donné par

$$\partial_t \begin{bmatrix} \Delta\varpi \\ \Delta\eta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varpi \\ \Delta\eta(t) \end{bmatrix} \tag{198}$$

On connait la solution en avant, donnée par les propagateurs $\Phi(T,0), \Psi(T,0)$ tels que

$$\partial_t \Phi(t,0) = A\Phi(t,0)$$
$$\Psi(t,0) = \int_0^t \Phi(\tau,0)B(\tau)d\tau$$

la solution en arrière du SLTC donne :

$$\begin{bmatrix} \Delta\varpi \\ \Delta\eta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ \Psi(T,0) & \Phi(T,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Delta\varpi \\ \Delta\eta(T) \end{bmatrix}$$

soit, en effectuant l'inversion et avec la valeur cherchée $\Delta\eta(T) = x_1$:

$$\begin{bmatrix} \Delta\varpi \\ \Delta\eta(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -\Phi^{-1}\Psi & \Phi^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\varpi \\ x_1 \end{bmatrix} \tag{199}$$

Il semble alors possible de rechercher l'optimum en $\Delta\varpi$ qui minimise $<\Delta\eta\,|\,\Delta\eta>$ initial. Mieux, on sait que le choix des C.I. en η est soluble, car par construction Φ est d'ordre n, ce qui mène à un résidu nul par contrôle des C.I. Par contre, l'ordre de Ψ dépend de la matrice $B(\tau)$. On aura donc un résidu – équivalent à la nécessité de modifier des C.I. – suivant le degré de contrôlabilité du système, mesuré par l'ordre de $\Psi(T,0)$. On peut même proposer un critère de contrôlabilité du système par des paramètres basé à la fois sur la dimension de l'espace vectoriel des C.I. nécessaire à l'annulation du résidu final et sur $<\Delta\eta_0\,|\,\Delta\eta_0>$.

On a finalement

$$\Delta\eta(0) = \Phi^{-1}\,|x_1> -\Phi^{-1}\Psi\,|\Delta\varpi>$$

et le résidu est donné par

$$\begin{aligned} <\Delta\eta^2(0)> \;=\; & <\Delta\varpi|\,\Psi^\dagger[\Phi\Phi^\dagger]^{-1}\Psi\,|\Delta\varpi> \\ & -\; 2<x_1|\,[\Phi\Phi^\dagger]^{-1}\Psi\,|\Delta\varpi> \\ & +\; <x_1|\,[\Phi\Phi^\dagger]^{-1}\,|x_1> \end{aligned}$$

dont le minimum en $\Delta\varpi$ est obtenu pour

$$\Psi^\dagger[\Phi\Phi^\dagger]^{-1}\Psi\,|\Delta\varpi>= \Psi^\dagger[\Phi\Phi^\dagger]^{-1}\,|x_1> \tag{200}$$

L'analogie avec les Moindres Carrés est patente, avec $\Psi \leftrightarrow \nabla_\varpi M$, et $\Phi\Phi^\dagger$ qui remplace la matrice de covariance P (ou V dans le texte Estimation). Dans le cas où x_1 est un écart-type final, cette matrice représente d'ailleurs la var-covar d'incertitude sur les C.I. On peut aussi faire la remarque que l'objectif du x_1 final est équivalent à celui d'un minimum de $J = \dfrac{1}{2}(\eta(T) - \eta_1)^2$, qui conduit à initialiser $\nabla_\eta J$ par $x_1 = \eta(T) - \eta_1$. Ceci suggère que pour passer au problème classique de la minimisation paramétrique d'un écart quadratique, on puisse se fixer comme objectif chacun des écarts $\eta(t_i) - \mu_i$ de l'état courant avec une série de mesures μ_i, et appliquer une simple somme à la formule (200) pour trouver la solution (d'une itération en $\Delta\varpi$).

Remarque pour ceux qui restent dans l'ombre en trouvant encumouchesque[1] *cette approche de la détermination paramétrique. Classiquement, la valeur optimale de $\Delta\varpi$ est celle qui minimise, par exemple, le résidu final. Ici, on propose un critère portant sur un résidu initial, le final étant nul pour un SLTC régulier. On peut qualifier cette approche de Lagrangienne, dans la mesure où on ramène chaque écart en $t > 0$ à la modification des C.I. nécessaire pour le combler. On va voir l'intéret de cette approche lors du traitement de la contrôlabilité par une commande.*

b. Contrôlabilité (définitions)

On remplace à présent le contrôle de l'état précédent (un ajustement de paramètres), par une loi $u(t)$[2]. Plus précisément, on pose le problème de la détermination d'un état initial – ou d'un écart x_0 à un état de référence η_0 par application de $u(t), t \in -\infty, 0$:

$$\partial_t x = Ax + u(t), \quad t < 0 \tag{201}$$

Le critère classique de contrôlabilité repose sur le rang de $\Phi(0, -\tau)$ qui permettra à son espace image partant de u de saturer x_0.

Luenberger (1969) propose d'ajouter un peu plus de sens à cette définition, en considérant un coût "énergétique"[3] $\mathcal{C} = \int_{-\infty}^{0} < u\,|\,u > (t)dt$. Il pose alors le problème de la minimisation de $\mathcal{C}$ pour atteindre x_0. Ceci remplace dans le cas standard discontinu la contrainte portant sur l'existence d'un nombre limité d'instants d'application d'une loi de commande pour atteindre l'objectif.

Luenberger a montré que la commande optimale a un coût (minimal) $\mathcal{C}(\tilde{u}) = < x_0 \,|\, P^{-1} \,|\, x_0 >$. Dans cette formule, $P = \int_{-\infty}^{0} \Phi(0,\tau)\Phi^\dagger(0,\tau)d\tau$ est la matrice dîte de covariance — qui correspond en réalité à la même définition que dans (177) où $P(0, -\infty) = 0$ et bien sûr $K = 0$, avec une source de bruit blanc unitaire ($Z = I$).

Rq. et définition. *Dans le cas autonome, seul cas qui sera formellement traité, on aura ainsi la définition :* $P = \displaystyle\int_0^\infty \exp A\tau \exp A^\dagger \tau d\tau$. *Dans le cas stochastique où la commande $u(t)$ est remplacée par un bruit blanc $u \to Bw(t)$, on apelle* **Grammien de contrôlabilité** *la matrice* $\int_0^\infty \exp(At)\, BB^\dagger \, \exp(A^\dagger t)\, dt$.

Pour vérifier l'expression de l'optimum de u, on forme l'expression :

$$\begin{aligned} \partial_t < x(t) \,|\, P^{-1} \,|\, x(t) > \; &= \; < x(t) \,|\, (A^\dagger P^{-1} + P^{-1} A) \,|\, x(t) > \\ &\quad + < u(t) \,|\, P^{-1} \,|\, x(t) > + [P^{-1} \,|\, x(t) >]^\dagger \,|\, u(t) > \end{aligned} \tag{202}$$

Maintenant, on considére un système autonome ($A = C^{cste}$). S'il est de plus asymptotiquement stable, P vérifie l'égalité $AP + PA^\dagger = -I$. (Ceci s'obtient en incorporant ces hypothèses dans la formule (178) et la stationnarité de $P(\tau)$; on peut aussi simplement analyser sous sa forme autonome, cf cahiers Elémentaire). Alors le premier terme à droite de (202) devient $- < x \,|\, P^{-2} \,|\, x >$; on effectue alors l'intégration en complètant le carré

[1] on peut aussi proposer "enculouche" ?
[2] cette introduction est directement inspirée de Farell et Ioannou, *J.Atmos.Sci.* **58**, (2001)
[3] intégrale où une norme non euclidienne pourra être choisie sur des critères physiques.

