Du SLT Circulant*

La question sous-jacente est celle du sens physique d'une grande valeur de temps propre du système à un instant du SLT.

Analyse du problème

On commence par une remarque $[\mu]$[1] fixant la différence entre le système considéré dans son évolution le long de la trajectoire de référence $\mathcal{T}$ et le système caractérisant le SLTC.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t \eta_{ref}(t) & = & G(\eta_{ref}(t)) \\ \partial_t \delta\eta_{ref}(t) & = & G(\eta_{ref}(t)) + A(t)\delta\eta_{ref}(t) + u(t) \end{array} \right. \tag{1}$$

L'évolution le long de $\mathcal{T}$ incrémentale $\delta\eta$[2] est solution de l'équation (1), la seconde version donne une portion de la trajectoire du SLT local, le système étant soumis à ses conditions limites, forçage, etc, indiqués symboliquement par u(t) au second membre. (vu comme ça, ZOOM résout des systèmes d'équations transcendantes ?). On peut s'arrêter un peu sur cette formulation, car elle est moins banale que l'habitude peut nous la faire apparaître. Explicitons un peu en laissant tomber le x_{ref}.

$$\partial_t \delta\eta(\tau) = G(\eta(t)) + A(t)\delta\eta(\tau) \tag{2}$$

cette forme donne la variation de la vel (vitesse d'évolution) quand on s'éloigne du point d'observation P$(\eta(t))$. On s'en éloigne de τ, qui est paramétrise l'abcisse curviligne. La matrice A étant considérée comme constante, un critère donné fixe l'étendue du voisinage de P dont la dynamique reste définie par le SLT en P, **en amont**[3] comme en aval, le long de $\mathcal{T}$.

Dans l'étude du SLTC, au contraire, pour toute perturbation $\Delta\eta$, on a :

$$\partial_t \Delta\eta(t) \quad = \quad A(t)\Delta\eta(t) \tag{3}$$

*SLTC, Al1, Octobre 2003

[1] on notera de cette façon la couche stémologique de référence Φ, θ, μ, ν, α, et $[[\sigma]]$ une remarque sur la méthodologie.

[2] par défaut, les symboles grecs sont des vecteurs et les majuscules des matrices.

[3] point à reprendre pour l'horreur Borelienne.

Autrement dit, le vecteur $\delta\eta_{ref}$ est dans la variété différentielle ($\mathcal{VD}$) balayée par $\Delta\eta$ subsumée par le SLT (!)[1]. Piétinons la aussi cette formule pour bien en comprendre le sens. Si P est un point fixe, $G(\eta(t)) = 0$. Si une perturbation extérieure éloigne P de son état d'equilibre de $\Delta\eta$, (3) décrit l'avenir de cette perturbation, le type de stabilité du système en P etc. Pris dans sa forme en (t), il s'agit cette fois de la vel de l'écart vectoriel entre deux points circulants - genre vitesse d'élongation d'un élastique tendu entre deux satellites jumeaux.

On va explorer le problème de l'analyse du SLTC d'abord sur une portion de $\mathcal{T}$, puis de manière intégrale.

1 Analyse au rez-de-TEF

Le système (3) définit un SLT glissant sur la trajectoire. Y est associé la matrice $A(t) \stackrel{def}{=} A(\delta\eta_{ref}(t))$ qui recèle toute la dynamique. On introduit donc une question concernant $[\mu]$ la continuité de A, ou $[\theta]$ sa "physicalité" (realisability). On s'attend donc à deux niveaux d'analyses : a) en toute généralité, on va chercher la meilleure expression de l'information dynamique disponible ; b) on amorcera une typologie de la physique du modèle, et aussi suggérer des cas simples facilitant l'analyse.

1.1 Approche générale

Le cadre général consiste à étudier les déformations de la variété différentielle $\{SLT(t)\}$ le long de $\mathcal{T}$, et d'emblée on peut penser à mettre en relation les comportements de $\Delta\eta$ et $\delta\eta_{ref}$.

