Analyse de rétroactions

Mars 2008*

Texte destiné a accompagner la lettre publiée dans Euro. Phys. Letters (pour sa première partie). Souvenez-vous, c'était fin 2007, après " l'absentee", il y eu force échange sur les gains NL, dont un papier long de stepH enrougi par stb. Le modèle de rétroaction suivant en est issu. Une deuxième partie concerne notre discussion de la décomposition des rétroactions initiée lors de "l'applaudie", avec l'exemple de jyg ajoutant une rétroaction par albedo au modèle ramassé. Enfin, on examine le point de vue de Lu & Cai d'un article en progrès pour Climate Dynamics.

1 Un modèle ramassé de rétroaction Vapeur d'Eau

On considère le modèle suivant : une couche de mélange océanique de capacité calorifique C_o et de température homogène T_s reçoit un flux solaire entrant F_{SW}. Cette couche de mélange émet à son tour en long-wave un flux F_{LW} à travers une atmosphère partiellement opaque du fait de la présence de la vapeur d'eau et du CO_2.

L'équation de conservation de l'énergie est :

$$C_o \frac{dT_s}{dt} \quad = \quad F_{\mathrm{SW}} - F_{\mathrm{LW}} \tag{1}$$

De manière plus stricte, le système considéré englobe l'atmosphère, dont on néglige la capacité devant celle de l'océan. On utilise alors un modèle dit "d'altitude équivalente" pour l'évaluation du LW[1].

Ce modèle suppose que de l'espace, on voit une source noire émettant à une température correspondant à une altitude atmosphérique z_e :

$$F_{\mathrm{LW}} \quad = \quad \sigma T_{\mathrm{atm}}(z_e)^4$$

On introduit l'effet de la concentration en gaz à effet de serre en remarquant que plus l'atmosphère est opaque, plus élevée sera l'altitude d'émission (puisqu'on cache un peu plus les basses couches). Ici on choisit une relation linéaire du contenu en vapeur d'eau Q :

$$z_e = z_e^0 + \alpha Q \tag{2}$$

On introduit encore les hypothèses les plus simples pour l'atmosphère : un gradient vertical (lapse-rate $-\gamma_z$) constant, une humidité relative constante qui permet un calcul du contenu total en vapeur d'eau dépendant simplement de T_s et de la relation de Clausius-Clapeyron :

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{LW}} &= \sigma(T_s - z_e\gamma_z)^4 \\ Q = f(T_s) &= \nu \exp\left(\frac{L_v}{R_m}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right)\right) \end{aligned} \tag{3}$$

*dernières mises=à-jour :2 mars 2010

[1]voir de bonnes justifications dans Colman 2000, Clim.Dyn, "on the vertical extent", à savoir que WV rétro est maximale dans la upper-tropo tropicale, et aussi max dans la zone 450–750 hPa.

Le modèle comporte ainsi une seule variable d'état (T_s) et deux variables de transfert z_e et Q. On obtient des résultats cohérent avec le **jas** pour les valeurs suivantes des paramètres :

paramètre	valeur
C_o	$1.257\ 10^8 \mathrm{J\ K^{-1}m^{-2}}$
F_{SW}	$343\ \mathrm{Wm^{-2}}$
σ	$5.67\ 10^{-8}\ \mathrm{W\ m^{-2}K^{-4}}$
γ_z	$6.5\ \mathrm{K\ km^{-1}}$
z_e^0	$1\ \mathrm{km}$
α	$0.02\ \mathrm{km\ m^2\ kg^{-1}}$
ν	11.05
$\frac{L_v}{R_m}$	$5423\ \mathrm{K}$
T_0	$273.15\ \mathrm{K}$

On structure ce modèle en considérant la **boucle de rétroaction** suivante :

- soit une perturbation de T_s (provoquée par exemple par un forçage de la concentration de CO_2) ;
- l'élévation de T_s provoque un accroissement d'évaporation (1)
- et ainsi de la vapeur d'eau atmosphérique Q ;
- alors z_e croit, abaissant le flux LW ;
- le bilan énergétique devient positif et T_s croit encore plus.

On a donc bien affaire à un gain de rétroaction positif, résultat classique lorsque l'on ne considère que la réponse lente du système. Par rapport au modèle ClimSI, on a ici supprimé la réponse transitoire de l'atmosphère, et par là supprimé une réponse transitoire rapide à gain négatif (se référer à l'article de **jas**).

La structure envisagée correspond quasi au modèle ainsi formulé :

$$\begin{aligned} C_o \frac{dT_s}{dt} &= F_{SW} - \sigma [T_s - z_e(Q(T_s))\gamma_z]^4 \\ \varphi &= T_s \end{aligned} \tag{4}$$

(on laisse encore la variable T_s partout).

Pour se placer dans l'hypothèse de linéarité, on prend le système linéaire tangent à ce modèle, autour de son état stationnaire, $T_s = 290$ K :

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta T_s}{dt} &= \frac{1}{C_o}\Delta F_{SW} - \overbrace{4\frac{\sigma}{C_o}(T_s - z_e\gamma_z)^3}^{A} \Delta T_s + A\gamma_z \Delta z_e \qquad (5) \\ \Delta\varphi &= \Delta T_s \quad , avec \\ \Delta z_e &= \alpha \Delta Q \quad et \quad \Delta Q = \beta \Delta T_s \ , \ et\ où \\ \beta &= \nu \frac{Lv}{T_s^2 R_m} \exp\left(\frac{L_v}{R_m}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_s}\right)\right) = \frac{L_v}{T_s^2 R_m} Q \approx 2.26 \end{aligned}$$

On a conservé une perturbation du SW ΔF_{SW} à toute fin utile.

La question porte alors sur la manière de fermer la boucle de rétroaction. On fait comme dans **jas** en rendant Q immédiatement sensible à φ : $\Delta Q = \beta \Delta\varphi$, sans changer la formulation du bilan d'énergie. La sémantique du modèle glisse alors, puisqu'à présent, φ devient la température de l'air à la surface et peut être perturbée indépendamment de T_s, qui reste un indice énergétique pour l'océan et l'atmosphère. On verra ensuite une autre boucle telle que choisie par StepH originellement.

On passe en Borel (avec $\mu = \frac{1}{\tau}$) :

$$\begin{aligned}
\mu \Delta T_s &= \frac{1}{C_o}\Delta F_{\mathrm{SW}} - A\Delta T_s + A\gamma_z \Delta z_e \\
\Delta z_e &= \alpha\beta\Delta\varphi \\
\Delta\varphi &= \Delta T_s
\end{aligned}$$

(tous les $\Delta f(\tau)$ sont à présent les transformées de Borel).

On élimine ΔT_s et Δz_e :

$$\left[1 - \frac{\alpha\beta\gamma_z A}{\mu + A}\right]\Delta\varphi = [1 - g_{\mathrm{WV}}(\mu)]\Delta\varphi = \pi_T \quad [+\frac{1}{C_o\beta(\mu + A)}\Delta F_{\mathrm{SW}}] \tag{6}$$

On coupe la rétroaction en annulant α, c'est-à-dire en supprimant la sensibilité de z_e à $Q(T_s)$, et ainsi en laissant F_{LW} inchangé. On trouve que la réponse effective est :

$$\mathcal{R}(\mu) = \frac{g}{1-g}(\mu) = \frac{\alpha\beta\gamma_z A}{\mu + (1 - \alpha\beta\gamma_z)A} \tag{7}$$

soit après inversion

$$\rho(t) = \frac{g_\infty}{1 - g_\infty}\left[1 - \exp^{-(1-\alpha\beta\gamma_z)At}\right] \tag{8}$$

avec $g_\infty = \alpha\beta\gamma_z$, obtenu en prenant $\mu = 0$ dans (6).

Avec les valeurs paramétriques du tableau, on calcule un effet asymptotique de 0.43 (K par K de perturbation), correspondant à un gain g_∞ de 30% (le modèle ayant été calibré pour celà). Le temps caractéristique pour cette couche de mélange de 30 m est de

$$\mathcal{T} = \frac{1}{(1 - g_\infty)A} \approx 423 \; jours$$

Ce temps est évidemment beaucoup plus court qu'avec ClimSI, puisqu'ici les échanges océan-atmosphère sont immédiats. C'est d'ailleurs l'explication phénoménologique que l'on invoquait pour faire comprendre ce pôle lent de plusieurs années, l'atmosphère sensibilisant l'océan à son réchauffement initial, celui-ci rétrocèdent sous forme vapeur cette énergie, provoquant un opacissement aux pertes LW, d'où sur-réchauffement atmosphérique et tout ce qui s'en suit déjà dit.

La boucle originellement considérée par le premier auteur du modèle, focalisait sur z_e, avec cette boucle : $\delta z_e \to \delta T_s \to \delta Q \to \delta z_e$.

“Elle correspond au processus suivant : si l'altitude d'émission équivalente est augmentée par une perturbation, par exemple un ajout de CO_2 dans l'atmosphère, l'émission long-wave vers l'espace est diminuée, la température de surface augmente, le contenu en vapeur d'eau augmente et l'altitude d'émission équivalente est encore augmentée[1]”.

On pourra vérifier que cette structure fournit le même gain de rétroaction que pour la boucle portant sur T_s [2].

Remarques subsidiaires. Considérons ce gain en explicitant le paramètre β :

$$g_\infty = \alpha\gamma_z \frac{L_v}{T_s^2 R_m} Q(T_s) \quad , \tag{9}$$

[1]cf papier gainNL de stepH.

[2]d'où le choix éditorial faisant porter la boucle sur T_s, plus simple à publier m'a-t-il semblé.

fonction croissante de T_s. Si on devait tirer une comparaison d'efficacité du gain WV entre régions climatiques, en pourrait évaluer directement $\alpha\beta\gamma_z = -\frac{\partial T_r}{\partial T_s}$ par mesures satellitales pour avoir une grossière évaluation du gain local. La réponse additionnelle de rétroaction est alors $\rho_\infty = \frac{\Delta T_r}{\Delta T_s + \Delta T_r}$ (en valeurs absolues) [1].

On peut encore remarquer la dépendance du temps caractéristique à g_∞ : plus ce gain est grand, plus le temps semble long, comme si *le plaisir s'accroissait quand l'effet se reculait*, on aurait tout vu !

Remarque supp de juillet 2009. Il s'agit de la formulation du modèle explicatif-suffisant (très "suffisant") de Roy Spencer pour qui le modèle suivant (SLT) :

$$C_p \partial_t T = -aT + N + f + S \tag{10}$$

représente l'alpha et l'oméga de l'analyse satellitaire des sensibilités climatiques, puisqu'il donne les mêmes colimaçons[2]. S sont des anomalies de chauffage "not related to TOA flux", par exemple les échanges avec océan profond pendant épisodes El Niño, et $F = -aT + N + f$ total radiative TOA anomaly, avec un terme de rétroaction parce que dépendant de T, un forçage connu f, et un terme de forçage **radiatif** inconnu N. "While we will use the example of daily random fluctuations in N, such as those one might expect from stochastic variations in low cloud-cover affecting SW, the more general case could involve any non-feedback source of SW or LW variability, and on any time scale".

Son argument est alors que "le feedback parameter" a est donnée par régression :

$$est\{a\} = -\frac{\sum(-aT + N)T}{\sum T^2} = a - \frac{\sum NT}{\sum T^2} \tag{11}$$

et peut ainsi biaiser l'estimation.

L'exercice donné consiste en un bruit gaussien centré sur S et N. Moyenne sur 31 jours des résultats quotidiens et ajustement-comparaison avec satellites : *Terra* et CERES pour les SW réfléchis ; TRMM pour SST Bande ± 20 degN-S mars 2000 à décembre 2005. Moyenne sur 30 jours donne des rms de 1.3 $Wm^{-2}K^{-1}$ et 0.134 K. Bon accord avec $a = 3.5 Wm^{-2}K^{-1}$ et sigma bruit ? Avec une réponse de Planck de 3.2 $Wm^{-2}K^{-1}$, toute pente a au-dessus correspond à une rétroaction négative. Il trouve par régression 2.94 $Wm^{-2}K^{-1}$, ce qui biaise donc de -0.56 $Wm^{-2}K^{-1}$ le vrai paramètre de rétro, cqfd. Il en déduit que c'est par ce biais que les GCM trouvent un gain négatif !

Un modèle moins trivial tel que le nôtre montre qu'il est difficile d'accepter un modèle tel que le sien, la correspondance étant :

$$a \leftrightarrow A'(1 - \alpha\beta\gamma_z) \ , \ \text{ avec } \ A' = 4\sigma[T_z - \gamma_z z_e]^3. \tag{12}$$

et alors, vu la dépendance de β et A' d'avec Clausius-Clapeyron, il est difficile d'analyser le système avec un cycle saisonnier, comme avec les satellites. Mais Roy ne rentre pas de tel cycle, et les amplitudes de bruit semblent alors suffisamment faibles. Par contre, le terme d'inertie μC_o répond sur quelques mois.

On peut encore faire le lien avec IF_art en donnant $\lambda_0 = \mu C_o + A'$ et $-\lambda_{WV} = -\alpha\beta\gamma_z$. C'est bien $\lambda_0 + \lambda_{WV} (= \lambda_T)$ que régresse le Roy. Ce qu'il régresse en réalité, c'est en Laplace :

$$\begin{aligned} -\frac{\mu(-aT(\mu) + N(\mu))T(\mu)}{\mu T^2(\mu)} &= a - \frac{N(\mu)}{T(\mu)} \\ \sqsubset a'(t) &= a + \frac{1}{1 - \alpha\beta\gamma_z} \int_0^\infty e^{(1-\alpha\beta\gamma_z)At} N(t - \tau) d\tau \end{aligned} \tag{13}$$

[1] cette remarque est à placer dans le contexte de questions posées dans le groupe Climat ; T_r est donnée comme la température de brillance IR.

[2] Spencer& Bradwell J.Clim 2008 pp 5624-28.

pour commencer, mais faudrait élucider le rôle de S qui affecte selon Roy la corrélation $N \times T$...

Et quel lien avec la réponse directe :

$$T(t) = T(0)e^{-A(1-\alpha\beta\gamma_z)\,t} + \int_0^t e^{-A(1-\alpha\beta\gamma_z)(t-\tau)N(\tau)\;d\tau} \tag{14}$$

2 Passage au modèle hors d'équilibre

Connaissant la forme analytique de la réponse effective, et malgré la manière dont elle est obtenue, on est tenté de se poser la question : et si $\rho(t)$ ressemblait à la fonction SLTC en y incorporant les valeurs suivant la trajectoire ?

C'est avec ce préambule qu'on aborde les commentaires qui suivent à La lettre.

On applique la formule de la réponse effective au modèle WV précédent. Le propagateur s'obtient à partir de l'équation d'évolution d'état, ayant éliminé toute autre variable, soit

$$\partial_t \Delta T_s = A(T_s)\,[-1 + \gamma_z \alpha\beta(T_s)]\,\Delta T_s \tag{15}$$

ce qui mène au propagateur

$$\phi(t,\tau) = \exp - \int_\tau^t \lambda(T_s(s))\;ds \tag{16}$$

avec $\lambda(T_s) = (1 - \gamma_z\alpha\beta(T_s))A(T_s)$. Comme $c^\dagger = 1$ et $b = \gamma_z\alpha\beta(T_s)A(T_s)$, la réponse effective est :

$$\rho(t) = \alpha\gamma_z \int_0^t \phi(t,\tau)\;\beta(T_s(\tau))\;A(T_s(\tau))d\tau \tag{17}$$

Cette fonction est donnée par Mini_ker pour deux trajectoires : celle de la mise en équilibre du modèle, T_s valant initialement 16°C et atteignant son équilibre pour 17°C, la deuxième correspondant à un forçage cyclique surajouté au forçage précédent F_{SW}, de demi-amplitude égale à 206 W m^{-2} (fig.1).

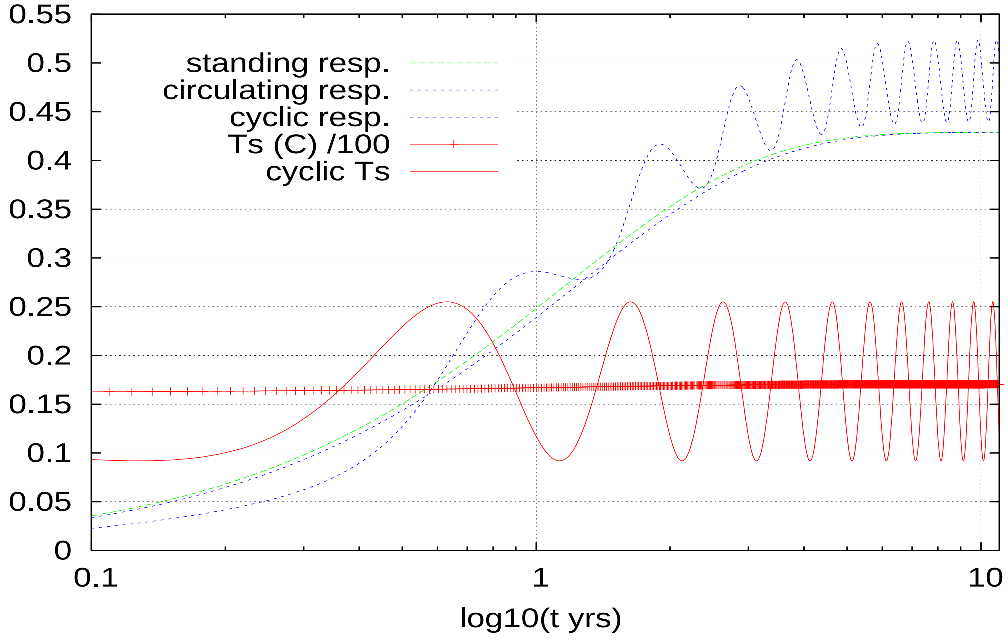

FIG. 1 – Water vapour feedback model responses.

Les commentaires affriolants de La lettre étant dits, il est vérifié de plus que lorsque l'amplitude d'oscillation du forçage diminue, $\rho(t)$ revient gentiment et progressivement à la douce trajectoire. Ceci dit, les commentaires relatifs à la phase saisonnière de $\rho(t)$ sont scabreux et méritent une étude avec un modèle temporellement plus réaliste tel que ClimSI, d'où la forme retenue de ces commentaires : *et si ce modèle minimaliste s'avérait réaliste, l'effet du CO_2 serait maximal en automne ...*

et enfin A présent, pour répondre à l'interrogation liminaire, on compare les mêmes à la réponse effective statique (r(eta))[1] en actualisant au fúr et à mesure $T_s(t)$, avec $g_\infty(T_s)$ donné par (9) et $A(T_s) = 4\frac{\sigma}{C_o}(T_s - z_e\gamma_z)^3$, (fig.2) :

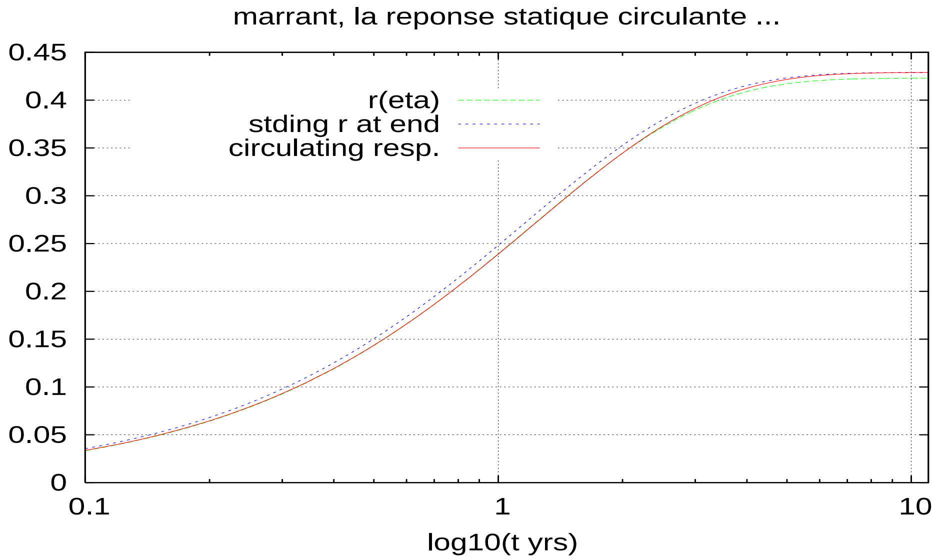

FIG. 2 – Water vapour feedback model responses.

Tout d'abord, en suivant la trajectoire douce, l'expression statique commence (pour t=0.1 an) à la même valeur que la réponse SLTC, et finit à celle du gain statique d'équilibre. La différence entre les deux statiques est que l'une conserve la valeur de λ calculée à l'équilibre, pas l'autre (leur coïncidence finale est évidente, elles ont alors les mêmes coefficients).

On constate ensuite que l'expression statique circulante donne une forte amplitude (fig.2) comparée à la réponse SLTC, l'intégration noyautée ayant un effet de lissage. De même ce déphasage quart d'ondes dù à l'effet retardateur du noyau. plaçons les deux expressions en parallèle, en approximant l'intégrale de $\Phi(t-\tau)$:

$$\begin{aligned}
\rho(t) &\stackrel{1}{=} \alpha\gamma_z \int_0^t \exp[-(1-\alpha\gamma_z\beta(.))A(.)(t-\tau)]\ \beta(\tau)\ A(\tau)d\tau \\
&\stackrel{2}{=} \frac{\alpha\gamma_z\beta(t)}{1-\alpha\gamma_z\beta(t)}(1-\exp[-(1-\alpha\gamma_z\beta(t))A(t)t]
\end{aligned}$$

qui ont le bonheur de s'égaler pour des paramètres constants. On a le droit de s'éclater à cette comparaison.

3 L'exercice avec Mini-ClimSI

Ce sera pour plus tard, les derniers résultats - obtenus pendant le stage de Pablo - étant résumés dans cette figure : Contrairement au modèle simple, la repeff cyclique encadre la douce, mais la semi-amplitude est plus faible, de 170 W m^{-2}, donc à poursuivre.

ce qui se fait en juillet 2009, cì-dessous.

[1]et si on changeait pour appeler ρ une *réponse additionnelle de rétroaction* plutôt que *réponse effective*?

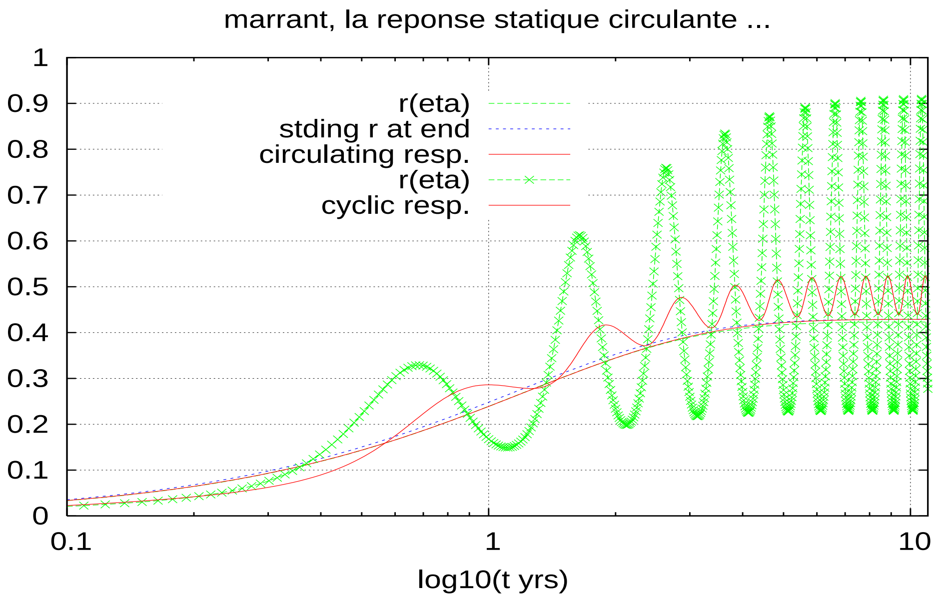

FIG. 3 – WV feedback model responses (suite).

Réglage de mini-ClimSI On a vu que si le pôle rapide est le même avec la version ZOOM, on a une amplitude du lent moindre. Aucun des nombreux essais ne m'ayant permis de trouver un bug, j'applique finalement un facteur 1.1 sur les derivées de **flux_rad** en fonction de Hum_rel :

```
eqn:  flux_LW_tropo = flux_trp_ref
                      + flux_trp(2)*(T_ocean_eta-Tocean_ref)
                      + flux_trp(3)*(T_Planck_phi-Tsurfair_ref)
                                     ------------
                      + flux_trp(4)*(T_strato_eta-Tstrato_ref)
               + triche*flux_trp(5)*(HumRel_phi-HumRel_ref)"RSRS"
                      + flux_trp(6)*(CO2_conc_eta-xCO2_ref)
                      + flux_trp(7)*(rN_B*(1.+0.07*Red_eta)-rN_B_ref)
                      + flux_trp(8)*(rN_M*(1.+0.07*Red_eta)-rN_M_ref)
                      + flux_trp(9)*(rN_H*(1.+0.07*Red_eta)-rN_H_ref);
```

avec triche = 1.1. Le réglage porte sur les nuages, fractions, absorption et transparence, coefficient du sensible... On trouve *in fine* à l'équilibre :

```
-------- Bilans a la Trenberth -----------------------------
------------------------------------------------------------
 {SW entrant 341,79(+23a)} flux_solaire_entrant,albedo_h+albedo_m+albedo_b :
     343.  83.0615692
 {..abs oce 180,atm 78} F_SOCEAN,flux_SW_ocean,flux_SW_tropo+flux_SW_strato :
     188.540009  171.005783  71.3984146
 {LW bilans oce 63,atm 200} flux_LW_ocean,flux_LW_tropo+flux_LW_strato :
    -56.9377098 -185.485184
 {..OLR 239} flux_esp_ref,mu_OLR :
     242.424774  242.422882
 {sens 17,latent 80} flux_sens_tropo,flux_evap :
     11.3485107  102.73053
 {temperatures oc tropo strato} T_ocean_eta,T_tropo_eta,T_strato_eta :
     295.590759  264.780151  190.06456
------------------------------------------------------------
-------- Bilan global         -----------------------------
 {entrant} flux_SW_ocean+flux_SW_tropo+flux_SW_strato :
     242.404205
 {sortant} flux_esp_ref,mu_OLR :
     242.424774  242.422882
------------------------------------------------------------
```

avec des réponses additionnelles WV et Planck :

On voit que sans tricherie, $\Delta\theta_w = 0.280$ et passe à 0.3166 avec ce facteur de 1.1 sur les dérivées.

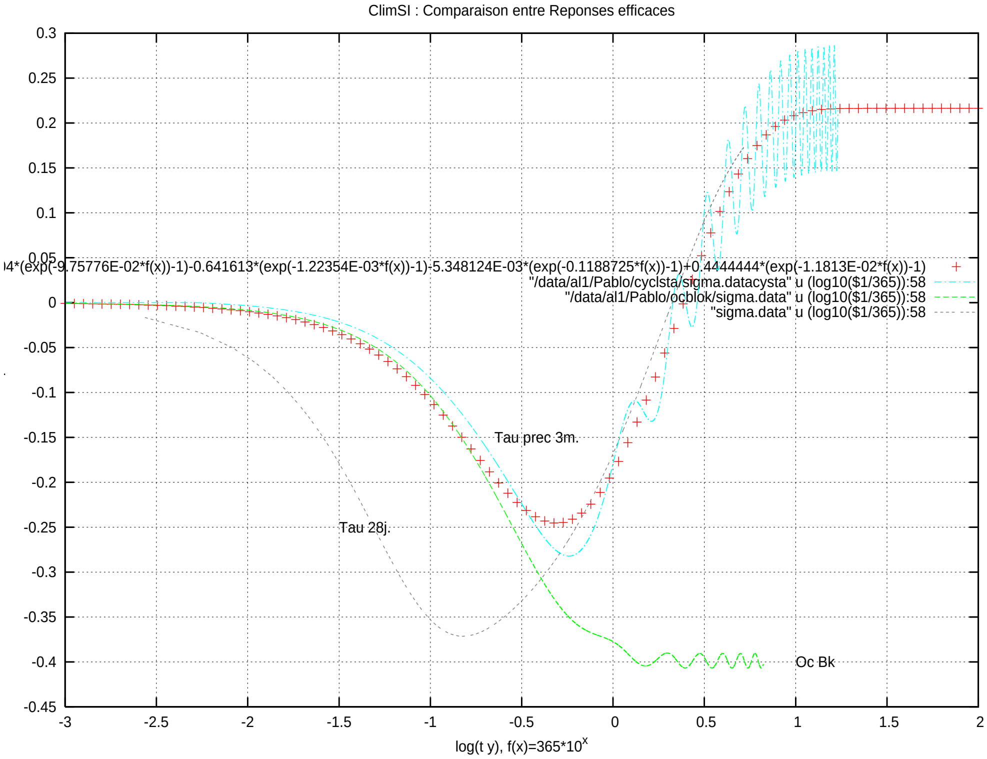

FIG. 4 – ClimSI WV feedback model responses.

On va éprouver leur compatibilité avec un quadruplement de CO_2, ces expériences étant effectuées avec une épaisseur de CMO de 3m pour accélérer la réponse asymptotique. On trouve un réchauffement de surface de $297.868 - 294.781 = 3.087$K. Les GCM obtiennent 3.1K, mais pour le doublement !

Les réponses additonnelles à l'équilibre sont $\rho^{\infty}_{WV} = 0.316641 \leftrightarrow g_{WV} = 0.2404$. Il y a bien un facteur deux quelque part encore à trouver. La comparaison des évolutions des trois températures et de Q sont comparables à celles de StepH, ce qui indique que le code y compris radiatif semble le même. StepH dans sa thèse dit bien que, trouvant un $\Delta T_s = 1.1$K pour le doublement et 2.5K quadruplement[1], la sensibilité climatique du modèle est faible par rapport à l'IPCC, pour des raisons "des non-linéarités et de la spatialisation des flux dans un MCG — par exemple, la moyenne des flux LW émis par une surface de température hétérogène est très différente du flux émis par une surface de température homogène dont la température est la moyenne de la première surface." Qui dit mieux]1.]?

Une autre interprétation, c'est que les effets WV de l'IPCC sont déterminés comme s'ajoutant à ceux des nuages, c'est-à-dire que le WV est par ciel clair. Or, la couverture nuageuse fractionne (affaiblit) notre WV. Ensuite, le WV GCM est obtenu avec addition de WV(+1.7K) et L-R(-0.8K), ce dernier étant d'ici absent — mais que serait l'effet de la suppression de L-R sur ΔQ ?

Quoi qu'il en soit, on a ici des résultats dont on éprouve la compatibilité - compréhension, et nos sensibilités ainsi que la réponse numérique sont à nuages fixés. Ici donc, ça fait $\Delta\theta_{WV} = 0.5 * g * \Delta T_s = 0.5 * 0.24 * 3.087 = 0.37$K, au lieu de 0.8 DuB (0.5* pour 4 à 2 CO_2).

Que signifie la réponse de Planck $\rho^{\infty}_0 = -0.825222$? Qu'à chaque Kelvin de forçage, T_s n'augmente péniblement que de 0.17K. Doit-on en déduire que cette amplitude du forçage

[1] moins qu'à présent, mais on a réglé des températures plus hautes, ceci doit expliquer celà, car avec des semblables, un doublement nous avait donné 0.97K.

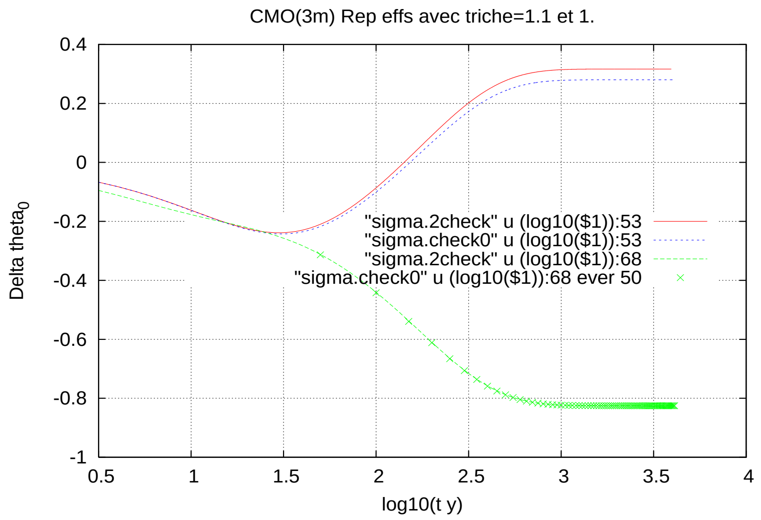

FIG. 5 – ClimSI WV and Planck feedback model responses.

de Planck de $\Delta\theta_0 = 0.17$K induit une réponse WV de $\Delta\theta_{WV} = 0.317$K ? Alors, pour 1.2K DuB de forçage, on aurait 2.24K de WV, alors que DuB donne 1.7 WV mais -0.8 L-R ? Pas sûr, les deux forçages étant indépendants ...

En tout cas, un point qui apparait est que Planck met autant de temps à s'établir que le WV, ce qui indique que Q varie forcément, ou alors quoi d'autre ?

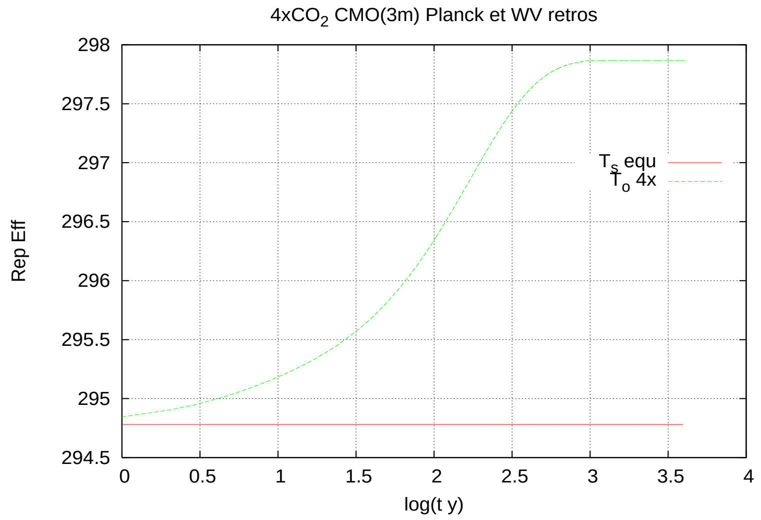

FIG. 6 – ClimSI réponse à un quadruplement de CO_2.

on pose dorénavant triche=1. : fini de jouer.