de $u(t) - P^{-1}x(t)$ et on obtient, avec $x(-\infty) = 0$:

$$\begin{aligned} < x_0 \,|\, P^{-1} \,|\, x_0 > &= \int_{-\infty}^{0} < u(t) \,|\, u(t) > dt \\ &\quad - \int_{-\infty}^{0} < u(t) - P^{-1}x(t) \,|\, u(t) - P^{-1}x(t) > dt \\ &= \mathcal{C}(u) - \int_{-\infty}^{0} < u(t) - P^{-1}x(t) \,|\, u(t) - P^{-1}x(t) > dt \qquad (203) \end{aligned}$$

on en déduit que $\mathcal{C}(u) \geq < x_0 \mid P^{-1} \mid x_0 >$, et que le minimum (ce terme de droite) est atteint pour la loi optimale : $\tilde{u}(t) = P^{-1}x(t)$. Avec cette loi, le système avance par

$$\partial_t x = [A + P^{-1}]x, \quad t < 0 \qquad (204)$$

ce qui fait que $x(t)$ est donné par $\quad x(t) = e^{(A+P^{-1})t}\, x_0 \quad$ et alors $\tilde{u}(t) = P^{-1}e^{(A+P^{-1})t}x_0$. Mais avec la relation de Lyapunov, on a $A + P^{-1} = PA^{\dagger}P^{-1}$, dont l'exponentielle est : $P\exp(A^{\dagger})P^{-1}$, et ainsi[1]

$$\tilde{u}(t) = e^{A^{\dagger}t}P^{-1}x_0 \qquad (205)$$

On peut voir que dans la cas où la commande passe par $Bu(t)$ dans (201), la relation de stabilité asymptotique devient $AP + PA^{\dagger} = -BB^{\dagger}$, et la commande optimale devient

$$\tilde{u}(t) = B^{\dagger}P^{-1}e^{(A+B^{\dagger}P^{-1})t}x_0 \qquad (206)$$

que l'on trouve à partir de la même expression (202), en faisant apparaitre le carré de $|\, u - B^{\dagger}P^{-1}x >$.

Le cas non-autonome ne permet pas d'obtenir une solution analytique mais l'utilisation de l'équation de Lyapunov et de stabilité asymptotique permet certainement de démontrer l'existence d'une solution mettant évidemment en œuvre $P(t)$. Il peut dans ce cas être utile de considérer un délai T avant vérification de l'état et poser un problème plus réaliste : " trouver $min_T, min_u\, \mathcal{C}(u,T) \quad / \quad \|x - x_0\| < \epsilon$ ".

En conclusion, il apparait que la matrice de covariance P fonction ou non d'un temps de propagation, caractérise la contrôabilité d'un système par son intervention, soit dans un résidu sur la cible état (200), soit dans un coût d'application d'une loi de commande, le cas paramétrique étant assimilable à une commande impulsive.

Finalement, P est l'opérateur qui donne des réponses optimales. On comprend qu'il représente une caractéristique essentielle de la dynamique d'un système, et une SVD de cet opérateur aura l'intérêt de hiérarchiser ces réponses, soit en ce qu'elles permettent un pilotage, soit comme variance expliquée d'une dynamique. La réduction de la dimension de P devra donc être considérée lors de la réduction de modèle. De même le problème liminaire de la "contrôlabilité de l'océan par l'atmosphère" devrait s'appuyer sur l'analyse du même opérateur[2]. On peut encore rappeler ici que les V.S. de la matrice de covariance fournissent les structures optimales de réponse à un bruit, à savoir, les EOFs.

7.5 Observabilité et SLTC

Autant introduire ici cette notion duale de la précédente. Rappelons la définition standard qui énonce qu'un système est observable (à travers une mesure) si un nombre fini d'observations suffit à reconstituer son état initial. Le passage au SLTC consistera donc

[1] résultat correct, **et non pas** celui de Farell et Ioannou — on se demande ce que font les reviewers...

[2] L'idéal serait non pas de trouver un x_0^o mais de travailler en EOF, comme dans les EOF TEFisées du papier Gains_3b. On peut déjà commencer avec le problème précédent en essayant avec $x_0 \rightarrow EOF_1$.

à reconstituer une perturbation de son état initial de référence, connaissant une série de mesure — infinie ou non. Il y correspond en stochastique la détermination de l'incertitude initiale (la matrice de covariance de l'état initial), la mesure pouvant être de plus bruitée — pourquoi se priver ?

La première question me semble devoir justifier la dualité entre observabilité et contrôabilité, au-delà de leur analogie évidente. Alors que celle-ci privilégiait la commande la plus influente sur l'état, celle-là devrait *a priori* montrer la sensibilité de la mesure à l'état.

Dualité Obs-Com. Considérons un SLTC complet entrée/sortie comprenant une commande (entrée $z = u$) et une observable (sortie y) — et comme d'hab on note $x = \Delta\eta$. On peut le formuler ainsi

$$\begin{bmatrix} u(t) \\ \partial_t x \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ B & A & 0 \\ 0 & -C^\dagger & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix} \tag{207}$$

La notion de commandabilité est liée à la sensibilité des conditions terminales de $x(t = 0)$ à la commande appliquée à partir de $-\infty$ — pour rester conforme à la convention. En prenant une composante (k^{ieme}) de $u(t)$ impulsive $= \delta(t)$, on a $x_\delta(0; t) = \Phi(0, t)B(t)e_k$ (avec e_k vecteur de la base eulerienne de l'espace d'état). Le grammien de contrôlabilité peut alors s'écrire

$$\mathcal{W}_c = \int_{-\infty}^{0} \mid x_\delta(0; \tau) >< x_\delta(0; \tau) \mid d\tau \tag{208}$$

faisant apparaître la var-covar de l'anomalie terminale de l'état.

On considère à présent le système adjoint de (207)

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -\partial_t v \\ e(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B^\dagger & 0 \\ 0 & A^\dagger & -C^\dagger \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ v \\ w \end{bmatrix} \tag{209}$$

Dans ce système, la variable w adjointe à l'observable représente la sensibilité de la mesure aux C.I. La notion d'obervabilité conduit alors à considérer la covariance de cette sensibilité $w(t; 0) = \Phi^\dagger(t, 0)C(t)e_k$, permettant de formuler le grammien d'obs ainsi

$$\mathcal{W}_o = \int_{0}^{\infty} \mid w(\tau; 0) >< w(\tau; 0) \mid d\tau \tag{210}$$

la dualité est complète si on se souviens de l'équivalence entre une commande impulsive initiale et des conditions intiales. Le système adjoint (209) conduit d'ailleurs à la définition du grammien d'obs duale de cntrl : $\mathcal{W}_o = \int_0^\infty \Phi^\dagger(\tau, 0)C(\tau)C^\dagger(\tau)\Phi(\tau, 0)d\tau$.

La dualité est ainsi établie sous la forme $u(t) \to x_0$, $t \in \ ]-\infty, 0]$ pour cntrl et $x_0 \to w(t)$, $t \in \ [0, \infty[$ pour obs.

On peut encore remarquer que du point de vue des sensibilités entrée-sortie, prenant le cas d'observabilité max $C^\dagger = I$ et de manière duale de totale contrôlabilité $B = I$, la décomposition en éléments singulier du propagateur $\Phi = U[w]V^\dagger$ montre que le grammien d'obs privilégie la base d'excitabilité du système (V), alors que son dual met en exergue sa réponse (U). La décomposition en **structures singulières** dîte **de Hankel** s'applique à rendre ces deux aspects identiques en cherchant un changement de base de l'espace d'état particulier, ce qui revient à modifier l'échelle des composantes d'état (scaling[1]). On cherchera ainsi une échelle (une norme) équilibrée entre les deux aspects duaux

[1]on pourrait proposer "escaler", du vieux Français ; l'origine de tout ça étant en référence avec "coquille" et la coupe des balances (vous pourrez pas dire qu'on perd son temps à lire les Cahiers...

(balancing[1]). On conçoit *a priori* l'importance de cet équilibrage pour la réduction de modèles (cf cahiers Elémentaire sur la conjecture de Goodman et Marshall).

exercice : montrer que la duale de l'interprétation de P *minisant* $\int_{-\infty}^{0} <u|u> dt$ *pour atteindre* x_0 *est que* Q *maximise* $\int_{0}^{+\infty} <w|w>\ dt$ *pour* x_0 *donné. Ça semble être un résultat non publié.*

7.6 Moindres carrés et Kalman

L'astuce du filtre de Kalman consiste à établir une rétroaction explicite des mesures sur l'état à reconstruire via la matrice de gain $K(t)$. Cela permet de minimiser la var-cov sur $|x>$ au lieu de $|y>$, l'écart à la mesure. Dans le cas des moindres carrés, le terme correctif est remplacé par une dépendance en ϖ, et la rétroaction est externe, via l'algorithme de la minimisation. Ceci dit, rien n'empêche de boucler par K, pourvu que $K(t)$ ne dépende que de ϖ et des mesures précédentes. On va ainsi essayer d'expliciter une telle solution, qui utilise P en lieu et place de $[\Phi\Phi^{\dagger}]$ dans la formule de Newton[2].