On commence par l'examen de la continuité des caractéristiques dynamiques en comparant $A(t)$ à $A(t+\delta t) = A(\eta_{ref}(t) + \delta\eta)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \partial_t\Delta\eta(t+\delta t) &= A(t+\delta t)\,\Delta\eta(t+\delta t) \qquad (\mathcal{T}) \\ &= (A + \delta t\,\partial_t A)\,(\Delta\eta + \delta t \partial_t \Delta\eta) \\ &= [A + \delta t\,(\partial_t A + A^2)]\,\Delta\eta) \, + \mathcal{O}(\delta t^2) \end{aligned} \tag{4}$$

C'est ce passage de la matrice A à $[A+\delta t\,(\partial_t A+A^2)]$ qui explicite le glissement du SLT le long de $\mathcal{T}$[2].

- autre forme donnant directement le lien entre les $\partial_t\Delta\eta$:

$$\partial_t\Delta\eta(t+\delta t) = [I + \delta t\,(\partial_t A A^{-1} + A)\ ]\,\partial_t\Delta\eta \tag{5}$$

ou encore, du fait que $\quad \partial_t A^{-1} = A^{-1}\,\partial_t A\,A^{-1}$:

$$= \{\, I + \delta t A\,[I + \partial_t(A^{-1})\ ]\}\,\partial_t\Delta\eta \tag{6}$$

[1] $[\alpha]$ pas faire attention, en général, ça passe.

[2] on pourrait noter d_t cette dérivée, car elle est analogue à ce que les mécaniciens de chez Citroën appellent "dérivée particulaire".

Dans les deux cas, on voit apparaître : a) une évolution autonome[1] avec $A \longrightarrow A + \delta t A^2$; b) non-autonome $\rightarrow + \delta t\ \partial_t A$.

a. évolution autonome $\longrightarrow A^2$

$A^2 = UwV^\dagger UwV^\dagger$(2). $VU^\dagger$ redistribue les w_i par la matrice des produits scalaires $[< v_i\, u_j >]$. Si A est hermitienne (ou symétrique), V et U se confondent et $A^2 = Uw^2U^\dagger$ si toutes les v.p. w_i sont distinctes.

Rq : $A(I + \delta t A)$ ne fait qu'exprimer localement ; $\partial_t \Phi(t, 0) = A\,\Phi$. Ce qui est frustrant, c'est cette façon d'aller chercher les dérivées de A, qui n'apparaissent pas explicitement dans l'expression du propagateur ; une idée ?

b. évolution non-autonome $\longrightarrow \partial_t A$

$$\partial_t A = \partial_t U w V^\dagger + U \partial_t w V^\dagger + U w \partial_t V^\dagger \tag{7}$$

On a donc :

• deux contributions sans changement de direction $\mid u >$:

les deux derniers termes de (7). On a à la fois une variation des temps propres et une nouvelle sensibilité aux perturbations qui sollicite des vecteurs bi-orthogonaux aux colonnes de V.

• une rotation de $\{U\}$:

c'est-à-dire le premier terme de (7), qui projette la perturbation sur les vecteurs orthogonaux à la base des colonnes de U.

En effet, $[\mu]$ $V^\dagger V = I \Longrightarrow \partial_t V^\dagger\ V + V^\dagger \partial_t V = 0$ *; comme* $[\partial_t V^\dagger V]^\dagger = V^\dagger \partial_t V$, $\partial_t V^\dagger V$ *est anti-symétrique, et donc* $\partial_t \mid V >$ *est bien orthogonal à* $\mid V >$, *mais* $\partial_t V^\dagger V$ *n'est pas nulle*[3]. *De même pour la forme projecteur :* $\partial_t V\ V^\dagger$.