Expériences en Gâteaux Finis On compare un run équilibre avec un autre où on perturbe par application de la Finite-Gâteaux-Difference :

```
eqn: T_Planck_phi = T_tropo_eta -rLapse_tro*H_tropo_eq +1.
```

ça donne cette transition de la réponse de Planck Fig.7, à comparer à la Fig.5 que l'on a supperposée (sans tricherie).

À l'équilibre, ça donne $\Delta\theta_0 = -0.826 \quad (\rho_0^\infty = -0.825222)$ excellent.

On fait de même sur **T_WV_phi** :

```
eqn: T_WV_phi = T_tropo_eta  + 1.; "Gateaux retro"
```

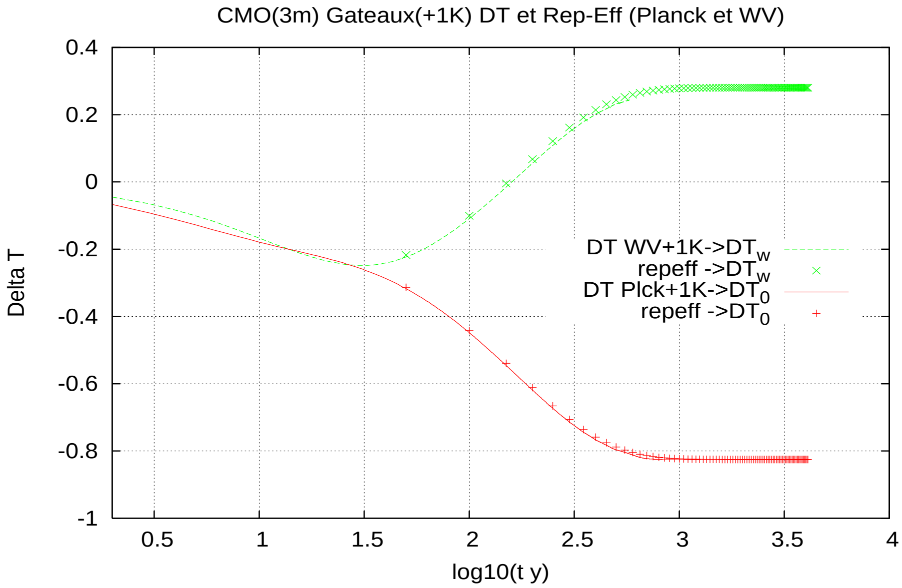

Fig. 7 – FGD WV and Planck responses (on air-surface temp.).

```
avec le modele de convection-précips associe
! ===========================================
! Precipitation flux from atmosphere
! ===========================================
! *Equ:   HL = Lv * P = Lv * K ( Hum_atm - rh*Hum_sat(T,gammat) ) ;
! .............................................................
Fun_set HumCible_fun = WV_QU(rHs,T_WV_phi,rLapse_tro);
! ----------------------------------------------------------------------
 deltaQ=3.; " largeur precipitation "
  eqn: flux_Precip =max(0., flux_Evap + " non Betts-Miller"
                        rLv_e/tau_prec*
                   (Q_tropo_eta - HumCible_fun)*(1.+0.07*Red_eta)
                      );
! ----------------------------------------------------------------------
;
! regle derivee
&'(max(0.,#))(/#)'='((#1)(/#2)*max(0.,sign(1.,#1)))'
```

et on trouve $\Delta\theta_{wv} = 0.263$ $(\rho_{wv}^{\infty} = 0.281)$ — qui était à 0.317 avec tricherie. On pourra voir si le léger désaccord réside dans la linéarité perdue, en refaisant l'expérience avec (+0.1K) et (+2.K ligne rouge — le label est erronné), mais on ne met en évidence que la perte de précision avec (+0.1K). L'autre perte de linéarité vient du fait que la tropo est modifiée dans une (+1K) par rapport au calcul de ρ ; pour indication, on a donc aussi tracé celle-ci pour (+1K croix rouges), et on constate qu'en effet elle se rapproche de la Gâteaux. On examinera les champs tropo plus bas.

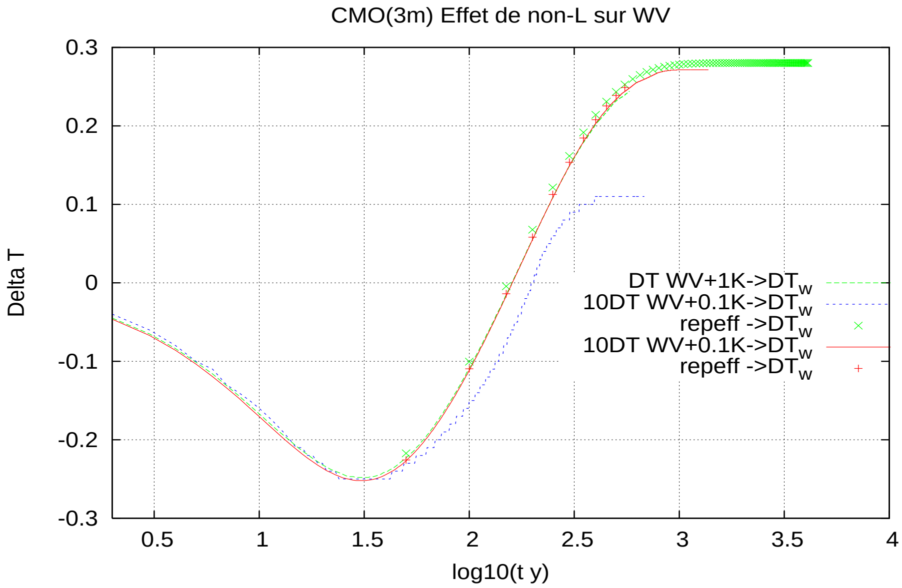

FIG. 8 – Effet de non-linéarité sur la réponse de Gâteaux en WV.

Sensibilité OLR par Gâteaux Finis. Pour éprouver la méthode des détermination de λ par OLR, on ré-applique Gâteaux cette fois à SST bloquée, Fig.9.

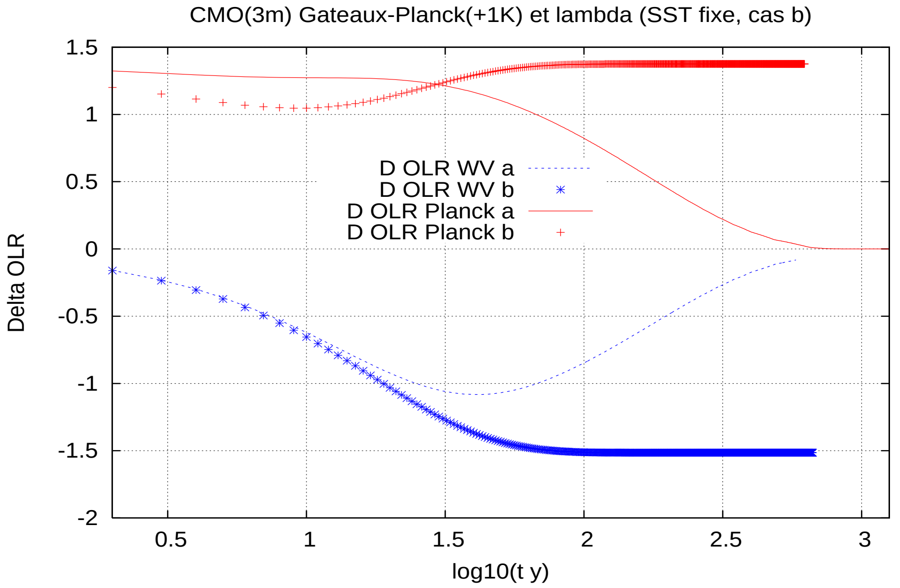

FIG. 9 – Lambda-OLR FGD WV and Planck responses.

On constate bien que l'OLR se relaxe à l'équilibre, ce qui permet d'accéder en effet aux $\Delta\theta_i$. À océan bloqué à sa valeur de reférence, avec Planck(+1K) sur T tropo, on obtient une différence de 1.4 $Wm^{-2}K^{-1}$, d'où $\lambda_0 \approx 1.4\,Wm^{-2}K^{-1}$, ce qui redonne en gros un facteur 2 par rapport aux 3.2 de DuB. On voit encore qu'avec ce modèle pour qui l'effet de la "convection de grande échelle alliée à la dynamique" est immédiat, parce que le (+1K) sur T air-surface se traduit par un décalage complet de T tropo, l'effet immédiat ($\approx 1.4 Wm^{-2}K^{-1}$) est proche de l'effet asymptotique à océan bloqué, la différence ne tenant qu'à la diminution de Q.

On a ensuite WV(+1K) $\lambda \approx -1.5\ Wm^{-2}K^{-1}$ pour le cas **wvb**, à comparer à -1.8 DuB (+0.84 L-R).

Sur les anomalies de champ, on compare pour chaque rétroaction WV et Planck, l'effet sur Q, Fig10, puis sur les flux d'évaporation et précipitations[1]

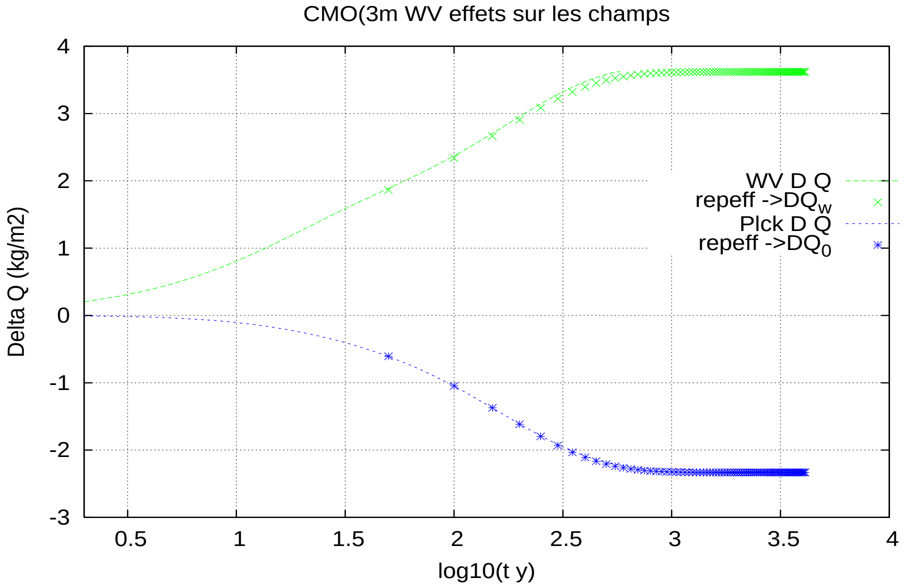

FIG. 10 – FGD WV responses sur Q comparé au $\sigma_{wv \to Q}$.

On prolonge la comparaison pour l'évaporation et les précipitations (toutes deux en flux), Fig12

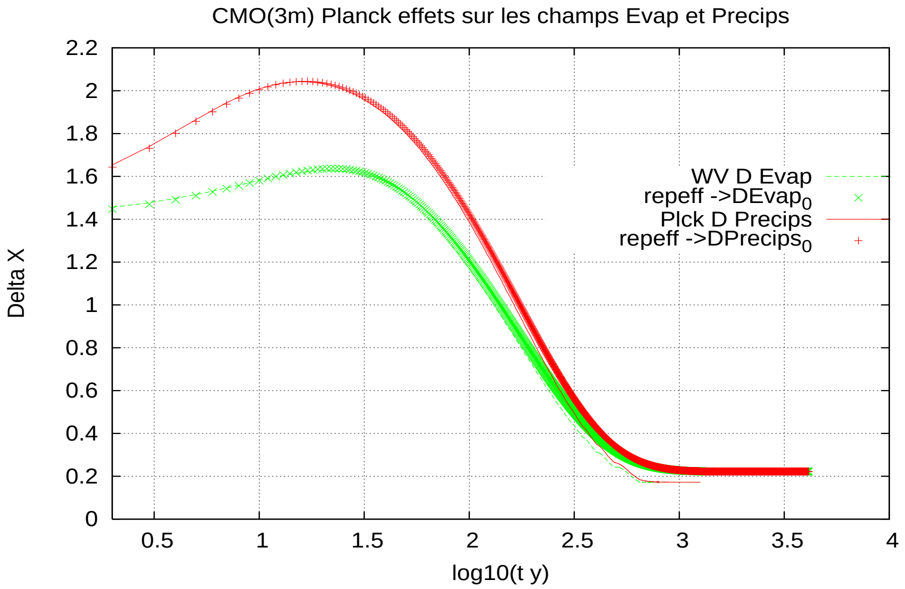

FIG. 11 – FGD Planck réponses sur X précips et évap, comparées aux $\sigma_{wv \to x}$.

Que se passe-t-il ? Commençons par Planck : le LW étant calculé avec (+1K), il est plus fort, ce qui refroidit la tropo, ce qui a pour conséquence une légère diminution initiale de l'OLR, et augmente les précips. L'écart avec la SST étant accru, l'évaporation s'en trouve renforcée, mais sans compenser la diminution d'évap, d'où diminution de Q, et ainsi sur-accroissement de l'OLR. L'équilibre se retrouve quand évap=précips, avec un

[1]note au rédacteur, quand on applique un (+1K), on doit soustraire la valeur initiale +1K, mais son induction sur précips fait qu'on doit soustraire la valeur initiale du run correspondant wva par exemple, et non pas celle de l'équilibre.

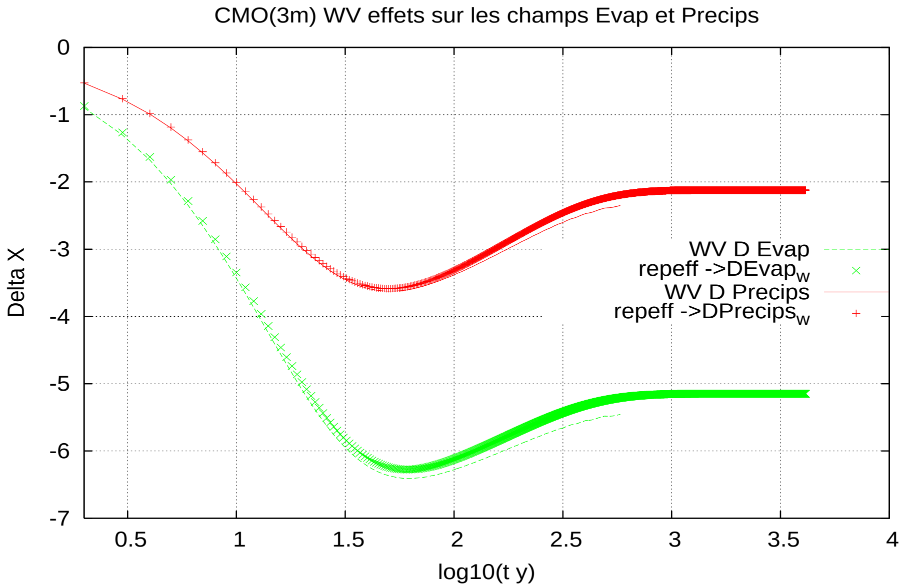

FIG. 12 – comme la figure précédente pour WV

résidu positif dù à la tension entre SST et $T + 1$ tropo. La réponse rapide reste à 30 jours — **tau_prec=27** jours, mais avec 30m de CMO, on retrouverai un temps long de 10 ans environ (on a ici 3m de CMO seulement), tout en renforçant l'effet du pôle rapide, par renvoi plus lointain du pôle lent.

Avec WV, on perturbe le modéle de précip en lui faisant croire que la cible est plus humide (plus chaude), ou que son humidité relative est plus faible ; ceci diminue donc les précips, et ainsi refroidit la tropo, d'où diminution de la tension entre SST et T tropo, et de l'évaporation, mais moindre que précips. Q s'en trouve augmentée, ce qui mène à un accroissement de l'effet de serre et progressivement de T tropo. On remarque que l'équilibre est atteint sans que cette fois-ci on ai égalité évap-précips, cette cohérence étant brisée par ce que voit le modèle de précips, qui n'est pas cohérent avec le système non-forcé. Si le modèle d'évap voyait le (+1K), on aurait cette égalité, ce qui montre que pour (+1K) sur T_tropo, les précips perdent $3mm$ par jour environ. C'est bien le sens de la rétroaction qui doit perturber un mécanisme — **pas un champ mais un modèle**.

On va tenter de comprendre ce facteur supérieur à deux pour la réponse de Planck. On a perturbé la tropo, pas la T_s, en bloquant la SST superficielle mais sans lui attribuer ce +1K.

On refait ce run avec le LW de T océan forcé avec (+1K). Ça monte la variation d'OLR jusqu'à 2.2 $Wm^{-2}K^{-1}$. À SST bloquée, on a simplement réchauffé un peu plus la tropo, et ainsi amplifié les effets précédents. Si en plus on refait une régle de trois (pour passer en ciel clair) 2.2/242*343 $\leftrightarrow$ 3.12 (3.2 DuB).

On termine l'exercice en tentant une détermination de l'effet d'albedo de surface. Pour ça, on applique un $\Delta\alpha$ trouvé par suppression-method mais normalisé à $\Delta T_s = 1K$.

à faire ...

compréhension de résultats : la réponse de Planck **Attention** aux résultats, il faut lire les grandeurs comme résultant de l'application d'un forçage de LW par une perturbation ciblée, y compris pour la grandeur elle-même perturbée, (ici T_0), qu'il faut lire comme effet-en-retour (de par le choix des équations cf Propagateurs). — il n'y a pas de (+1K) pour elle.

On donne une série de figures à commenter — c'est le Planck sur air-surface temp.)

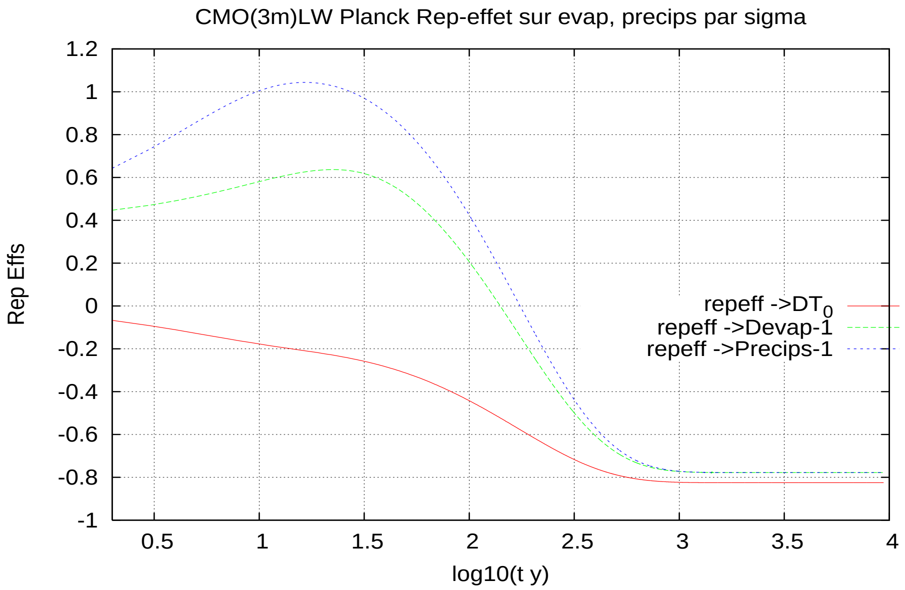

FIG. 13 – Réponses de Planck sur $\Delta\theta_0$, précips et évap.

Ainsi, on force le modèle LW tropo à émettre plus, ça refroidit la tropo, augmente les précips y compris l'excès d'icelles sur évap ; donc Q tropo diminue. Le refroidissement de la tropo entraîne une diminution de retour de LW de tropo vers la couche océanique superficielle — de même que par échange sensible (pas montré).

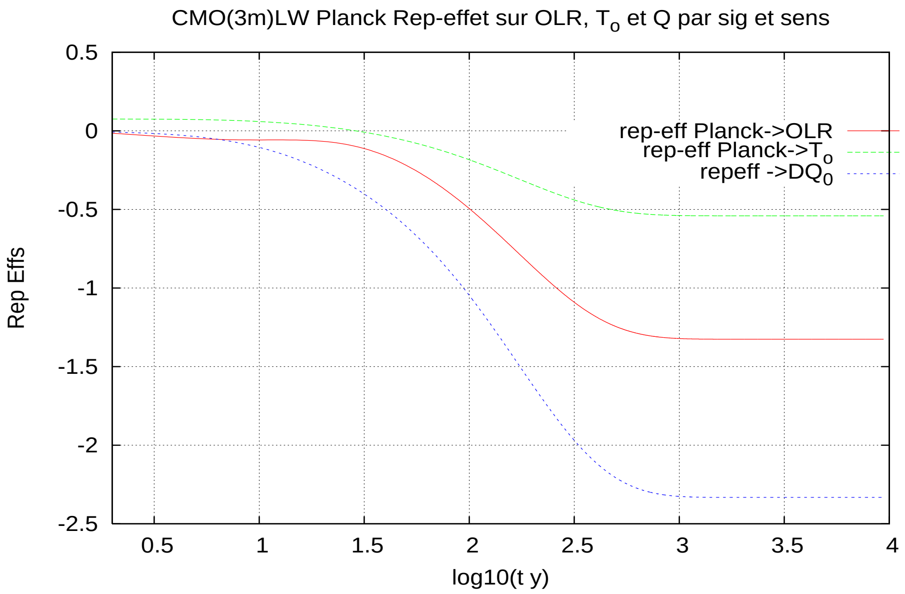

FIG. 14 – Réponses de Planck sur Q, OLR et ΔT_{oc} par sigmo.

Comme Q diminue fortement, la tropo voit son bilan LW augmenter Fig.15 (pas évident, mais T_a diminue plus que T_{oc} et la strato est un poil plus chaude ...), et l'OLR finit par diminuer, par refroidissement des tropo et océan.

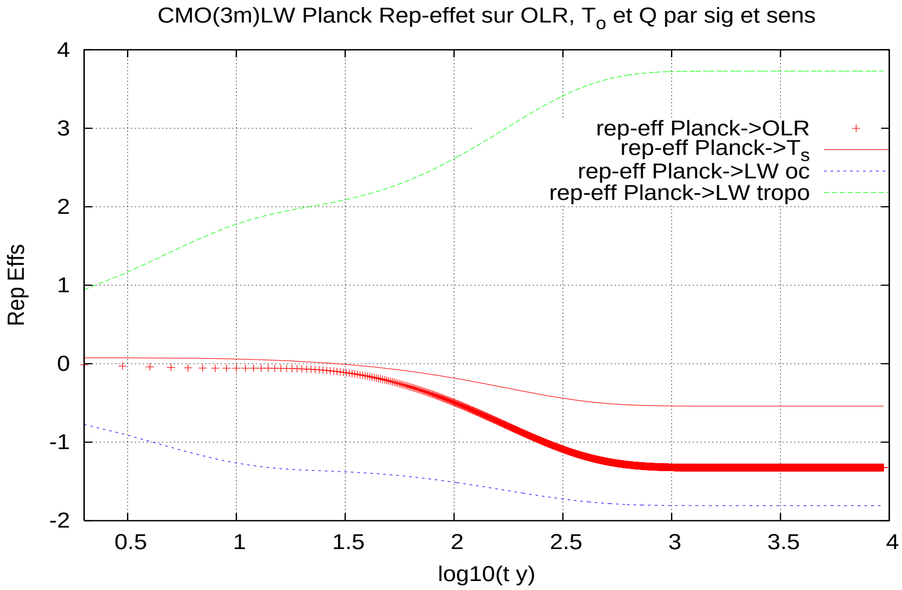

FIG. 15 – Réponses de Planck sur les mêmes et bilans LW tropo et océan.

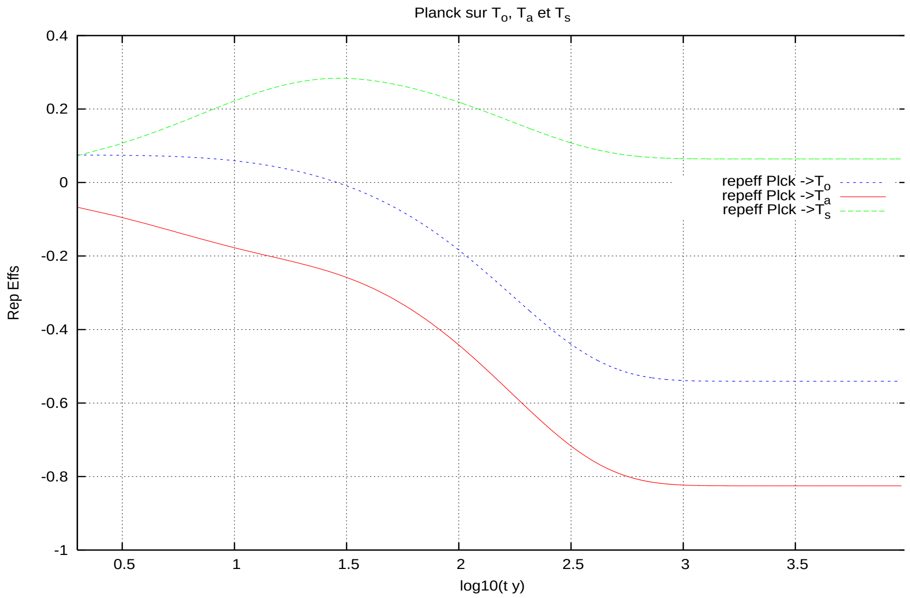

FIG. 16 – Réponses de Planck en températures d'océan superficiel et atmosphère.

Á l'équilibre final, on a $\Delta R = -1.32565$ et $\Delta_{oc} - 0.540646\ Wm^{-2}K^{-1}$, ce qui nous approche de l'expérience DFG avec (+1K) sur tropo ET océan — noter que Δ_{oc} n'est pas la réponse de la surf-air temp qui est pertrubée ... voir plus loin l'autre Planck. On peut d'ailleurs vérifier qu'ici, T_o évolue comme $\Delta\theta_0$ Fig.16, qui montre une certaine tendance à ses suivre approximativement, mais seulement approximativement, ce qui montre que la recette par DFG n'est pas rigoureuse, si je tire les bonnes conclusions. On peut encore noter que si l'OLR ne s'annulle pas à la fn, c'est que la pertrubation est en rep_eff dans le ZINIT, pas en step_resp, c'est-à-dire que l'OLR ne tiend pas compte du (+1K). On pourra vérifier que ça s'anulle bien — de même les différence évap-précips avec step_resp.

On compare encore trois résultats : les effets de (+1K) tropo sur SST bloquée à sa ref (Plckb) ou à sa ref +1K (Plckbo), et celles-cî à la rep-eff (sigmo.check0) calculée à l'équilibre. On a décrit les mécanismes accompagnant les réponses par DFG. Pour la

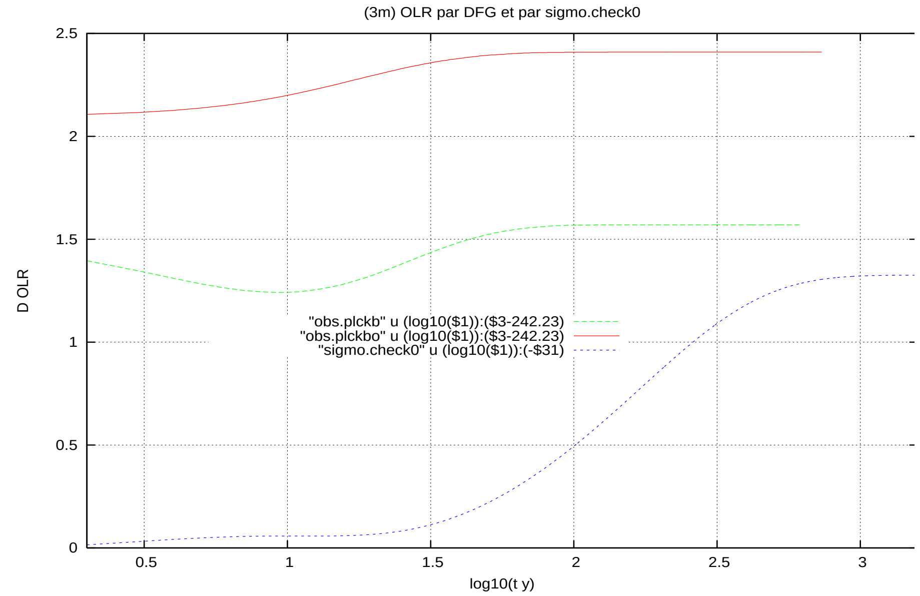

FIG. 17 – Réponses de Planck de l'OLR par (+1K) tropo, tropo+océan, et sa rep-eff.

réponse effective de l'OLR perturbée par T planck, le modèle LW calcule un excès de perte ; on améliore la comparaison si on inverse son signe, ce qu'on fait sur la Fig. 17.

...

En conclusion, la (+1K) relaxée donne strictement les mêmes réponses en température et autres champs que par l'analyse par le TEF — les réponses effectives calculées à l'équilibre. Par contre, pour la détermination de l'OLR, on a un problème qui concerne à la fois les amplitudes, la source d'application et bien sùr la dynamique. Que faire ?

On va émuler autrement la réponse de Planck, en l'associant cette fois uniquement d'abord à la SST superficielle :

```
eqn: T_Planck_phi = T_ocean_eta -1.; "DFG"
```

(on en profite pour changer le signe, en cohérence avec les rep-eff). On trouve $\lambda_0^{dfg} = 0.65$[1] (ceci dans obs.plckbo), contre une réponse OLR correspondante de 0.65 $Wm^{-2}K^{-1}$. Y a un ïatus ... mais nous verrons au parag. Gregory que ce n'est pas la bonne comparaison à faire. En tout cas, c'est bien 0.65 qui se compare aux 3.2 de DuB (et ce facteur 2 devient 4 !).

Propositioon pour déterminer les λ_i : on regarde le rapport $\lambda(t)$ pendant la relaxe et on extrapole quand l'OLR tend vers zéro ? (oui, c'est explicité plsu loin.)

[1]je sais plus d'où ça sort ... sorry

compréhension de résultats : la réponse à WV On commence par l'effet sur les précips, évap et Q tropo :

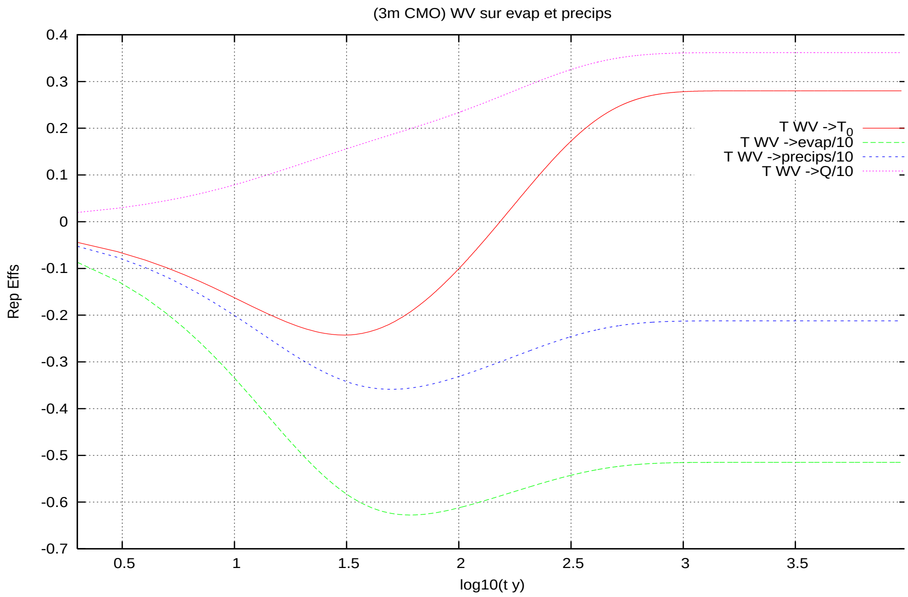

FIG. 18 – Réponses de WV en èvap et précips.

Le forçage implicite ($T_w + 1K$) donne une cible des précips plus humide : les précips décroissent, supprimant du latent et T_a diminue; mais Q augmente, ce qui induit la remontée de T_{oc} (Fig. 20), conjointement au bilan LW tropo augmentant, puis d'évaporation et enfin de la température tropo.

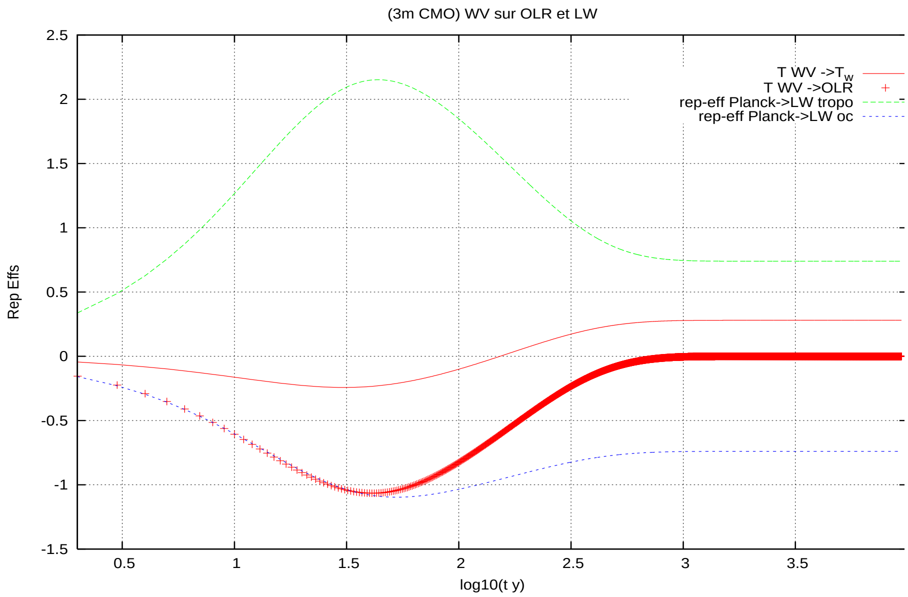

FIG. 19 – Réponses de WV en flux LW.