Patrice, tu ne veux pas t'y coller ?

[1]quand je vous le disais *ibidem*.

[2]cf papier Estimation des Cahiers TEF-ZOOM sur le web

7.7 Approche ensembliste du filtre de Kalman étendu (Mars 2006)

Pour l'instant, il devrait s'agir d'une discussion visant à ne garder du système (171) que les termes et matrices statistiques qui font sens dans notre pratique, ce qui devrait au premier chef interpeller les vrais expérimentateurs de l'unsecte ! Espérons que cet appel ne restera pas vain.

le tirage par Monte-Carlo

En remarque liminaire, il faut se garder d'oublier ce que la pratique du radiatif nous a appris, à savoir que la méthode de Monte-Carlo appliquée aveuglément est improductive : il suffit de rappeler qu'elle ne converge qu'en $\frac{1}{\sqrt{p}}$. Mais on connait aussi ses avantages pour suivre la physique des problèmes, et ainsi de rester maître de son pilotage. Il semble nécessaire de nous livrer à une étude prospective approfondie du type de problème que nous voulons résoudre pour en tirer tout le parti.

Le premier problème est le tirage avec des propriétés de covariance données. Il me semble qu'une SVD des matrice de var-cov ($W = Uw^2U^\dagger$) donne une solution par tirage de pn V.A. gaussiennes-centrées indépendantes des w_i (?), et Lapack fournit une bonne base pour ça. Suivant la dimentionnalité du problème, on pourra sélectionner un nombre inférieur à p de vecteurs singuliers pour approximer P (ceci pour les systèmes maillés en particulier). À ce sujet d'ailleurs, il n'est pas interdit d'envisager *a priori* que la dimension du bruit soit inférieure à n. Avec en tête que le problème n'est pas d'obtenir une bonne approximation de P (artefact mathématique), mais un traitement correct du problème - la différence tenant tout simplement à ce que P est en général elle-même mal connue !

On doit également tirer dans de bonnes directions, car on sait que c'est essentiel pour obtenir un Monte-Carlo performant. Celles-ci convoquent nécessairement les directions de sensibilités maximales du modèle, données encore par les vecteurs singuliers de $A + A^\dagger$, cf papier SLTC_al1 sur le SLT Circulant. En effet, on a en général à faire à des modèles contractants (Wronskien décroissant), ce qui a pour effet de restreindre la largeur de l'ensemble suivit, qui devient donc de moins en moins représentatif par réduction de dimension de l'espace de phase exploré par l'ensemble.

Ce qui est dit sur P concerne tout autant les bruits de mesure avec d'autres contraintes.

La conclusion est que, contrairement à ce qui a déjà été implémenté dans Mini_ker jusqu'alors, la collaboration est sollicitée avant tout codage (en-dehors des essais de principe que Pat fait en parallèle).

J'espère qu'on va pouvoir démarrer sérieusement tout ça en Mai ?
(*Note post mortem : des mouvements au CIRED sans rapport avec ceux du CPE ont conduit à différer ce programme*).

et vous propose comme premier objectif de discuter exhaustivement du papier de revue par le découvreur de la méthode après dix années d'applications diverses par plusieurs auteurs (avec une forte contribution de l'école française) :

The Ensemble Kalman Filter : theoretical formulation and practical implementation, *in* Ocean Dynamics (2003) **53**, 343-367.

Il serait utile de confronter les idées de l'article aux problèmes concrets des membres de l'unsecte.

Post coïtum Scriptum Rien n'est encore décidé de la forme que prendra le "Mini-Kalman", il s'agit justement de considérer les avantages respectifs de plusieurs méthodes en profitant d'un contexte porteur.

7.8 Recul stratégique sur l'approche ensembliste

On va se livrer à un rappel stémologique et historique du glissement méthodologique qui a conduit à une approche ensembliste des systèmes physiques. Juste pour tenter d'en avoir une vision synthétique[1].

a. La vision de Gibbs – Einstein

On traite des systèmes dynamiques dont les conditions initiales (C.I.) sont incertaines. L'espace de référence est l'espace de phase (*gén.* d'états), dans lequel on considére une densité continue $\varrho(p,q)$ des états possibles. En bref, si $\mathcal{H}(p,q)$ est l'Hamiltonien du système mécanique, le système :

$$d_t q = \nabla_p^t \mathcal{H} \quad ; \qquad d_t p = -\nabla_q^t \mathcal{H};$$

fournit l'évolution du système. De même, l'évolution de toute fonction scalaire $f(p,q)$ est donnée par

$$\begin{aligned} d_t f &= <\nabla_q f \,|\, \nabla_p^t \mathcal{H}> - <\nabla_p f \,|\, \nabla_q^t \mathcal{H}> \\ &= [f, \mathcal{H}] \end{aligned}$$

où on a introduit l'opérateur crochet de Poisson. La conservation de l'énergie se déduit des équations de Hamilton puisque $d_t\mathcal{H} = [\mathcal{H},\mathcal{H}] = 0$.

Maintenant, on considère l'ensemble des systèmes (dit *ensemble représentatif*) pouvant évoluer avec le même Hamiltonien, représenté par une densité $\varrho(p,q)$ normalisée : $\int \varrho(p,q)dp\,dq = 1$, qui est donc une pdf. On a donc "incompressibilité" de ce nuage d'états : $d_t\varrho + \varrho\, div\, v = 0$, ce qui entraîne $d_t\varrho = 0$ d'où $\partial_t\varrho = [\mathcal{H},\varrho]$. Le vecteur v est ici bien sûr : $v = d_t \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Rightarrow div\, v = 0$.

L'équation de Liouville faisant partie de cet écrèmage, on introduit l'opérateur de Liouville par simple multiplication[2] par le nombre imaginaire $\mathfrak{i}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{i}\, d_t\varrho = L\varrho \\ L = -\mathfrak{i}<\nabla_p\mathcal{H} \,|\, \nabla_q^t \centerdot> + \mathfrak{i}<\nabla_q\mathcal{H} \,|\, \nabla_p^t \centerdot> \end{array} \right. \tag{211}$$

Bref, c'est une première étape où on considère des propriétés moyennes de type :
$< A >= \int A(p,q)dp\,dq$. La difficulté de généralisation concerne évidemment la recherche de fonctions d'état liées aux invariants d'un système général, de même que des fonctions de Lyapunov contraignant globalement l'évolution du système. Lorsque l'énergie du système n'est pas conservée, comme dans les systèmes dissipatifs, le "volume initial" de la distribution des états ira en se contractant, et on trouvera un Wronskien décroissant. L'évolution de la matrice P de var-covar permettra de suivre plus finement encore les caractéristiques du nuage ensembliste des états probables. En construisant notre approche élémentaire des outils de Mini_ker, on traitera ainsi en premier de ce cas des C.I. incertaines.

b. Ergodicité

Après son théorème des trois corps, qui a montré que des systèmes ne sont pas intégrables en général – et pour notre plus grand bien – Poincaré montre que ces systèmes repassent par le voisinage de tout point de l'espace des phase : c'est l'aspect *ergodique* de systèmes non-intégrables (déjà introduit par Maxwell et Boltzmann).

[1] All, Mars 2006, qui se lance dans un domaine dont il ignore tout et demande donc d'abord de la mansuétude, mais surtout des suggestions-corrections, voire une co-rédaction par mieux qualifié.

[2] c'est juste pour le rendre Hermitien.

Ces systèmes restent simples dans le sens où le volume est conservé, mais alors que deux points voisins peuvent le rester, le volume peut aussi prendre des allures filamenteuses (Hopf avec les systèmes de mélange).

La complexité aujourd'hui bien reconnue grâce au calcul numérique, de systèmes ni intégrables ni ergodiques sont la base des études de Kolmogoroff, Lyapunov, Mandelbrot, etc (sections de Poincaré, K-flows, biffurcations, résonnances,...). Au delà de la mécanique, le modèle de Lorenz représente un prototype de ces systèmes[1].