c. remarque à propos de SVD et temps propres

A proprement parler, les v.s. ne définissent des temps caractéristiques qu'indirectement, du fait que leur carré est associé aux valeurs propres de $A^\dagger A$ ou $AA^\dagger$. Mais leur signe est arbitraire, la matrice composée reste inchangée si on change le signe de w_i et la colonne associée, soit U_i, soit V_i. La convention est de les prendre à valeur positive. Donc, c'est le lien entre chaque couple de vecteurs $\mid u >$ et $\mid v >$ qui les définit complètement, dans leur contribution au propagateur $\Phi(t + \delta t, t) = exp\{UwV^\dagger \delta t\}$. Sur un cycle limite, par exemple, on trouve que deux v.s. sont égales et les deux couples de vecteurs associés sont en opposition de phase (alors que les v.p. sont complexes conjuguées, avec les V.P. à composantes elles aussi conjuguées).

[1] les automaticiens disent "stationnaire".

[2] SVD de A, U et V unitaires, w diagonale

[3] c'est peut-être ce que l'on dénomme par "bi-orthogonalité" dans le articles

A long terme, (1) montre que l'état aura tendance à s'aligner le long de $\mid u_1 >$, dit vecteur local de Lyapunov, correspondant à la plus grande v.s. w_1. Mais contrairement au cas des V.P. orthogonaux, la projection de l'état sur les $\mid v_{j\neq 1} >$ continuera à se projeter sur toute la base $\{U\}$. Dans ce sens, un système à matrice d'évolution normale suit une trajectoire dépendant de la plus faible inertie du système, ce que l'on peut voir comme le fait que les plus fortes inerties empêchent la trajectoire de s'écarter de $\mid u_1 >$. Mais alors, pour la même raison, elles devraient aussi empêcher le système de suivre $\mid u_1(t) >$ pour les systèmes non-autonomes (c'est à ces questions qu'il faut répondre).

Dans le cas simple, l'inertie lourde n'est analysable qu'en terme de perturbation orthogonale. Ceci n'est plus vrai dès que la matrice A est non normale (les temps propres se combinent en permanence, ou autrement dit, le système est soumis en permanence à des perturbations auto-générées. Ceci n'étant qu'une remarque $[\mu]$, parce que l'intégration numérique sollicite tout l'espace du SLT à chaque incrément !

On peut symétriquement questionner la signification physique des v.p. lorsque les V.P ne sont pas orthogonaux. Ainsi, pour exciter l'un au maximum, il faudra le faire en considérant les vecteurs bi-orthogonaux aux autres, etc. Ou comment physiquement rester strictement alignés à un V.P. autonome ?

Une décomposition très utile à ce type d'interrogation est celle du théorème de Schür : toute matrice peut se mettre sous la forme $A = Q(D+T)Q^*$ (dans le corps des complexes), avec Q et sa conjuguée unitaires, D diagonale et T triangulaire sup avec $(diag T = 0)$. Cette forme, comme pour SVD, privilégie la base d'analyse (U, V ou Q), contrairement à la forme aux éléments propres. Il me semble que l'on est dans de meilleures conditions pour la sémantique physique (qui conteste ?). Ainsi, la normalité se dit $T = 0$, et on voit comment les "inerties" (w^{-1}, D^{-1}) sont imbriquées dans le cas général. Il serait sans aucun doute utile d'établir les relations entre Q et U, V, w, et D, T. Une idée ?

d. remarque à propos de la conjecture de G&M[1].

Cette conjecture, qui n'est pas sans lien avec la question liminaire, est qu'un système ayant des temps caractéristiques longs est tel que les non-linéarités rapides sont filtrées par les inerties et se présentent comme une source à un système "filtré", c'est-à-dire ne prenant en compte que les réponses lentes, qui les voit comme une source (non nulle du fait des non-linéarités). C'est ainsi qu'ils interprètent le rôle des fluctuations synoptiques sur la tendance lourde du climat. On voit comment les w_i se combinent dans les produits matriciels. Même dans le cas du système autonome, leur redistribution par $V^\dagger V$ provoque des diminutions de certaines des w les plus fortes, c'est-à-dire provoquent des réponses lentes !