Avec l'augmentation de Q et abaissement initial de T_a, l'OLR diminue puis retrouve son équilibre nul par conjonction des augmentations de T_a et de Q.

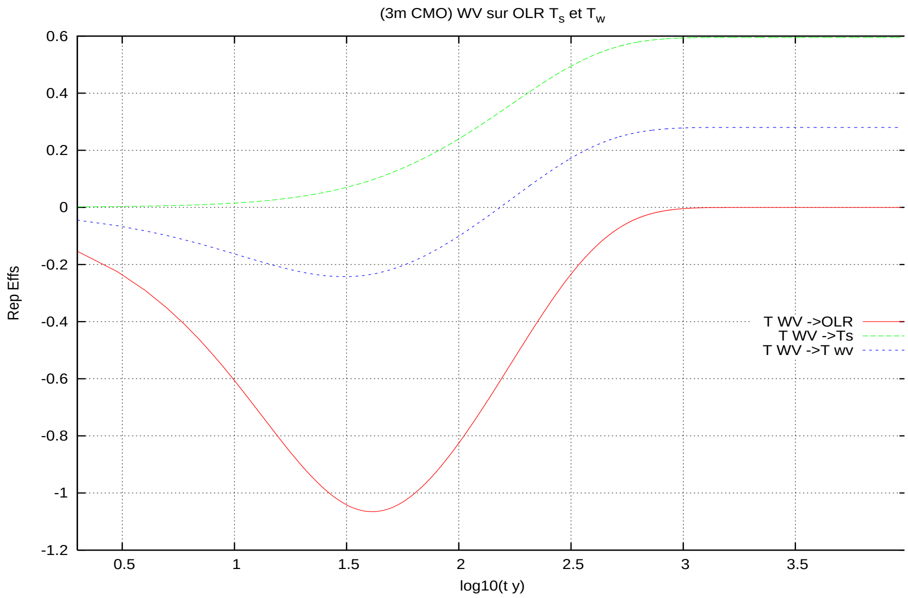

FIG. 20 – Réponses de WV en température et OLR.

et Gregory dans tout ça ? Si l'on pense qu'en effet les sensibilités nous donnent bien la réponse des champs aux différentes perturbations — y compris dans la figure suivante des conditions initiales sur Q ou T tropo et océan, et des réponses effectives en T_w, T Planck (sur tropo ou T_s) et les précips — on trace les courbes à la Roy en corrèlant les réponses en OLR et en $\Delta\theta_s$: On peut constater que en dessous de 100 jours environ,

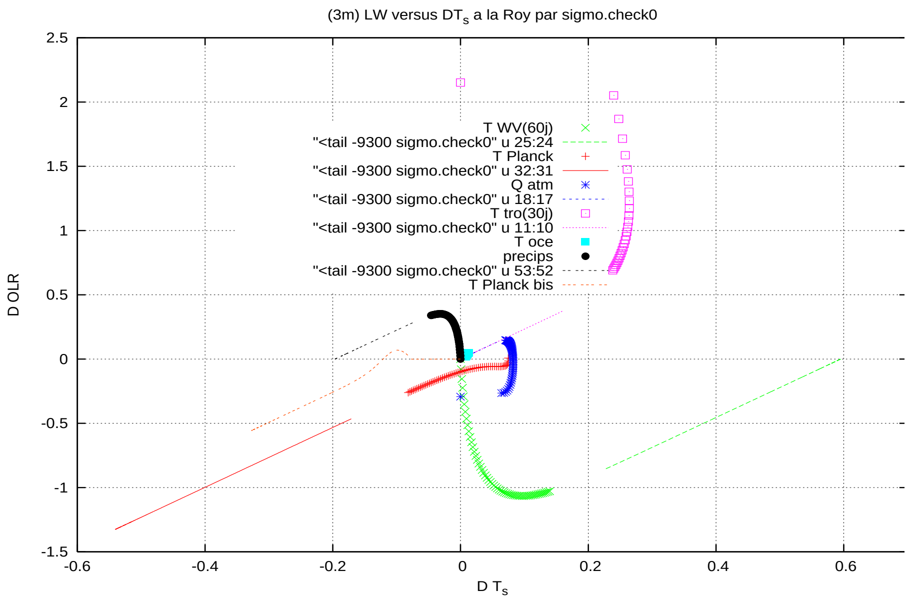

FIG. 21 – Réponses Δ OLR versus ΔT_s pour differentes perturbations.

on a des pentes très diverses, mais qu'au delà toutes convergent vers la même pente de $\approx 2.45Wm^{-2}K^{-1}$.

Comment lire ce graphe ? Chaque point représente un couple ΔR, ΔT_s qui a mis un certain temps τ à s'établir, provoqué par la perturbation (constante) d'un mécanisme ou des C.I.. Le rapport des deux donne une pente **qui n'a pas de lien direct avec les** $\lambda_i(\tau)$ **!** En effet, ceux-ci sont définis pour un forçage imposé constant de la variable-test. Il s'agit donc de $\frac{\Delta R}{\varpi}$. Le cas de Planck est particulier, et on constate que dans le premier cas où le (+1K) est appliqué à T air-surf, la pente et le rapport final sont les mêmes — c'est-à-dire que la droite asymptotique passe par l'origine. Par contre, appliqué sur T_{oc} superficiel, la droite, comme pur les précips et WV, ne passe pas par l'origine. On a encore une partition entre celles qui donnent une limite ΔR nulle (précips) ou non (Planck et WV).

Avec $30m$ de CMO, on a les mêmes pentes asymptotiques, Fig 22. On a donc cette

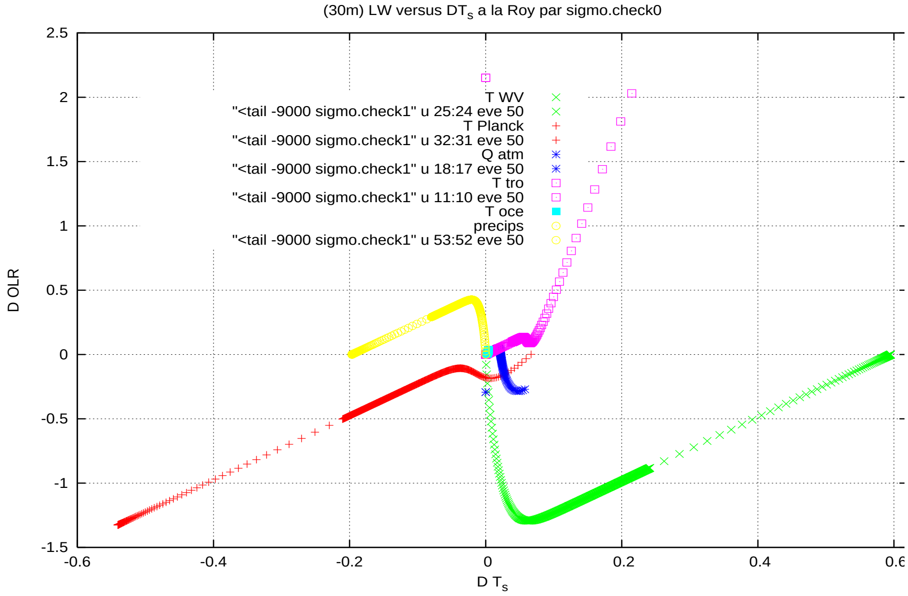

FIG. 22 – Réponses Δ OLR versus ΔT_s pour différentes perturbations.

série de faits à expliquer, et on s'attache d'abord au plus intéressant puisqu'il concerne la méthode de Gregory, à savoir cette pente π. Comme cette pente finale semble indépendante du forçage, on considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} (\mu K + P - A(\mu))\boldsymbol{\Delta\eta} = \Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \\ \Delta T_s = <c|\ \boldsymbol{\Delta\eta} \end{array} \right. \tag{18}$$

où on rappelle que A dépend de μ. Les réponses en ΔT_s et bilan TOA pour ce système sont :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Delta R = <1|\ (P-A)(\mu K + P - A)^{-1}\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}} - <1|\ \Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \\ \Delta T_s = <c|\ (\mu K + P - A)^{-1}\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \end{array} \right. \tag{19}$$

Mais suivant le type de perturbation, la droite asymptotique ne passe pas forcément par l'origine ; on obtiend la pente à faible μ par soustraction des limites, ce qui permet d'obtenir un rapport des premiers ordres en μ. Ceci semble en effet satisfaisant au regard d'une formulation de la même pente en effectuant le rapport des dérivées temporelles des dénominateur et numérateur — on ne sait pas dériver ΔR par rapport à ΔT_s !

Première tentative : semi échec Construisons ce rapport

$$\pi = \lim_{\mu \to 0} \frac{\Delta R^{\infty} - \Delta R(\mu)}{\Delta T_s^{\infty} - \Delta T_s(\mu)} = \frac{-<1|\ [I - (P-A)(\mu K + P - A)^{-1}]\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}}{<c|\ [(P-A)^{-1} - (\mu K + P - A)^{-1}]\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}} \tag{20}$$

em mettant $(P-A)^{-1}$ en facteur et en supposant qu'à cet horizon de μ, la matrice $P - A(\mu) \approx P - A(0)$ au premier ordre en μ, il reste :

$$\pi = \frac{<1|\ K(P-A)^{-1]}\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}}{<c|\ (P-A)^{-1}K(P-A)^{-1}\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}} \tag{21}$$

On peut déjà dire qu'avec un modèle scalaire comme celui de ce papier (le "z_{eq}"), le forçage s'èlimine et on trouve une pente $= A'(1 - \alpha\beta\gamma_z)$, qui n'est autre que λ_T, la sensibilité globale $(\lambda_0 + \lambda)$, de l'ordre de 3 $W\ m^{-2}K^{-1}$ (cf equ.13).

Mais dans le cas plus général, on tente d'en dire plus en décomposant $(P - A)^{-1}$ en ses É.P., soit $= \sum_j w_j |\ e_j >< f_j\ |$ en choisissant une cross-norme unitaire entre les V.P droits et gauches. Alors, et en supposant pour faire simple que les couches sont iso-inertes $(K = kI)$:

$$\pi = \frac{\sum_j w_j < 1\,|\,e_j >< f_j\,|\,\Delta\boldsymbol{F}_{\text{ext}} >}{\sum_j w_j^2 < c|\,e_j >< f_j\,|\,\Delta\boldsymbol{F}_{\text{ext}} >} \tag{22}$$

Alors, si $\Delta\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ n'est pas fortement sélectionnant entre les f_j et si par ailleurs e_n du mode le plus lent n'est pas trop éloigné de la diagonale, c'est-à-dire si $< 1\,|\,e_j >$ comparable à $< c|\,e_j >$, c'est le mode lent qui sera sélectionné en haut comme en bas, et alors

$$\pi = \frac{< 1\,|\,e_n >}{w_n < c|\,e_n >} \tag{23}$$

on trouve alors que le forçage a bien été éliminé, et que seul le V.P. réponse le plus lent intervient avec, ainsi la v.p. la plus faible au dénominateur. Ça ne dit pas ce que c'est, mais la pente universelle s'explique.

Quant aux hypothèses nécessaires, elles sont très probablement liées aux propriétés particulièrs du modèle, ou, s'il est correct, du climat]1.]?

Comment estimer les V.P de $(P - A)^{-1}$? Quoi qu'il arrive du forçage, le L-R du modèle ClimSI est fixé, ce qui veut dire que tôt ou tard $\boldsymbol{\Delta\eta}$ $=|\ 1 >$! On peut donc s'attendre à ce que le V.P. le plus lent ait cette direction diagonale, et pour les GCM si du moins on en croit les praticiens, les GCM ne changent pas trop la L-R C$^{\text{ste}}$. Sauf qu'on n'a qu'une seule couche pour la tropo dans Mini_ClimSI et qu'on ne peut estimer cette direction qu'en prenant les composantes finales de $\boldsymbol{\Delta\eta}_i$. Mais pour WV on a les É.P. ! on peut donc se livrer à ce calcul **à faire**

On pourrait cependant ajouter la condition que $\Delta\bar\eta$ est à l'équilibre, ce qui revient à annuler le facteur en μ ? (ou sur le système $\Delta\bar\eta - \Delta\bar\eta^\infty$). Mais pour faire telle hypothèse, faut commencer par récrire la fraction précédente avec les sous-matrices, ce que voicì.

Deuxème tentative : réussie On écrit d'emblée le défaut du bilan TOA à l'équilibre :

$$\begin{array}{ll} \Delta R & = [< 1|\ (\bar P - \bar A) + < \bar p - \bar a\,|]\Delta\bar\eta \\ & +(\bar p - \bar a + < 1\,|\bar p - \bar a >)\Delta T_s - \Delta\bar f_{\text{ext}} - < 1|\ \Delta\bar F_{\text{ext}} \\ \text{d'où} & \\ \Delta R - \Delta R^\infty & = [< 1|\ (\bar P - \bar A) + < \bar p - \bar a\,|]\Delta\bar\eta - \Delta\bar\eta^\infty) \\ & +(\bar p - \bar a + < 1\,|\bar p - \bar a >)(\Delta T_s - \Delta T_s{}^\infty)\,. \end{array} \tag{24}$$

À présent, on exprime l'anomalie de T tropo à partir du système forcé :

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} (\mu\bar K + \bar P - \bar A)\Delta\bar\eta & + & |\bar p - \bar a > \Delta T_s & = \Delta\bar F_{\text{ext}} \\ < \bar p - \bar a|\ \Delta\bar\eta & + & (\mu\bar k + \bar p - \bar a)\Delta T_s & = \Delta\bar f_{\text{ext}} \end{array} \right. \tag{25}$$

La deuxième équation ne nous sert à rien, car on exprime tout en $(\Delta T_s - \Delta T_s{}^\infty)$. De la première on tire l'écart d'anomalie tropo à l'équilibre :

$$(\mu\bar K + \bar P - \bar A)(\Delta\bar\eta - \Delta\bar\eta^\infty) = -\mu\bar K\Delta\bar\eta^\infty - |\bar p - \bar a > (\Delta T_s - \Delta T_s{}^\infty) \tag{26}$$

Il reste à reporter dans (24), en mettant à part le facteur explicite de μ :

$$\begin{aligned} \Delta R - \Delta R^\infty = \big[&\bar p - \bar a - < \bar p - \bar a|\ (\mu\bar K + \bar P - \bar A)^{-1}\,|\bar p - \bar a > \\ &+ < 1|\bar p - \bar a > - < 1|\ (\bar P - \bar A)(\mu\bar K + \bar P - \bar A)^{-1}\,|\bar p - \bar a >\big](\Delta T_s - \Delta T_s{}^\infty) \\ &- \mu\left[(< \bar p - \bar a| + < 1|\ (\bar P - \bar A))(\mu\bar K + \bar P - \bar A)^{-1}\right]\bar K\ |\Delta\bar\eta^\infty > \end{aligned} \tag{27}$$

Alors, si on se contente de la pente à l'infini, on fait $\mu = 0$ dans l'expression et on trouve simplement :

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\infty} \frac{\Delta R - \Delta R^{\infty}}{\Delta T_s - \Delta T_s{}^{\infty}} &= \bar{p} - \bar{a} - <\bar{p} - \bar{a}|\ (\bar{P} - \bar{A})^{-1}\ |\bar{p} - \bar{a}> \\ &\equiv \lambda_T\end{aligned} \tag{28}$$

De la première tentative, on en déduit encore que

$$\lambda_T \stackrel{(21)}{=} \frac{<1|\ K(P-A)^{-1}]\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}}{<c|\ (P-A)^{-1}K(P-A)^{-1}\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}} \tag{29}$$

qui pose en elle-même une énigme ...

Mais on peut être plus exigeant et penser que les conditions d'atteinte de l'équilibre permette "d'étendre vers les grands μ" la validité de ce résultat simple. On va faire l'hypothèse que "la tropo est globalement en équilibre avec la surface", ce qui se peut exprimer en égalant ce que reçoit la tropo de cette air-surface layer, soit $-<1|\bar{p} - \bar{a}>$ et ce qu'en retour la surface reçoit de la tropo, soit $-<\bar{p} - \bar{a}|\ (\bar{P} - \bar{A})^{-1}\ |\bar{p} - \bar{a}>$. ... en espérant que ce soit suffisant.

Du facteur de l'écart des températures, on développe ce qui reste en μ explicite.

$$\begin{array}{rl} (\mu\bar{K} + \bar{P} - \bar{A})^{-1} = & (\bar{P} - \bar{A})^{-1}[I - \mu\bar{K}(\bar{P} - \bar{A})^{-1}] + O(\mu) \\ \text{alors} \quad : & \\ <1|\bar{p} - \bar{a}> - <1|\ (\bar{P} - \bar{A})(\mu\bar{K} + \bar{P} - \bar{A})^{-1} & |\bar{p} - \bar{a}> = \mu <1|\ \bar{K}(\bar{P} - \bar{A})^{-1}\ |\bar{p} - \bar{a}> \\ \text{et} & \\ -<\bar{p} - \bar{a}|\ (\mu\bar{K} + \bar{P} - \bar{A})^{-1}\ |\bar{p} - \bar{a}> = & -<\bar{p} - \bar{a}|\ (\bar{P} - \bar{A})^{-1}\ |\bar{p} - \bar{a}> \\ & +\mu\ <\bar{p} - \bar{a}|\ (\bar{P} - \bar{A})^{-1}\bar{K}(\bar{P} - \bar{A})^{-1}\ |\bar{p} - \bar{a}> \end{array} \tag{30}$$

Pas de chance ou présomption, l'hypothèse à faire semble plus subtile bien que du même genre, portant sur des flux chauffant la tropo ou renvoyés en surface, à préciser si le cœur nous en dit. On retrouve les numérateur et dénominateur de l'expression de λ_T, cf (29) pour $\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}} = |p - a> \varpi$!

En conclusion de l'exercice, on a ce résultat que quel que soit le type de forçage, la régression $\Delta R/\Delta T_s$ fournit aux temps de réponse longs une pente universelle qui est en effet la sensibilité globale du climat $\lambda_0 + \sum_i \lambda_i$. À en croire ClimSI-jas, un temps long est typiquement supérieur à 3 ans, ce qui renvoie une vérification par satellite au futur moyen ... attention cependant au fait qu'on raisonne ici en forçage constant, ne pas se précipiter sur les généralisations réalistes, sauf à prendre la convolution du forçage décomposé en série de Fourier en suivant le HLG-jas.

Plus fécond peut-être, c'est ce qui se passe aux plus faibles temps, puisqu'alors la pente de la régression dépend du(des) phénomène(s) excités par $\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$. L'étape suivante consiste donc à rester déterministe et à examiner la variation de cette pente lorsque on effectue une moyenne temporelle d'horizon croissant, ou en trajectoires de moyenne mobile pour contrer le Roy Spencer[1]. Il sera nécessaire de faire des hypothèses sur le forçage, comme d'ailleurs Greg *et al*, sans parler de Roy. L'ultime étape sera de passer au stochastique. Enfin, le tout sera à ré-examiner en analyse de Floquet du cycle saisonnier du climat "à l'équilibre".

Troisième tentative : celle qui remplace les autres Bon, on examine à présent directement le rapport $\frac{\Delta R(t)}{\Delta T_s(t)}$ en Laplace :

$$\begin{aligned}\Delta R &= [<1|\ (\bar{P} - \bar{A}) + <\bar{p} - \bar{a}|]\Delta\bar{\eta} + (\bar{p} - \bar{a} + <1|\bar{p} - \bar{a}>)\Delta T_s - \Delta\bar{f}_{\text{ext}} - <1|\ \Delta\bar{F}_{\text{ext}} \\ \Delta\bar{\eta} &= -(\mu\bar{K} + \bar{P} - \bar{A})^{-1}\ |\bar{p} - \bar{a}>\Delta T_s + (\mu\bar{K} + \bar{P} - \bar{A})^{-1}\Delta\bar{F}_{\text{ext}}\end{aligned} \tag{31}$$

[1] "mort au Roy !".

on traite ce terme d'abord :

$$
\begin{aligned}
<1|\,(\bar{P}-\bar{A})+<\bar{p}-\bar{a}|]\Delta\bar{\eta} = -[<1|\,(I+\mu\bar{K}(\bar{P}-\bar{A})^{-1})^{-1}\,|\bar{p}-\bar{a}> \\
+<\bar{p}-\bar{a}|\,(\mu\bar{K}+\bar{P}-\bar{A})^{-1}\,|\bar{p}-\bar{a}>]\Delta T_s \\
+[<1|\,(I+\mu\bar{K}(\bar{P}-\bar{A})^{-1})^{-1}+<\bar{p}-\bar{a}|\,(\mu\bar{K}+\bar{P}-\bar{A})^{-1}]\Delta\bar{F}_{\text{ext}}
\end{aligned} \tag{32}
$$

et alors

$$
\begin{aligned}
\Delta R(\mu) = \big[\bar{p}-\bar{a}-<\bar{p}-\bar{a}|\,(\mu\bar{K}+\bar{P}-\bar{A})^{-1}\,|\bar{p}-\bar{a}> \\
+<1|\,\{I-[I+\mu\bar{K}(\bar{P}-\bar{A})^{-1}]^{-1}\}\,|\bar{p}-\bar{a}>\big]\Delta T_s \\
-\Delta\bar{f}_{\text{ext}}-\big[<1|\,[I-\{I+\mu\bar{K}(\bar{P}-\bar{A}]^{-1}\}^{-1}]-<\bar{p}-\bar{a}|\,(\mu\bar{K}+\bar{P}-\bar{A})^{-1}\big]\Delta\bar{F}_{\text{ext}}
\end{aligned} \tag{33}
$$

on en déduit d'une part ΔR^{∞} :

$$
\begin{aligned}
\Delta R^{\infty} = (\bar{p}-\bar{a}-<\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}\,|\bar{p}-\bar{a}>)\Delta {T_s}^{\infty} \\
-\Delta\bar{f}_{\text{ext}}+<\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}\Delta\bar{F}_{\text{ext}} \\
= \quad (\lambda_0+\lambda)\Delta T_s^{\infty}-\{\Delta\bar{f}_{\text{ext}}-<\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}\}\Delta\bar{F}_{\text{ext}}
\end{aligned} \tag{34}
$$

et on obtiend directement cette fameuse droite asymptotique :

$$
\boxed{\Delta R^{\infty} = \lambda_T\Delta\theta_s^{\infty}-\{\Delta\bar{f}_{\text{ext}}-<\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}\}\Delta\bar{F}_{\text{ext}}} \tag{35}
$$

qui confirme que a pente asymptotique ne dépend pas du forçage et est la sensibilité totale du système.

Alors, pour un forçage de type Planck, $\Delta\boldsymbol{F}_{\text{ext}} = -\,|p>\varpi$, (avec un signe moins pour être en cohérence avec la colonne de P vue dans le membre de droite de l'équation de $\boldsymbol{\Delta\eta}$, c'est-à-dire correspondant à un réchauffage de l'atmosphère), le terme de forçage sur T_s devient $\lambda_0\varpi$, et on trouve :

$$
\Delta R^{\infty} = \lambda_0(\Delta\theta_s+\varpi)+\lambda\Delta\theta_s \tag{36}
$$

en prètant attention au fait que nous avons rétabli une erreur de notation, car en effet il s'agit de $\Delta\theta_s$, puisque c'est la réponse à un forçage — température de surface non augmentée de ϖ. Ainsi, contre toute attente, mais c'est bien ce que l'on constate sur le Fig. 21, la courbe se termine avec une pente de λ_T, et l'écart de cette droite à l'origine n'est pas nul et donne par prolongement à $\Delta\theta_s$ nul, quoi d'autre que ce foutu λ_0 !

Remarquer encore que le raisonnement précédent ne peut s'appliquer directement à WV car dans ClimSI, cette rétroaction n'est pas activée par la température de surface océanique ... mais on peut y accéder en régressant cette fois l'OLR à T_{WV}, cf Fig. 25.

Mais en supposant que le forçage fasse $-(\Delta\bar{f}_{\text{ext}}-<\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1})\Delta\bar{F}_{\text{ext}}) = \lambda_i\varpi$, et

$$
\Delta R^{\infty}_{\text{WV}} = \lambda_{wv}\varpi+\lambda_T\Delta\theta_s\ , \tag{37}
$$

on obtiend encore la sensibilité par l'ordonnée à l'origine de la droite asymptotique.

De manière générale, pour un forçage de type analyse de rétroaction par perturbation d'un modèle directement sensible à T_s, on obtiend :

$$
\boxed{\Delta R^{\infty} = \lambda_T\Delta\theta_s^{\infty}+\lambda_i\varpi} \tag{38}
$$

Le problème c'est qu'on se demande quand les étonnements accompagnant chaque résultat de cette analyse prendront-ils fin [1.]? On a été obligé de préciser ce type de forçage, car il semble à la lecture de (38), que l'on ai une grande latitude sur ce forçage. Il faudrait peut-être encore préciser dans un cas plus général si alors l'ordonnée à l'origine continue à donner un λ_i significatif ? voir plus bas.

Ceci dit, reste à vérifier la cohérence de ces formules avec les résultats numériques du mini_Clim, parce que ça donne grossièrement un λ_0 de 0.8 $Wm^{-2}K^{-1}$, ce qui est véritablement faible. Et ça ne dit pas pourquoi ΔR^∞ devient nul quand on prend une perturbation de Planck par step plutôt que par repeff ... Si, il suffit pour ça de voir que

$$\Delta\theta_s^\infty = \frac{\Delta \bar{f}_{\text{ext}} - <\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1})\Delta\bar{F}_{\text{ext}}}{\lambda_T} \tag{39}$$

ce qui pour Planck donne $\Delta\theta_0^\infty = -\frac{\lambda_0}{\lambda_T}\varpi$ et anulle bien ΔR. Attention car on régresse par la T_s qui n'est pas nécessairement la variable test dans ClimSI !— à voir donc. De même les signes des courbes données dépendent des conventions de signe dans mini_Clim et ne sont pas nécessairement celles de nôtre formalisme. Ainsi c'est $[-P]$ qui est codé — bilans entrants dans les trois cellules y compris pour l'espace qui voit donc bien l'OLR, alors que le formalisme prend les divergences des couches atmosphériques.

Le terme du premier ordre en μ s'ajoute à eq.(38) :

$$\begin{aligned}\Delta R^1(\mu) = \Delta R^\infty + \mu\{\, \bar{k} - \big\langle <1| - <\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}]\bar{K}(\bar{P}-\bar{A})^{-1}\,|\bar{p}-\bar{a}>\ \}\,\Delta T_s \\ +\mu\{\big\langle <1| - <\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}]\,\bar{K}(\bar{P}-\bar{A})^{-1}\Delta\bar{F}_{\text{ext}}\end{aligned} \tag{40}$$

que l'on peut interpréter comme le défaut de bilan TOA dû à l'accroissement d'énergie interne de la tropo et de la couche de surface ; en effet ce terme n'est autre que

$$\mu\big\langle <1| - <\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}]\bar{K}\boldsymbol{\Delta\eta}^\infty + \mu\bar{k}\Delta T_s(\mu) \tag{41}$$

avec $\mu\bar{K}$ qui marque la tendance au stockage tropo, et $\big\langle <1| - <\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}]$ le défaut de bilan par un retour vers la première couche marqué par $- <\bar{p}-\bar{a}|$. On peut constater que l'on a fait dans ce développement l'hypothèse que les matrices ont déjà atteind leurs valeurs asymptotiques. La dépendance en μ de ces matrices provenant des effets de Q dans ClimSI, cdeux-ci sont rapides et supposés éteinds ; le système est entièrement piloté par l'inertie thermique, à commencer par celle de la CMO ; c'est ça l'hypothèse sous-jacente.

À présent, si le forçage est de type rampe, on a une contribution supplémentaire par $\big\langle <1| - <\bar{p}-\bar{a}|\,(\bar{P}-\bar{A})^{-1}]\,\bar{K}(\bar{P}-\bar{A})^{-1}\alpha$, avec $\alpha = -d_t\Delta\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$. Ce terme va modidfier l'ordonnée à l'origine, pas la pente, d'où la régrssion de Gergory avec rampe CO_2 ; **voir en plus Myhre** ***et al*** **GRL 1998**.

Ce serait bien de déterminer quelle partie de la courbe de régression est utile, parce qu'en suivant l'avancement en ligne des couorbes de régression, on en voit qui avancent $\pm$ vite vers zéro en ΔR.

Synthèse des résultats et méthode à appliquer aux GCM[1] Les formules de régression obtenues avec le calcul des réponses effectives confirment en (très) gros les résultats par DFG mais sont manifestement meilleures sauf la détermination des $\Delta\theta_i$ par relaxation qui elle est excellente. Il semble ainsi plus fiable de déterminer les λ_i en appliquant le forçage et en régressant $\Delta R/\Delta T_s$ pour chacun.

La droite asymptotique fournit λ_T par sa pente, et λ_i par son ordonnée à l'origine.

Ce qui apparait encore, c'est que l'application du forçage semble très libre, non nécessairement liée à T_s. Supprimer les rétroactions revient à annuler le terme $\lambda_T\Delta\theta_s$, ce qui se fait en bloquant la SST, ce qui fournit les λ_i.

Cette double détermination interroge le modèle de deux manières non indépendantes certe, mais différentes : l'une par sensibilité d'un sous modèle, l'autre par sa sensibilité radiative.

[1] correct, mais avec le problème d'interprètation de Planck, cf plus bas (Al1, 20 août).

Pour mini-Clim et pour Planck et WV, on a ainsi par DFG(1) et par régression(2) : $\lambda_0 \overset{1}{=} 0.65 \overset{2}{=} 0.8$, et $\lambda_w \overset{1}{=} -1.5 = -1.32(?) \overset{2}{=} -1.4$. Il faut noter que les effets-en-retour sont donnés à l'équilibre (concernent la droite de régression).

Pour les IFC relatives, on compare DFG(1) aux effets-en-retour(2) : Pour Planck par

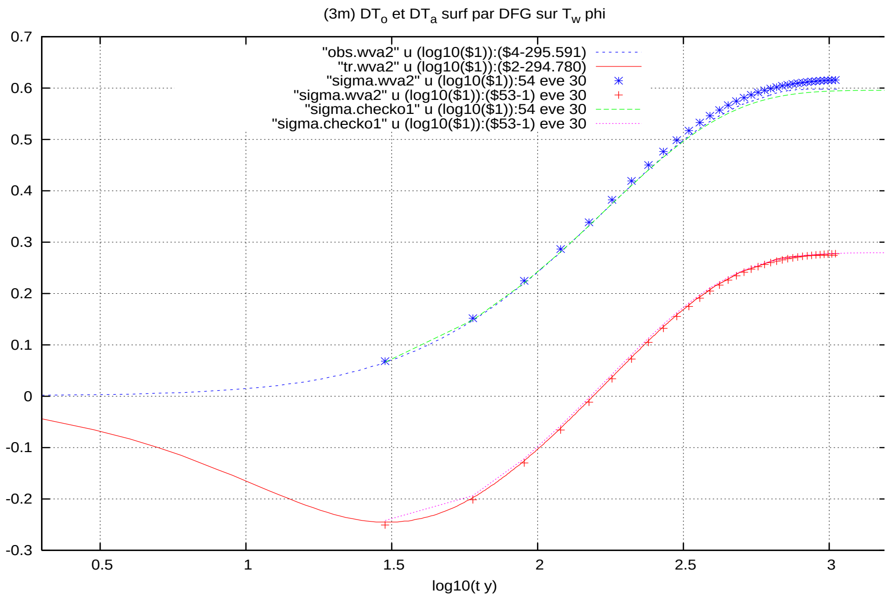

FIG. 23 – Réponses ΔT_s par DFG et effets-en-retour pour T air surf et T oc surf pour T_wv_phi+1 K.

DFG, c'est la Fig. 24. On a manifestement un problème de précision (bien connu) sur le

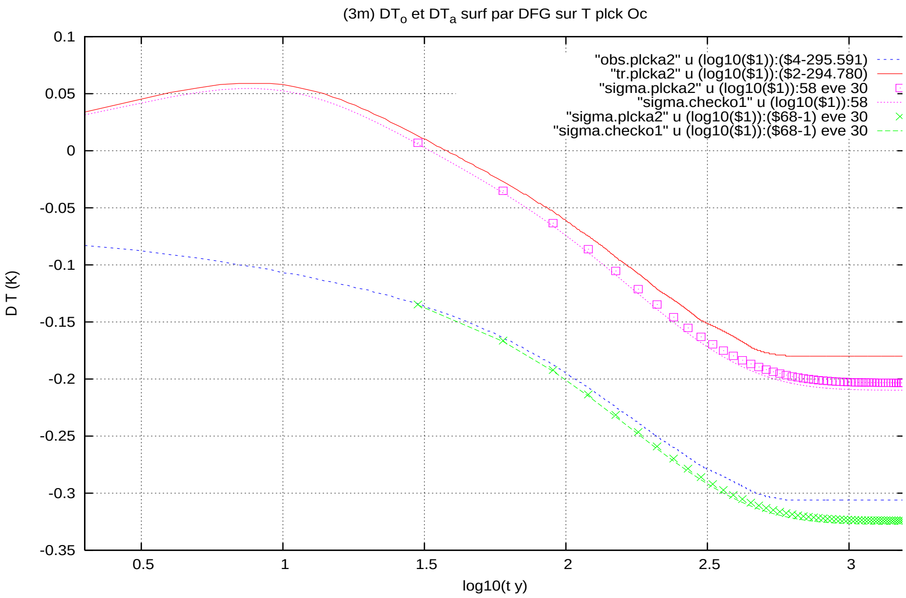

FIG. 24 – Réponses ΔT_s par DFG et effets-en-retour pour T air surf et T oc surf pour T_wv_phi+1 K.

calcul des températures en Kelvin ...

On éprouve enfin le calcul de $\lambda_T = 2.45$ par régression par comparaison avec une DFG en appliquant SST+1K bloquée. Ça donne $244.939 - 242.412 = 2.527 Wm^{-2}K^{-1}$.