L'important pour cet écrèmage est la reconnaissance d'une irruption de *l'imprédictibilité* déjà pour des systèmes déterministes, et ainsi d'un certain *hasard* en modélisation d'une part, et de l'autre qu'une approche ensembliste est dès lors possible pour tenter d'appréhender des éléments de structure des états possibles.

c. Le mouvement Brownien et l'équation de Langevin

Ici, on quitte le monde mathématique de nos chers mécaniciens, et le "vrai" *Hasard* fait son entrée, dans le monde de la physique expérimentale. Le mouvement Brownien est phénoménologiquement interprété ainsi par Langevin :

$$m\, d_t u = -\alpha u + F(t) + F_{ext}$$

équation du moment (1D) dans laquelle, en plus du champ de forces extérieures, l'effet de petite échelle est *paramétré* par le couple : freinage visqueux $(-\alpha)$ $\times$ force "aléatoire" $F(t)$. En laissant de côté le problème stémologique de coupure d'échelle, ici implicite, qui est effectué par l'appareil de mesure (résolution spatio-temporelle), on reste dans un contexte déterministe d'évolution en ayant reporté l'irruption du hasard dans les propriétés de $F(t)$.

On peut dès lors introduire des hypothèses stochastiques, et le mouvement Brownien conduit au choix : $< F(t) >= 0; \quad < F(t+\tau)F(t) >= g\delta(\tau)$, c'est-à-dire de stationnarité de l'autocorrélation et de son caractère erratique. On peut noter que le choix de la fonction δ implique que l'espace mathématique exclue de fait les échelles moléculaires. Ceci se traduira par la non-dérivabilité de $F(t)$, si bien que la forme physiquement correcte de l'équation de Langevin est :

$$m\,\frac{\Delta u}{\Delta t} + \alpha \Delta u = F_{ext} + \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} F(\tau)d\tau$$

avec $\tau_m \ll \Delta t \ll \tau_M$, entre les échelles micro- et macroscopique (*resp.* moléculaire, et celle du mouvement des particules observables). L'aucorrélation *physique* est alors calculée avec $\bar{F}_{\Delta t} = \dfrac{1}{\Delta t}\displaystyle\int_t^{t+\Delta t} F(\tau)d\tau$:

$$C_{FF}(t-t') =< \bar{F}_{\Delta t}\bar{F}_{\Delta t'} >$$

qui a pour effet de remplacer le pulse de Dirac par une fonction triangle de largeur $2\Delta t$.

C'est justement ce genre de problème de correspondance entre les couches physique et mathématique qui a conduit au champ des *équations stochastiques*, en suivant l'approche lumineuse de Bébert[2]. Son raisonnement (1905) est le suivant : soit une particule (Brownienne en 1D) effectuant un déplacement aléatoire par saut Δ au bout de chaque intervalle de temps Δt. Soit ϕ la pdf associée :

$$\phi(\Delta)d\Delta = p\{\, x(t+\Delta t) - x(t) \in [\Delta, \Delta + d\Delta]\,\} \tag{212}$$

[1]je ne garanti pas l'exactitude historique avec des oublis importants comme Arnold, Neumann et d'autres, voir par exemple Priogine 1980 : *From Beeing to Becoming.*. **J'attends avec impatience des améliorations proposées par les professeurs de l'unsecte.**

[2]une de plus d'Einstein, qui avait souhaité prendre cet alias dans la collaboration.

avec indifférence au sens du déplacement ($\phi(-\Delta) = \phi(\Delta)$). Soit par ailleurs $f(x,t)$ la densité des particules ; alors :

$$f(x,t+\Delta t)dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\Delta) f(x-\Delta, t) d\Delta \right) dx \tag{213}$$

c'est-à-dire que l'on retrouve en x après un saut aléatoire, les particules qui étaient auparavent en $x - \Delta$. L'hypothèse (la propriété stochastique du mouvement Brownien) fondamentale est alors que les sauts étant centrés sur de faibles valeurs (diffusion lente) et τ petit, il est légitime de faire des développements limités sur ces deux paramètres :

$$\begin{cases} f(x,t+\Delta t) \simeq f(x,t) + \Delta t\, \partial_t f + ... \\ f(x-\Delta, t) \simeq f(x,t) - \Delta\, \partial_x f + \dfrac{\Delta^2}{2} \partial_x^2 f ... \end{cases}$$

en reportant dans (213) et avec la normalisation et la parité de ϕ, on trouve la loi de diffusion de Fick :

$$\begin{cases} \partial_t f = D\, \partial_x^2 f \\ D = \dfrac{1}{2\Delta t} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 \phi(\Delta)\, d\Delta \end{cases} \tag{214}$$

et c'est ainsi qu'en toute simplicité Bébert jetais les grandes bases méthodologiques du développement de Kramers-Moyal aboutissant à l'équation de Fokker-Planck.

En ce qui nous concerne, le problème de la modélisation est tout entier compris dans l'existence de l'intégrale (214) exprimant la variance de Δ, qui dépendra des propriétés stochastiques de cette variable aléatoire.

d. où on arrive à l'équation de Fokker-Planck

Nous arrivons enfin à la vision probabiliste des systèmes aléatoires, en passant par les processus de Markov, l'équation maîtresse des systèmes Markoviens, et le développement de Kramers-Moyal permettant dans un cadre plus restrictif l'introduction de Fokker-Planck. Ainsi, en plus de la modélisation des valeurs moyennes (d'ensemble) des états du système dynamique, le but de l'étude des équations stochastiques est de leur adjoindre un modèle d'évolution de leurs pdf.

processus de Markov

C'est le type de processus de transition d'état qui correspond aux modèles d'états. Considérons la formule

$$p_2(y_1, t_1; y_2, t_2) = W(y_1, t_1 | y_2, t_2) p(y_2, t_2)$$

dans laquelle p_2 est la pdf conditionnelle donnant l'état y_1 au temps t_1 sachant qu'au temps t_2 il était y_2, avec p la pdf d'état, et W la probabilité de transition, qui dépend de t. Cette relation suppose que la transition est déterminée par l'état courant, et ne dépend pas du passé : c'est la définition d'un processus Markovien. En sommant p_2 sur y_2, on obtient $p(y_1)$.

L'équation de bilan des transitions donne ce que l'on appelle *l'équation maîtresse* du processus aléatoire :

$$\partial_t p(y,t) = \int dy' [W(y|y')p(y',t) - W(y'|y)p(y,t)] \tag{215}$$

qui fait le bilan des arrivées de l'état en y ($y' \rightsquigarrow y$) et des départs ($y \rightsquigarrow y'$). On peut voir dans la probabilité de transition W le pendant probabiliste du propagateur Φ de transition déterministe d'état : les deux se composent par multiplication.

Développement de Kramers-Moyal et équation de Fokker-Planck

Considérons l'équation maîtresse (215) sous sa forme physique :

$$p(y, t + \Delta t) = \int d\Delta y \, [\, W(y, t + \Delta t | y - \Delta y, t) p(y - \Delta y, t)\,] \tag{216}$$

on suit alors Einstein dans son hypothèse de diffusion lente, en supposant que les transitions sont très centrées sur les faibles valeurs de Δy lorsque Δt reste faible (W est une courbe en cloche). De plus, on fait l'hypothèse que cette fonction de transition dépend faiblement de l'état. On peut alors faire un développement limité de l'intégrande, que nous centrons en $y + \Delta y$:

$$\begin{aligned} W(y, t + \Delta t | y - \Delta y, t) p(y - \Delta y, t) &= W(y + \Delta y, t + \Delta t | y, t) p(y, t) \qquad (217) \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1^n}{n!} \Delta y^n \partial_y^n [W(y + \Delta y, t + \Delta t | y, t) p(y, t)] \end{aligned}$$

on arrive alors au développement de **Kramers-Moyal** suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p(y, t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \partial_y^n [M_n(y) p(y, t)] \\ M_n(y) = \displaystyle\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Delta t} \int d\Delta y \, [\Delta y^n W(y + \Delta y, t + \Delta t | y, t)] \end{array} \right. \tag{218}$$

avec les moments de la distribution de Δy qui sont pris avec la proba de transition W.

L'analyse au premier ordre en Δt de cette équation utilise le fait – qu'on aurait pu montrer explicitement pour le mouvement Brownien et que l'on retrouvera plus loin – que à la fois la dérive ($< \Delta y >$) et l'écart quadratique ($< \Delta y^2 >$) sont proportionnels à Δt (cas du processus de Wiener). L'équation de **Fokker-Planck** résultante est donc un développement au premier ordre seulement en temps, en effaçant les moments d'ordre supérieur (dynamique lente) :

$$\partial_t p(y, t) = -\partial_y [M_1(y) p(y, t)] \; + \; \partial_y^2 [M_2(y) p(y, t)] = -\mathcal{L}_{FP} \, p(y, t) \tag{219}$$

Ben voilà, rendre un modèle stochastique revient à ajouter une équation de ce type pour chaque composante d'état et modéliser les moments M ... (hein ?). On peut déjà simplement la TEFiser en considérant – ce qui est classique – le courant $J(y, t) = M_1(y) p(y, t)] \; - \; \partial_y [M_2(y) p(y, t)$, d'où $\partial_t p(y, t) + div(J(y, t) = 0$.