[1] Goodman & Marshall in *J. Atmos. Sci.* 2002

Explicitons cet aspect en considérant le passage $A \longrightarrow A + \delta t A^2$. Comment se transforment les v.s. ? On a d'abord le fait que w_i^2 sont les v.p. de $AA^\dagger$ car $AA^\dagger = UwV^\dagger VwU^\dagger = Uw^2U^\dagger$. peu après sur $\mathcal{T}$, on a :

$$\begin{aligned}
AA^\dagger(t+\delta t) &= A\,(I+\delta t A)\,(I+\delta t\,A^\dagger)\,A^\dagger & (8)\\
&= A\,[I+\delta t\,(A\,+\,A^\dagger)\,]\,A^\dagger + \ldots \quad \mathcal{O}(\delta t^2) & (9)\\
&= U\,[\,w^2 +\,\delta t\,(wV^\dagger U w^2\,+\,w^2U^\dagger V w)\,]\,U^\dagger & (10)
\end{aligned}$$

Pour les matrices normales, les v.p. ne se mélangent pas, et on peut donc considérer que le passage $w^2 \longrightarrow w^2\,+2\delta t\,w^3$ est la forme simple sans changement de dynamique. Dans le cas général, il apparait une forme symétrique en facteur de δt dont la diagonalisation se traduira en rotation de U et en changement des v.p., suivant les valeurs de $V^\dagger U$. Pb : comment formuler l'effet de la rediagonalisation sur la modif des v.p. ?

Il apparait aussi qu'un critère important, en plus de la non-linéarité du système (c'est-à-dire A non autonome), soit sa normalité. (cf en annexe un résume de l'article de Ioannou sur l'élargissement des largeurs de fluctuations).

1.2 Parcours de la trajectoire.

L'idée est ainsi en premier de relier la transformation du $\{SLT\}(t)$ à la variation - dans cette $\mathcal{VD}$, du vecteur $\delta\eta$ en parcourant $\mathcal{T}$. On peut penser a priori, par exemple, que la variation d'angle entre $\Delta\eta$ et $\delta\eta$ est porteuse d'information moins dépendante du système de référence.

On devrait donc s'intéresser à la déformation de $\Delta\eta$, soit : $d\Delta\eta$, ce qui conduit à une formulation en tenseur de déformation. On peut le décomposer comme Helmholtz, c'est-à-dire une somme de translation, rotation et dilatation. Il s'agira de mettre en relation A avec ces trois termes pour voir où interviennent les temps propres du système. On est donc conduits à examiner la forme (5) :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \partial_t A &=& \partial_t U w V^\dagger + U \partial_t w V^\dagger + U w \partial_t V^\dagger \\ A^{-1} &=& V U w^{-1} U^\dagger \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow$$

$$\partial_t A A^{-1} = \partial_t U U^\dagger + U w^{-1} \partial_t w U^\dagger + U w \partial_t V^\dagger V w^{-1} U^\dagger \qquad (11)$$

Le second terme de droite est symétrique, et le premier, d'après la *remarque* du 1.1b. est anti-symétrique. Qu'en est-il du troisième ?

$$\begin{aligned}
[Uw\partial_t V^\dagger V w^{-1} U^\dagger]^\dagger &= U w^{-1} [\partial_t V^\dagger V]^\dagger w U^\dagger & (12)\\
&= -\,[U w^{-1} \partial_t V^\dagger V w\, U^\dagger] & (13)
\end{aligned}$$

et donc, la bonne surprise, c'est que la décomposition spectrale de A fournit directement une décomposition *à la Helmhlotz*[1] !