Par comparaison avec (DuB), on trouve $\lambda_0 = 0.8$ (3.2) et $\lambda_w = -1.4$ (-0.96 ou -1.8 hors lapse-rate) ; et $\lambda_T = 2.45$ (1.27) $Wm^{-2}K^{-1}$; non, il faut retirer de λ_T les effets d'albedo et de nuages que nous n'avons guère : $\lambda_T = 2.45$ (2.22) $Wm^{-2}K^{-1}$ (pas mal).

En IFC relatives vues de la T océan-surf, on a $\Delta\theta_0 = 0.6KK^{-1}$ (0.38) et $\Delta\theta_w = -0.32$ (-0.30), mais attention, nos valeurs ne sont pas prises par K de réchauffement, mais par K de forçage ! Il faut donc diviser les IFC DuB par leur IFC Planck, qui est difficilement comparable à la nôtre ... pb, mais on aurait alors en gros $\Delta\theta_0 = 0.6KK^{-1}$ (0.32) et $\Delta\theta_w = -0.32$ (-0.25).

En ce qui concerne λ_T, on est tout à fait compatible. Pourquoi alors le $2\times CO_2$ montre mini-Clim moins sensible ? Eh bien, si on accroit que le doublement excite principalement Planck, celui-ci étant quatre fois trop faible, la réponse s'en trouve amoindrie — mais non, cf le pb Planck élucidé plus bas : ce n'est pas la réponse de Planck au forçage, comme établie dans les formules d'élimination du $\boldsymbol{\Delta F}_{\text{ext}}$.

Pour la réponse de Planck elle-même, il semble raisonnable que la définition par L-R C^{st} donne une valeur plus forte, puisque nous laissons la Q tropo se relaxer, mais l'écart semble bien grand et on peut y voir la cause principale de la faible réponse au doublement.

On constate de plus que bien que l'on n'ait dans mini-Clim de rétroaction ni d'albedo ni de nuages, il en manque, puisque la somme des $\lambda_0 + \lambda_w$ n'atteind guère λ_T. Il y a donc fort à parier que notre définition de Planck ne coïncide pas avec celle des PRPistes (exact, cf cì-après)

Planck probème, encore ! Manifestement, on a intuité une réponse de Planck en ayant en tête que la surface est l'**agent**, alors que notre analyse formelle nous montrait clairement que la réponse de Planck dépend du forçage. En cas de doublement, il s'agit de la réponse du système sans rétroactions-surface $|\, b >= 0$. Le problème se pose donc (encore, désolé) de sa détermination, tant dans les GCM que dans ClimSI — du moins sans corrections adéquates à Mini_ker !

Le 19 août à Kerséoc'h[1], on calcule d'abord $\Delta\theta_P$, histoire de ne le plus confondre avec $\Delta\theta_0$, le “surface-Planck”. Il suffit de prendre $\bar{a}$ et $|\,\bar{a}>$ nuls, pour trouver

$$\Delta\theta_P^{\infty} = \frac{\Delta\bar{f}_{\text{ext}} - <\bar{p} - \bar{a}\,|\,(\bar{P} - \bar{A})^{-1})\Delta\bar{F}_{\text{ext}}}{\lambda_0} \tag{42}$$

autrement dit, la composante par doublement de Planck se déduit du forçage $2\times$ de la régression des sensibilité à $2\times$, puisque ce forçage est déterminé par la régression à $1\times$; et les relations classiques donnent alors :

$$\lambda_P \varpi = \lambda_P = \lambda_T \Delta\theta_P \tag{43}$$

avec ClimSI, on trouve $\Delta\theta_P = -\lambda_x/\lambda_0 \approx 0.9/0.8 = 1.1$, d'où $\lambda_P = 2.45 \times 1.1 = 2.7 Wm^{-2}K^{-1}$; ça nous va comme ça ? Peut-être vérifier spécifiquement pour ce cas particulier que marche la régression et marche la relation classique.

Si c'est bon, alors on détermine dans le GCM

1. par une expérience de doublement et la régression : λ_T et le forçage ($\Delta\bar{f}_s = -$y_intercept) ;
2. par (+1K) sur le calcul du LW : λ_0 par l'intercept ;
3. on en déduit $\Delta\theta_P^{2\times} = \Delta\bar{f}_s/\lambda_0$, qui est bien celle correspondant à notre système avec $\boldsymbol{\Delta F}_{\text{ext}}$ éliminé, et ainsi la base permettant de définir les IFCs ;
4. et enfin $\lambda_P = \lambda_T \Delta\theta_P^{2\times}$ en cohérence ;

On peut remarquer qu'avec ces déterminations, la réponse de Planck est celle du système de base répondant au **vrai forçage** du système soumis à $2\times$, celui-là même que détermine Gregory par régression.

[1] excusez du peu, dans le jardin sous une bâche noire et une boite en carton parce que nos écrans ne sont vraiment pas lumineux, à vot'bon cœur !

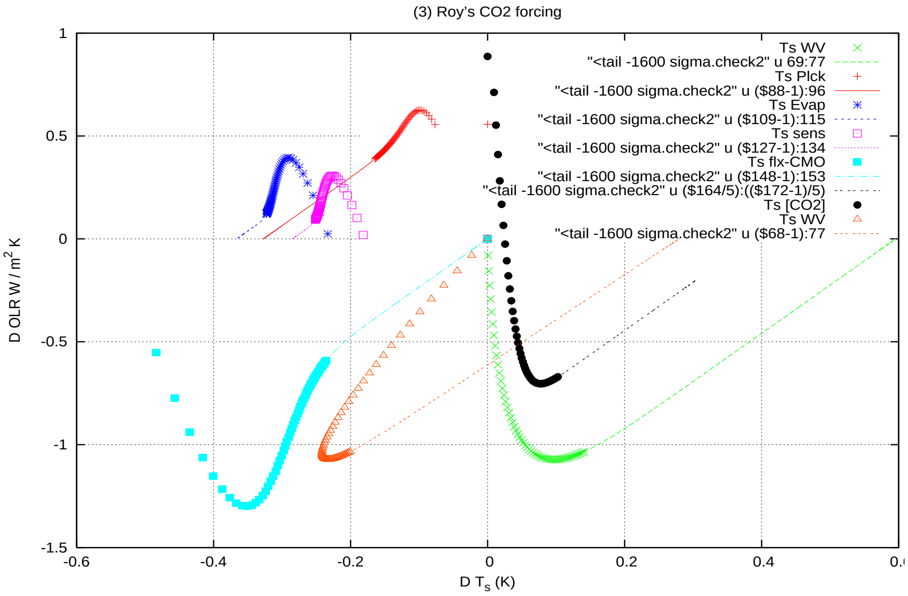

FIG. 25 – Réponses ΔT_s par DFG et effets-en-retour pour T air surf et T oc surf pour T_wv_phi+1 K.

Si tout ça est bon, je crois qu'on a bien verrouillé le paquet résolutif.

Mais reste à comprendre :

- des λ_i^* inclusifs ? c'est-à-dire avec le forçage $2\times$ ET un (+1K) ;
- ce serait quoi du $-\lambda^i = \bar{a}^i - < \bar{p} - \bar{a} |\, (\bar{P} - \bar{A})^{-1} \,| \bar{a}^i > ?$
- relation(s) avec le Lyapunov de $\lambda_T, \Delta\theta_s$ ...
- que ce passe-t-il pour le forçage d'une rétroaction indirecte ? (c'est d'ailleurs le cas pour WV dans ClimSI).

rétroaction indirecte Une première question est liée au modèle conceptuel justifiant l'analyse globale. Ce fameux "tout passe par la couche de surface" atmosphérique peut pour des raisons pragmatiques être en contradiction avec un modèle. On a la chance d'avoir cet exemple extrèmement simple avec ClimSI ; en effet, le déclenchement du modèle censé prendre en compte les effets globaux (dynamique comprise donc) de la convection profonde ne se peut faire qu'en perturbant le bas de la tropo — au sens liitéral, c'est-à-dire une interpolation de la température (unique) tropo jusqu'à la surface en suivant un L-R donné. Et comme j'ai ajouté une couche superficielle océanique représentant cette "air-surface layer" pour découpler de la tropo, la rétro WV devient indirecte.

Dans ce cas, on a par régression $\Delta R/\Delta\theta^{wv}$ un forçage Δf^{wv} de la tropo. Alors, quelle est cette information récupérée par régression $\Delta R/\Delta\theta_s$, le forçage induit sur la première couche Δf_s^{wv} ? Comment en déduire $\Delta\theta_s^{wv}$ et λ_{wv} ?

réponse possible : on définit la perturbation-surface comme celle qui donnerait le même impact bilans TOA. On prend donc $\lambda_{wv} = -\Delta f^{\mathrm{wv}}$. Alors $\Delta\theta_{wv} = \Delta\theta_s^{wv}$ par linérarité, on a $\Delta f_s^{wv} = \lambda_{wv}\Delta\theta_s^{wv}$, d'où $\lambda_{wv}\Delta f^{\mathrm{wv}}/\Delta f_s^{wv} = \Delta f^{wv}/\lambda_T = -\lambda_{wv}/\lambda_T$.

Application : $\lambda_{wv} = 1.45 W m^{-2} K^{-1}$; et $\Delta\theta_{wv} = 0.6 \times 1.45/2.45 \approx 0.36K$.

On a ainsi utilisé les résultats de la régression "par l'agent supposé" T_s, mais en plus ceux de l'agent véritable. Alors, on peut se livrer à une généralisation abusive, le rapport des deux forçages de la régression donne un facteur d'atténuation sur $\Delta\theta_i^i$ (^{i} pour "indirect") qui permet de délivrer une IFC ; "abusif" en ce sens qu'il faut alors bien comprendre ce qu'on fait climatologiquement parlant pour conserver les deux critères d'attribution et de séparation sans lesquels l'analyse est invérifiable. Bref, pour assurer cette méthode, une formalisation est indispensable ... **à tenter**

Lyapunov Si on considère à présent la variation temporelle $x \times f(t)$ de ΔR et $\Delta\theta_s$, la pente de régression devient constante dès qu'elles ont la même $f(t)$. Pour simplififer, supposons $K = I$ et A constante, dans la décomposition de $(P - A) = E\,[w]_d F^\dagger$ en ses É.P. — sacahnt que la démo se peut faire rigoureusment en repartant du système global dont les matrices sont constantes. On a alors

$$\begin{cases} \Delta R \quad =<1|\,(P-A)(\mu I + P - A)^{-1}\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}} =<1|\,E\,[\frac{w}{\mu+w}]_d F^\dagger \Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}(\mu) \\ \Delta T_s \qquad =<c|\,(\mu I + P - A)^{-1}\Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}} =<c|\,E\,[\frac{1}{\mu+w}]_d F^\dagger \Delta \boldsymbol{F}_{\text{ext}}(\mu) \end{cases} \tag{44}$$

Chaque dépendance est constituée de sommes de poids différents appliqués aux même fonction du temps $e^{-w_i t}$ poour un forçage Dirac, ou ses intégrales successives pour un forçage constant, rampant, ou même en t^n ; les deux ne deviennent logiquement identiques que lorsque tous les exposants se sont amortis à l'exception du dernier qui n'est autre que le Lyapunov du système, et la pente devient

$$\pi = \lambda_P = w_1 \frac{<1\,|\,e_1>}{<c\,|\,e_1>} \tag{45}$$

Les constantes issues de l'intégration[1] décalent simplement l'intercept.

On pourra toujours tracer les courbes en fonction de (t) pour repérer, dans le cas constant, cette décroissance Lyapunovienne. Vérification, on trace pour chaque rep-eff $\log(x - x_\infty)$, et la pente donne le premier Lyapunov !

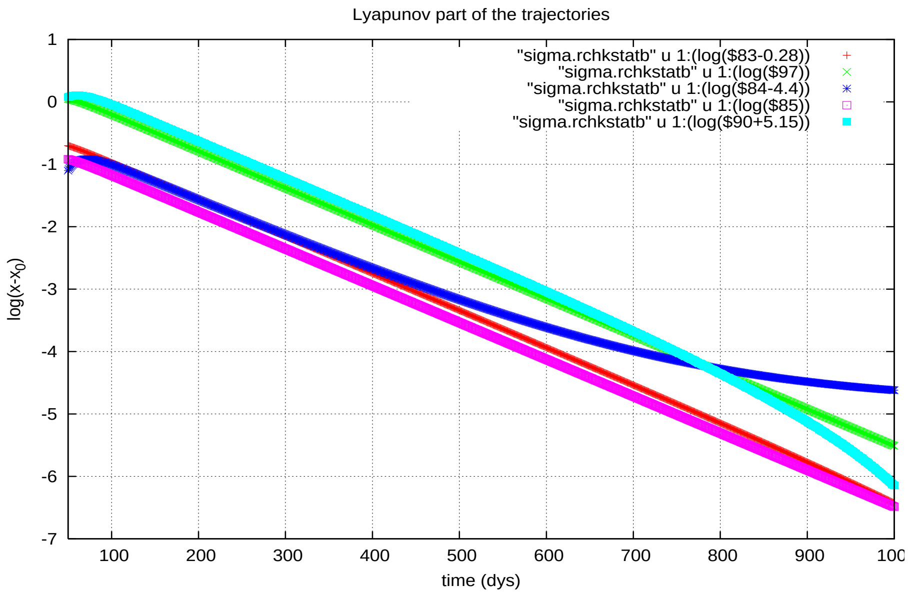

FIG. 26 – Comment trouver le premier Lyapunov par forçage de Gateaux.

[1] qui ne sont pas toutes vraiment françaises...

4 Analyse de la réponse effective en composantes inclusives de rétroaction

On a déjà largement insisté sur l'intérêt de la réponse effective dans les cahiers du "Propagateur" ; la question de la décomposition des effets rétroactifs, soulevée par des climatologues (cf Dufresne-Bony et Bony-Dufresne :JLDSB), mais aussi (Jianhua Lu et Ming Cai :L&C), rendent un hommage inspiré à notre point de vue 1.]? Ce qui nous donne l'occasion, après encore le petit exemple introductif de JYG, de développer ici les bases de cette analyse que nous qualifierons en attendant mieux "d'analyse en composantes inclusives de rétroaction". De même, nous requalifions la fameuse fonction ρ définie par (6) de la Lettre, de "réponse effective additionnelle", marquant ainsi d'une part que la réponse complète est $\rho u + u$ pour une perturbation u, d'autre part qu'elle mène directement à une analyse additive de la réponse[1].

Pour fixer les idées, nous nous plaçons tout d'abord dans le cadre des hypothèses dîtes PRP pour "partial radiative perturbation" de Wetherald & Manabe, à savoir que "tout passe par T_s, mais nous posons cependant le SLT d'un système d'avance d'état de GCM :

$$\partial_t \boldsymbol{\Delta\eta} = A^\sharp \boldsymbol{\Delta\eta} + \Delta F_0 \tag{46}$$

dans lequel nous placerons T_s en fin des composantes de η, nous restreignant dans cette première exploration à une seule colonne de GCM, perturbée par un forçage radiatif F_0.

Autour d'un équilibre (PRP), en transformée de Laplace de variable μ, nous éliminons toute autre composante que les températures et considérons ce système restreint

$$\mu \Delta T = A(\mu)\Delta T + |\, b> \Delta F_0 \tag{47}$$

dans lequel $A(\mu) = A^\sharp - B(\mu I - D)^{-1} C$ est la matrice réduite[2].

On est alors dans les conditions de PRP si étudiant ce système "à l'équilibre" asymptotique ($\mu = 0$), laissant ainsi délibérément de côté le réalisme d'un tel équilibre, problème fondamental qui n'est pas envisagé encore mais que nous devrons affronter. Mais comme c'est le même prix, nous conservons l'aspect dynamique de la réponse du SLT. Ici, "tout passe par T_s" conduit à affirmer que toute autre composante de $|\, b>$ que la dernière est nulle, ou encore que seule l'équation de T_s est affectée par la perturbation scalaire F_0.

L'analyse de rétroaction plantée dans l'EPL consiste en premier à sortir T_s de ce système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta T = A(\mu)\Delta T \quad + |\, b> \Delta F_0 \\ \quad \Delta\varphi = <c\,|\; \Delta T \end{array} \right.$$

avec encore nullité de toute autre composante que la dernière dans la matrice-ligne $<c\,|$, et cette dernière égale à l'unité, si bien que $\Delta\varphi$ s'identifie à T_s.

Une boucle de rétroaction est alors initiée, la fermeture restant à faire. C'est là qu'intervient la sémantique, physique ou climatologique dans notre cas. Considérer une rétroaction liée à un phénomène i, c'est identifier dans A une sous-colonne $|\, b_i>$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta T = A_i^\flat(\mu)\Delta T \quad + |\, b_i(\mu)> \Delta\varphi + |\, b> \Delta F_0 \\ \quad \Delta\varphi = <c\,|\; \Delta T \end{array} \right.$$

ici, l'hypothèse "par T_s" nous restreint à la dernière colonne de A, et on a $A = A_i^\flat + |\; c >< b_i\;|$.

Tout est prêt pour appliquer nos résultats d'analyse de rétroaction des formules (11) et (12) de l'EPL.

[1] le lecteur sera sensible au style quasi solennel de ces annonces...

[2] attention aux habitués du TEF, il s'agit des matrices composant le système du grand État, sans transferts...

On remarque la différence essentielle entre le gain et les réponses : si la matrice d'avance complète (ici, attention, $A\sharp$) intervient dans les réponses, une matrice réduite intervient dans le gain. On peut également remarquer qu'il peut être délicat dans un GCM de définir proprement une boucle par le choix de $|\,b_i>$, car la colonne de A d'où elle est extraite est à retirer de manière plus compliquée des coefficients de $A^\sharp$!

Qu'est-ce qui nous empêche de considérer plusieurs mécanismes à la fois ? L'hypothèse (PRP) de séparation des mécanismes conduit à la possibilité d'extractions indépendantes de $|\,b_i>$ de la dernière colonne de A :

$$\begin{cases} \mu\Delta T = A_i^\flat \Delta T \quad + \sum_i |\,b_i> \Delta\varphi + \Delta F_0 \\ \Delta\varphi = <c|\;\Delta T \end{cases}$$

(on laisse tomber les μ pour faire plus court).

Alors, si Φ est le propagateur - correspondant à $A^\sharp$ - du SLT complet, on a, cf (109) de Propagateurs, où on pose $\rho(t) = \sigma_g(t,\tau)|_{\tau=0}$:

$$\rho(t) = \sum_i \rho_i(t)\Delta F_0 = \sum_i \Delta T_i(t) \tag{48}$$

On arrive ainsi très naturellement à une somme d'anomalies de la grandeur considérée dont chaque terme est lié à un mécanisme, et ceci quel que soit l'ensemble de mécanismes considéré, car chaque terme est une réponse additionnelle, la somme ρ comptabilisant la réponse additionnelle (à la perturbation) de tous ces mécanismes pris ensemble, alors que l'introduction d'un mécanisme de plus ne met pas en cause les résultats précédents - du moins tant que le système complet n'est pas modifié ! D'où la dénomination de composantes "inclusives".

Si l'on tient à expliciter ce précédent résultat, admettons de plus que A s'identifie à $A^\sharp$, c'est-à-dire que les températures seraient les seuls états du système, et alors $|\,b_i>$ reste constant ; on a alors le résultat très simple suivant :

$$\rho_i(t) = <c|\;A^{-1}\,(\exp(At) - I)\;|\,b_i> \tag{49}$$

Ce résultat est bien évidemment vérifié sur l'exemple WV par Jean-Yves.

s'agit-il de rétroaction ? d'une boucle de rétroaction, qui annule le gain g_i. Mais alors, comme de l'analyse qui précède il découle qu'en transformée de Laplace

$$\rho_i = \frac{g_i}{1 - \sum_i g_i} \quad , \tag{50}$$

annuler un gain modifie les autres composantes ! De ce fait, l'analyse inclusive semble difficile à interpréter comme rétroaction, d'où les précautions d'auteur de Bony-Dufresne, mais la bévue de L&C[1], qui osent affirmer :
"we can directly calculate the (partial) change in the surface temperature <u>solely due to each of the feedbacks</u> subjects to the external forcing [...]"[2].

Ils vont même plus loin en effectuant la critique du point de vue classique cî-dessus énoncé en expliquant que l'ouverture d'un boucle de rétroaction conduit à ce que les autres mécanismes non bloqués subissent un "effet compensatoire", et ainsi que l'on crée un "modèle artificiel". En effet nous constatons que toutes les composantes inclusives sont modifiées si on prend un ou plusieurs g_i nul dans la somme du dénominateur. Alors qui a raison ? Moi, entre les auteurs et Bode, je vote Lu & Cai.

[1] mais "l'insu que sait, de l'une bévue, s'aile à mourre", et nous les réhabiliterons plus tard, ne serait-ce que parce qu'ils habitent la Floride.

[2] c'est moi qui souligne, mais les auteurs ne seraient pas contre, je crois.

Synthèse par l'exemple

Mettons en exergue quelques rappels et conséquences de ces résultats, en faisant le lien avec l'analyse du modèle WV2 de JYG (Analyse de deux ...). Ce cas particulier fait prendre à la "matrice" $A(\mu)$ globale la valeur de $-A + \frac{a}{C_o} + \alpha\beta\gamma_z A$ — désolé pour le terme A, il faut s'en prendre à stepH ! On a par ailleurs $< c \,| = 1$ (recopie de ΔT_s, et $|\, b_1 >= \alpha\beta\gamma_z A$ pour la rétro WV, et $|\, b_2 >= \frac{a}{C_o}$ pour l'albedo.

une dualité gain de rétroaction–réponse effective additionnelle Dans ce suit, il s'agit toujours du même modèle, mais soumis à une structure d'analyse changeante.

Le gain se constitue de deux termes : la partie de $|\, b_i >$ qui "amplifie" la perturbation ϵ – par $|\, b > (\Delta\varphi + \epsilon)$; mais alors, la matrice A est réduite – ici, prenant la rétro WV, $A_1^\flat = -A + \frac{a}{C_o}$; ce deuxième composant du gain sera au dénominateur sous la forme $\mu + A - \frac{a}{C_o}$. On peut le dénommer "terme de réaction" ou d'inertie. Alors, à chaque considération d'une rétroaction, ce terme est différent, c'est-à-dire que l'on considère une réaction du reste d'un système différent. Dans l'exemple WV2, g_1 est le gain WV lorsque l'albedo réagit avec le reste du système, mais $g_{WV,2}$ est un gain WV à réaction d'albedo bloquée (a=0).

Au contraire, si on considère la réponse additionnelle ρ_i, on a des termes d'amplification spécifiques, mais intervention de la matrice A globale – ce que nous démontrons explicitement dans la section qui suit, cf eq. (53). La démonstration de JYG de sa page 4 peut se compléter ainsi :

$$\frac{\frac{\alpha\beta\gamma_z A}{\mu+A}}{1 - \frac{\alpha\beta\gamma_z A}{\mu+A} - \frac{a}{C_o(\mu+A)}} = \frac{\frac{\alpha\beta\gamma_z A}{\mu+A-\frac{a}{C_o}}}{1 - \frac{\alpha\beta\gamma_z A}{\mu+A-\frac{a}{C_o}}} = \frac{\alpha\beta\gamma_z A}{\mu + A - \frac{a}{C_o} - \alpha\beta\gamma_z A}$$

avec ce terme de droite qui n'est autre que $\rho_{WV} =< c \,| \, (\mu I - (A + |\, b >< c \,|))^{-1} \,|\, b >$ dans ce cas particulier. Cette particularité des réponses permet alors d'introduire l'analyse en Composantes Inclusives, mais avec précaution pour des raisons que nous donnons plus bas.

Le diagramme de la fig. 27 tente d'expliciter l'analyse par composantes inclusives lorsque le système est autonome. La réponse globale à une perturbation de la variable est décomposée en

$$\Delta T_{tot}(\mu) = \Delta T_{pert}(\mu) + \sum_i \frac{g_i(\mu)}{1 - \sum_j g_j(\mu)} \Delta T_{pert}(\mu) \tag{51}$$

où μ est la variable symbolique.

Dans le cas plus général du SLTC, on obtient l'équivalent dans l'espace réel :

$$\Delta T_{tot}(t) = \Delta T_{pert}(t) + \int_0^t \Phi(t,\tau)[\sum_i |\, b_i(\tau) >] < c| \; \Delta T_{pert}(\tau) d\tau \tag{52}$$

(on a supposé qu'une seule colonne de A était concernée et que $< c \,|$ recopiait une des variables d'état - il reste constant).

Ainsi, comme dans la formule symbolique, la variation globale de la variable est décomposée en une somme de contributions. Dans le cas symbolique, celà se fait en proportion des gains asymptotiques, proportion qui peut évidemment être très changeante pendant le transitoire.

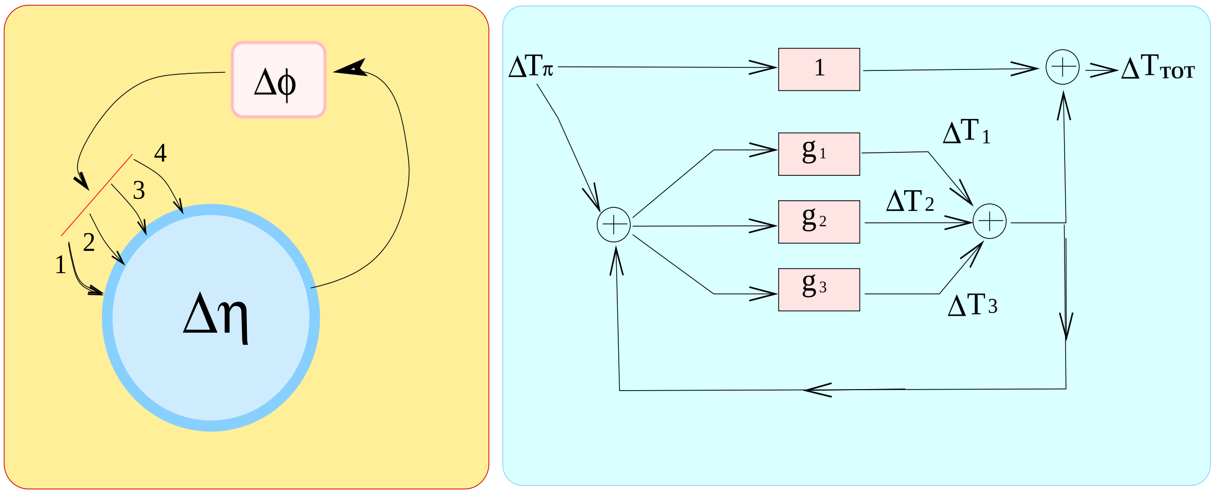

FIG. 27 – Inclusive Components diagram in a symbolic space. Dans le diagramme de gauche, la perturbation peut être appliquée à $\Delta\varphi \to \Delta\varphi = \Delta T_s + \epsilon$, ce qui fournit la réponse globale, soit ajoutée à $\Delta\varphi$, qui devient la réponse additionnelle : $\Delta T_{tot} = \Delta\varphi + \epsilon$; c'est cette deuxième manière qui est utilisée dans Mini_ker pour obtenir la "réponse effective", du genre $\frac{g}{1-g}$, et celle que JYG utilise dans WV2 (via ses deux ϵ).

On peut dire en résumé que :
- les réponses effectives correspondant à des mécanismes séparables s'additionnent – quand les gains s'additionnent, les réponses s'additionnent ($g_2 = g_{WV,2} + g_{A,2} \to \rho_1 = \rho_{WV,2} + \rho_{A,2} = \dfrac{g_{WV,2} + g_{A,2}}{1 - g_{WV,2} + g_{A,2}}$) ;
- l'analyse d'une nouvelle rétroaction du modèle inchangé fournit une nouvelle réponse – ou composante inclusive – en laissant les autres inchangées ;
- ceci est encore vrai pour la réponse dynamique du SLT autonome perturbé ;
- et le reste encore en suivant le SLTC ;
- à la suppression d'une rétroaction, les composantes inclusives sont toutes modifiées mais restent dans la proportion de leurs gains (dans le cas SLT, seul le dénominateur est modifié)[1] ;
- autrement dit, les "effets compensatoires" mis en avant par L&C n'affectent pas la hiérarchie des composantes ; ceci étant clair en statique, – par contre, les dynamiques sont bouleversées ;
- reste donc une **dualité** entre l'analyse des gains et celle des réponses additionnelles : les gains fournissent une hiérarchie, alors que les réponses donnent une contribution à la réponse globale – les composantes inclusives au changement global ;
- ainsi, les réponses additionnelles donnent un "pourcentage explicatif" du global pour chaque mécanisme identifié, de même que l'analyse par EOF donne un pourcentage explicatif de chaque mode à la variance globale – ce parallélisme étant à ré-explorer en analyse des rétroactions sur champs ;
- mais l'aspect dynamique des gains reste difficile à interpréter, même dans le cas du SLT autonome du fait de l'intervention de convolution, alors que les réponses autorisent l'analyse dynamique (Lyapunov, Floquet, SLTC) ;

[1] ainsi de l'ajout des rétroactions océaniques effectué par JLDSB leur a numériquement montré.

Un piège de l'analyse en composantes inclusives

Les réponses effectives additionnelles sont données par unité de perturbation de la variable concernée par l'analyse. Le modèle est plus classiquement soumis à un "forçage" censé perturber – directement – la variable analysée ; c'est le cas décrit dans l'exemple WV par ce terme de forçage radiatif (un grand classique du climat) : ΔF_0.

Dans ce cas, ΔT_{tot} est connu, ΔF_0 aussi, et son impact immédiat – c'est-à-dire avec **toutes les rétroactions bloquées** : leur différence est fixée, qui est aussi la somme des composantes inclusives. Il semble y avoir une contradiction, puisque chaque composante apporte une contribution intrinsèque au total, ce total doit donc dépendre du nombre de mécanismes analysés !

L'explication est que l'impact du forçage sur la variable, c'est-à-dire le ΔT_{pert}, dépend de l'analyse – comparer ces termes dans les formules (4) et (9) dans WV2. Ainsi, considérant un ensemble des mécanismes analysés, soit cet ensemble est exhaustif – la dernière colonne de $A^\flat$ est nulle – et l'approportionnement de ΔT_{tot} fournit les composantes inclusives intrinsèques, soit non, et on n'a plus accès à ces composantes, mais à la hiérarchie entre elles seulement.

Dans l'analyse de L&C, l'exhaustivité repose sur une somme exhaustive des flux, suivie d'une répartition des composantes de ces termes de flux en regroupement climatologiques, ceci semble une bonne méthode pour assurer l'exhaustivité. Dans le cas JLDSB, je ne connais pas la procédure, parce que les auteurs sont à plus de trois mètres cinquante de mon siège.

voudriez pas me le dire svp ?

vérification pédestre de la relation entre gain et réponse

Il est toujours bon de mettre les doigts dans les trous au sein d'une civilisation d'inspiration chrétienne[1], et donc de vérifier si l'on a bien :

$$\rho(\mu) = <c|\ (\mu I - (A + |\ b><c\ |))^{-1}\ |b> = \frac{<c|\ (\mu I - A)^{-1}\ |b>}{1 - <c|\ (\mu I - A)^{-1}\ |b>} \tag{53}$$

où du terme de gauche on a explicité la matrice d'avance supposée complète en fonction de la matrice réduite.

On se rapproche du terme de droite en mettant le groupement $D = (\mu I - A)$ en facteur dans l'antécédent :

$$<c|\ (D - |\ b><c\ |)^{-1}\ |b> = <c|\ \left(I - D^{-1}|\ b><c\ |\right)^{-1} D^{-1}\ |b>$$

là, je ne vois guère d'autre méthode que de développer en série infinie le premier facteur, soit

$$\left(I - D^{-1}|\ b><c\ |\right)^{-1} = I + \sum_{\infty}(D^{-1}|\ b><c\ |)^n = I + D^{-1}\ |b> \sum_{\infty}(<c|\ D^{-1}\ |b>)^n <c|$$

[1] Nicolaï S. *dixit*

qui, replacé dans l'expression globale, fournit :

$$
\begin{aligned}
& <c| \left[I + D^{-1}\, |b> \sum_n^{\infty} (<c|\; D^{-1}\, |b>)^n <c| \right] D^{-1}\, |b> \\
= \quad & \left[<c| + \sum_n^{\infty} (<c|\; D^{-1}\, |b>)^n <c| \right] D^{-1}\, |b> \\
= \quad & \left[1 + \sum_n^{\infty} (<c|\; D^{-1}\, |b>)^n \right] <c|\; D^{-1}\, |b> \\
= \quad & \frac{<c|\; D^{-1}\, |b>}{1- <c|\; D^{-1}\, |b>} = \frac{<c|\; (\mu I - A)^{-1}\, |b>}{1- <c|\; (\mu I - A)^{-1}\, |b>}
\end{aligned}
$$

ce qui vérifie la relation générale entre gain et réponse, A étant la matrice réduite correspondant au gain.

généralisation et prolongements Cette question de la décomposition "par une sémantique" soulève encore celle de décompositions mathématiques. Pour prendre celle qui découle des éléments propres de $A^\sharp$, à quoi pourrait mener la formule (111) de Propagateurs et l'analyse qui la suit ? D'accord que celà introduit une double décomposition, sauf à identifier les $|\, b_i >$ avec les VP de A... Celà relance encore l'analyse initiée dans le cahiers des rétroactions sur champs (cf Gains_3b, et oui, déjà vieux de quatre années).

Les résultats précédents établis en PRP se généralisent évidemment aux réponses SLTC. Hors, l'analyse de Floquet fournit une décomposition pertinente (du propagateur) pour les systèmes périodiques, comme deux stages X & ENSTA l'ont montrés, voire encore dans Propagateurs son application aux gains et réponses. Il s'agira de ré-examiner cette méthode pour en tirer une analyse permettant cet intermédiaire entre l'analyse à l'équilibre et l'analyse SLTC. De même pour l'analyse aux éléments singuliers du paragraphe "Floquelec" du cahier susdît... qui devrait amener à identifier des minimax de réponses. On pourra en particulier interroger cette idée de "climat à l'équilibre" en partant d'un cycle saisonnier stationnaire traité à la Floquet.