Lien avec le propagateur

(sorry folks, ce sera pour plus tard).

7.9 Parcours aléatoire possible dans la jungle stochastique

- l'équation de Liouville[1] ;
  - résultat de Liouville : l'équation du Wronskien ;
  - le théorème de transport, parallèle au théorème fondamental de la méca flu ;
  - l'équation de Liouville (pdf) ;
  - passage à Fokker-Planck ;
  - intro aux equations dynamiques stochastiques
  - que modéliser dans MK2 ?
- le Mouvement Brownien ;
  - équation de Langevin ;
  - Itô *versus* Stratonovitch ;
  - Einstein *versus* Stratonovitch ;
  - processus de Markov et équation maîtresse ;
  - développement de Kramers' Moyal ;
  - l'équation de Fokker-Planck ;
  - traitement d'exemples ;
  - quoi pour Mini_ker ?
- analyse de Cécile Penland[2] ;
  - relation de Lyapunov ;
  - propagateur et matrice var-covar : la relation fluctuation-diffusion[3] ;
  - analyse de données et détermination de modèle tangeant (EOF et POPs) ;
  - implication sur l'analyse des sensibilités climatiques ;
- réduction de modèle, décomposition lent/rapide
  - l'approche Farell-Ioannou[4] ;
  - l'analyse de Hasselmann ;
  - l'approche Majda ;
  - l'approche Nicolas Bouleau ;
- modèles stochastiques du climat (revue)[5] ;
- articulations avec les gains et Floquet ;
- les résultats de Patrice ;
  - filtre de Kalman et fits variés ;
  - conclusions, ce qui marche, ce qui marche pas bien, ce qui serait mieux ;
  - plans pour MK2 ;

[1] cf Ehrendorfer : the Liouville equation and atmospheric predicatbility.
[2] MWR 89, J. of Cl. 94 etc
[3] Leith JAS 75., Bell JAS 80
[4] JAS 2000 ?
[5] Monahan 98 : Stochastic Climate Models.

ANNEXE : La quadruple comparaison

Sensibilités aux états

D'abord, la quadruple comparaison sur $\Phi(T, 0)$ dans l'exo **grasdouble** portant sur 1000 pas de temps de 0.01 unité :

```
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
+++++++ Re vérification de Phi / sens vadj +++++++++++++++++++++
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
PHI_tr : time  0.1000013E+02
par integration en avant (nxp=np extension version 101)
  0.61537E+00  0.12344E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.30547E+00
  0.12337E+00  0.24768E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.24543E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11618E+01  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11700E+01  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01
le meme en double precision (identique)
par sltcirc
  0.61537E+00  0.12344E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.30547E+00
  0.12337E+00  0.24770E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.24543E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11618E+01  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11700E+01  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01
par sens
  0.61535E+00  0.12343E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.30543E+00
  0.12337E+00  0.24765E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.24542E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11618E+01  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11700E+01  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01
par vadj
  0.61519E+00  0.12341E+00 -0.23374E-09  0.00000E+00  0.30552E+00
  0.12299E+00  0.24693E-01 -0.25454E-09  0.00000E+00  0.24477E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11618E+01  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.11700E+01  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01
en double precisison 3eme colonne :
                          0.44039E-18
                          0.48990E-18
                          0.11618E+01
                          0.00000E+00
                          0.00000E+00
+++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
```

On peut se contenter d'un accord entre 10^{-3} et 10^{-4} près ? Il est a remarquer que les $E - 09$ de vadj là où on attend zero ($E - 18$ en double) proviennent de l'inversion de $(I - D)$, malgré l'utilisation de **LaPack** ; on va peut-être tenter un "driver expert" de Lapack. Reste le cas du Lorenz 63 (l'exo lorhcl) qui semble séparer ces accords, et c'est à regarder de plus près.

Sur la matrice $\Psi(T,0)$ introduite par le TEF :

```
================================================================================
avance de Phi/Psi par integration des extensions (version 101)

 -0.16097E-02   -0.32257E-03    0.00000E+00    0.00000E+00   0.00000E+00
 -0.58627E-03   -0.11895E-03    0.00000E+00    0.00000E+00   0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00   0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00   0.00000E+00
  0.24688E-01    0.49536E-02    0.00000E+00    0.00000E+00   0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00   0.00000E+00
  0.90176E+00    0.18079E+00    0.60368E+02    0.71450E-02   0.00000E+00
  0.18089E+00    0.36295E-01    0.33794E+02    0.39998E-02   0.00000E+00

off line (par sltcirc a l'aide du fichier psiout, et alpha)
  Psi 8x5      dff/deta
 -0.1609109E-02 -0.3224513E-03  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
 -0.5846123E-03 -0.1186602E-03  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
  0.2467224E-01  0.4950750E-02  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
  0.9013297E+00  0.1807056E+00  0.6037712E+02  0.7146083E-02  0.0000000E+00
  0.1807729E+00  0.3627402E-01  0.3379943E+02  0.4000415E-02  0.0000000E+00

  dff/dEta par sigma quand sens(i)=1
 -0.16097E-02   -0.32257E-03    0.00000E+00     0.00000E+00
 -0.58555E-03   -0.11881E-03    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00     0.00000E+00      nulle
  0.24685E-01    0.49531E-02    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.90173E+00    0.18078E+00    0.60366E+02     0.71449E-02
  0.18087E+00    0.36291E-01    0.33793E+02     0.39998E-02

  wadj (vadj(T)=CDm1)
 -0.16253E-02   -0.32480E-03    0.00000E+00     0.00000E+00
 -0.59214E-03   -0.11981E-03    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.33251E-21    0.66534E-22    0.00000E+00     0.00000E+00      nulle
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.24928E-01    0.49880E-02    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00     0.00000E+00
  0.91051E+00    0.18204E+00    0.60972E+02     0.72164E-02
  0.18265E+00    0.36547E-01    0.34132E+02     0.40398E-02

================================================================================
```

On valide ainsi le lien sigma avec sens(i)=1 et Psi de l'extension TEF du propagateur. De même l'initialisation de l'adjoint par impulsion sur J^{Ψ} de $\varphi(T)$, qui a peu de rapport avec l'avance de $\Psi(0,\tau)$, en tout cas aucun dans le programme.

Sensibilités aux transferts pulsés

Matrice $\Phi B(I-D)^{-1}$ du système des sensibilité aux transferts :

```
==================================================================================================

 PhiBDm1 5x 8
 0.1230153E+02  0.1183827E+01 -0.2022803E+02 -0.1348535E+02  0.6150763E+00  0.5904732E+01  0.0  0.0
 0.2467224E+01  0.2376360E+00 -0.4057290E+01 -0.2704860E+01  0.1233612E+00  0.1184267E+01  0.0  0.0
 0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.1162008E+01  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0  0.0
 0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.6591275E+04  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0  0.0
 0.6114376E+01  0.2356612E+01 -0.1270648E+02 -0.8470988E+01  0.1305719E+01  0.1253490E+02  0.0  0.0

                              par sens pour dfdpi(k)=1 transformé en C.I.
 0.12307E+02    0.11843E+01   -0.20237E+02  -0.13491E+02     0.61535E+00    0.59073E+01
 0.24685E+01    0.23775E+00   -0.40594E+01  -0.27063E+01     0.12343E+00    0.11849E+01
 0.00000E+00    0.00000E+00    0.11618E+01   0.00000E+00     0.00000E+00    0.00000E+00
 0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00   0.65902E+04     0.00000E+00    0.00000E+00
 0.61087E+01    0.23560E+01   -0.12697E+02  -0.84647E+01     0.13054E+01    0.12532E+02

                              par wadj pour cout_J=eta(i)
 0.12304E+02    0.11807E+01   -0.20227E+02  -0.13485E+02     0.61519E+00    0.59058E+01    0.0  0.0
 0.24681E+01    0.23705E+00   -0.40578E+01  -0.27052E+01     0.12341E+00    0.11847E+01    0.0  0.0
-0.46748E-08   -0.24435E-08    0.11618E+01   0.71184E-08    -0.28306E-08   -0.27174E-07    0.0  0.0
 0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00   0.65902E+04     0.00000E+00    0.00000E+00    0.0  0.0
 0.61104E+01    0.23498E+01   -0.12690E+02  -0.84602E+01     0.13055E+01    0.12533E+02    0.0  0.0

==================================================================================================
```

Dans la mesure où la procédure par l'adjoint, qui porte sur $J = \eta_i(T)$ est standard, on peut voir dans l'accord précédent une validation numérique de la justification pseudo-mathématique de l'initialisation du système des sensibilités aux transferts-pulsants.