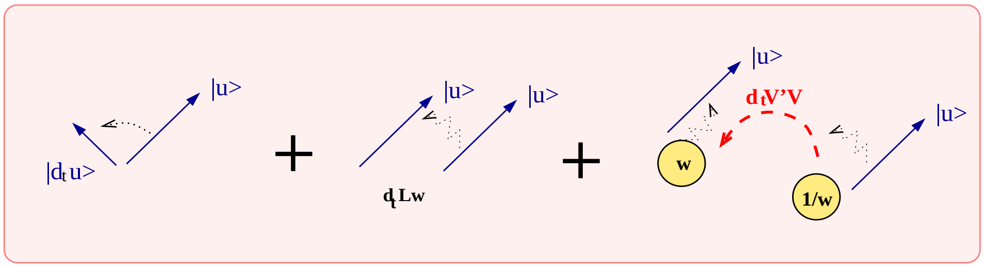
[1] si quelqu'un comprend le sens profond de cela, somment preneurs.

Ainsi, de l'expression (5), on tire une interprétation des déformations de la $\mathcal{VD}$ géométrisant le SLT le long de $\mathcal{T}$:

- • I est une translation ;
- • $\partial_t U U^\dagger + U w\, \partial_t V^\dagger V w^{-1} U^\dagger$, tenseur antisymétrique, correspond à une rotation ;
- • et enfin, $U w^{-1} \partial_t w\, U^\dagger$, symétrique, est le tenseur de déformation ; il est le seul qui comprenne une modification explicite des termes d'inertie du système ;

Un résultat remarquable me semble-t-il est que les temps caractéristiques du système interviennent de façon étonnante dans le système glissant : $\partial_t L w_i$ en déformation d'une part, $w \partial_t V^\dagger V w^{-1}$ en rotation d'autre part. Un examen minutieux de ces termes devrait nous permettre de comprendre en profondeur ce qu'est est système non-$\mathcal{L}$ (non ?).

¶ *on pourrait tester la pérennité de l'inertie la plus forte en analysant la projection de $\partial_t \Delta\eta$ sur $\mid u_n >$. répondre aussi aux questions sur l'effet des inerties.*



Schématisation des opérations subies par une perturbation appliquée à droite des trois expressions matricielles de (11).

a. la rotation.

$UU^\dagger$ est le projecteur orthogonal sur $\mathcal{I}m(A)$ $\quad (\mid u >< u \mid)$. Il définit donc l'image de A. $\mid \partial_t u >< u \mid$ projette sur une base $\mid \partial_t u >$ dans chaque E.V. orthogonal à chaque $\mid u_i >$. Ceci sans inertie : on a donc une simple rotation de l'espace $\mathcal{I}m(A)$.

Rassemblons les deux termes de rotation en explicitant le fait que l'on observe dans l'espace des effets : $\{U\}$. On multiplie le premier terme par $UU^\dagger = I$:

$$U \left\{ -\partial_t U^\dagger U + U w\, \partial_t V^\dagger V w^{-1} \right\} U^\dagger \tag{14}$$

on a aussi remplacé $U^\dagger \partial_t U$ par $-\partial_t U^\dagger U$.

Si on note $R^u_{ij} = \partial_t U^\dagger U$, on peut expliciter l'anti-symétrie de ce tenseur en utilisant ϵ_{ijk} le tenseur antisymétrique d'ordre deux et la convention d'Einstein de la somme implicite sur indices répétés : $R^u_{ij} = \epsilon_{ijk} \theta^u_k$. De même pour $R^v_{ij} = \partial_t V^\dagger V = \epsilon_{ijk} \theta^v_k$. On retrouve un pseudo-vecteur vitesse de rotation θ_k, classique en 3D, avec $\theta_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} R_{ij}$.

En entrant à gauche une vitesse d'évolution de la perturbation alignée avec $\mid u_l >$ par exemple, on a par le deuxième terme de (14) a) une "accélération" (multiplication par w_l, b) suivie d'une rotation par R^v_{jl}, et enfin c) des décélérations ($\frac{1}{w_i}$) le long des V.S. $\mid u_i >$.