Enfin, si on a posé au départ un "système d'avance d'état" de GCM dans sa généralité, c'est pour examiner les extensions possibles en 3D, et arriver ainsi à une critique prospective du point de vue de L&C qu'ils dénomment CFRAM (pour Climate Feedback-Response Analysis Method), alors qu'ici n'a été évoquée que sa restriction TFRAM, qu'ils introduisaient à seule fin de comparaison avec PRP.

5 Examen du point de vue CFRAM

Lu et Cai amènent à la décomposition susdîte en partant des bilans par maille. La manière très arbitraire, du moins a priori, qui les mènent aux températures seules, consiste en l'utilisation de "la matrice de Planck" : $P = \dfrac{\partial R}{\partial T}$, si R est le vecteur des flux sortants LW. C'est ce point que nous examinons à la lumière de notre formulation (46). L&C partent des bilans suivants pour chaque maille, calculés dans les GCM en séparant la grande échelle résolue et les paramétrisations sous-mailles :

- R, divergence des flux LW ;
- S, flux SW absorbé ;
- Q^{conv}, convergence des flux convectifs (sous-mailles et verticaux) ;
- Q^{turb}, idem pour les flux turbulents, incluant les flux sensible et latent de surface ;
- D^v, divergence du transport vertical grande échelle ;
- D^h, idem pour l'advection horizontale ;
- W^{fric} bilan net du travail des forces de déformation (wind stress), comprenant en particulier les forces de friction de surface ;

Ce bilan étant supposé exhaustif, et supposant un forçage ΔF^{ext}, le SLT s'écrit alors :

$$\partial_t \Delta T = -\Delta R + \Delta S + \Delta Q^{conv} + \Delta Q^{turb} - \Delta D^v - \Delta D^h + \Delta W^{fric} + \Delta F^{ext} \tag{54}$$

pour chaque colonne de GCM, la dernière composante du vecteur des températures est encore T_s, complétée de celle des mailles en montant.

Ensuite une analyse plus climatologique réordonne cette partition calculatoire, en n'explicitant la dépendance en température que pour la modification du LW (effet direct), sans y intégrer les effets des changements d'humidité ni de nuages (effets indirects), soit : $\Delta R = P\Delta T + \Delta^w R + \Delta^c R$.

De même, ils séparent effets de nuages et albedo du SW : $\Delta S = \Delta^\alpha S + \Delta^c S$. Le nouveau regroupement est alors :

- $\Delta\varphi_{rad} = \Delta^\alpha S + \Delta^c(S - R) - \Delta^w R$, terme qualifié de rétroactions thermodynamiques liées au rayonnement ;
- $\Delta\varphi_{loc-dyn} = \Delta Q^{conv} + \Delta Q^{turb} - \Delta D^v + \Delta W^{fric}$, rétroactions dynamiques *locales*, y incluant le transport vertical de grande échelle très faible en effet, mais aussi la convection qui peut envahir toute une colonne. Local doit donc se comprendre comme vertical, ou géographiquement local à l'échelle de la discrétisation ;
- $\Delta\varphi_{dyn} = -D^h$ reste alors comme seul effet non local, prenant en compte les couplages synoptiques et climatiques (entre basses et hautes latitudes par ex.) par l'amosphère et l'océan – T_s étant alors une température de couche de mélange océanique ;

avec cette répartition, on a :

$$\partial_t \Delta T = -P\Delta T + \Delta\varphi_{rad} + \Delta\varphi_{loc-dyn} + \Delta\varphi_{dyn} + \Delta F^{ext} \tag{55}$$

L&C font remarquer que des rétroactions plus ciblées peuvent être néanmoins analysées, exercice auquel ils se prêtent dans un deuxième papier applicatif.

La question porte alors sur le passage de cette somme de bilans à une somme de "températures de rétroaction". De notre point de vue, il s'agit de la possible décomposition exhaustive de la matrice A en somme de A_i. On peut supposer que si l'analyse des calculs a été correcte, on peut en effet arriver à cette identification entre A_i et les mécanismes participant à une classe de rétroaction, et ainsi écrire :

$$\partial_t \Delta T = -P\Delta T + \sum_i A_i \Delta T + \Delta F^{ext} \tag{56}$$

avec i parcourant la liste :(rad,loc-dyn,dyn), ou toute autre partition exhaustive (et "séparable") des bilans.

Mais le problème examiné par L&C ne consiste pas à identifier ces sous-matrices, peu ou prou accessibles dans les GCM actuels, mais d'utiliser les variations de bilans $\Delta\varphi_i$ pour en induire les ΔT_i. C'est alors qu'ils utilisent P, en posant – à la Turque – $\Delta T_i^{LC} = P^{-1}\Delta\varphi_i$. Et comme l'analyse est effectuée à l'équilibre asymptotique du SLT, celà revient pour nous à écrire que

$$\Delta T = \Delta T^{tot} = \sum_i P^{-1} A_i \Delta T + P^{-1}\Delta F^{ext} \tag{57}$$

avec encore cette notation $\Delta T_0 = P^{-1}\Delta F^{ext}$ pour passer uniquement en températures. Les auteurs écrivent cependant tout-de-go que

$$\Delta T^{tot} = \sum_i \Delta T_i^{LC} = \sum_i P^{-1}[\overline{g_i}]_{diag}\Delta F^{ext} + \Delta T_0 \tag{58}$$

et identifient chaque ΔT_i avec chacun des termes de la somme.

Pour obtenir un résultat comparable, nous ferions :

$$\begin{aligned}
\Delta T^{tot} = \sum_i P^{-1} A_i \Delta T &\quad + \quad P^{-1}\Delta F^{ext} \\
(I - \sum_i G_i)\Delta T &\quad = \quad \Delta T_0 \\
(I - \sum_i G_i) * [\Delta T_0 + \sum_i \Delta T_i] &\quad = \quad \Delta T_0 \\
(I - \sum_i G_i) * [\sum_i \Delta T_i] &\quad = \quad \sum_i G_i \Delta T_0 \\
\sum_i \Delta T_i &\quad = \quad \sum_i (I - G_{sum})^{-1} G_i \Delta T_0
\end{aligned} \tag{59}$$

et alors les résultats précédents de l'analyse en composantes inclusives autoriserait l'identification $\Delta T_i = (I - G_{sum})^{-1} G_i \Delta T_0$, où $G_{sum} = \sum_i G_i$ et $G_i = P^{-1}A_i$.

On voit bien que si la somme est nécessairement correcte, les deux formes de décomposition ne mènent pas aux mêmes anomalies de température. Mais cette supposition (implicitement faite) de l'intervention de cette matrice diagonale autorise le calcul de ses coefficients, puisque ΔF^{ext} est fixée, de même que les $\Delta T_i^{LC} = P^{-1}\Delta\varphi_i$, on a : $[\overline{g_i}]_{diag}\Delta F_{ext} = \Delta\varphi_i$, ce qui détermine les g_i[1], d'où cette nécessité de restreindre ce qu'ils dénomment matrices de gains à la diagonalité – mais ceci n'est pas dit dans l'article, celà semble "naturel".

Reprenons la comparaison avec notre propre formulation ; on a la correspondance :

$$\begin{aligned}
P^{-1}[\overline{g_i}]_{diag}\Delta F_{ext} &\leftrightarrow (I - G_{sum})^{-1} G_i P^{-1}\Delta F_{ext} \\
&\leftrightarrow [I - P^{-1}\sum_j A_j]^{-1} P^{-1} A_i P^{-1} \Delta F_{ext} \\
&\leftrightarrow [P A_i^{-1} P - P A_i^{-1} \sum_j A_j]^{-1} \Delta F_{ext} \\
P^{-1}[\overline{g_i}]_{diag}\Delta F_{ext} &\leftrightarrow P^{-1}[P A_i^{-1} - P A_i^{-1}\sum_j A_j P^{-1}]^{-1}\Delta F_{ext}
\end{aligned} \tag{60}$$

(où l'on a supposé les matrices A_i régulières), et ceci $\forall \Delta F_{ext}$. Il faudrait alors que

$$\boxed{[\overline{g_i}]_{diag} = \left[I - \sum_j A_j P^{-1} \right]^{-1} A_i P^{-1}} \quad ,$$

[1] dont la solution est simplement un rapport entre une composante de $\Delta\varphi_i$ et ΔF_{ext} ! L&C effectuent cette détermination en explicitant les coefficients dans : $P^{-1}[\overline{g_i}]_{diag}\Delta F_{ext} = P^{-1}\Delta\varphi_i$,mais sauf erreur de ma part, les auteurs ont résolu un autre système :$[\overline{g_i}]_{diag} P^{-1}\Delta F_{ext} = P^{-1}\Delta\varphi_i$, bizarre, justement comme on leur a dit que le choix à droite ou à gauche était arbitraire... mais fournissait des "gains" différents.

dont la diagonalité ne semble guère naturelle ... et ceci quelles que soient les nombreuses erreurs de calcul qui jettent encore un doute sur ce résultat. On reconnaît cependant une forme sympathique de $\dfrac{g_i}{1-g}$.

Mais l'intuition de L&C mérite me semble-t-il un examen plus conciliant, car il ne faut pas oublier que la matrice $A^\sharp$ d'où nous sommes partis n'est guère triviale, puisqu'elle est censée rendre compte de l'évolution "du climat à l'équilibre", modèle encore inconnu sauf peut-être des lecteurs de Hallegatte *et al, jas 2007*, et encore ! C'est sur ce doute qui doit profiter aux auteurs de Floride que nous interrompons cette émission, avant qu'ils ne disparaissent sous la montée des eaux al-Goriennes.

6 Rapport entre structure et gain

On place ici cet extrait du grand cahier "Propagateurs" pour faciliter les discussions en cours ou presque. Il s'agit d'effectuer un examen critique de la pratique actuelle de détermination de gains et effets-en-retour à partir de résultats de simulations. La partie déjà traitée dans les Propagateurs consiste à comparer les effets de rétroaction d'un champs de grandeurs "en moyenne", qui sont en réalité des effets apparents sur champs moyen, et les gains locaux moyennés. Une deuxième partie plus délicate semble-t-il consiste dans la sélection d'une "dynamique climatique" basée sur une prise de moyenne temporelle des mêmes grandeurs. La première partie joue un peu (trop ?) avec la prise de moyenne, que le lecteur pressé pourra passer, mais on la laisse en son état de février 2006 avec ses plaisanteries parfois douteuses. Elle permet de voir que la définition d'un modèle sur champs moyen n'est pas triviale, et construit au passage des outils de réflexion. Notons d'emblée que cette première exploration ne concerne pas la spécificité de mécanismes, mais qu'elle traite des effet-en-retour globaux : la déception pourra être grande malgré cette mise en garde...

6.1 Effet de rétroaction sur champ moyen

[1] Mettons en exergue la sobriété avec laquelle nous introduisions la notion de boucle de rétroaction pour la EPL (partant d'un système d'état) :

Dans la méthode que nous proposons, la manière la plus simple de définir une boucle de rétroaction consiste

1. *à ajouter une variable scalaire φ recopiant la variable perturbée du système originel, c'est-à-dire d'équation $\phi = \eta_k$ // SLTC $\Delta\varphi = x_k$;*
2. *changer dans les autres modèles DES occurrences choisies de η_k en φ pour définir la boucle (pb sémantique).*

et nous prétendions dans la suite que l'ajout de cette variable (*de transfert*) introduisait une souplesse permettant de construire une "observable" plus générale. C'est cette "facilité" que nous éprouvons ici en prenant le cas précis d'un sous-vecteur d'état représentant un champ (discrétisé) d'une grandeur physique.

Vous m'avez entendu plaider depuis quelques temps pour la formulation multi-échelle et introduire une méthode pour modifier un modèle original de champ par l'introduction d'une prise de moyenne. C'est de cette méthode que l'on traite ici, parce qu'elle me semble un bon paradigme de cette fameuse souplesse du choix de l'observable-sonde de la rétroaction. On considére donc un système d'état (sans transferts ou tout transfert éliminé) dont une partie - mettons là en tête du vecteur d'état - représente un champ $(\zeta_i = \zeta(x_i), i = 1, p)$. On introduit alors la moyenne de ce champ :

$$\varphi = \frac{1}{p}\sum_{i}^{p}\zeta_i \tag{61}$$

Le problème est qu'il n'existe pas (on le suppose) d'occurrence de cette moyenne dans les équations primitives, et alors, soit on la fait apparaître (par sommation ?) soit il faut trouver une autre méthode. Mais un essai de sommation, s'il fait apparaître une $\sum_i \partial_t \boldsymbol{\Delta\eta}_i$ à gauche, n'en guère apparaître à droite, sauf à supposer tous les coefficients a_{ij} d'une colonne égaux, ce qui revient à supposer que chaque trajectoire de maille partage son SLT avec les autres, hypothèse qui enlève tout son intérêt à la moyenne du champ je trouve.

[1] Février 2006.

Alors, pour rendre le système sensible à cette variable, on effectue pour ces p composantes le changement de variable $\zeta_i \rightarrow \varphi + \eta_i$, d'où la reformulation du SLT :

$$\begin{array}{rcl} \partial_t(\boldsymbol{\Delta\eta}_i + \Delta\varphi) & = & \sum_j a_{ij}(\boldsymbol{\Delta\eta}_j + \Delta\varphi) \\ & \rightarrow & \partial_t(\boldsymbol{\Delta\eta}+ \mid b_u> \Delta\varphi) = A\boldsymbol{\Delta\eta} + A \mid b_u> \Delta\varphi \\ \Delta\varphi & = & \sum_{i=1}^{p}(\boldsymbol{\Delta\eta}_i + \frac{1}{p}\Delta\varphi) = \Delta\varphi + <c^\dagger_{1/p} \mid \boldsymbol{\Delta\eta} \\ & \rightarrow & 0\Delta\varphi = + <c^\dagger_{1/p} \mid \boldsymbol{\Delta\eta} \end{array} \quad (62)$$

(on a laissé de côté les autres états pour faire simple[1]). Avec ainsi des vecteurs $\mid b>$ et $<c^\dagger \mid$ particulièrement simples et constants. Comme il est bien connu dans l'unsecte, on arrive à une équation de transfert singulière, ce qui n'empêche nullement le système de rester régulier[2].

Étant donné que la définition d'une boucle de rétroaction pose avant tout un problème de structure, on se place dans le cadre le plus simple de formalisation et on examine la forme SLT-Borel du gain :

$$\begin{array}{rcl} \mu(\tilde{\boldsymbol{\Delta\eta}}+ \mid b_u> \tilde{\Delta\varphi}) & = & A\tilde{\boldsymbol{\Delta\eta}} + A \mid b_u> \tilde{\Delta\varphi} \\ & \rightarrow & \mu\tilde{\boldsymbol{\Delta\eta}} = A\tilde{\boldsymbol{\Delta\eta}} - [\mu I - A] \mid b_u>]\tilde{\Delta\varphi} \\ 0\tilde{\Delta\varphi} & = & <c^\dagger_{1/p} \mid \tilde{\boldsymbol{\Delta\eta}} \\ & \rightarrow & <c^\dagger_{1/p} \mid b_u>\tilde{\Delta\varphi} = \tilde{\Delta\varphi} = 0\,[+\tilde{u}(\mu)] \end{array} \quad (63)$$

où on a posé $\mu = \frac{1}{\tau}$. Le facteur $\mid b>$ est constitué de composantes unité, et $<c^\dagger \mid$ de $\frac{1}{p}$, et ainsi $<c^\dagger \mid b> = 1$. On remarque que l'introduction de la valeur moyenne revient bien à la contrainte de somme des anomalies $(\boldsymbol{\Delta\eta})$ nulle :

La valeur moyenne est la variable de Lagrange conjuguée à la contrainte de somme nulle des anomalies.

Même dans le cas réaliste avec d'autres cellules, il apparaît une difficulté de concevoir la boucle ouverte, c'est-à-dire de perturber φ sans réaction immédiate des cellules, ce qui semble cohérent avec la formulation retenue, car avec $\mid b>$ nul, leur modèle devient impropre à la détermination d'une évolution découplée de leur état. Ou encore, faut-il perturber la moyenne SANS que la somme des anomalies reste nulle ? Ça en devient banal dans l'unsecte que cette ouverture de boucle est difficile !

Faut donc y réfléchir, mais on voit que la "souplesse" introduite est nécessaire, certes, mais pas définitive ... On peut même ne pas s'empêcher de penser que cette souplesse introduite dans la couche $[\mu]$ ouvre une vaste étendue sémantique au niveau supérieur $[\theta]$, mais n'est-ce pas là un effet récurrent du TEF ?

En y réfléchissant donc, on peut remarquer qu'une perturbation $\Delta\varphi$ de la valeur moyenne des ζ_k laisse inchangées les anomalies $\boldsymbol{\Delta\eta}_k$ — du moins c'est ce qu'on a jusqu'ici supposé. La conséquence est alors logique : pas de rétroaction, puisque l'effet immédiat lui-même de la perturbation est nul ! Et tout aussi logiquement, gain de rétroaction nul[3].

[1] on peut encore supposer qu'on les a éliminés, mais alors $<c^\dagger \mid$ et $\mid b>$ deviennent dépendantes de t.

[2] c'est le syndrome du **K**_transfert et de l'adage que *la famille ne se soucie guère de la singularité de sa branche.*

[3] cette légère réflexion m'a pris moins d'un week-end ... J'avais en tête un certain *a priori* sur l'existence d'un rapport entre gain moyen et gain de la moyenne, alors que ça n'a rien à voir, on y reviendra.

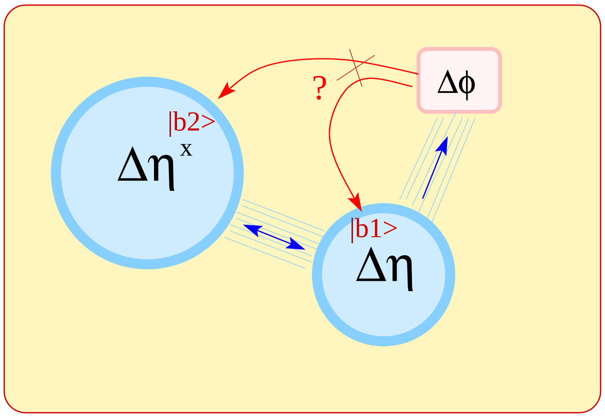

Fig. 28 – Structure de boucle pour champ moyen.

remarque méthodologique

Le problème soulevé est clairement lié à la *formulation* particulière du modèle, avec ici un parti-pris de *remplacer* les grandeurs par les anomalies. Mais on peut le voir aussi comme une simple recherche d'intégration sobre d'une observable dans les modèles pour les rendre sensibles à cette nouvelle variable et pouvoir ainsi déterminer un gain (faire devenir *pronostique* comme disent certains, cette observable introduite *diagnostiquement*).

Sinon, en conservant le système des équations primitives, on connait une manière *diagnostique* de déterminer un gain, en appliquant la méthode du 3ème système du 4.2b. de Propagateurs, c'est-à-dire en coupant le brin aval de (Φ) et en perturbant la cellule avec $\mid b > \Delta\varphi$, on sait qu'on obtient $\Delta\varphi$ en réponse, qui donne directement l'effet-en-retour $\varrho(\mu) =< c^\dagger \mid (\mu I - A) \mid b >$ (la forme habituelle du gain se trouve donner dans ce cas l'effet-en-retour).

On a donc simplement un problème de formulation pertinente.

un problème sémantique

La question étant de poser un problème mettant en œuvre une moyenne de champs. De quoi traite-t-on ? Il ne peut s'agir, comme on vient de le découvrir, de l'effet-en-retour moyen de perturbation des anomalies. Par contre, il peut s'agir de l'effet moyen d'une perturbation de cet ensemble, considéré comme un sous-système, sur une autre partie ? C'est cette structure que l'on va considérer à présent.

Introduisons alors la différence entre les cellules $(\boldsymbol{\Delta\eta})$, dont le modèle inclut cette grandeur moyenne $(\Delta\varphi)$, et les autres $(\boldsymbol{\Delta\eta}^X)$ correspondant au schéma de la fig 28. Reformulons le problème en explicitant la séparation entre $x = \tilde{\boldsymbol{\Delta\eta}}$ et $y = \tilde{\boldsymbol{\Delta\eta}}^X$, à partir de (63) :

$$\begin{aligned}
\mu x &= A_{xx}x + A_{xy}y - [\mu I - A_{xx}] \mid b_1 > \tilde{\Delta\varphi} \\
\mu y &= A_{yy}y + A_{yx}x + A_{yx} \mid b_2 > \tilde{\Delta\varphi} \\
0\, \tilde{\Delta\varphi} &= < c^\dagger_{1/p} \mid x
\end{aligned} \tag{64}$$

on remarque que les $\mid b_i >=\mid b_u >$ sont tous deux avec p composantes unité et que l'on a aussi $< c^\dagger \mid b_i > = 1$.

La sémantique correcte devrait je crois viser à envisager,

- soit une perturbation des cellules (ζ_k) de somme nulle d'une part $(\Delta\varphi = 0)$, mais alors en introduisant un "bruit statistique" de perturbation,
- soit au contraire une forme de répartition d'une perturbation de la moyenne sur chaque cellule (caractérisée par $\Delta\varphi = u(t)$ ET une loi de répartition (qui sera

simplement donnée par $|\,b>$[1] ;

c'est de ce dernier cas que l'on doit traiter ici. Perturber la moyenne sous-entend bien que la somme des anomalies doit rester nulle, sinon, on n'a pas perturbé QUE la valeur moyenne. Autrement dit, sur le schéma 28, il faut annuler $|\,b_2>$, et pas $|\,b_1>$. La boucle par $|\,b_1>$ représente la contrainte lagrangienne qui porte sur $\Delta\varphi$, et dont le gain est nul.

Devant ce problème de contenu sémantique de la boucle de rétroaction, un examen semble nécessaire. Définissons la sémantique générale de la boucle sur le modèle originel :

$$\boldsymbol{\Delta\eta}_{moy} \to \Delta\zeta_i \to \textit{ réaction des cellules } \zeta, \boldsymbol{\Delta\eta}^X \textit{ ensemble } \to \boldsymbol{\Delta\eta}_{moy}$$

mais avec le modèle modifié, on a :

$$\begin{aligned} \Delta\varphi \quad & \to \quad (\boldsymbol{\Delta\eta}_i + \Delta\varphi) \textit{ ensemble } \to \textit{ réaction des cellules } \boldsymbol{\Delta\eta}^X \\ & \to (\boldsymbol{\Delta\eta} + \Delta\varphi) \quad \to \quad \Delta\varphi \textit{ (avec } \sum_k \boldsymbol{\Delta\eta}_k = 0) \end{aligned} \tag{65}$$

On devrait trouver que l'élimination des cellules se structure en une somme de gains (boucles emboîtées) dont la somme est nulle, mais subtilement.

Procédons maintenant à cet exercice toujours pénible de l'élimination. On se demande perpétuellement pourquoi c'est déjà si compliqué avec seulement deux cellules ! La bon choix consiste à éliminer d'abord x, car on sait déjà que ça régularise l'équation de transfert[2] :

$$\begin{aligned} (\mu I - A_{xx})\, x &= A_{xy} y \;-\; (\mu I - A_{xx})\,|\,b_1>\tilde{\Delta\varphi} \\ \to \quad & \quad x = A_x^{-1} A_{xy}\, y \quad - |\,b_1>\tilde{\Delta\varphi} \\ \mu y &= (A_{yy} + A_{yx} A_x^{-1} A_{xy})\, y \;-A_{yx}\,|\,b_1>\tilde{\Delta\varphi} + A_{yx}\,|\,b_2>\tilde{\Delta\varphi} \\ 0\,\tilde{\Delta\varphi} &= <c^\dagger_{1/p}|\; A_x^{-1} A_{xy}\, y \;- <c^\dagger_{1/p}|\,b_1>\}\tilde{\Delta\varphi} \end{aligned} \tag{66}$$

en ayant posé $A_x = (\mu I - A_{xx})$, et en se rappelant que $<c^\dagger_{1/p}|\,b_1> = 1$: on a bien régularisé. Il reste plus qu'à éliminer x pour obtenir

$$\{\,1- <c^\dagger_{1/p}|\; A_x^{-1} A_{xy} A_{y\underline{x}y} A_{yx}\,(|\,b_2> - \,|\,b_1>)\,\}\;\tilde{\Delta\varphi} = \tilde{u}(\mu) \tag{67}$$

où on a posé :

$$A_{y\underline{x}y} = (\mu I - A_{yy} - A_{yx}[\mu I - A_{xx}]^{-1} A_{xy})$$

Ce résultat parait assez magique, et prend à rebours les accros à la boucle. Celle-ci correspond au diagramme de la fig. 29.

analyse du résultat

Remarquons tout d'abord que les bloc-matrices de type A_{xy} sont les parties de la matrice d'avance **complète** du système originel ; c'est heureux (ou logique suivant

[1] avec $<c^\dagger|\,b_i> = 1$, qui doit pouvoir se justifier en tant que relation de cohérence entre la répartition de la perturbation moyenne et la prise de cette moyenne.

[2] bien évidemment, j'ai commencé par la mauvaise option, d'où une dizaine d'heures de calculs fastidieux pour une formule finale imbitable, grâce à Woodburry (j'ai laissé ce calcul en texte caché dans le .tex pour ceux que ça peut amuser). Et puisque ce texte est partagé par des citoyens de bonne compagnie, je me permets une conjecture stémologique : si on est dans le TEF et qu'on trouve malin d'utiliser la Woodburry pour arriver à ses fins, on doit pouvoir faire plus élégant et plus simple. Ceci parce que la démonstration de la formule : $(M + UV^\dagger)^{-1} = M^{-1} - M^{-1}U[I + V^\dagger M^{-1} U]^{-1} V^\dagger M^{-1}$, vous allez encore rire, se fait dans l'unsecte en "décécroismoinsunbisant" la matrice composée : $\begin{bmatrix} I & -V^\dagger \\ U & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$, avec X l'inverse recherchée, Y une matrice auxiliaire. Une complémentation de Schür donne la définition de X, et la Schür opposée fournit Y, que l'on introduit dans le système de la deuxième bande. Ma conjecture est que cette manipulation doit pouvoir se faire directement dans la matrice du système structurée par le TEF.

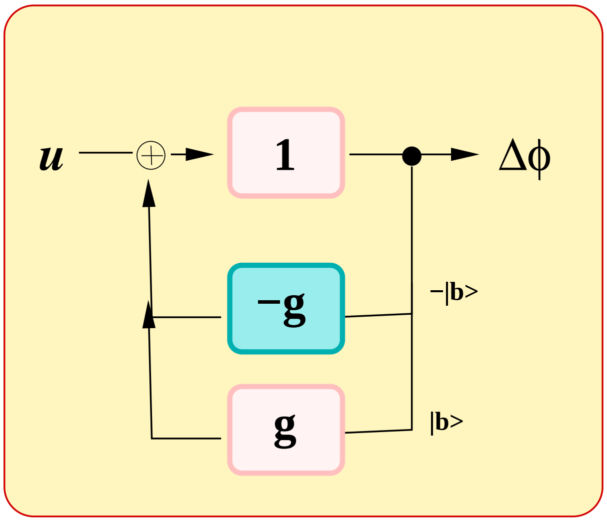

FIG. 29 – Le gain de champ moyen reste nul.

l'humeur), parce qu'il est impossible d'éliminer le transfert introduit. Ensuite, que l'annulation de $\mid b_1 >$ a pour résultat de couper l'effet d'une perturbation de Φ sur x, et ainsi de permettre un effet sur $\zeta = x + \Phi$, le champ originel. Alors, à $\mid b_1 >$ nul toujours, les y réagissent, transmettent leur réaction à $x + \Phi$, et de là à Φ : le gain cherché correspond bien au résultat (67) avec ce type d'ouverture :

$$\boxed{g = < c^{\dagger}_{1/p} \mid A_x^{-1} A_{xy} A_{y\underline{x}y}^{-1} A_{yx} \mid b_2 >} \tag{68}$$

On peut aussi se convaincre de sa conformité avec l'analyse sémantique *a priori* de cette boucle (65).

On arrive finalement à cette boucle "quantique" :
– *en boucle fermée, le gain est nul ;*
– *en coupant un brin de la fig.28, le gain est $-g$;*
– *en ouvrant l'autre, on trouve g !*
si on peut pas fabriquer un ordinateur quantique[1] avec ça, c'est à désespérer.

Examinons le mécanisme suivant la boucle exprimé dans (68)
– $A_{yx} \mid b_2 >$: la perturbation appliquée à ζ en moyenne se transforme en une somme des colonnes de A_{yx}, matrice d'influence de x sur y ;
– $A_{y\underline{x}y}^{-1}$ est la réponse de la famille x, y (c'est-à-dire celle de y quand elle inclut la réaction de x mais sans celle de Φ ;
– $< c^{\dagger}_{1/p} \mid A_x^{-1}$: retour sur x et réponse moyenne par la moyenne des effets de x, ce qui semble cohérent avec un retour sur la valeur moyenne ;

Ainsi, ce mécanisme passe par la vision d'une famille des deux cellules couplées (la famille U, comme Univers, pour les ZOOMophiles). L'attaque à partir de la perturbation de la valeur moyenne sommée et le retour par x moyenné semblent également pertinente pour se convaincre que g est bien le gain recherché[2].

[1] pour répondre à une interrogation soulevée, je la trouve quantique en ce qu'elle comporte un état $(g, -g)$ indéterminé si on ne lui fait subir une 'mesure' : ici, couper le fil rouge ou bleu.

[2] pour les réfractaires à ce genre de sémantique, ils pourront se contenter de vérifier que l'expression du gain est identique à celle que fournit la méthode diagnostique sur le système primitif.

6.2 Gain moyen

Le problème est le suivant : une perturbation perturbe un champ de grandeur ; comment caractériser son effet moyen ? et comment cet effet moyen rétroagit-il sur la grandeur perturbée ? On voit qu'il s'agit d'un pur problème de structuration d'un gain classique, dans lequel on veut globaliser un élément distribué[1].

On considère un système $\mu x = Ax$, et on examine la réponse du système à une perturbation de chaque composante (k) d'état tour à tour. On considère ainsi

$$\begin{aligned} \mu x &= A\,(I - |\; u_k >< u_k\; |)\; x \; + A\,|u_k> \Delta\tilde{\varphi}_k \\ \Delta\tilde{\varphi}_k &= \; <u_k\,|\; x \end{aligned} \tag{69}$$

on rappelle que x est le vecteur des variations $\boldsymbol{\Delta\eta}$ par rapport à la trajectoire de référence, $\Delta\varphi_k$ scalaire est la seule variable de transfert du système (k), qui recopie la k$^{\text{ème}}$ composante de x (présentation EPL). Le vecteur $|u_k>$ est le k$^{\text{ème}}$ vecteur de la base euclidienne. Le plus dur est fait, car on a rendu le plus générique possible le système en k.

L'élimination de x dans $(\Delta\varphi)$ donne

$$(1 - <u_k|\; (\; \mu I - A + A\; |\; u_k >< u_k\; |)^{-1} A\,|u_k>)\; \Delta\tilde{\varphi}_k = \tilde{u}(\mu) \tag{70}$$

Et alors là, enfin ! Euréka, on conçoit d'emblée la nécessité évidente d'appliquer la Woodburry flop, démentant ainsi ma précédente conjecture, que je maintiens. Le gain s'écrit alors

$$g_k \; = <u_k|\; (\; \mu I - A)^{-1} A\,|u_k> - \frac{<u_k|\; (\; \mu I - A)^{-1} A\,|u_k>^2}{1+ <u_k|\; (\; \mu I - A)^{-1} A\,|u_k>} \tag{71}$$

de forme $g = \frac{m}{1+m}$, $m = <u_k|\; (\; \mu I - A)^{-1} A\,|u_k>$, d'où l'effet-en-retour moyen :

$$\varrho_{mean} = \frac{1}{p} \sum_k <u_k|\; (\; \mu I - A)^{-1} A\,|u_k> \tag{72}$$

Et pour finir, si on considère la décomposition en éléments propres[2] de A, tout ce simplifie, du fait que $\sum_k <f_i\,|u_k><u_k\,|e_j> \; = \; <f_i\,|e_j> \; = \delta_{ij}$, et on trouve

$$\boxed{\varrho_{mean} = \frac{1}{p} \sum_k \frac{\lambda_k}{\mu - \lambda_k}} \tag{73}$$

Ce résultat est en réalité général, puisque $\sum_k < u_k \mid M \mid u_k >= TrM$ et ainsi égale la somme des v.p., quelle que soit leur multiplicité. On peut comparer au résultat général de l'equ.(111) de Propagateurs :

$$\varrho_{eff} = \sum_{i=1}^{n} \frac{<c^\dagger\,|\,e_i><f_i\,|\,b>}{\mu - \lambda_i}$$

pour imaginer comment la prise de moyenne a englobé les éléments propres de A.

[1] les mouches ? je vois pas ...

[2] avec les hypothèses et normalisation classiques.

Retour sur champ moyen Lors de l'examen précédent du gain sur champs moyen, on n'a pas tenté de déterminer l'effet en retour sur champs moyen $\varrho_{\overline{\zeta}}$. On sait comment obtenir le système qui le détermine, il suffit de modifier (63) en introduisant la perturbation au niveau des cellules, c'est-à-dire en ajoutant à droite $+A \,|\, b_u > \epsilon$. On obtient *in fine*

$$\varrho_{\overline{\zeta}} = < c^{\dagger}_{1/p} \,|\, (\ \mu I - A)^{-1} A \,|\, b_u > \tag{74}$$

Cette fois-ci, ce n'est pas la trace de la matrice qui est en jeu, mais la somme de ses coefficients ! La conclusion s'en dégage clairement, c'est $\varrho_{\overline{\zeta}} \neq \varrho_{mean}$: **l'effet-en-retour moyen n'est pas celui du champ moyen[1] !** Voilà qui jette un regard éveillé sur la pratique utilisée à partir des résultats de champs moyens de GCM pour déterminer des gains de rétroaction climatique, non ? S'il apparaît que cette pratique mette en jeu une information plus riche (tous les coefficients du produit matriciel au lieu de seulement sa trace), l'aspect fluctuations spatio-temporelles peut très bien perdre de sa trace à cette grande sommation ...