Sensibilité de $\varphi(T)$:

```
===================================================================================================
essai de sensib de tr a tr-pulse apres implementation adjoint  Fri Aug 19 19:12:26 CEST 2005          A11

sltcirc :
  PsiBDm1 8x 8
 -0.3218217E-01 -0.3095533E-02  0.5291656E-01  0.3527771E-01 -0.1609109E-02 -0.1544744E-01
 -0.1169225E-01 -0.1139138E-02  0.1924708E-01  0.1283138E-01 -0.5846123E-03 -0.5612278E-02
  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00   2 nulles
  0.4934448E+00  0.4752721E-01 -0.8114579E+00 -0.5409720E+00  0.2467224E-01  0.2368535E+00
  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00  0.0000000E+00
  0.1802659E+02  0.1734774E+01  0.3073507E+02  0.2049038E+02  0.9013297E+00  0.8652765E+01
  0.3615457E+01  0.3482306E+00  0.2785390E+02  0.1856945E+02  0.1807729E+00  0.1735419E+01

par sigma avec dfdpi(j)=1 -> transformé en C.I. (pulse)
 -0.32197E-01   -0.31112E-02    0.52963E-01    0.35309E-01   -0.16099E-02   -0.15455E-01
 -0.11712E-01   -0.11459E-02    0.19287E-01    0.12858E-01   -0.58560E-03   -0.56218E-02
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.49374E+00    0.47772E-01   -0.81227E+00   -0.54151E+00    0.24687E-01    0.23700E+00       //
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.18036E+02    0.17436E+01    0.30706E+02    0.20472E+02    0.90180E+00    0.86573E+01
  0.36176E+01    0.35002E+00    0.27847E+02    0.18565E+02    0.18088E+00    0.17365E+01
en double
 -0.32197E-01   -0.31112E-02    0.52963E-01
 -0.11712E-01   -0.11459E-02    0.19287E-01
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.49374E+00    0.47772E-01   -0.81227E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.18036E+02    0.17436E+01    0.30708E+02
  0.36176E+01    0.35002E+00    0.27848E+02

par wadj  cout_Psi(T) = ff(j) -> vadj(T)=colonne de CDm1
 -0.32507E-01   -0.31181E-02    0.53437E-01    0.35625E-01   -0.16253E-02   -0.15603E-01
 -0.11843E-01   -0.11502E-02    0.19489E-01    0.12993E-01   -0.59214E-03   -0.56845E-02
 -0.35723E-11   -0.34310E-12    0.58731E-11    0.39154E-11   -0.17861E-12   -0.17147E-11       //
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.49856E+00    0.47885E-01   -0.81967E+00   -0.54645E+00    0.24928E-01    0.23931E+00
  0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00    0.00000E+00
  0.18210E+02    0.17475E+01    0.31035E+02    0.20690E+02    0.91051E+00    0.87409E+01
  0.36530E+01    0.35085E+00    0.28127E+02    0.18751E+02    0.18265E+00    0.17534E+01
en double
 -0.32507E-01   -0.31181E-02    0.53438E-01    0.35625E-01   -0.16254E-02   -0.15603E-01
 -0.11843E-01   -0.11502E-02    0.19490E-01    0.12993E-01   -0.59214E-03   -0.56846E-02
  0.66503E-20    0.63873E-21   -0.10933E-19   -0.72890E-20    0.33251E-21    0.31921E-20

  ACCORD SIGMA x PsiB(I-D)m1 x w adjoint (mode pulse)
===================================================================================================
```

On peut remarquer méchamment que les résultats sltcirc et sigma ne sont guères indépendants, car le système des sensibilités calcule essentiellement Φ par colonne, et que le passage de η à φ par les matrices du TEF sont les mêmes qui servent à initialiser **sens**. Mais comme cette procédure est numériquement validée par la comparaison sur $\Phi B(I-D)^{-1}$, on peut y voir la confirmation que les matrices de type Ψ introduites par le TEF sont d'interprétation conforme à ce qui en a été dit. Et l'initialisation de l'adjoint utilise la matrice $(I-D)^{-1}C^{\dagger}$ et non $B(I-D)^{-1}$, ce qui rend la dépendance entre les intégrations avant et arrière plus subtile.

Effets d'un pulse sur l'intégrale $\int_0^T \varphi(\tau)d\tau$

On a définit une cellule $\eta(5)$ qui intègre une composante de transfert. Par ailleurs, on prend comme fonction de coût l'intégrale d'une composante. Dans les deux cas, on a la sensibilité de l'intégrale d'une variable à un pulse initial. On trouve ainsi :

Pour ff(1) intégrée, réponses :

```
par wadj  (Transposé comme sens / Psit)
  0.44851E+00  0.43020E-01 -0.73730E+00 -0.49153E+00  0.22426E-01  0.21529E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.15993E+00  0.15442E-01 -0.26306E+00 -0.17537E+00  0.79966E-02  0.76767E-01  0.00000E+00  0.00000E+00
 -0.40202E-08 -0.21028E-08  0.10000E+01  0.61230E-08 -0.24362E-08 -0.23387E-07  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.61055E+01  0.23493E+01 -0.12682E+02 -0.84548E+01  0.13053E+01  0.12531E+02  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01  0.00000E+00  0.00000E+00
> 0.18759E+03  0.16171E+02  0.13139E+03  0.87597E+02  0.93793E+01  0.90041E+02  0.10000E+01  0.00000E+00
  0.37081E+02  0.12696E+02  0.18618E+03  0.12412E+03  0.18540E+01  0.17799E+02  0.00000E+00  0.10000E+01
la 7eme ligne, dt/10 en double
  0.18780E+03  0.16229E+02  0.13163E+03  0.87756E+02  0.93898E+01  0.90142E+02  0.10000E+01  0.00000E+00

par sens(5)
 0.44807E+00   0.43324E-01 -0.73709E+00               0.22403E-01
 0.16058E+00   0.10844E-01 -0.25713E+00 -0.17142E+00  0.80289E-02  0.77077E-01
 0.00000E+00
 0.00000E+00
 0.61092E+01   0.23670E+01 -0.12714E+02 -0.84762E+01  0.13055E+01  0.12532E+02
```

Ce qui suffit à montrer encore la pertinence de la méthode de transformation d'un pulse en C.I. en s.

Effets du step sur la variable $\varphi(t)$ On utilise les extensions avec variables intégrées, et ainsi C.I. nulles, on regarde Ψ avec une source permanente, la matrice unité **dfdpi**.