On a envie d'opposer les deux termes : le premier exprimant le fait que l'inertie du système le conduit à se retrouver dans un espace qui a tourné, alors que le deuxième exprime un déformation active. Attention à ce genre de vision, car la rotation de $\{U\}$ fait partie tout autant du comportement du modèle. De plus, il faudrait compter dans la déformation, uniquement la différence entre les rotations de $\{U\}$ et de $\{V\}$. Bref, la vison présentée reste malgré tout cinématique, et j'ai du mal à interpréter plus finement la forme obtenue. A-t-on par exemple le droit de dire que la rotation par le premier terme se ferait sans inertie par la simple raison que les v.s. n'y apparaissent pas ? Il me semble qu'il est difficile d'aller beaucoup plus loin en toute généralité, mais j'aimerais me tromper.

Qui voit comment on pourrait réarranger les termes de rotation pour mieux séparer les aspects cinématiques élémentaires ? genre intro de la différence entre rotations de $\{U\}$ et de $\{V\}$.

b. la déformation.

La base $\{U\}$ apparait comme base inertielle (les axes principaux de l'ellipsoïde des déformations sont alignés avec les axes de cette base). On a donc directement dans la diagonale les déformations principales de la $\mathcal{VD}$. Étrangement, c'est la variation **relative** des w_i qui intervient (∂tLw).

c. complément.

La forme (5) montre que l'expression matricielle en facteur de δt, extraite du propagateur exprimant $\partial_t \Delta\eta(t + \delta t)$ en fonction de $\partial_t \Delta\eta(t)$, n'est autre que la "matrice d'évolution" de l'accélération du processus :

$$\partial^2_{t^2} \Delta\eta = (A + \partial_t A A^{-1})\, \partial_t \Delta\eta \tag{15}$$

Il est raisonnable que les inerties de rotation n'apparaisent que sous cette forme. On sent derrière cette forte sentence une attraction par la mécanique qu'il serait peut-être utile d'évacuer. Faut-il reprendre les idées et vocabulaire des "bond-graphers[1]" ?

[1] pour les jeunes oies édifiantes de la secte : il s'agit d'une autre secte d'origine nordique des années 80 qui tentaient d'unifier les sciences physiques en réseaux RLC (je caricaturise peut-être un peu).

1.3 Série de remarques.

- $[TEF]$ ce qui n'est pas résolu dans le SLT, c'est $\partial_t A A^{-1}$, donc en particulier la rotation de U et V. On pourra consulter à ce sujet l'exemple édifiant de JYG sur le tourbillon.

- $[[\sigma]]$ Ceci semble suggérer de coller plus au SLTC, en prenant un repère qui suive la trajectoire, *à la manière de Frenet*, si l'approche cinématique s'avère suffisante.

- $[\theta]$ A quel moment introduire les formes de dépendance de A en $\delta\eta_{ref}$? En physique, on a de nombreux modèles tels que $\partial_t A$ soit à coefficients constants. C'est le cas des deux Lorenz chaotiques par exemple, ça semble moins fréquent pour le modèles macro-économiques.

- $[[\sigma]]$ Pourquoi Frenet ? Parce que les parties rotations apparaissent essentiellement sans inertie, alors que le terme en $\partial_t w$ permet une typologie de continuité physique du modèle - ou statistique, cf ci-dessous, en analyse intégrale.

- $[[\sigma]]$ on pourra éventuellement attaquer concrètement des version simplifiées. Un cas de modèle où on a explicitement accès à l'évolution de UV et $w(t)$; Ou des formes particulières de A : si $A(t) = Af(t)$ produit d'une matrice autonome par une fonction scalaire du temps, alors : $\Phi(t,0) = exp\{A \int_0^T f(t)dt\}$.
  Voire aussi par la méthode des perturbations de Poincaré : $A(t) = Bf(t) + \epsilon Cg(t)$; dans cas, soit les matrices B et C commutent, et le propagateur est : $\Phi(t,0) = exp\{B \int_0^T f(t)\ dt\}\, exp\{C \int_0^T g(t)\ dt\}$, soit elles ne commutent pas. La méthode consiste alors à développer η selon les puissances de ϵ ... et on obtient un système différentiel de dimension multipliée par l'ordre que l'on garde.