En dépit de l'intérêt manifeste de tout ça, il faut bien voir que ce n'est qu'un commencement (mais déjà un commencement !) qui doit se prolonger :

- les V.P. de A retrouvent leur influence dès qu'on étend le système à plusieurs sous-systèmes ;
- on peut s'intéresser à la réponse moyenne d'une partie lorsque la valeur moyenne du champ d'une partie adverse est perturbée, etc
- et tenter de croiser ces deux approches sur chaque système ;
- d'autres observables sont tout aussi pertinentes, à commencer par la prise d'EOF, de structures singulières et autres décompositions globalisantes, et ceci pour la moyenne de l'effet comme de l'effet moyen ;
- faudrait essayer de voir ce qui se passe à la limite où la discétisation spatiale d'un domaine $\rightarrow$ inf
- établir le lien entre notre approche du gain et celle de René Thomas, cf C. Letellier et O. Vallée *in* J. Phys. A : Math. Gen. **36** (2003) 11229-11245. Ces braves gens parlent de l'ensemble des F-B Loop qualitatives définies par la structure de la matrice Jacobienne[2] ;

6.3 Extensions au SLTC

L'expression[3] des effets-en-retour s'écrit plus généralement dans le cas de la réponse moyenne :

$$\varrho_{mean}(t,0) = \frac{1}{p} \sum_k < u_k \,|\, \int_0^t \Phi(t,\tau) A(\tau) \,|\, u_k > \varpi(\tau)\, d\tau \tag{75}$$

On voit dans l'intégrale apparaître $\partial_\tau \Phi(t,\tau)$ au signe près, si bien que l'intégration donne, avec une perturbation canonique $\varpi = 1$:

$$\varrho_{mean}(t,0) = \frac{1}{p} \sum_k < u_k \,|\, (I - \Phi(t,0)) \,|\, u_k > = 1 - \mathit{Tr}\, \Phi(t,0) \tag{76}$$

résultat sympathique de par sa simplicité formelle.

[1] Mars 2008.
[2] Ils prétendent en particulier que Jacob aurait trouvé sa matrice en descendant une i-échelle (*à vérifier*).
[3] Mars 2008.

Du côté des champs moyens, on peut généraliser (74) :

$$\begin{aligned}
\varrho_{\overline{\zeta}}(t,0) &= <c^{\dagger}_{1/p}|\,(I-\Phi(t,0))\,|b_u>= 1-\,Tr\,\Phi(t,0)-\sum_{i\neq j}\Phi_{i,j}(t,0)\\
\varrho_{\overline{\zeta}}(t,0) &= \varrho_{mean}(t,0)-\sum_{i\neq j}\Phi_{i,j}(t,0) \qquad (77)
\end{aligned}$$

Cette différence entre les deux effets mise en évidence ne pourra manquer d'avoir de grandes répercussions à la prise de moyenne temporelle, avec a priori $\lim_{\tau,(t-\tau)\to\infty}\varrho_{mean}(t,\tau)$ allant bon gré mal gré vers son Lyapunov, la dynamique de l'effet-en-retour sur champs moyens restant plus complexe.

On peut remarquer que l'on aura très généralement cette simplification de l'intégrale en appliquant la méthode EPL de création de boucles de rétroaction, puisqu'on prétend pouvoir “sortir” de la grande matrice A les éléments sensibles pour construire le $|\,b>$, ce qui peut toujours se faire à partir de $A|\ u_k><\kappa_k\ |$, qui sélectionne la liste κ_k (formée d'éléments unité) des coefficients de la k$^{\text{ème}}$ colonne de A. Ceci génère du $|\,b>=A\,|\,u_k>$ et du $<c^{\dagger}\,|=<\kappa_k\,|$, d'où la simplification.

6.4 des effets temporels

Pour attaquer prudemment ces aspects de la détermination “grande échelle” des rétroactions, on va tout d'abord comparer deux situations :

- supposant un modèle à champs à l'équilibre, caractérisé par $A(t)=C^{ste}$; celà correspond en gros à la détermination GCM-classique considérant des moyennes (spatio-)temporelles de grandeurs ;
- le climat est à l'équilibre stationnaire, c'est-à-dire qu'il conserve un cycle saisonnier perpétuel (de période T) ; on a alors que $\forall t\,:\,A(t+T)=A(t)$, ce qui autorise l'application de l'analyse de Floquet (cf 4.1 de “Propagateurs”) ;

On continue en même temps la prise de moyennes. Le premier cas est déjà traité en Borel et $\Phi(t,0)=\exp(At)$, ce qui mène à :

$$\overline{\varrho}_{mean}=1-\,Tr\exp(At)=1-\sum_j\exp(\lambda_j t) \qquad (78)$$

Dans le deuxième cas, on a $\Phi(t,0)=\Psi^F(t)e^{\Lambda t}Z^{-1}$ d'où

$$\overline{\varrho^F}_{mean}=1-\,Tr[\sum_j\exp(\lambda_j t)|\ \psi^F_j(t)><\zeta_j\ |]=1-\sum_j\exp(\lambda_j t)<\zeta_j\,|\,\psi^F_j(t)> \qquad (79)$$

oú $<\zeta\ |$ est une ligne de Z^{-1}. On a gardé la notation λ pour ici indiquer les v.p. de $\Phi(T,0)$: $\Phi(T,0)=Z\exp(\Lambda T)Z^{-1}$ qui ont le bon goût de coïncider avec les précédentes dès que A est constante.

Dans cette dernière expression, les vecteurs ψ^F sont périodiques et ajoutent ainsi une variabilité saisonnière au résultat statique ; on voit alors à quelle perte irréparable on est conduit. On pourrait introduire une variance de la convergence des effets à 1 ($\varrho-1$) en intégrant sur une période et faire apparaître une variance-covariance des Floquets, bof ?

conclusions provisoires Ceci étant fait, il faut bien voir le peu d'intéret de l'exercice précédent, qui a consisté à déterminer l'effet-en-retour global des perturbations sur champs. Sans grande surprise, on trouve que cet effet égale l'unité asymptotiquement pour un sytème stable (et non intinsèquement oscillant), et c'est bien la moindre des choses ! Ici, seule la dynamique est intéressante, ce qui est un comble pour qui s'intéressait *a priori* aux effets de champs ! (Si quelqu'un est pas content, on peut s'expliquer vertement dans le couloir...) Mais il appers de tout ça cependant :

– que les effets de rétroaction dépendent de la prise de moyenne ;
– ceci pour les aspects spatiaux comme pour les temporels ;
– et que les deux sont intimement liés ;

Pour rendre l'exercice intéressant, il faut y mettre une décomposition en mécanismes, qui sont ici très abstraits, puisqu'ils correspondent aux É.P. du systèmes, et quiconque s'est amusé à en tenter une interprétation dès que l'on a affaire à quelques variables n'y croira guère.

Las, sauf miracle, il va falloir "couper les coefficients de A en tranches de rétroactions", et y perdre la simplification précédente, car les $|\,b>$ deviendront nécessairement dépendants du temps.

Pour finir, on pourrait souhaiter arriver, quitte à effectuer force hypothèses et approximations, à un résultat généralisant (8) :

$$\varrho_i^{mean}(t) = \varrho_i^{\infty}[1 - \psi_i(t,0)], \quad \psi_i \to 0 \tag{80}$$

et même $\varrho_i^{\infty} \to \varrho_i^F(t)$ périodique à la petite saison ; puisse cette utopique conjecture guider nos pas sur les sentiers trébuchants du réchauffement climatique !

On peut déjà voir que c'est franchement utopique, car on connait leur somme ; il faudrait ainsi que :

$$\sum_i \varrho_i^F(t)[1 - \psi_i(t,0)] = 1 - \sum_j \exp(\lambda_j t) < \zeta_j \,|\, \psi_j^F(t) > \quad \textit{avec} \quad \sum_i \varrho_i^F(t) = 1$$

ce qui impliquerait des ψ_i communs, alors qu'on a vu précédemment que les effets de mécanismes variés ont une dynamique variée. Peine perdue d'avance ? Par contre :

$$\varrho_i^{mean}(t) = \varrho_i^F(t) - \varrho^{\infty}\psi_i(t,0)], \quad \psi_i \to 0 \tag{81}$$

peut être un objectif recevable.

Dans les pistes, on se souvient que la forme $\frac{g_i}{1-g}$ est constituée de termes "d'action-numérateur" et de "réaction dénominateur", ce qui suggère qu'il faille décomposer le propagateur :

– $|\,b(\tau)> \to |\,b_\infty>$ par permutation ;
– le "dénominateur" exprimant la réaction de tout le système, lié à A et donc à Φ, viendrait d'une approx-intégrative de $\Phi(t,\tau)$;
– genre $\lim\limits_{t-\tau,\tau\to\infty} \Phi(t,\tau) = \exp(A_\infty(t-\tau))$
– approximations soit générales (Lyapunoviennes) de Φ, soit contextuelles de $\Phi(t,\tau)\,|\,b\varpi(\tau)>$ avec source périodique ;
– c'est-à-dire soit $\Phi(t,\tau) \;\to\; \Psi^F(t)\exp(\Lambda(t-\tau))Z^{-1}X$... en passant par sa décomposition en É.P. ou SVD ;
– soit les mêmes mais en intégrant la source $|\,b\varpi(\tau)>$;

on pourra commencer l'exercice avec WV simple ?

Quitte à y ajouter l'effet d'abedo, mais encore une variation du coefficient $\alpha(\gamma_z)$ avec le lapse-rate, ou peut-être mieux de $Q(T_s,\gamma_z)$;

6.5 Floquet !

L'effet-en-retour est en général donné par :

$$\varrho(t,0) = <c| \int_0^t \Phi(t,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau$$

Que le système soit intrinsèquement périodique ou forcé par une source cyclique $s(t)$, dès que la matrice d'avance est périodique, $\forall t : A(t+T) = A(t)$, le formalisme de Floquet s'applique et on a la propriété $\forall t : \Phi(t+T,\tau+T) = \Phi(t,\tau)$.

On va en suivre les implications sur la transition de maille[1] :

$$\begin{aligned}
\varrho(t+T,0) &= <c| \int_0^{t+T} \Phi(t+T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&= <c| \int_0^{T} \Phi(t+T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&\quad + <c| \int_T^{t+T} \Phi(t+T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau\ .
\end{aligned}$$

Les périodicités donnent, avec changement de variable d'intégration $\tau \to \tau + T$ dans la deuxième :

$$\begin{aligned}
\varrho(t+T,0) &= <c|\,\Phi(t+T,T) \int_0^{T} \Phi(T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&\quad + <c| \int_0^{t} \Phi(t,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&= \varrho(t,0) + <c|\,\Phi(t,0) \int_0^{T} \Phi(T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau\ ,
\end{aligned}$$

où on remarque l'intervention de $|\,\sigma(T)>= \int_0^T \Phi(T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau$, sensibilité-en-retour de maille, qui est un vecteur constant.

On a deux manières de décomposer $\Phi(t+nT,0)$:

$$\begin{aligned}
\Phi(t+nT,0) &\overset{1}{=} \Phi(t+nT,nT)\,\Phi(nT,(n-1)T)\,\Phi((n-1)T,(n-2)T)...\Phi(T,0) \\
&\overset{1}{=} \Phi(t,0)\,\Phi^n(T,0) \quad ou \\
\Phi(t+nT,0) &\overset{2}{=} \Phi(t+nT,t+(n-1)T)\,\Phi(t+(n-1)T,t+(n-2)T)...\Phi(t+T,t)\,\Phi(t,0) \\
&\overset{2}{=} \Phi^n(t+T,t)\,\Phi(t,0)
\end{aligned}$$

et ainsi son produit par $|\,\sigma(T)>$ fournit, soit un vecteur constant amorti par $\Phi(t,0)$ à gauche, soit une sensibilité-maille amortie et son produit par une matrice périodique.

Le **choix 1** donne, après n-mailles :

$$\varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) + <c|\,\Phi(t,0)\left[I + \sum_{i=1}^{n-1} \Phi^i(T,0)\right]|\,\sigma(T)>\ , \tag{82}$$

On a encore, en notant $\Phi_T = \Phi(T,0)$ une propagation maille-à-partir-de-zéro :

$$\boxed{\varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) + <c|\,\Phi(t,0)\frac{I-\Phi_T^n}{I-\Phi_T}\,|\,\sigma(T)>} \tag{83}$$

[1] que $<c|$ soit ou non variable importe ici prou.

Le **choix 2** donne[1], après n-mailles et en notant $\overline{\Phi_t} = \Phi(t+T,t)$ une propagation maille-à-partir de t :

$$\boxed{\varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) + <c|\ \frac{I-\overline{\Phi_t}^n}{I-\overline{\Phi_t}}\Phi(t,0)\ |\sigma(T)>} \tag{84}$$

on observe donc une effet périodique auquel s'additionne l'effet d'un vecteur périodique (en remarquant que $\overline{\Phi_t}$ est périodique), amorti de manière limitée par $\Phi(t,0)$. On conçoit, vu la forme matricielle obtenue, l'intérêt de décomposer en Floquet le propagateur pour expliciter ses effets d'amortissement.

Allons-y pour le cas 2 : on a d'abord $\Phi(t+T,t) = \Psi^F(t)\exp(\Lambda T)\Psi^{-F}(t)$ et ainsi

$$\frac{I-\overline{\Phi_t}^n}{I-\overline{\Phi_t}} = \Psi^F(t)\frac{I-e^{n\Lambda T}}{I-e^{\Lambda T}}\Psi^{-F}(t) \tag{85}$$

D'autre part, $\Phi(t,0) = \Psi^F(t)\exp(\Lambda t)Z^{-1}$, d'où :

$$\varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) + <c|\ \Psi^F(t)\frac{I-e^{n\Lambda T}}{I-e^{\Lambda T}}e^{\Lambda t}Z^{-1}\ |\sigma(T)> \tag{86}$$

On peut remarquer que la forme 1 fournit un résultat identique par commutabilité des matrices diagonales [1.]?

On peut finalement utiliser la forme de Schür du triple produit matriciel et expliciter :

$$\boxed{\varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) + \sum_k e^{\lambda_k t}<c|\psi_k^F(t)>\frac{1-e^{n\lambda_k T}}{1-e^{\lambda_k T}}<\zeta_k^{-1}|\sigma(T)>} \tag{87}$$

forme sur laquelle on peut analyser avec détails le comportement asymptotique[2].

système stable forcé Tous les exposants de Floquet sont à partie réelle négative, et alors :

$$\lim_{n\to\infty}\varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) + \sum_k e^{\lambda_k t}<c|\psi_k^F(t)>\frac{<\zeta_k^{-1}|\sigma(T)>}{1-e^{\lambda_k T}} \tag{88}$$

en n'oubliant pas que $t \in [0,t]$, on trouve essentiellement la périodicité asymptotique de l'effet-en-retour, modifié par un terme de même période amorti sur chaque maille.

On remarque que pour un tel système, tous les vecteurs de Floquet restent opérants, quels que soient les mécanismes qu'une profonde inspiration peut y associer.

Notons surtout que ces résultats étant obtenus sans spécification de $|b(t)>$ concernent bien évidemment cette fois l'analyse en composantes inclusives.

système stable non forcé On sait dans ce cas qu'il existe un vecteur de Floquet correspondant à la vel, d'exposant nul, et alors (cf 82) :

$$\lim_{n\to\infty}\varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) + n<c|\psi_0^F(t)><\zeta_0^{-1}|\sigma(T)> \tag{89}$$

et l'effet-en-retour asymptotique est entièrement déterminé par sa première maille, puis il croît linéairement avec le temps — ceci n'étant guère étonnant, puisque la colonne vel du propagateur est périodique.

[1]attention, il faut exclure les systèmes oscillant périodiquement car alors on a une colonne de $\Phi(T,0$ qui est $|u_k>$.

[2]note : $<\zeta_k^{-1}|$ est la k$^{\text{ième}}$ ligne de Z^{-1}.

système instable forcé En plus de la vel, on va supposer un seul exposant de Lyapunov positif λ^L ; alors,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \varrho(t+nT,0) = \varrho(t,0) \quad &+ \quad <c|\psi_0^F(t)><\zeta_0^{-1}|\sigma(T)> \\ &- \quad e^{\lambda^L t}<c|\psi_L^F(t)>\frac{e^{n\lambda^L T}}{1-e^{\lambda^L T}}<\zeta^{-L}|\sigma(T)> \end{aligned} \tag{90}$$

s'ajoute alors à la forme stable un terme divergent. Michæl *et al*[1] récoltent un tel terme dans leur analyse, qu'ils attribuent à l'activité hivernale des Jet-Streams, sans préciser que cette instabilité linéaire devra être amortie par des effets non-linéaires, ce qui ce dit couramment et qui signifie : faute d'outil d'analyse plus sophistiqué.

Mais à ce stade, il serait utile d'appliquer l'analyse de Floquet précédente à l'exemple WVsimple, non ?

alors voilà Comme on n'a qu'une seule variable d'état, le Floquet est le scalaire 1, et le multiplicateur est $\varphi(T) = 0.434562$. Par ailleurs, dans la formule (87), $e^{\lambda_k t}<c|\psi_k^F(t)> = \varphi(t)$, et le facteur restant tend vers $\frac{1-e^{n\lambda_k T}}{1-e^{\lambda_k T}}<\zeta^{-k}|\sigma(T)> \to \frac{\varrho(T)}{1-\varphi(T)} = .50587155$, et on obtient la valeur asymptotique de l'effet-en-retour en appliquant cette formule :

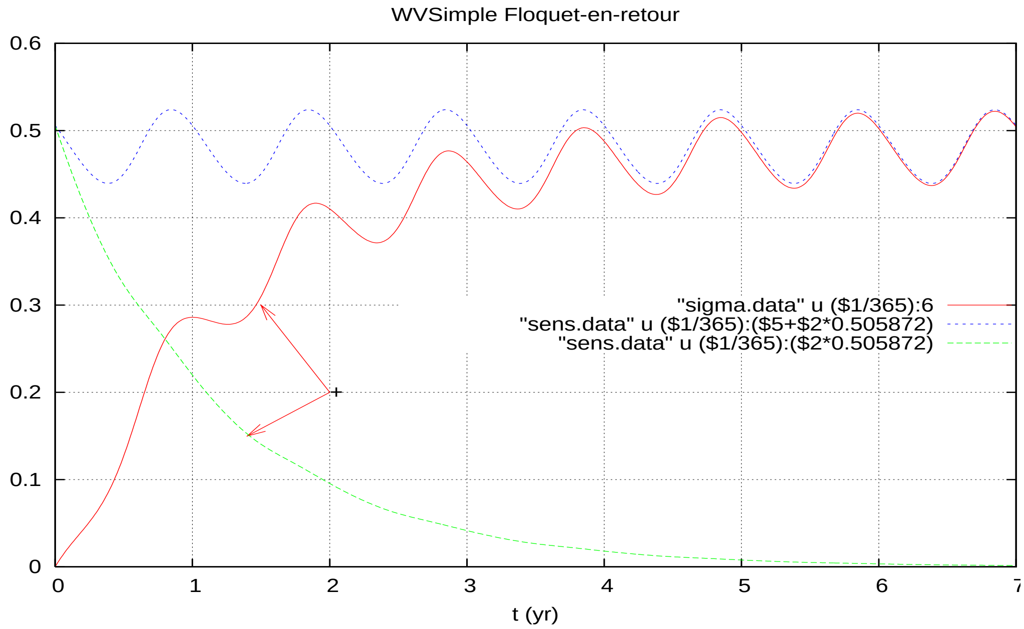

FIG. 30 – La formule (87) donne l'effet-en-retour asymptotique dès la première période.

Est-on satisfait ? À vrai dire, on obtient l'effet-en-retour asymptotique en ajoutant les courbes verte et rouge, ce qui ne ressemble guère à notre souhait d'une forme à la (81)]1.]? Et donc, il faut bien admettre que notre décomposition "naturelle" de l'intégrale à $t+T$ est mauvaise. Elle nous a été soufflée par l'envie irrésisitible de mettre en évidence la périodicité de Φ, alors que Floquet nous aurait permis de mettre en exergue ses exposants, ce que nous allons donc tenter à présent.

[1] Strong *et al*, *JAS* **52**, 15 d'Août 95.

6.6 Floquet bis !

On va introduire d'emblée la décomposition de Schür avec Floquet . Examinons un terme de cette somme :

$$\varrho_k(t,0) =< c| \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} \,|\psi_k^F(t)> < \psi_k^{-F}(\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \tag{91}$$

avec, ainsi, $\varrho(t,0) = \sum_k \varrho_k$. Décomposons alternativement l'intégrale de maille :

$$\begin{aligned}
\varrho_k(t+T,0) &= < c| \int_0^{t+T} e^{\lambda_k(t+T-\tau)} \,|\psi_k^F(t+T)> < \psi_k^{-F}(\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&\overset{1}{=} < c| \int_0^{t} e^{\lambda_k(t+T-\tau)} \,|\psi_k^F(t)> < \psi_k^{-F}(\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&\quad + < c| \int_t^{t+T} e^{\lambda_k(t+T-\tau)} \,|\psi_k^F(t)> < \psi_k^{-F}(\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \ \boxed{= \overline{\varrho}_k} \\
&\overset{2}{=} e^{\lambda_k(T)} \varrho_k(t,0) \\
&\quad + < c| \int_0^{T} e^{\lambda_k(T-\tau)} \,|\psi_k^F(t)> < \psi_k^{-F}(t+\tau)\,|b(t+\tau)> s(t+\tau)d\tau
\end{aligned} \tag{92}$$

où on a fait apparaître (2) une intégrale maille $\overline{\varrho(t)}$ après un changement de variable dont le seul intérêt est de clairement montrer sa périodicité : $\overline{\varrho(t+T)} = \overline{\varrho(t)}$.

On a maintenant

$$\varrho_k(t+T,0) = \overline{\varrho_k(t)} + e^{\lambda_k T} \varrho_k(t,0) \tag{93}$$

soit, après n périodes :

$$\boxed{\varrho_k(t+nT,0) = \frac{1-e^{n\lambda_k T}}{1-e^{\lambda_k T}} \overline{\varrho_k}(t) + e^{n\lambda_k T} \varrho_k(t,0)} \tag{94}$$

et cette fois-ci, eureka ô Zeus, nous obtenons la forme asymptotique souhaitée dans le cas, par exemple, du système stable forcé :

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(t+nT,0) = \sum_k \frac{1}{1-e^{\lambda_k T}} \overline{\varrho_k}(t) + \epsilon(nT) \tag{95}$$

Ce qui reste heureusement, c'est que l'effet-en-retour asymptotique — et ainsi des composantes inclusives — dépendent de tous les Floquet.

Avec un Lyapunov instable, on récupère $e^{n\lambda_1(T)}\left(\varrho_1(t,0) - \frac{\overline{\varrho_1}(t)}{1-e^{\lambda_1 T}}\right)$, qui mérite une analyse plus poussée — voire plus bas[1].

climatologie 1 Quand la vel intervient on obtient $\varrho_0(t,0)+n\overline{\varrho_0}(t)$. Ainsi les systèmes intrinsèquement périodiques exhibent une croissance linéaire intersaisonnière avec une modulation intrasaisonnière douce.

climatologie 2 Et dans le cas du système stable, la réponse asymptotique s'identifie du plus lent des Floquet à une réponse de la première période adoucie par sa moyenne mais amplifiée par le facteur $1/(1-e^{\lambda_1 T})$.

Le problème, c'est l'exigence d'une détermination numérique spécifique de $\overline{\varrho}(t)$ en plus de $\varrho(t)$. Pour ça, on peut résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{r} \partial_t \overline{\sigma}(t) = A\overline{\sigma}(t) + [I - \Phi(t+T,t)]\,|b(t)> s(t) \\ \overline{\varrho}(t) =< c|\,\overline{\sigma}(t) \end{array} \right. \tag{96}$$

[1] elle vaut pas la frellation de stb, mais quand même, voire au lieu de voir, faut le voir.

système qui avance classiquement donc, mais avec un terme source un peu embarassant par le terme en Φ qui ne peut explicitement se trouver à t que par Floquet. On a en effet $\Phi(t+T,t) = \Psi^F(t)\exp(\Lambda T)\Psi^{-F}(t)$. Il faut nécessairement effectuer ces calculs en avançant tous les vecteurs de Floquets.

Mais malheureusement, je suis contraint de différer son illustration avec WVsimple, sorry folks.

cas particuliers Examinons le cas du Lyapunov critique, avec l'effet-en-retour tendant vers $e^{n\lambda_1(T)}\left(\varrho_1(t,0) - \dfrac{\overline{\varrho_1}(t)}{1-e^{\lambda_1 T}}\right)$. En prenant l'expression de $\overline{\varrho_1}$ de l'égalité (1) dans (92), on a :

$$\begin{aligned}
\varrho_1(t,0) - \frac{\overline{\varrho_1}(t)}{1-e^{\lambda_1 T}} &= <c|\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{1}{1-e^{\lambda_1 T}}<c|\int_t^{t+T} e^{\lambda_1(t+T-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau \\
&= \frac{1-e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_1 T}}<c|\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_1 T}}<c|\int_t^{t+T} e^{\lambda_1(t-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau \\
&= \frac{\varrho_1(t,0)}{1-e^{\lambda_1 T}} - \frac{e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_1 T}}<c|\int_0^t e^{\lambda_1(t-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau \\
&\quad -\frac{e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_1 T}}<c|\int_t^{t+T} e^{\lambda_1(t-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned}
\varrho_1(t,0) - \frac{\overline{\varrho_1}(t)}{1-e^{\lambda_1 T}} &= \frac{\varrho_1(t,0)}{1-e^{\lambda_1 T}} - \frac{e^{\lambda_1 T}}{1-e^{\lambda_1 T}}<c|\int_0^{t+T} e^{\lambda_1(t-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau \\
&= \frac{\varrho_1(t,0)}{1-e^{\lambda_1 T}} - \frac{1}{1-e^{\lambda_1 T}}<c|\int_0^{t+T} e^{\lambda_1(t+T-\tau)}\,|\psi_1^F(t)><\psi_1^{-F}(\tau)\,|\,b(\tau)>s(\tau)d\tau \\
&= \frac{\varrho_1(t,0)}{1-e^{\lambda_1 T}} - \frac{1}{1-e^{\lambda_1 T}}\varrho_1(t+T,0)
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\varrho(t+nT,0) = e^{n\lambda_1 T}\varrho_1(t)\frac{1-\varrho_1(t+T,0)/\varrho_1(t,0)}{1-e^{\lambda_1 T}}} \tag{97}$$

le Lyapunov fait alors essentiellement croître son ϱ_1.

la suite de Septembre 2009 On s'intéresse ainsi au calcul de cette fonction périodique $\overline{\varrho}(t)$ en composantes de Floquet. On a alors à avancer

$$\begin{cases} \partial_t \overline{\sigma}(t) & = \partial_t \int_t^{t+T} \Psi^F(t) e^{\Lambda(t+T-\tau)} \Psi^{-F}(\tau) \mid b(\tau) > s(\tau) d\tau \\ \overline{\varrho}(t) & = < c \mid \overline{\sigma}(t) \end{cases}$$

avec la dérivée temporelle de l'intégrale $\mathcal{I}$ à expliciter :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathcal{I} = [\Psi^F(t)\Psi^{-F}(t) - \Psi^F(t) e^{\Lambda T} \Psi^{-F}(t)] \mid b(t) > s(t) \ \text{(des bornes de } \mathcal{I}) \\ \text{(de } \partial_t \Psi^F) \ : \ + A\mathcal{I} - \int_t^{t+T} \Psi^F(t) \Lambda e^{\Lambda(t+T-\tau)} \Psi^{-F}(\tau) \mid b(\tau) > s(\tau) d\tau \\ \text{(de } \partial_t e^t) \ : \ + \int_t^{t+T} \Psi^F(t) \Lambda e^{\Lambda(t+T-\tau)} \Psi^{-F}(\tau) \mid b(\tau) > s(\tau) d\tau \end{aligned} \tag{98}$$

soit finalement

$$\begin{cases} \partial_t \overline{\sigma}(t) & = A\overline{\sigma}(t) + \Psi^F(t)[I - e^{\Lambda T}] \Psi^{-F}(t) \mid b(t) > s(t) \\ \overline{\varrho}(t) & = < c \mid \overline{\sigma}(t) \end{cases} \tag{99}$$

et comme on l'annonçait, ce calcul nécessaire de $\Psi^{-F}(t)$.

L'avance de Ψ^{-F} est la suivante — via $\partial_t \Psi^{-F} = -\Psi^{-F} \partial_t \Psi^F \Psi^{-F}$:

$$\partial_t \Psi^{-F} = -\Psi^{-F} A + \Lambda \Psi^{-F} \tag{100}$$

autrement dit pas pratique, il faut passer en transposées etc. Mais pourquoi pas la trouver par inversion ? L'algorithme est alors :

1. avec la première détermination de 0 à T, les sensibilités ;
2. calcul de Z et Λ, Floquet-init ;
3. une période pour avancer les Floquet $Z \to \Psi_r^F$;
4. fin d'incrément avec calcul effectif des Ψ^F et $[I - e^{\Lambda T}] \Psi^{-F}$;
5. une avance complète de $\overline{\sigma}$ avec sa source spécifique ;
6. sortie des poids $1/(1 - e^{\lambda_k T})$, $1 - e^{n\lambda_k T}$ avec $n = 3, 10$ pour info par exemple ;
7. les transferts standards, d'où $\overline{\varrho_k}$;

on a donc une avance supplémentaire à effectuer, pas efficace du tout.

On cherche une **alternative**, et pour celà, on a une possibilité indirectement suggérée par le rapprochement des deux calculs de ϱ précédents. Ceci car le premier utilisait l'avance standard dans le temps du vecteur initial $\sigma^F(T)$, cf equ.(87).

Alors on a obtenu successivement :

$$\begin{aligned} \varrho_k(t+T, 0) &\stackrel{1}{=} \quad \varrho_k(t, 0) \quad + e^{\lambda_k t} < c \mid \psi_k^F(t) >< \zeta_k^{-1} \mid \sigma(T) > \\ \varrho_k(t+T, 0) &\stackrel{2}{=} e^{\lambda_k T} \varrho_k(t, 0) \quad + \overline{\varrho_k}(t) \end{aligned}$$

d'où on peut tirer $\overline{\varrho_k(t)}$:

$$\overline{\varrho_k}(t) = (1 - e^{\lambda_k T}) \varrho_k(t, 0) + \ e^{\lambda_k t} < c \mid \psi_k^F >< \zeta_k^{-1} \mid \sigma_T^F > \tag{101}$$

on a de plus

$$\sum_k e^{\lambda_k t} \mid \psi_k^F > < \zeta_k^{-1} \mid \sigma_T^F > = \Phi(t, 0) \mid \sigma_T^F > \tag{102}$$

qui fait appel à l'avance de simples conditions initiales déterminées pour chaque $\mid b_i >$ lors du calcul des vecteurs de Floquet. Si l'avance des ϱ_k est connue, on peut soit calculer ces termes de la somme, soit avancer l'ensemble spécifiquement, ce qui se ferait alors par une avance simple des vecteurs initialisés avec $\sigma(T)$ — mais il faut remarquer que l'on compte alors sur la précision censée annuller les produits scalaires cachés $< \zeta_k^{-1} \mid \zeta_j > = \delta_{kj} \ldots$

Et reste le pb de l'avance de ϱ_k avec cette source : $\mid \psi^F(t) > < \psi^{-F}(t) \mid b(t) > s(t)$, bref, pourquoi pas inversion de $\Psi_F(t)$? On aurait alors :

1. avec la première détermination de 0 à T, les sensibilités et $\sigma(T)$;
2. calcul de Z et Λ, et Z^{-1}
3. une période pour avancer les Floquet $Z \to \Psi_r^F$ et $\sigma(T) \to \sigma^F$
4. fin d'incrément avec calcul effectif des Ψ^F et $\overline{\sigma}^F$;
5. les transferts standards ;

c'est pas mieux que le premier algorithme par (99). Sauf si on pouvait montrer l'intéret spécifique de $\overline{\sigma}^F$.

Reprenons d'abord la décomposition de l'intégrale donnant directement la forme précédente :

$$\overline{\sigma} = \int_t^{t+T} \Phi(t+T,\tau) \mid b(\tau) > s(\tau) d\tau \tag{103}$$

intégrale que l'on décompose en $\int_t^{t+T} = \int_0^T + \int_T^{T+t} - \int_0^t$. On trouve que la première donne $\Phi(t,0)\sigma^F(T)$; la deuxième est σ, la troisième encore mais décalée de $e^{\Lambda T}$, soit en Floquet :

$$\overline{\sigma}(t) = \Phi(t,0)\sigma^F(T) + \int_0^t \Psi^F(t) e^{\Lambda(t-\tau)}[I - e^{\Lambda T}]\Psi^{-F}(\tau) \mid b(\tau) > s(\tau) d\tau \tag{104}$$

mouais, fallait bien un intermédaire comme la (101) pour trouver cette forme intéressante intrinsèquement.

Ce que suggère cette forme (104), c'est qu'en composantes, on pourrait avancer classiquement

$$\overline{\sigma}(t) = \overbrace{\Phi(t,0)\sigma^F(T)}^{I} + \overbrace{\int_0^t \Psi^F(t) e^{\Lambda(t-\tau)}\Psi^{-F}(\tau) \mid b(\tau) > s(\tau) d\tau}^{II} \tag{105}$$

qui n'est autre que $\varrho(t)$ avec des C.I. données par $\sigma^F(T)$, et terminer par le calcul de $\overline{\varrho}(t)$ en pondérant ses composantes. Voilà qui serait efficace ! Les composantes des deux termes sont en effet données par une projection sur les Floquet : $\mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(t) \mid$. Sauf que je vois pas comment déconnecter les deux termes sans avancer chaque composante avec un poids[1] ...