On a vu dans ce cas que l'on récupère sur la diagonale une réponse de type $\dfrac{1}{1-g}$.

```
========= Psit =========================================================================================
  0.47745E+00  0.16819E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.64345E+01  0.00000E+00  0.27205E+03  0.47145E+02
  0.51991E-01  0.19592E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.36062E+01  0.00000E+00  0.28510E+02  0.26422E+02
 -0.79417E+00 -0.28167E+00  0.10000E+01  0.00000E+00 -0.15061E+02  0.00000E+00  0.15281E+03  0.22758E+03
 -0.52944E+00 -0.18778E+00  0.00000E+00  0.10000E+01 -0.10041E+02  0.00000E+00  0.10188E+03  0.15172E+03
  0.14812E-01  0.55012E-02  0.00000E+00  0.00000E+00  0.12724E+01  0.00000E+00  0.11329E+02  0.19955E+01
  0.24923E+00  0.90635E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.19240E+02  0.10000E+01  0.16223E+03  0.28322E+02
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01

dt/10 en double precision
  0.47742E+00  0.16827E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.64346E+01  0.00000E+00  0.27207E+03  0.47146E+02
  0.51989E-01  0.19581E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.36063E+01  0.00000E+00  0.28513E+02  0.26423E+02
 -0.79411E+00 -0.28177E+00  0.10000E+01  0.00000E+00 -0.15061E+02  0.00000E+00  0.15281E+03  0.22759E+03
 -0.52940E+00 -0.18785E+00  0.00000E+00  0.10000E+01 -0.10041E+02  0.00000E+00  0.10187E+03  0.15172E+03
  0.14812E-01  0.55042E-02  0.00000E+00  0.00000E+00  0.12723E+01  0.00000E+00  0.11329E+02  0.19955E+01
  0.24921E+00  0.90675E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.19240E+02  0.10000E+01  0.16224E+03  0.28323E+02
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01
======== Psit + dPsit ==================================================================================
  0.47720E+00  0.16833E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.64373E+01  0.00000E+00  0.27218E+03  0.47166E+02
  0.51969E-01  0.19557E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.36066E+01  0.00000E+00  0.28524E+02  0.26426E+02
 -0.79375E+00 -0.28183E+00  0.10000E+01  0.00000E+00 -0.15066E+02  0.00000E+00  0.15295E+03  0.22774E+03
 -0.52917E+00 -0.18788E+00  0.00000E+00  0.10000E+01 -0.10044E+02  0.00000E+00  0.10197E+03  0.15183E+03
  0.14804E-01  0.55059E-02  0.00000E+00  0.00000E+00  0.12725E+01  0.00000E+00  0.11333E+02  0.19962E+01
  0.24910E+00  0.90706E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.19241E+02  0.10000E+01  0.16230E+03  0.28333E+02
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.10000E+01

======== Psit avec source permanente de Phit Gam -> + BDm1 =============================================
 -0.52255E+00  0.16819E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.64345E+01  0.00000E+00  0.27205E+03  0.47145E+02
  0.51991E-01 -0.98041E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.36062E+01  0.00000E+00  0.28510E+02  0.26422E+02
  0.70583E+00  0.12183E+01  0.00000E+00  0.00000E+00 -0.15061E+02  0.00000E+00  0.15281E+03  0.22758E+03
  0.47056E+00  0.81222E+00  0.00000E+00  0.00000E+00 -0.10041E+02  0.00000E+00  0.10188E+03  0.15172E+03
 -0.21599E-01  0.55012E-02  0.00000E+00  0.00000E+00  0.27236E+00  0.00000E+00  0.11329E+02  0.19955E+01
 -0.31057E+00  0.90635E-01  0.00000E+00  0.00000E+00  0.38654E+01  0.00000E+00  0.16223E+03  0.28322E+02
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00  0.00000E+00
========================================================================================================
```

Comme on l'a dit dans le texte, on trouve que la dernière matrice est du type $\dfrac{g}{1-g}$, sur la diagonale, ce qui se vérifie bien ; on a aussi donné la matrice avec source unité mais calculée à chaque pas, non pas de sa relation d'avec Φ, mais en incrémentant : $\Psi + d\Psi$ à la sortie de **ker**, ceci pour donner une idée de l'impact des non-linéarités.

En ce qui concerne la relation "pulse sur int" et "step sur var", qui ici n'est pas l'équivalence, puisque dans ce modèle ni B ni $C^\dagger$ ne sont constantes, il apparait quand même une similitude des rtésultats, et la propriété stricte d'égalité pour le systèmes linéaires peut donc servir à obtenir une information grossière dans le cas plus général (cf tableau page précédente) ; il suffit d'abord de considérer les variations des trois matrices $B, C^\dagger$ et D le long de la trajectoire pour évaluer sa pertinence.

Comparaison Bsweep Boreleig

La comparaison est effectuée avec trois masselottes quasi non amorties. La variable de Borel est multipliee 100 fois par $2^{0.25}$ de $\tau = 0.05$ à 141079 .

g(tau) Bsweep	synthe =>	g/1-g	frep(tau) synthe
	2 poles	(+ un double 0)	
	2 paires		3 paires
-2.5035E-05	-2.6746E-05	-2.6746E-05	-2.4973E-05
-3.5406E-05	-3.7417E-05	-3.7415E-05	-3.5310E-05
-4.9951E-05	-5.2432E-05	-5.2430E-05	-4.9923E-05
-7.0696E-05	-7.3569E-05	-7.3564E-05	-7.0581E-05
-9.9788E-05	-1.0333E-04	-1.0332E-04	-9.9779E-05
-1.4116E-04	-1.4528E-04	-1.4525E-04	-1.4104E-04
-1.9954E-04	-2.0441E-04	-2.0437E-04	-1.9935E-04
-2.8183E-04	-2.8776E-04	-2.8768E-04	-2.8173E-04
-3.9814E-04	-4.0534E-04	-4.0517E-04	-3.9809E-04
-5.6269E-04	-5.7112E-04	-5.7079E-04	-5.6237E-04
-7.9486E-04	-8.0489E-04	-8.0424E-04	-7.9424E-04
-1.1226E-03	-1.1345E-03	-1.1332E-03	-1.1213E-03
-1.5849E-03	-1.5990E-03	-1.5964E-03	-1.5823E-03
-2.2365E-03	-2.2533E-03	-2.2483E-03	-2.2315E-03
-3.1545E-03	-3.1744E-03	-3.1644E-03	-3.1445E-03
-4.4460E-03	-4.4699E-03	-4.4500E-03	-4.4264E-03
-6.2610E-03	-6.2893E-03	-6.2500E-03	-6.2220E-03
-8.8066E-03	-8.8402E-03	-8.7628E-03	-8.7296E-03
-1.2369E-02	-1.2409E-02	-1.2257E-02	-1.2217E-02
-1.7338E-02	-1.7385E-02	-1.7088E-02	-1.7042E-02
-2.4242E-02	-2.4299E-02	-2.3722E-02	-2.3668E-02
-3.3788E-02	-3.3855E-02	-3.2746E-02	-3.2683E-02
-4.6900E-02	-4.6980E-02	-4.4872E-02	-4.4798E-02
-6.4769E-02	-6.4864E-02	-6.0913E-02	-6.0828E-02
-8.8890E-02	-8.9003E-02	-8.1729E-02	-8.1632E-02
-1.2109E-01	-1.2122E-01	-1.0812E-01	-1.0801E-01
-1.6355E-01	-1.6371E-01	-1.4068E-01	-1.4056E-01
-2.1884E-01	-2.1903E-01	-1.7967E-01	-1.7954E-01
-2.8995E-01	-2.9018E-01	-2.2491E-01	-2.2477E-01
-3.8057E-01	-3.8083E-01	-2.7580E-01	-2.7565E-01
-4.9547E-01	-4.9578E-01	-3.3145E-01	-3.3130E-01
-6.4139E-01	-6.4176E-01	-3.9090E-01	-3.9074E-01
-8.2830E-01	-8.2874E-01	-4.5318E-01	-4.5302E-01
-1.0711E+00	-1.0717E+00	-5.1730E-01	-5.1715E-01
-1.3919E+00	-1.3925E+00	-5.8203E-01	-5.8189E-01
-1.8220E+00	-1.8228E+00	-6.4574E-01	-6.4561E-01
-2.4056E+00	-2.4065E+00	-7.0644E-01	-7.0633E-01
-3.2031E+00	-3.2041E+00	-7.6214E-01	-7.6204E-01
-4.2963E+00	-4.2975E+00	-8.1123E-01	-8.1115E-01
-5.7950E+00	-5.7965E+00	-8.5286E-01	-8.5279E-01

∘ ∘

-4.3789E+04	-4.3557E+04	-9.9998E-01	-9.9993E-01
-5.2129E+04	-5.1801E+04	-9.9998E-01	-9.9993E-01
-6.2049E+04	-6.1584E+04	-9.9998E-01	-9.9994E-01
-7.3846E+04	-7.3187E+04	-9.9999E-01	-9.9994E-01
-8.7876E+04	-8.6942E+04	-9.9999E-01	-9.9994E-01
-1.0456E+05	-1.0324E+05	-9.9999E-01	-9.9994E-01
-1.2440E+05	-1.2254E+05	-9.9999E-01	-9.9995E-01
-1.4799E+05	-1.4536E+05	-9.9999E-01	-9.9995E-01
-1.7606E+05	-1.7234E+05	-9.9999E-01	-9.9995E-01
-2.0941E+05	-2.0419E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-2.4909E+05	-2.4173E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-2.9629E+05	-2.8592E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-3.5243E+05	-3.3783E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-4.1910E+05	-3.9868E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-4.9848E+05	-4.6983E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-5.9288E+05	-5.5276E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-7.0522E+05	-6.4908E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-8.3842E+05	-7.6051E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-9.9724E+05	-8.8879E+05	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-1.1861E+06	-1.0357E+06	-1.0000E+00	-9.9995E-01
-1.4110E+06	-1.2028E+06	-1.0000E+00	-9.9995E-01