2 Analyse intégrale du SLTC

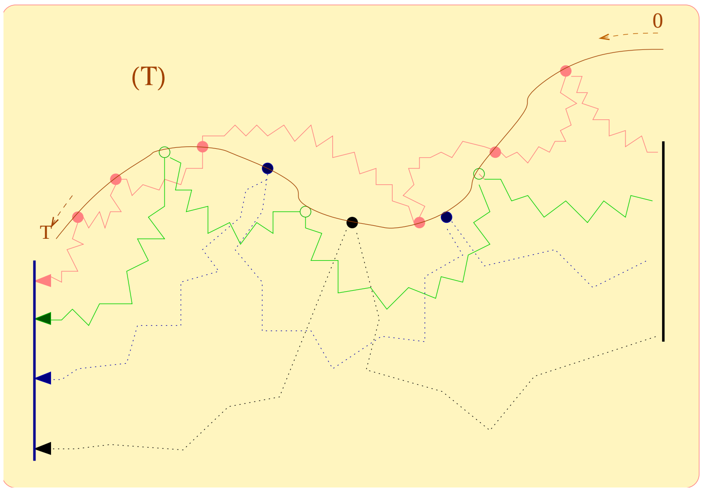
La forme la plus générale de la définition du propagateur non autonome

$$\partial_t \Phi(t,0) = A(t)\Phi(t,0) \tag{16}$$

est :

$$\begin{aligned}\Phi(T,0) \;&=\; \int_0^T dt A(t) \;+\; \int_0^T dt(At)\int_0^t ds A(s) \\ &+\; \int_0^T dt A(t)\int_0^t ds A(s)\int_0^s dr\, A(r) \;+\; \ldots \end{aligned} \tag{17}$$

On peut interpréter cette formulation en introduisant une perturbation à droite d'un opérande, avec des points de la trajectoire paramètrée par le temps : s, suivi de r à gauche, puis à t (dans un schéma à trois interactions). Chaque intervalle comme $\{0,s\}$ intervient par une moyenne de $A(r)$; on a donc une sorte de discrétisation de l'intégrale, ce qui suggère un calcul complet du propagateur de cette manière. L'expression (17) du propagateur



On lance des perturbations à droite, qui auscultent le système un certain nombre de fois. On peut toujours calculer une intégrale comme (17) par Monte-Carlo.

FIG. 1 – Propagateur *à la Feynman*

est en particulier intéressante pour intuiter le fonctionnement des systèmes chaotiques ou fortement non-linéaires, parce qu'ils explicitent les interactions entre des sous-propagateurs ayant la forme d'une pdf de modification des perturbations. Cette expression et sa vision par la Fig. 1, suggère une vision intégrale de l'impact des accidents pouvant accompagner le suivi d'une trajectoire. Ce qui relance de nouveau l'idée de Monte-Carlo.

3 Analyse de stabilité.

On simplifie l'analyse précédente en ne considérant que l'amplitude de l'écart à la trajectoire avec le quotient de Rayleigh de A. La question est celle de la croissance de l'écart à la trajectoire de référence :

$$< \partial_t \Delta\eta \, \partial_t \Delta\eta > = < \Delta\eta A^\dagger \, A \Delta\eta >$$

en normalisant cette croissance, on obtient le quotient de Rayleigh :

$$\frac{< \Delta\eta A^\dagger \, A\Delta\eta >}{< \Delta\eta \, \Delta\eta >} \tag{18}$$

Rappelons à cette occasion l'analyse de Goodman et Marshall (2002) : la croissance la plus lente est associée à la plus grande v.s. de $A^\dagger A$, et aussi à la plus grande amplitude de perturbation par u en stationnaire, car on considère alors :

$$\frac{< \Delta\eta \, \Delta\eta >}{< u \, u >} = \left\{ \frac{< \Delta\eta A^\dagger \, A\Delta\eta >}{< \Delta\eta \, \Delta\eta >} \right\}^{-1}$$

qui, en effet, est maximum pour les plus faibles v.s. de $A^\dagger A$. Notons à ce sujet que cette vision me semble trompeuse, parce qu'elle ne considère pas le changement de la matrice A accompagnant le passage du mode instationnaire à stationnaire, où alors A explicite une compensation entre phénomènes ; autrement dit, "A présente son noyau à u" [1].