Bref, il semble plus évident d'avancer I et II en parallèle, mais **à voir** quand même. On aurait cette fois l'algorithme suivant

1. avec la première détermination de 0 à T :
   - le propagateur complet $\Phi(t,0)$,
   - les sensibilités rep-eff pour chaque réponse à calculer ($\to\mid b_i >$) dont on conserve $\sigma_i(T)$;
   - avec $\Phi(T,0)$ le calcul de Z et Λ (init Floquet standard) ;
2. une période pour avancer
   - les Floquet $Z \to \Psi_r^F$ et les $\sigma(T) \to \sigma^F(t)$;
   - en même temps, les rep-eff $\sigma(t)$ et $\varrho(t)$;
   - les $\sigma(T) \to \sigma^F(t)$;
3. et en fin d'incrément :
   - calcul effectif des Ψ^F de leur complément complexe, et alors de Ψ^{-F},
   - calcul des composantes de l'effet-en-retour asymptotique $\overline{\sigma}(t)$ puis de

   $$\overline{\sigma}_k(t) = \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(t) \mid [\ \sigma^F(t) + (1 - e^{\lambda_k T})\sigma(t,0)\ ] \ ; \tag{106}$$

   par paires conjuguées ;

[1] on pourrait cependant exploiter la décroissance du terme $\Phi(t,0)\sigma^F(T)$, qui ne devrait asymptotiquement ne laisser que II ; mais il faudrait continuer plus avant l'intégration ou pourquoi pas démarrer plus loin ? **à creuser**

– les transferts standards avec en plus les composantes de $\overline{\varrho_k}$;
on a alors si on y tiend, de (94) :

$$\sigma_k(t+nT,0) = \frac{1-e^{n\lambda_k T}}{1-e^{\lambda_k T}}\mathcal{F}_k(t)\sigma^F(t) + \mathcal{F}_k(t)\sigma(t,0) \ ; \tag{107}$$

où on a noté $\mathcal{F} = |\ \psi_k^F >< \psi_k^{-F}\ |$ le projecteur sur un Floquet, ce qui vérifie nos calculs de $\overline{\varrho}_k$, puisqu'on retrouve (87).

Le coût ici est d'avancer en même temps les sensibilités choisies deux fois, une pour σ^F, la deuxième pour les rep-effs standards σ et tous les Floquet — pour calculer Ψ^{-F}. De plus, on doit faire avancer la navette pour arriver à $\overline{\varrho}$, et donc à avoir la matrice des vecteurs $\overline{\sigma_k}$ (pour la MK2).

Finalement me direz-vous, on a fait ce qu'on ne voulait pas faire, à savoir additionner des courbes comme la verte et la rouge de la Fig. 30 ; mais c'est pour la bonne cause numérique que l'on passe par ces éléments qui nous permettent de calculer les $\mathcal{F}$-composantes des grandeurs tangibles $\overline{\varrho}^i$ de chaque i$^{\text{ème}}$ effet-en-retour. C'est en effet $\overline{\varrho}(t)$ qui est périodique [$\mu \to \theta$], et ce qu'on utilise pour la déterminer en une seule période relève du seul numérique [ν].

L'intérêt de cette fonction $\overline{\sigma}$? Pour la composante de vel ($\lambda_0 = 0$)) $\overline{\varrho_0} = \overline{\sigma_0}$ est périodique, soumise pour les autres à $\exp(\lambda_k t)$ et alors complétée par $\varrho_k(t)$ pour retrouver une périodicité — $\overline{\varrho}$ est périodique.

6.7 sur l'algèbre des matrices complexes

Il y a ce problème du traitement des matrices $(n \times n)$ de vecteurs propres (V.P.), constituées de vecteurs colonne soit réels purs, soit par paires complexes conjuguées. L'exemple qui nous concerne est celui des vecteurs de Floquet, mettons, Z. On peut d'abord remarquer que si l'on se contente d'un seul vecteur pour représenter une paire, la matrice rélle constituée des composantes non nulles de sa complexe restreinte à un vecteur par paire comporte n colonnes.

La question posée concerne à la fois l'inverse (Z^{-1}), qui intervient dans le calcul des composantes de Floquet des effet-en-retour, et de la décomposition de Schür $Z = \sum \lambda_k |\ z_k >< \zeta_k\ |$.

Comparons les formulations complexe et réelle de la définition d'un V.P. ; soit Z la matrice complexe et Z^r sa restriction réelle. On considère un vecteur propre complexe $|z>=|u> +i\,|v>$:

$$\begin{aligned} \Phi\,|z> &= \sigma\,|z> \quad \text{dans } \mathcal{C} \text{ , et avec } \sigma = \lambda + i\mu \ : \\ \Phi\,|u,v> &= |u,v> \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{bmatrix} = |u,v>[L] \quad \text{dans } \Re \, . \end{aligned} \tag{108}$$

Celà suggère que la ligne $<x,y|$ correspondante de Z^{-r}, inverse de Z^r, permet d'écrire une décomposition de Schür en réels comme ceci

$$\begin{aligned} \Phi &= Z[\Sigma]_d Z^{-1} = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k|\ z_k >< \zeta_k\ | \quad \text{dans } \mathcal{C} \ ; \\ \Phi &= Z^r[L]Z^{-r} = \sum_{k\in R} \lambda_k|\ u_k >< x_k\ | + \sum_{k\in P} |u,v>_k [L_k] <x,y|_k \quad \text{dans } \Re \end{aligned} \tag{109}$$

où la matrice L est à coefficients diagonaux pour les V.P. réels et à blocs diagonaux comme celui de (108) pour chaque paire et où R et P sont deux listes donnant la position des V.P. réels ou du représentant de paires ; on a $n = \text{card}(R) + 2\text{card}(P)$. Ceci pose la question du rapport entre les inverses complexe et réel Z^{-1} et Z^{-r}.

N'ayant trouvé de démonstration déductive — ce qui, pour une raison inconnue, me déçoit toujours — je propose cette démo par induction.

On suppose d'abord que Z^r est régulière : les $|\,u>$ et $|\,v>$ forment une base de $\Re^n$. Pour une V.P. réelle, son $<x\,|_j$ est nécessairement orthogonal à tous les imaginaires $|\,v>$ et les autres $|\,u>$ réels, ce qui l'aligne avec le $|\,\zeta>_j$ et sa norme est fixée par celle de $|\,u_i>$: les lignes de Z^{-1} et Z^{-r} associées sont égales. Pour une colonne complexe $<\zeta\,|_j=<w+iq\,|_j$ et sa conjuguée, on va considérer leur contribution à la somme de Schür comparée à sa contrepartie réelle :

$$\begin{aligned}(\lambda+i\mu)|\ u+iv><w+iq\ |+\text{son conjugué} &= 2\{(\lambda\,|\,u>-\mu\,|\,v>)<w\,| \\ &\quad -(\mu\,|\,u>+\lambda\,|\,v>)<q\,|\} \\ &= (\lambda\,|\,u>-\mu\,|\,v>)<x\,| \\ &\quad +(\mu\,|\,u>+\lambda\,|\,v>)<y\,| \qquad (110)\end{aligned}$$

Dans le cas où on a une seule paire, les deux expressions doivent être égales, ce qui suggère que si la nature est bien faite on ai $<x\,|=2<w\,|$ mais $<y\,|=-2<q\,|$! Il suffit alors de démontrer que le vecteur ligne $(1/2\,|\,x>-i/2\,|\,y>)$ est bien V.P. à gauche de Z, soit :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(<x\,|-i<y\,|\,Z &= \sigma<w+iq\,| \\ &= \frac{1}{2}(<x\,|-i<y\,|)\sum_k \sigma_k|\ u_k+iv_k><w_k+iq_k\ |\end{aligned}$$

ce qui est vérifiable, car $<x\,|$ sélectionne les deux parties réelles $|\,u>$ d'une paire de Z, d'où un facteur $\sigma+\bar{\sigma}=2\lambda$. Le $<y\,|$ en fait autant sur deux $|\,v_k>$ qui, si le lecteur s'en donne la peine, forme ce facteur $-2i^2\mu$ du bra restant à droite[1].

On a ainsi à la fois une décomposition réelle à la Schür qui remplace sa forme complexe d'une part, et à toute fin utile une manière économique de calculer l'inverse de Z en réels d'autre part.

Reste à voir les cas particuliers. Si Z^r est singulière, on a des $|\,u>$ alignés avec des $|\,v>$; est-ce possible? On aurait pour la part réelle $Z\,|\,u>=(\lambda-\mu)\,|\,u>$ et pour l'imaginaire $Z\,|\,u>=(\lambda+\mu)\,|\,u>$, ce qui donnerait en réalité un V.P. de multiplicité deux avec ces deux v.p. On pourrait encore trouver un vecteur réel $|\,u_r>$ aligné avec une composante imaginaire $|\,v>$. Pas possible, car on aurait pour cette paire une partie réelle nulle $(Zi\,|\,v=u_r>=\lambda i\,|\,v=u_r>$. La matrice Z^r a même régularité que Z.

application aux Floquet Ce qui nous intéresse est la forme de Schür réélifiée dans (110), qui peut pour une paire complexe s'écrire avec nos notations des matrices bi-lignes et bi-colonnes :

$$2\Re\{(\lambda+i\mu)|\ u+iv><w+iq\ |\}\leftrightarrow 2\,|\,u,v>\begin{bmatrix}\lambda & -\mu\\ -\mu & -\lambda\end{bmatrix}<w,q\,| \qquad (111)$$

et avec la correspondance entre w,q et x,y :

$$2\Re\{(\lambda+i\mu)|\ u+iv><w+iq\ |\}\leftrightarrow|\,u,v>\begin{bmatrix}\lambda & \mu\\ -\mu & \lambda\end{bmatrix}<x,y\,| \qquad (112)$$

autrement dit, on retrouve bien une forme rotation pour la correction, ce qui permet de décomposer correctement le terme $exp[(\lambda+i\mu)(t+T-t)$ sous forme matricielle. Alors,

[1]on aurait pu se contenter de vérifier les produits scalaires ligne x colonne, mais on a mis le focus sur Schür.

c'est $|\, x,y >$ qui va sélectionner la composante de Floquet de l'intégrale en $\Phi(t,\tau)$. Pour une composante associée à chaque paire complexe conjuguée, on va avoir :

$$\begin{aligned} |\, u,v> L(T) <x,y\,| \qquad & \int_0^t \Psi(t) e^{\Lambda(t-\tau)} \Psi^{-F}(\tau)\ |\, b(\tau > d\tau \\ =|\, u,v> L(T) \qquad & \int_0^t L(t-\tau) <x,y\,|\ (\tau)\ |\, b(\tau) > d\tau \end{aligned}$$

avec ce produit des deux matrices contraction-rotation qui représentent la forme complexe de $exp(\lambda(t+T-\tau)$.

On peut dès lors remplacer la détermination des composantes de Floquet des sensibilités, donnée par (106), par sa forme réelle :

$$\overline{\sigma}_k(t) \quad = |\ u,v(t) >< x,y(t)\ |_k \sigma^F(t) + |\, u,v>_k [L(t)]_k <x,y\,|_k\ \sigma(t,0) \tag{113}$$
$$\text{avec } [L] = \begin{bmatrix} 1-e^{\lambda T} & -e^{\mu T} \\ e^{\mu T} & 1-e^{\lambda T} \end{bmatrix}$$

pour chaque paire, et son correspondant simple pour chaque V.F.réel, d'où l'algorithme des "Cahiers de la 102".

retour sur l'avance d'un V.F On peut à présent donner une interprétation réellifiée de l'avance d'un vecteur de Floquet

$$\partial_t \Psi^F = A\Psi^{-F} - \Psi^F \Lambda \tag{114}$$

le terme correctif s'écrit pour une paire réellifiée $|\, u,v> dL$, avec

$$dL = \rho \begin{bmatrix} \cos(\mu\tau) & \sin(\mu\tau) \\ -\sin(\mu\tau) & \cos(\mu\tau) \end{bmatrix} \quad , \quad \rho = e^{\lambda\tau} \tag{115}$$

soit ainsi :

$$\partial_t\, |\, u,v >= A\, |\, u,v> -\rho(\tau)\, |\, u,v> \begin{bmatrix} \cos(\mu\tau) & \sin(\mu\tau) \\ -\sin(\mu\tau) & \cos(\mu\tau) \end{bmatrix} \tag{116}$$

qui montre comment on obtiend un vecteur périodique en corrigeant l'effet de A par contraction et rotation dans le plan de l'espace des états formé par la paire $|\, u,v >$.

Traitement de Ψ^{-F} On arrive à faire avancer une partie des V.F, mais les autres bruités empêchent l'inversion correcte. On va tenter une inversion par SVD.

```
! remplacer cette inversion
 call omatcopy(n,n,Phi_t(1,1),np,owmxn,np);
 call diagmat(one,oxy_inv,n,n);
 call Sgesv(np,np,owmxn,np,iPiv,oxy_inv,np,infores);
;
! sauve phit in owmxn detruit par sgesvd
        call omatcopy(n,n,phi_t(1,1),np,owmxn,np);
!  phit = UwV'
! LaPack A=U1BV1t (B=bidiag) puis B=U2sigV2t  A=[U1U2]sig[V2tV1t]
! *** le driver pour SVD
! SUBROUTINE SGESVD( JOBU, JOBVT, M, N, A, LDA, S, U, LDU, VT, LDVT,
! $                   WORK, LWORK, INFO )
      call sgeSVD('A','A',n,n,owmxn,np,w,U,np,V,np,work,5*n,info);
!*** verifier matrice rangement V
!-      call omatcopy(n,n,abuf1,np,U,np);
```

```
!-      call otransmat(n,n,abuf2,np,v,np);
      if Zprint
      < Z_pr/ Phit SVD LaPack/: info,work(1);
        Z_pr/ U left SV/: (j,(u(i,j),i=1,n),j=1,n;
        Z_pr/ w sv/: w;
        Z_pr/ V' right SV/: (i,v(i,j),j=1,n),i=1,n);
;
! verification abuf = sum w(k)|Uk><Vk|
! ------------------------------------
        Z_pr:(j,(Phi_t(i,j),i=1,n),j=1,n);
        do ((i=1,n),j=1,n)
        < owmxn(i,j)=0.;
          <k=1,n; owmxn(i,j) = owmxn(i,j) + w(k)*u(i,k)*v(j,k); >;
        >;
        Z_pr/verif decomp/: (j,(owmxn(i,j),i=1,n),j=1,n);
      >;
;
! Inversion ciblee
! ----------------
 Do ((i=1,n),j=1,n)
 < Do k=1,n
   < if (w(k).gt.1.e-6) oxy_inv(i,j)=oxy_inv(i,j)+ 1./w(k)*v(k,i)*u(k,j);
   >;
 >;
!-! Determinant pat SVD
!-        any=1.; <k=1,n; any=any*w(k); >;
!-        Z_pr/Determinant Phi_t/: any, exp(oInt_Tradv);
!-! Phi_t direct determinant par LU
!-        call omatcopy(n,n,phi_t(1,1),np,abuf,np);
!-        call SGETRF(n, n, abuf, np, IPIV, INFO );
!-        any=1.; <i=1,n; any=any*abuf(i,i); >;
!-        Z_Pr/det. direct par LU/:any;
      >;
! ---------------------------------------------------------------------------
!  A UwV'=[UV'][VwV']; la premiere est unitaire, la seconde definie positive
!  w=exp(Lt),L  etant les exposants de Lyapunov, en tant que faisant croitre
! dt{ <dx(t).dx(t)> / <dx_0.dx_0> }
! ---------------------------------------------------------------------------
! on prend donc 1/t Log(w)
      do i=1,n
      < wbuf(i) = log(w(i))/time;
      >;
      write(55,1000),time,wbuf; "lyapunov.data"
      if nstep.lt.10000
      < write(56,1000),time,U;  write(57,1000),time,V;
      >;
;
!-  >; "end ZOUT"
```

alternative au traitement de Ψ^{-F} On a pris tout simplement les VF indéterminés à leur valeur constante, soit les dernières colonnes de Z. On constate que ça marche, c'est-à-dire que l'on obtiend bien des réponses $\bar{\rho}$ périodiques — y-compris un troisième vecteur qui hérite de la modulation de la $c^\dagger$! On extrait correctement la rétroaction positive en première composante avec un temps caractéristique de 27 mois, cf Fig 31. La composante

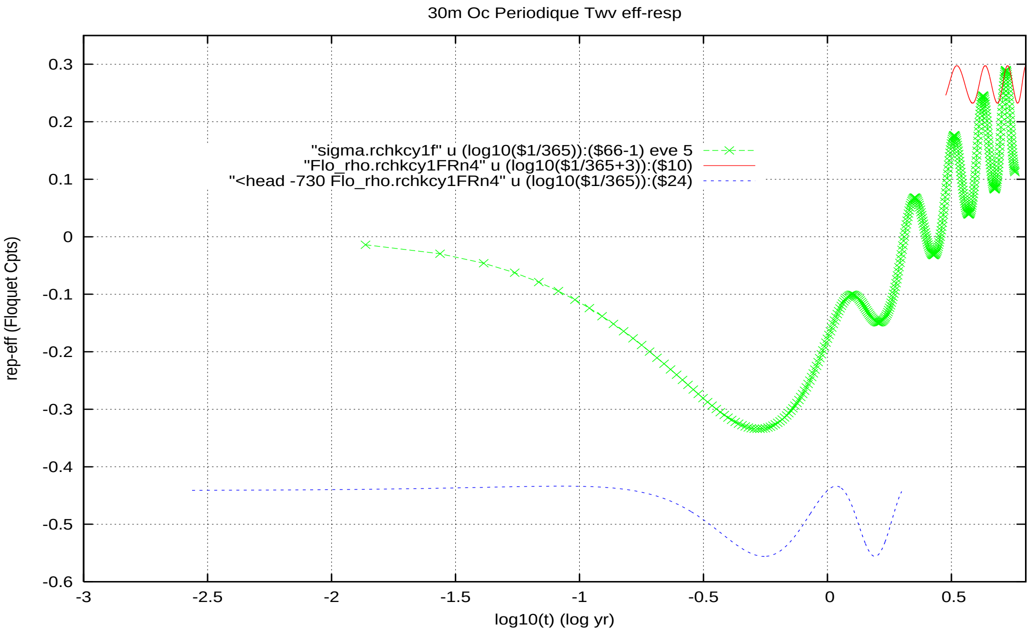

FIG. 31 – Réponse efficace WV et ses deux premières composantes de Floquet.

rapide de WV est également correctement extraite avec un temps de 70 jours, à comparer aux 180j de tau_prec — cette fraction expliquant la difficulté à déterminer cette deuxième composante, et a fortiori les dernières (10j).

En analyse par régression à la Gregory, ça donne la Fig. 31

Reste à valider ce choix des VF constants en lieu et place des indéterminés. En effet, si on les compare aux calculs du début de période, on a la Fig 32.

La violette (66) est l'effet-en-retour WV : les composantes de Floquet étant 10 et 24. La somme 10+24 (aux facteurs $1-exp(\lambda_k T)$ près) est censée avoir extrait la partie périodique de la précédente. Mêmes remarques pour la 81 et les 39, 53 de la réponse noLW-flux. Les deux composantes sont négatives, avec une opposition de phase, ce qui suggère un lien avec les deux groupes de la fig. 25, surface-Planck+sensible+latent *versus* flux vers CMO.

On peut en particulier remarquer que le "pôle rapide" de WV n'est pas atteind par la réponse circulante, et en abduire que **ces composantes jouent le rôle d'attracteur ?**[1]

Sur l'algorithme, on peut simplement conclure que c'est pas idiot, mais encore ?

Pour vérifier plus quantitativement, on peut éprouver l'extraction correcte par Ψ^{-F} approché de $\Phi(t,0) = \Psi^F \exp(\Lambda t) Z^{-1}$. Pour ce faire, on se place en flo_vec, et on relit un propagateur standard à chaque pas de temps avec lequel on calcule le produit $\Psi^{-F}\Phi(t,0)$, rangé dans Flo_recon.data. Si on voit bien une décroissance exponentielle, celle-ci cependant montre une oscillation, ce qui montre que la prise des VF constants rate leur modulation. Une amélioration pourrait consister à moduler ces colonnes simplement en retenant l'amorce de leur trajectoire, mettons, jusqu'à un instant, disons, $> T/12$, soit pour $\sin(\omega t) > 0.5$. On modulerait ainsi :

$$|\psi> = |\zeta> + |m> \sin\frac{2\pi t}{T} \tag{117}$$

[1]mais comme me le fait remarquer StepH, c'est aussi le cas en statique, le pôle lent qui fournit un terme $a_l(1. - \exp(\lambda_l t))$ contribue sempiternellement à la réponse lente — on compare en réalité ces deux mécanismes lent-rapide excités dans les deux cas par un step, c'est-à-dire une succession de delta pour une trajectoire soit constante soit périodique. Dans les deux cas, le pôle rapide est sempiternellement excité ...

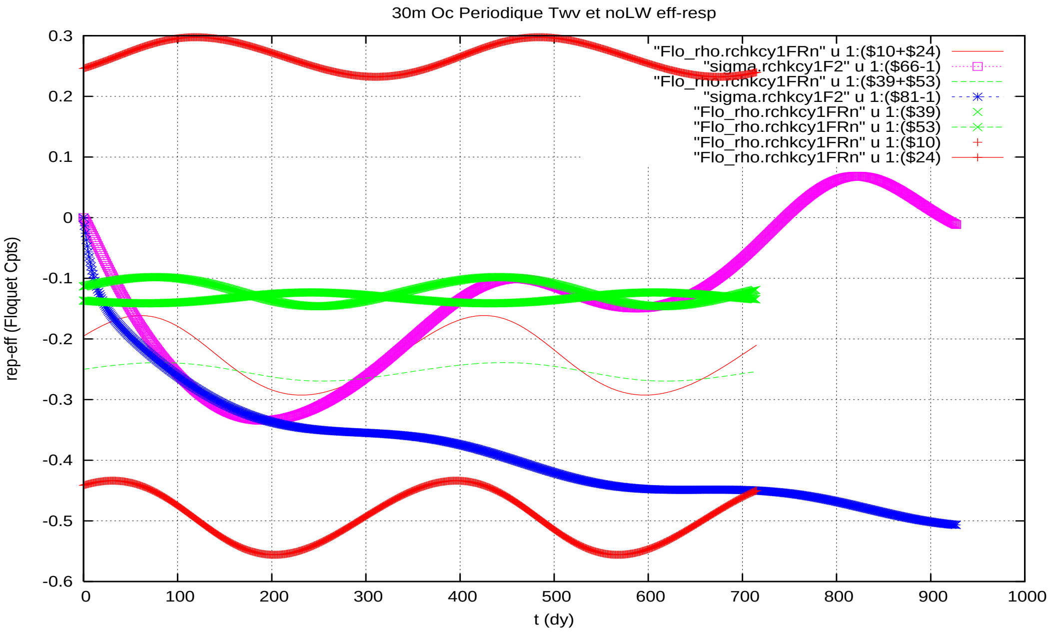

FIG. 32 – VF 3 et 4 constants : leur effet sur les rep-eff 1 et 2 de Floquet.

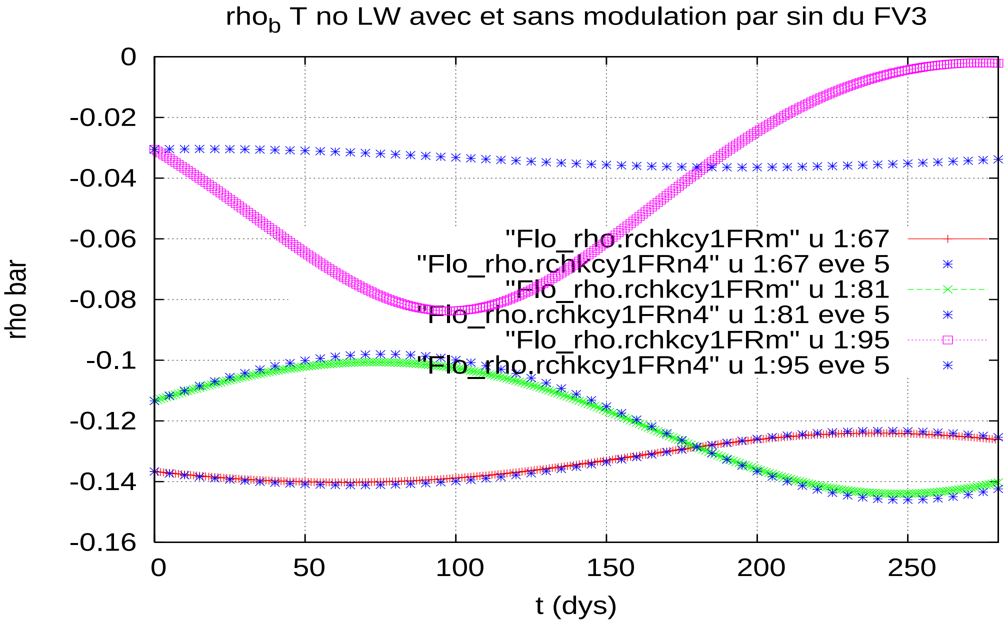

FIG. 33 – Effet d'une seule modulation par $|z_{12}> \sin(\omega t)$ sur $\bar{\rho}$.

avec $|m>= (|\Psi(t \approx T/12)> - |\zeta>)/\sin(t2\pi/T)$. Voici l'effet sur le $\bar{\rho}$ du T_noLW, Fig. 33

On voit que l'effet peut être important sur la troisième composante, mais les vecteurs reconstitués ne sont pas excellents (Fig. 34).

On peut améliorer la procédure avec une modulation plus complexe :

$$|\psi>=|\zeta> + |m> \sin\frac{2\pi t}{T} + |n> \cos\frac{2\pi t}{T} \tag{118}$$

et si nécessaire, on rajoutera une modulation sous-harmonique. En toute rigueur, l'algorithme devra tenir compte du modèle, une certaine souplesse est de rigueur. Le fichier floVPTs12 devra ainsi donner le nombre d'instants de captation des VF

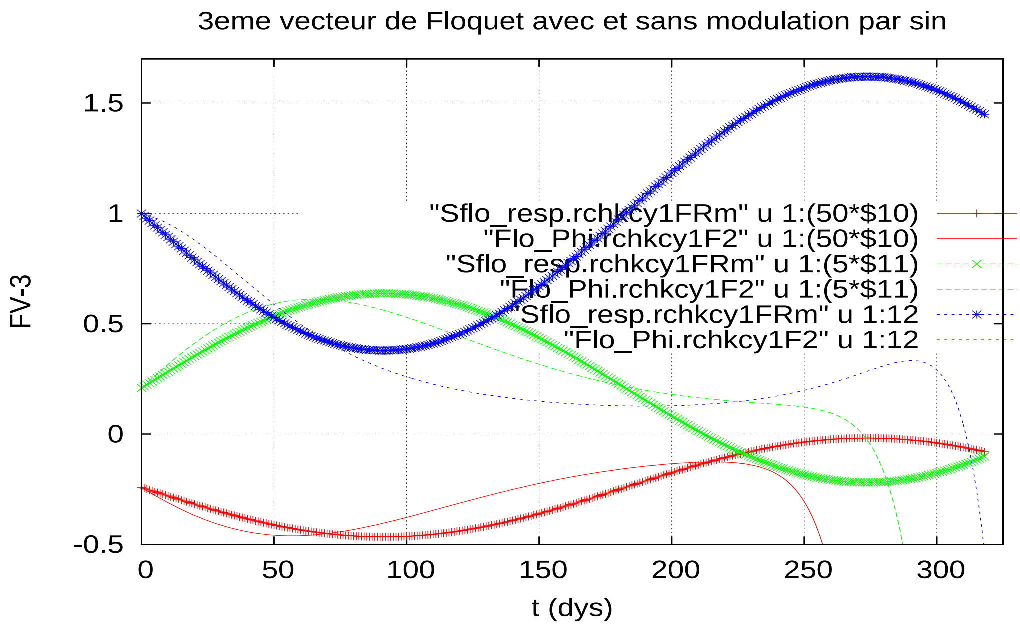

FIG. 34 – Effet d'une seule modulation par $|z_{12} > \sin(\omega t)$ sur le VF3.

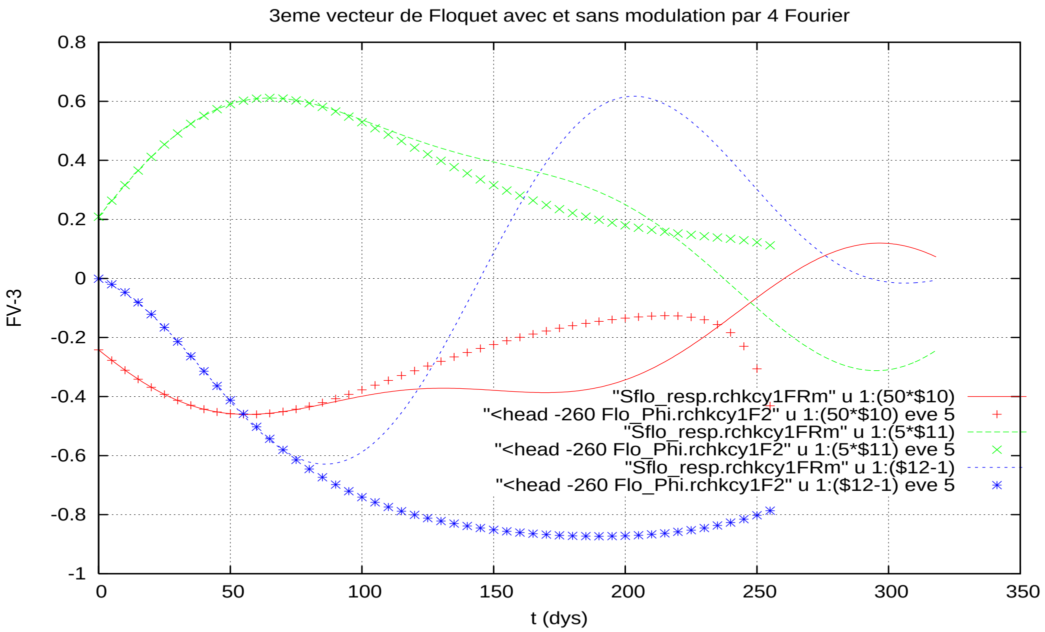

FIG. 35 – Fit d'une modulation par quatre coefs de Fourier sur le VF3.

corrigés, déterminer les n amplitudes de la modulation. À l'utilisateur d'estimer la portée significative du démarrage des VF indéterminés. Un test pourra être fait sur les VF justement déterminés — ce qui signifie qu'il faut fournir un ou des critères. **A mettre au point !**

En attendant, un essai avec quatre coefficients de Fourier déterminés sur 70 jours, Fig.35.

Ça permettrait en tout cas d'évaluer une incertitude sur les composantes de rétroaction : dans ce derenier cas, si les deux premières composantes de WV restent inchangées, on décale légèrement celles du no-LW. Quant aux troisièmes composantes, elles sont sympathiques mais de quelle signification ?

6.8 Analyse des difficultés

Nos difficultés[1] tiennent à la forme de la réponse cyclique :

$$\overline{\sigma} = \int_t^{t+T} \Phi(t+T,\tau)\ |\,b(\tau)> s(\tau)d\tau \tag{119}$$

On examine d'abord la forme intégrale. Diverses décompositions de l'intégrale mennent à

$$\begin{aligned}
\overline{\sigma} &= \int_T^{t+T} + \int_t^T = I + II \quad , \text{ avec d'abord :} \\
I &= \int_T^{t+T} \Phi(t+T,\tau)\ |\,b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&= \int_0^t \Phi(t,\tau)\ |\,b(\tau)> s(\tau)d\tau = \sigma(t)
\end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variables $\tau \to \tau+T$ et la propriété $\Phi(t+T,\tau+T) = \Phi(t,\tau)$, ainsi que la périodicité de $|\,b> s$. Cette composante ne pause pas de difficulté. On a ensuite

$$\begin{aligned}
II &= \int_t^T \Phi(t+T,\tau)\ |\,b(\tau)> s(\tau)d\tau \\
&= \Phi(t,0)\int_t^T \Phi(T,\tau)\ |\,b(\tau)> s(\tau)d\tau = \sigma(t)
\end{aligned}$$

La difficulté tiend à cette composante, par sa forme adjointe. C'est pourquoi on l'a décomposée en

$$\begin{aligned}
II &= \int_t^T = \int_0^T - \int_0^t = IIa + IIb \\
IIa &= \Phi(t,0)\int_0^T \Phi(T,\tau)\ |\,b(\tau)> s(\tau)d\tau = \Phi(t,0)\sigma^F \\
IIb &= \Phi(t,0)\int_0^t \Phi(T,\tau)\ |\,b(\tau)> s(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

La composante IIa s'obtiend en avançant les sensibilités aux C.I. données par $\sigma^F = \sigma(T)$. Quant a la IIb, qui concentre la difficulté, on pourrait utiliser $\Phi(T,\tau) = \Phi(T,0)\Phi(t,0)^{-1}$ par exemple, mais qui pointe la difficulté numérique rencontrée dans ClimSI par exemple, à savoir la quasi singularité de $\Phi(t,0)$.

On le voit dès qu'on envisage le terme source d'une intégration : $\Phi(t+T,t)$, dont les vecteurs sont les Floquet : $\Phi(t+T,t) = \Psi^F(t)\exp(\Lambda T)\Psi^{-F}(t)$.

On peut ainsi remarquer que l'analyse de Floquet concerne les sensibilités aux C.I. qui ne s'éteignent pas à T, c'est-à-dire que l'analyse est "inter-intra saisonnière". De ce fait, on est dans une problématique d'analyse des composantes climatiques d'au-delà du cycle saisonnier : ce qui du cycle saisonnier se propage à l'interannuel.

Mais en ce qui nous concerne, la détermination de tous les VF, nécessaire à la détermination de Ψ^{-F} telle qu'on l'a incluse dans nos algorithme, est le problème à résoudre.