Comparaison entre six méthodes de calcul de $\frac{g}{1-g}(t-\tau)$, par les formules (114, 115), par (97) avec propagateur analytique, et par quatre intégrations dans Mini_ker dont seules *Psit* et *wadj* sont montrées. Il s'agit de l'exercice Lodtka–Volterra au point d'équilibre (linéaire donc). La variable adjointe donne la sensibilité de l'intégrale du transfert à un pulse. L'accord est remarquable. On a laissé de côté les cas *sigma*–step et *Psit (ko_Pert_type=3* qui sont en parfait accord.

time	psit (ko=4)	Boreleig	analytique	1-prec. <->	Adjoint (rev.time)
5.00002E+00	-4.85183E-01	-4.8511E-01	-4.8511E-01	5.1489E-01	5.16483E-01
5.01002E+00	-4.69673E-01	-4.6960E-01	-4.6960E-01	5.3040E-01	5.31980E-01
5.02002E+00	-4.54323E-01	-4.5425E-01	-4.5425E-01	5.4575E-01	5.47316E-01
5.03002E+00	-4.39135E-01	-4.3907E-01	-4.3907E-01	5.6093E-01	5.62489E-01
5.04002E+00	-4.24112E-01	-4.2404E-01	-4.2404E-01	5.7596E-01	5.77498E-01
5.05002E+00	-4.09254E-01	-4.0919E-01	-4.0919E-01	5.9081E-01	5.92341E-01
5.06002E+00	-3.94563E-01	-3.9450E-01	-3.9450E-01	6.0550E-01	6.07018E-01
5.07002E+00	-3.80040E-01	-3.7997E-01	-3.7997E-01	6.2003E-01	6.21525E-01
5.08002E+00	-3.65688E-01	-3.6562E-01	-3.6562E-01	6.3438E-01	6.35862E-01
5.09002E+00	-3.51507E-01	-3.5144E-01	-3.5144E-01	6.4856E-01	6.50027E-01
5.10002E+00	-3.37499E-01	-3.3744E-01	-3.3744E-01	6.6256E-01	6.64019E-01
5.11002E+00	-3.23666E-01	-3.2360E-01	-3.2360E-01	6.7640E-01	6.77835E-01
5.12002E+00	-3.10009E-01	-3.0995E-01	-3.0995E-01	6.9005E-01	6.91476E-01
5.13002E+00	-2.96529E-01	-2.9647E-01	-2.9647E-01	7.0353E-01	7.04939E-01
5.14002E+00	-2.83228E-01	-2.8317E-01	-2.8317E-01	7.1683E-01	7.18223E-01
5.15002E+00	-2.70107E-01	-2.7005E-01	-2.7005E-01	7.2995E-01	7.31327E-01
5.16002E+00	-2.57168E-01	-2.5711E-01	-2.5711E-01	7.4289E-01	7.44248E-01
5.17002E+00	-2.44412E-01	-2.4435E-01	-2.4435E-01	7.5565E-01	7.56987E-01
5.18002E+00	-2.31841E-01	-2.3178E-01	-2.3178E-01	7.6822E-01	7.69541E-01
5.19002E+00	-2.19455E-01	-2.1940E-01	-2.1940E-01	7.8060E-01	7.81909E-01
5.20002E+00	-2.07256E-01	-2.0720E-01	-2.0720E-01	7.9280E-01	7.94089E-01
5.21002E+00	-1.95245E-01	-1.9519E-01	-1.9519E-01	8.0481E-01	8.06082E-01
5.22002E+00	-1.83424E-01	-1.8337E-01	-1.8337E-01	8.1663E-01	8.17884E-01
5.23002E+00	-1.71793E-01	-1.7174E-01	-1.7174E-01	8.2826E-01	8.29496E-01
5.24003E+00	-1.60354E-01	-1.6030E-01	-1.6030E-01	8.3970E-01	8.40916E-01
5.25003E+00	-1.49109E-01	-1.4906E-01	-1.4906E-01	8.5094E-01	8.52142E-01
5.26003E+00	-1.38058E-01	-1.3801E-01	-1.3801E-01	8.6199E-01	8.63173E-01
5.27003E+00	-1.27202E-01	-1.2715E-01	-1.2715E-01	8.7285E-01	8.74009E-01
5.28003E+00	-1.16543E-01	-1.1649E-01	-1.1649E-01	8.8351E-01	8.84648E-01
5.29003E+00	-1.06082E-01	-1.0603E-01	-1.0603E-01	8.9397E-01	8.95089E-01
5.30003E+00	-9.58194E-02	-9.5772E-02	-9.5771E-02	9.0423E-01	9.05331E-01
5.31003E+00	-8.57569E-02	-8.5710E-02	-8.5710E-02	9.1429E-01	9.15373E-01
5.32003E+00	-7.58954E-02	-7.5849E-02	-7.5849E-02	9.2415E-01	9.25214E-01
5.33003E+00	-6.62360E-02	-6.6191E-02	-6.6191E-02	9.3381E-01	9.34852E-01
5.34003E+00	-5.67796E-02	-5.6735E-02	-5.6735E-02	9.4326E-01	9.44288E-01
5.35003E+00	-4.75272E-02	-4.7484E-02	-4.7484E-02	9.5252E-01	9.53518E-01
5.36003E+00	-3.84799E-02	-3.8437E-02	-3.8437E-02	9.6156E-01	9.62544E-01
5.37003E+00	-2.96385E-02	-2.9597E-02	-2.9597E-02	9.7040E-01	9.71364E-01
5.38003E+00	-2.10039E-02	-2.0963E-02	-2.0963E-02	9.7904E-01	9.79976E-01
5.39003E+00	-1.25772E-02	-1.2537E-02	-1.2537E-02	9.8746E-01	9.88381E-01
5.40003E+00	-4.35907E-03	-4.3203E-03	-4.3202E-03	9.9568E-01	9.96577E-01
5.41003E+00	3.64947E-03	3.6873E-03	3.6874E-03	1.0037E+00	1.00456E+00
5.42003E+00	1.14477E-02	1.1484E-02	1.1485E-02	1.0115E+00	1.01234E+00
5.43003E+00	1.90346E-02	1.9070E-02	1.9071E-02	1.0191E+00	1.01990E+00
5.44003E+00	2.64096E-02	2.6444E-02	2.6445E-02	1.0264E+00	1.02725E+00
5.45003E+00	3.35718E-02	3.3606E-02	3.3606E-02	1.0336E+00	1.03439E+00
5.46003E+00	4.05205E-02	4.0553E-02	4.0553E-02	1.0406E+00	1.04132E+00
5.47003E+00	4.72550E-02	4.7287E-02	4.7287E-02	1.0473E+00	1.04803E+00
5.48003E+00	5.37744E-02	5.3805E-02	5.3805E-02	1.0538E+00	1.05452E+00
5.49003E+00	6.00783E-02	6.0108E-02	6.0108E-02	1.0601E+00	1.06080E+00
5.50003E+00	6.61658E-02	6.6195E-02	6.6195E-02	1.0662E+00	1.06687E+00
5.51003E+00	7.20364E-02	7.2064E-02	7.2064E-02	1.0721E+00	1.07271E+00
5.52003E+00	7.76894E-02	7.7716E-02	7.7716E-02	1.0777E+00	1.07834E+00
5.53003E+00	8.31243E-02	8.3150E-02	8.3150E-02	1.0831E+00	1.08375E+00
5.54003E+00	8.83405E-02	8.8365E-02	8.8365E-02	1.0884E+00	1.08894E+00
5.55003E+00	9.33374E-02	9.3361E-02	9.3361E-02	1.0934E+00	1.09392E+00
5.56003E+00	9.81144E-02	9.8137E-02	9.8137E-02	1.0981E+00	1.09867E+00
5.57003E+00	1.02671E-01	1.0269E-01	1.0269E-01	1.1027E+00	1.10320E+00
5.58003E+00	1.07007E-01	1.0703E-01	1.0703E-01	1.1070E+00	1.10751E+00
5.59003E+00	1.11122E-01	1.1114E-01	1.1114E-01	1.1111E+00	1.11160E+00
5.60003E+00	1.15015E-01	1.1503E-01	1.1503E-01	1.1150E+00	1.11547E+00

Table des matières