Du point de vue du SLTC, on peut calculer :

$$< \Delta\eta(t) A(t)^\dagger \, A(t)\Delta\eta(t) > = < \Delta\eta(0) \, \Phi(t)^\dagger A_f{}^\dagger \, A_f \Phi(t) \, \Delta\eta(0) > \tag{19}$$

où $\Phi(t)$ est plus explicitement $\Phi(t, 0)$.

C'est donc l'examen de $\Phi(t)^\dagger A(t)^\dagger A(t)\Phi(t)$ qui donne la dynamique sur la durée le long de $\mathcal{T}$, en réponse à un forçage persistant $u(\infty) = u$. En stationnaire, A_f finale est constante. Plus précisément, on suppose que $u(t)$ n'a pas éloigné le système de sa trajectoire de référence $\longrightarrow$ c'est merdique ce que tu dis ! mais ça vaut la peine d'expliciter en quoi la conjecture de G&M est valide pour les systèmes $\neg\mathcal{L}$. à suivre en section 5.

4 Introduction de typologie physique du modèle

Lorsque l'on conçoit un modèle, on a des implicits forts ; il s'agirait de les expliciter pour arriver à des hypothèses les plus générales possibles sur les propriétés du système. S'agit donc [[σ]] d'établir des liens physico-mathématiques $\frac{[\theta]}{[\mu]}$. Pour expliciter ce à quoi on peut aboutir, une ébauche :

[1] je trouve que cette expression mérite sa promotion médiatique auprès des Notaires.

- systèmes à réduction : on cherche des paramètres macroscopiques à partir de simulation détaillée ;
- système d'évolution : analyse de couplage, de sensibilités. On a des catégories de système classiques, linéaires ou non, à matrice normale ou non, etc
- systèmes à échelles : on interroge les effets de couplage entre au moins deux échelles de processus, ou d'effet d'une source de bruit sur le système... cf méca-flu /tenseur de Reynolds. C'est ce type de système auquel on est confronté avec le climat, si on adhère aux hypothèses de G&M.

et quelques types mathématisés de modèles glanés sur le web :
- Matrice d'évolution Hermitienne, normale ;
- Formes Hamilton-Poisson (systèmes "gradients")
- Forme d'absorbtion-diffusion (cf équations de Kubelka-Munk)

5 Illustrations diverses sur des exos

- système asymptotiquement stable sollicité par un bruit gaussien distribué (Ioannou jas 1995) ; on pourra en particulier ré-introduire un système de transferts croises à matrices constantes couplant deux systèmes d'état à échelles contrastées, expliciter ces hypothèse de temps longs (= semi forçage) et de temps courts (semi bruit) pour les tranferts dans chaque système d'état ; voir exo possible couplant Lorenz 63 à une couche de mélange océanique ?
- Analyse de système tournant et considérations sur les systèmes périodiques ou quasi (intro facile à l'approche de Fréchet) ;
- comportement intégraux comparés des deux Lorenz (1963 et 84) ; faudra un document à part.

ceci est un commentaire hors cadre pour mémoire :

Rq - $[[\sigma]]$ en assimilation on a intervention de Φ et $\Phi^\dagger$. Étant donné le lien propa fwrd et rad, y aurait-il du NEF à introduire ?

6 Retour au TEF

- voir comment une analyse sans V.P. peut se faire. On a la trace. Que dire sur :

1/ une observable $\varphi =< c \mid \Delta\eta$ si c à coefs constants.

2/ et comment boucler en prenant $u(t)$ dépendant ou non de φ? -¿ Gâteaux.