On peut illustrer nos difficultés en analysant les éléments propres associés aux quatre variables d'état de ClimSI. Les vp 1 et 2 décroissent régulièrement jusqu'à T vers (0.6,0.005), mais les deux restantes deviennent inférieures à 10^{-10} dès $t = 300$ et 200 jours. La difficulté est déjà dans la détermination de Z. On a essayé de régulariser $\Phi(t,0)$ par SVD, en constatant (Fig. 36) que le bruit sur les VF apparait un peu plus plus tôt ! Pour comparaison, les composantes Q des VF 1 et 2 Fig.37, qui ne sont pas modifiées

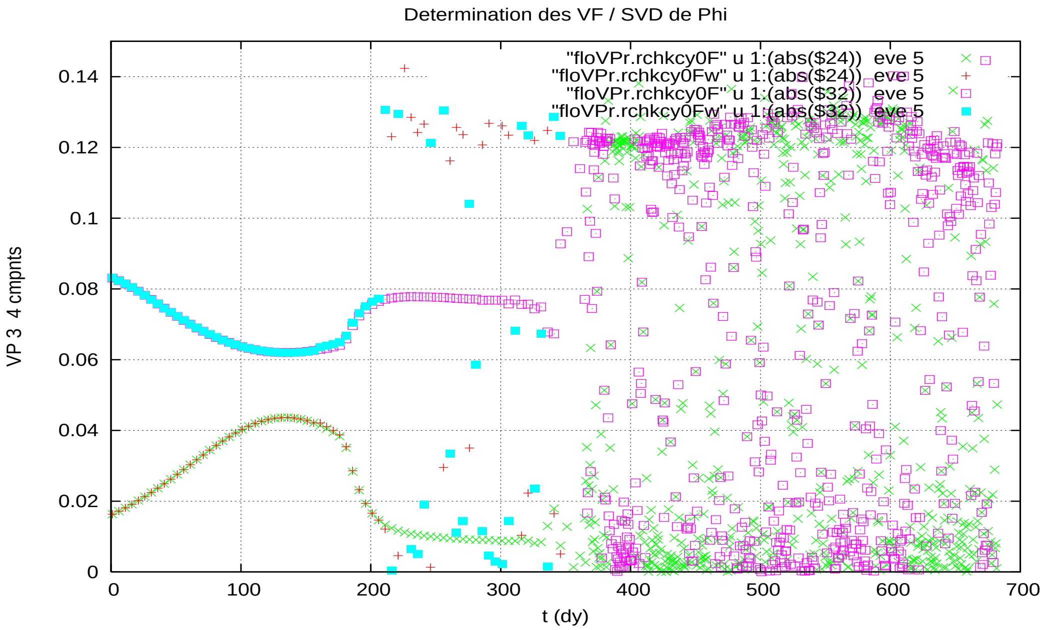

FIG. 36 – Effet de régularisation de $\Phi(t, 0)$ par SVD (Fw).

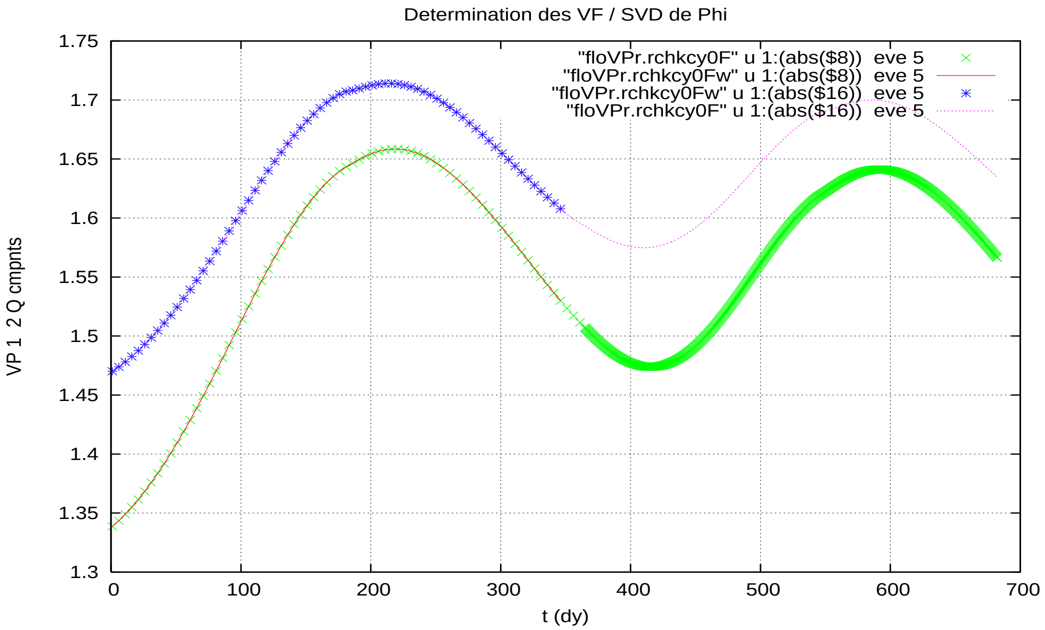

FIG. 37 – Effet de régularisation de $\Phi(t, 0)$ par SVD (Fw).

par la SVD. On voit les VF qui ont été équilibrés par $<\psi_i^F|\psi_j^{-F}> = \delta_{ij}$, sans d'ailleurs aucune amélioration numérique.

Par contre, on peut voir que les VF 3 et 4 deviennent quasi constants avant le décrochage numérique, ce qui suggère une sortie possible. La sortie consiste à choisir des VF 3 et 4 plausibles, et les moduler éventuellement avec l'algorithme déjà donné cî-dessus.

L'alernative consiste soit à avancer un calcul de $\Phi(t + T, t)$ comme ça :

$$\partial_t \Phi(t + T, t) = A\Phi(t + T, t) - \Phi(t + T, t)A \tag{120}$$

soit à avancer Ψ^{-F}. Dans ce dernier cas, en supposant cette avance, comment se modifient nos algorithmes ?

[1]décembre 2009.

Analyse par VF adjoints On considère de nouveau l'intégrale totale :

$$\overline{\sigma}(t) = \int_t^{t+T} \Phi(t+T,\tau)\ |b(\tau)> s(\tau)d\tau \tag{121}$$

qui s'intègre avec

$$\partial_t\overline{\sigma} = A\overline{\sigma} + [I - \Phi(t+T,t)]\ |b(t)> s(t) \tag{122}$$

avec les C.I. : $\overline{\sigma}(0) = \sigma(T)$. On connait $\sigma(T)$ par le run qui détermine Z. La question porte sur l'analyse en composantes de Floquet des effets-en-retour. Dans la détermination précédente, on calculait $\overline{\sigma}$ et on projetait sur les VF, c'est la source des difficultés puisqu'alors il faut projeter sur un espace orthogonal aux VF indéterminés. Soit on peut dire quelque chose sur cet espace et faire cette projection (cf next paragraph), soit il faut se contenter des premier VF.

Bon, on continue à explorer l'avance en composantes. La première chose, c'est de décomposer $\sigma(T)$ en colonnes k, nécessaire pour les C.I. de $\overline{\sigma}$:

$$\partial_t\sigma_k(t) = A\sigma_k(t) + |\ \psi_k^F(t)><\psi_k^{-F}(t)\ |\ |b(t)> s(t)\ , \quad \sigma_k(0) = 0\ ; \tag{123}$$

Son intégration sur une période doit vérifier $\sigma(T) = \sum_k$ (on rappelle que $|\,b>$ définit cet effet-en-retour global σ). On est alors en mesure d'intégrer :

$$\partial_t\overline{\sigma_k}(t) = A\overline{\sigma_k}(t) + [1 - e^{\lambda_k T}]\ |\psi_k^F(t)> <\psi_k^{-F}(t)\,|\,b(t)>s(t) \tag{124}$$

Dans les deux cas, il faut encore avancer ψ_k^F et ψ_k^{-F} :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t\,|\psi_k^F> & = A\,|\psi_k^F> - |\psi_k^F> \lambda_k \\ \partial_t\,|\psi_k^{-F}> & = -A^\dagger\,|\psi_k^{-F}> + |\psi_k^{-F}> \lambda_k \end{array}\right.$$

Le seul prix à payer est cette avance de Ψ^{-F} qui exige les transpositions des matrices du TEF. C'est ce que l'algo précédent tentait d'éviter, avec l'argument de la navette MK2 plus lourde. *Un essai avec aspha (validé sur l'avance de Ψ^F) donne des avances raisonnables mais qui ne conservent pas un produit $= I$ très longtemps.*

Une alternative est de déterminer $\Phi(t+T,t)$ que l'on décomposerait en VF à chaque instant nécessaire, avec :

$$\partial_t\Phi(t+T,t) = A\Phi(t+T,t) - \Phi(t+T,t)A \tag{125}$$

d'ailleurs, cette forme ne peut ne pas évoquer l'avance de la matcov, que lie au propagateur le théorème de fluctuations-dissipation, non ? Et du même coup, on se demande ce que serait le terme quadratique pour le propagateur ! **à creuser**, en remarquant de plus que c'est $A^\dagger$ avec le signe + qui intervient dans la covar ! À reprendre dans les Effluents en suivant le fil de Cécile Penland.

Si on veut tenter le calcul de $\Phi_M(t) = \Phi(t+T,t)$ on a successivement ($\tau = \frac{\delta t}{2}$)

$$\begin{array}{rcl} \Phi_M(t+\delta t) & = & 0.5[e^{A\delta t}\Phi_M(t) + \Phi_M(t)e^{-A\delta t}] \\ 2(I-\tau A)\Phi_M(t+\delta t)(I+\tau A) & = & (I+\tau A)\Phi_M(t)(I+\tau A) + (I-\tau A)\Phi_M(t)(I-\tau A) \\ (I-\tau A)\Phi_M(t+\delta t)(I+\tau A) & = & \Phi_M + \tau^2 A\Phi_M A \end{array} \tag{126}$$

sympathique de par l'élimination du terme bicubique, et avec les C.I. $\Phi_M(0) = \Phi(T,0)$. L'intégration de $\overline{\sigma}$ ne diffère de celle de σ que du terme source $[I - \Phi_M(t)]\ |\ b(t)>$ en composantes de Floquet, si bien que l'avance de Φ_M doit précéder la navette, mais à faire après le calcul de aspha — soit une séquence +SEQ,PHIM. Il ne s'agit pour l'heure que d'un essai, à comparer aux autres, qui nécessiterait une navette spécifique, du type et avec les mêmes problèmes que Kalman.

La séquence du calcul de Φ_M, Ψ^F et Ψ^{-F} :

```
! ==============================================
!   Avance par aspha de la matrice maille Phi_M
! [I-dts2A]Phi_M[I+dts2A]=2[Phi_M+dts2^2APhi_MA]
! ==============================================
! [I-dts2A]X=2[Phi+(ts2)^2 APhiA]
!   owmxn2    owmxn
! ------------------------
! dts2^2 APhiA
call omatmlt(n,n,n,aspha,np,Phi_M,np,owmxn,np);
call omatmlt(n,n,n,owmxn,np,aspha,np,owmxn,np);
two=2.D0; dts2=dt/two;
call oscamat(dts2*dts2,n,n,owmxn,np,owmxn,np);
call omatadd(n,n,owmxn,np,Phi_M,np,owmxn,np);
! [I-dts2A]
call oscamat(dts2,n,n,aspha,np,owmxn2,np);
<io=1,np; owmxn2(io,io)=1.D0-owmxn2(io,io); >;
;
call Sgesv(np,np,owmxn2,np,iPiv,owmxn,np,infores);

! [I+dts2A]'Phi'=X'
! owmxn2         owmxn
! ------------------------
! transpose X
Do((i=1,j-1),j=2,n)
< ww=owmxn(i,j);
  owmxn(i,j)=owmxn(j,i); owmxn(j,i)=ww;
>;
! [I+dts2A]'
call oscamat(dts2,n,n,aspha,np,owmxn2,np);
<io=1,np; owmxn2(io,io)=1.D0+owmxn2(io,io); >;
! transpose
Do((i=1,j-1),j=2,n)
< ww=owmxn2(i,j);
  owmxn2(i,j)=owmxn2(j,i); owmxn2(j,i)=ww;
>;
call Sgesv(np,np,owmxn2,np,iPiv,owmxn,np,infores);
! transpose
Do((i=1,j-1),j=2,n)
< ww=owmxn(i,j);
  owmxn(i,j)=owmxn(j,i); owmxn(j,i)=ww;
>;
Do((i=1,n),j=1,n)
 < Phi_M(i,j)=owmxn(i,j); >;
if Zprint< Z_pr/Phi maille/:(j,(Phi_M(i,j),i=1,n),j=1,n); >;
;
```

ce qui fait un calcul, somme toute, simplet. On détermine à présent les VF cross-normalisés à comparer aux diverses autres déterminations déjà effectuées.

```
! ++++++++++++++++++++++++++++
!    Compute Floquet Vectors
! ++++++++++++++++++++++++++++
      call sgeevx( 'B', 'V', 'V', 'B', n, owmxn, n,
```

```
                    WR, WI, VL, n, VR, n, ILO, IHI, SCALE, ABNRM,
                    RCONDE, RCONDV,wWORK,LWORK,IoWORK,INFO );
;
! +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
! Classement de sortie selon WR decroissant
!   sort array v(.) (cernlib simple precision)
! +++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++++
     <i=1,n; WRR(i) = wr(i); >;
       call sortzv(WRR,index_wr,n,1,1,0);
      if Zout
      < write(60,1009) time,(Wr(index_wr(i)),Wi(index_wr(i)),i=1,np);
      >;
etc
```

mais le comportement observé des VF ainsi calculés est merdique, avec en particulier des vp qui ne sont guère constantes ... Voilà ce que ça peut donner (Fig. 38)

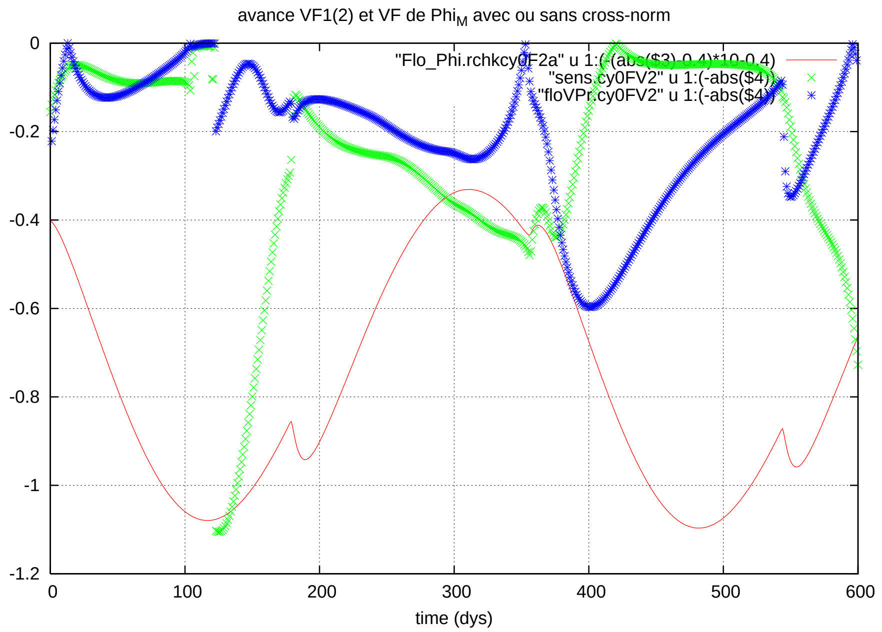

FIG. 38 – Comparaison de trois calculs de VF1 composante 2.

Y a même un passage bref par des VF complexes à $t = 110$...

Analyse par le noyau Pour projeter sur p composantes de Floquet, il suffit de p vecteurs $|\,\psi^{-F}>$. Chacun doit être bi-orthogonal aux autres VF $|\,\psi^{F}>$, et en particulier au noyau de la matrice dont ils sont VP : $M = \Phi(t+T, t)$. On a

$$\left\{\begin{array}{rcl} M\,|\,\psi_k^F> & = & \lambda\,|\,\psi_k^F> \\ <\psi_k^{-F}\,|\,M & = & <\psi_k^{-F}\,|\,\lambda_k \\ M & = & U\,[w]_d V^\dagger \end{array}\right.$$

Alors, les derniers $|\,v_l>$ — qui ont des $w_k < \epsilon$ forment une base du noyau ; en formant la matrice constituée des premiers ψ_i complètée des derniers $|\,v_l>$, son inversion fournit les premiers $|\,\psi_i>$. Mais on n'est pas plus avancé si on ne connait pas la matrice $\Phi(t+T,t)$, sinon pour $t = 0$ — on a vu que l'avance de M reste merdique.

Bon, au regard de l'equ.(106), on peut se contenter de récupérer le mieux possible le noyau de $\Psi^F(t)$, car c'est lui qui fournit les premiers ψ_k^{-F} qui vont projeter orthogonalement au noyau. Une SVD de $\Psi^F = U\,[w]_d V^\dagger$ est-elle utile ?

Exercice de comparaison entre l'avance et l'inversion par SVD :

```
+_IF,SVD.
! ============================================================
!  Calcul du VF gauche par inversion SVD de VF droit
!  (la question porte sur la projection perp au noyau)
! ============================================================
! sauve phit detruit par sgesvd
        call omatcopy(n,n,phi_t(1,1),np,owmxn,np);
!  phit = UwV'
! LaPack A=U1BV1t (B=bidiag) puis B=U2sigV2t  A=[U1U2]sig[V2tV1t]
! *** le driver pour SVD
! SUBROUTINE SGESVD( JOBU, JOBVT, M, N, A, LDA, S, U, LDU, VT, LDVT,
! $                   WORK, LWORK, INFO )
if Zprint.or.Zout
<  call sgeSVD('A','A',n,n,owmxn,np,wr,vr,np,vl,np,wWork,5*n,info);
      if Zprint
      < Z_pr/ Phit SVD LaPack/: info,wWork(1);
        Z_pr/ U left SV/: (j,(vr(i,j),i=1,n),j=1,n);
        Z_pr/ w sv/: wr;
        Z_pr/ Vcross right SV/: (j,(vl(i,j),i=1,n),j=1,n);
      >;
! selection des w
      lo=0;
      Do i=1,n
      < if (wr(i).gt.osmall) [lo:+1];
      >;
  if Zprint
   < Z_pr/VF avant inversion/: (j,(Phi_t(i,j),i=1,n),j=1,n); >;
! Phi_x = sum w(k)|Uk><Vk| -> VFm1
        do ((i=1,n),j=1,n)
        < Phi_x(i,j)=0.;
          <k=1,lo; Phi_x(i,j) = Phi_x(i,j) + (1.D0/wr(k))*vr(i,k)*vl(k,j); >;
        >;
  if Zprint
  <     Z_pr/nbre w/:lo;
        Z_pr/VF inverse/: (j,(Phi_x(i,j),i=1,n),j=1,n);
        Z_pr/VF par avance/: (j,(Phj_t(i,j),i=1,n),j=1,n);
  >;
if Zout
< write(63,1000) time,Phi_x;
>;
! -------------------------
! check Phi_t x Phi_x diag
! ------------------------
if nofm.lt.n
<    Do ((i=1,np),j=1,np)<owmxn(i,j)=0.>;
     Do ((i=1,np),j=1,np)
     < <k=1,nofm; owmxn(i,j)=owmxn(i,j)+Phi_t(i,k)*Phi_x(j,k)>;
     >;
  if Zprint< Z_pr/check Phit.Phix diag(nofm)/:(j,(owmxn(i,j),i=1,n),j=1,n);>;
>;
    Do ((i=1,np),j=1,np)<owmxn(i,j)=0.>;
```

```
    Do ((i=1,np),j=1,np)
    < <k=1,np; owmxn(i,j)=owmxn(i,j)+Phi_t(i,k)*Phi_x(j,k)>;
    >;
  if Zprint< Z_pr/check Phit.Phix diag(np)/:(j,(owmxn(i,j),i=1,n),j=1,n); >;
;
>;"end Phi_x"
+_ENDIF.
```

avec ça, on trouve des VF gauches qui coïncident jusqu'à $t = 120$, mais divergent ensuite, dans le même sens ou pas. Quand c'est dans le même sens, le svd diverge moins vite (Fig.39). La question se pose alors de comment peut-on avancer si bien les deux premiers

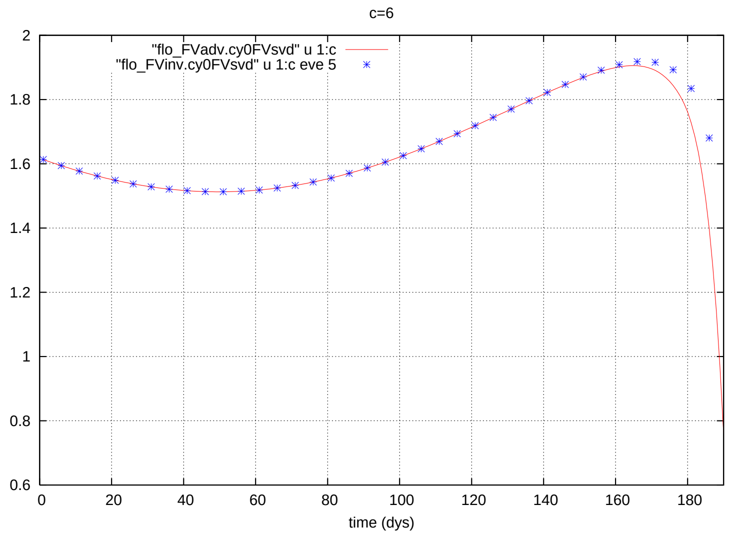

FIG. 39 – Comparaison de deux avances de Ψ^{-F}.

VF à droite, mais aucun des VF à gauche ? On module sur 4 points de capitons les deux derniers VF, Fig. 40. les points singuliers qui apparaissent semblent en effet lié à la

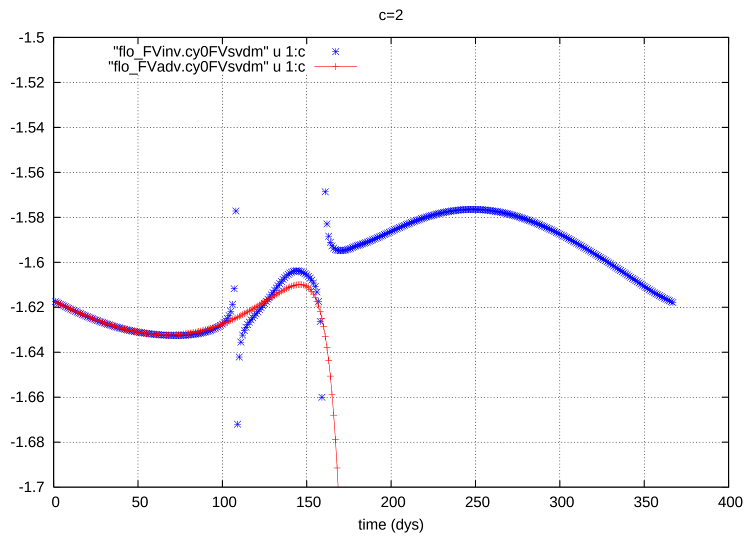

FIG. 40 – Comparaison de deux avances de Ψ^{-F} avec 2 VF modulés.

divergence. Avec six points, Fig 41 D'une part, les VF droits sont très peu différents, mais on constate que ces différences ont un fort impact sur les inverses, mauvais tout ça.

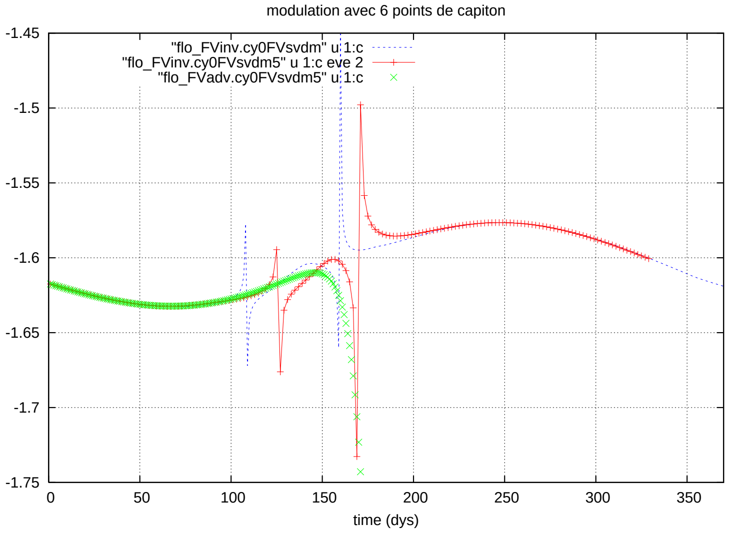

FIG. 41 – comme Fig. 40 avec modulation plus fine.

Retour à des VF constants : si on constate que les VP de $\Phi(t,0)$ convergent vers une constante avant qu'ils n'explosent numériquement, on est en droit de conclure que ce sont les bons. Par ailleurs, ils sont des C.I. particulières de Floquet, donc périodiques ; mais ils correspondent à des mécanismes qui se sont éteinds bien avant la période, ce qui semble indiquer que leur amplitude de variation asymptotique est nulle, non ? On refait un run avec les deux derniers VF constants (bien choisis), et pour essai une pseudo avance adjointe — on a posé $\delta t \to -\delta t$, ce qui revient à inverser par l'adjoint avec C.I. $\Psi{-}F(T) = \Psi{-}F(0)$, en supposant que $A(T-t) = A(t)$.

Ça donne la Fig. 42, comparée aux modulations. On voit que d'une part l'avance par

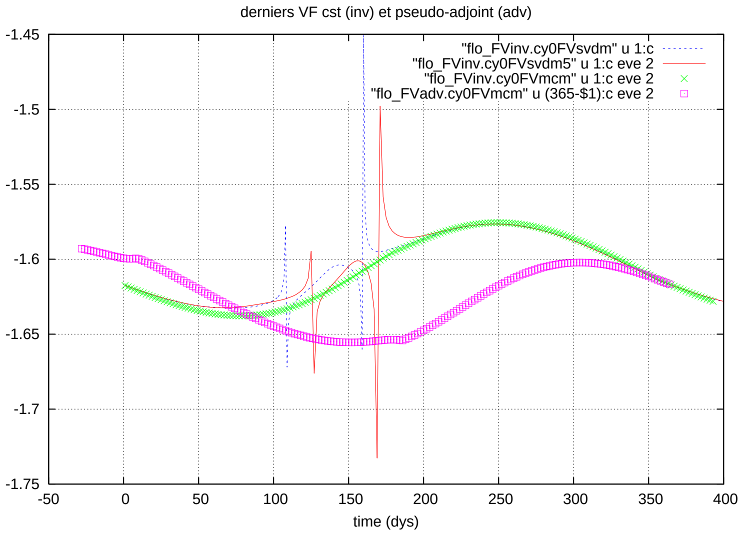

FIG. 42 – Comparaison pour les deux derniers VF constants et une avance pseudo-adjointe, T_{tropo} de VF1.

l'adjoint de Ψ^{-F} semble possible — ce qui montre bien qu'on avançait dans le mauvias sens de la variété instable, et d'autre part que la détermination par inversion SVD donne satisfaction. On peut voir l'influence de cette variété instable dans les singularités liées aux modulation ?

Le même exercice pour le deuxième Floquet, Fig.43. Le fait que ce pseudo-adjoint ne soit pas périodique peut provenir de la non commutativité des matrices $A^{\sharp}(t)$. Mais

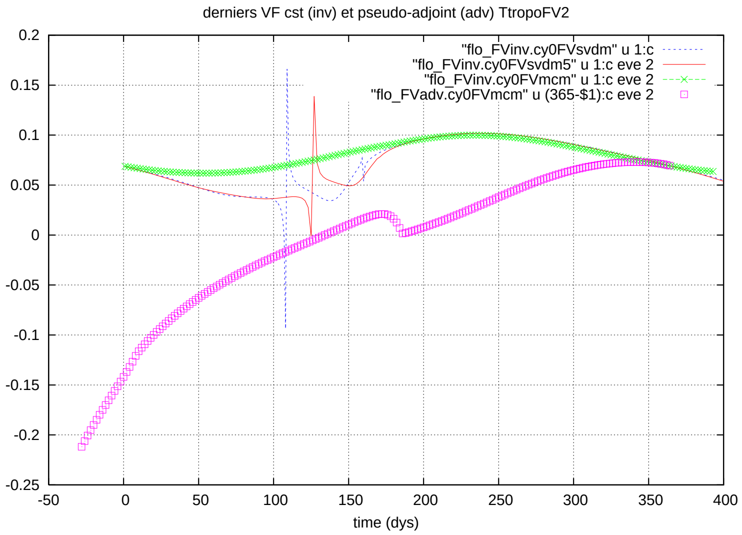

FIG. 43 – Comparaison pour les deux derniers VF constants et une avance pseudo-adjointe, T_{tropo} de VF2.

l'avance adjointe des deux derniers montrent, heureusement, les mêmes pb que l'avance directe des derniers VF, Fig. 44

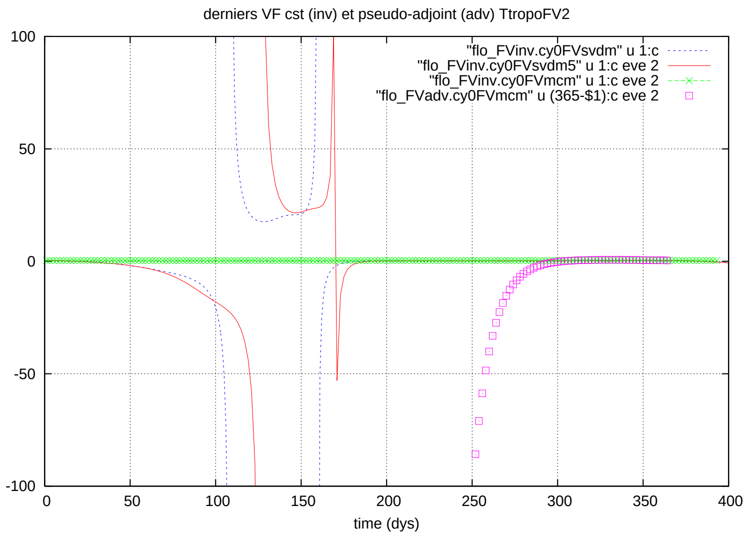

FIG. 44 – Comparaison pour les deux derniers VF constants et une avance pseudo-adjointe, T_{tropo} de VF3.

Un run en adjoint effectif permettrait de valider cette hypothèse, mais à revoir mathématiquement. On pourrait encore fitter ces deux vecteurs constants pour annuler leur amplitude, mais je ne vois pas comment (20/01/2010). Une vérification serait de choisir des VF plus tôt pour voir si leur amplitude résiduelle décroit en s'approchant du terme de leur possible détermination numérique. **à faire**

Que peut-on dire des propriétés spécifiques de l'avance des Floquet ? On utilise le fait que la matrice maille $\Phi_M(t)$ ai ces vecteurs comme É.P. et on applique les résultats du cahier Élémentaire :

$$\lambda'_i = \langle f_i | \Phi'_M | e_i \rangle \tag{127}$$

$$\langle f_i | \Phi'_M | e_j \rangle = (\lambda_i - \lambda_j) \langle f_i | e'_j \rangle \tag{128}$$

Avec $\Phi'_M = A\Phi_M - \Phi_M A$, on trouve que $\lambda' \equiv 0$, ce qui permet de constituer une démonstration alternative à la théorie de Floquet, et pour les termes hors-diagonale :

$$(\lambda_j - \lambda_i) < \psi_i^{-F} \mid A \mid \psi_j^F >= (\lambda_i - \lambda_j) < \psi_i^{-F} \mid \ \partial_t \mid \psi_j^F > \tag{129}$$

et son conjugué pour l'avance des VF gauche. Pour des vp différentes, on trouve alors

$$< \psi_i^{-F} \mid \ \partial_t \mid \psi_j^F >= - < \psi_i^{-F} \mid A \ \mid \psi_j^F > \tag{130}$$

$$< \psi_j^F \mid \ \partial_t \mid \psi_j^{-F} >=< \psi_i^F \mid A\dagger \ \mid \psi_j^{-F} > \tag{131}$$

ou pas loin des signes donnés. Ce qui ne rapporte rien puisqu'on connait l'avance des VF.

Regrets On aimerait ne pas coller à la définition des VF par les sensibilités aux C.I. mais plutôt faire une analyse de Floquet de l'effet-en-retour ! Nos problèmes numériques sont liés à l'extinction rapide des ζ_i, c'est-à-dire de perturbations de C.I., hors, c'est par un excitation continuelle qu'on accède aux effets-en-retour, qu'en effet, notre recherche a précisément concerné la détermination des composantes périodiques de $\sigma \to \overline{\sigma}$.

Ça veut dire quoi, ça, trouver des C.I. en $\overline{\sigma}$ qui rendent son avance périodique ? Le problème méthodologique, c'est que ayant été incapable de deviner par quelle voie Gaston Floquet a bien pu intuiter sa théorie, ça aide pas pour faire de même autrement. On pourrait donc repartir de ce problème en activant la transformée de Laplace, qui se peut calculer pour un système périodique etc ?

ou d'exhauster les manières de décomposer $\overline{\sigma} = \int_t^{t+T} \Phi(t+T,\tau) \mid b> (\tau) d\tau$? Mais de sa forme en VF, on aura toujours un vecteur $\mid \psi_k^F >$ en tête de l'intégrale fois un scalaire périodique. Par ailleurs, de l'argument que la source excite en permanence tout VF, on a peine a croire que les plus rapides n'interviennent pas, ce qui concerne les VF à gauches : $< \psi_k^{-F} \mid b > (\tau)$; ce que suggère aussi le résultat (144), alors ?

Le tout est de trouver, à partir de ce qu'on sait de la décomposition de $\overline{\sigma(t)}$:

$$\overline{\sigma(t)} = \int_t^{t+T} \Phi(t+T,\tau) \mid b(\tau) > d\tau = \sum_k \mid \psi_k^F(t) > \int_t^{t+T} e^{t+T-\tau} < \psi_k^{-F} \mid b > (\tau) d\tau \tag{132}$$

qui est un vecteur périodique, une autre décomposition qui serait liée, par exemple, à $\int_0^T \Phi(\tau, 0) d\tau$, qui préserve l'importance des derniers VF.

6.9 Brouillon analyses mini-Clim

On poursuit nonobstant l'analyse des régressions comparées entre modèle à l'équilibre et le cycle saisonnier moyenné sur un an. Les pentes Lyapunoviennent sont proches : et

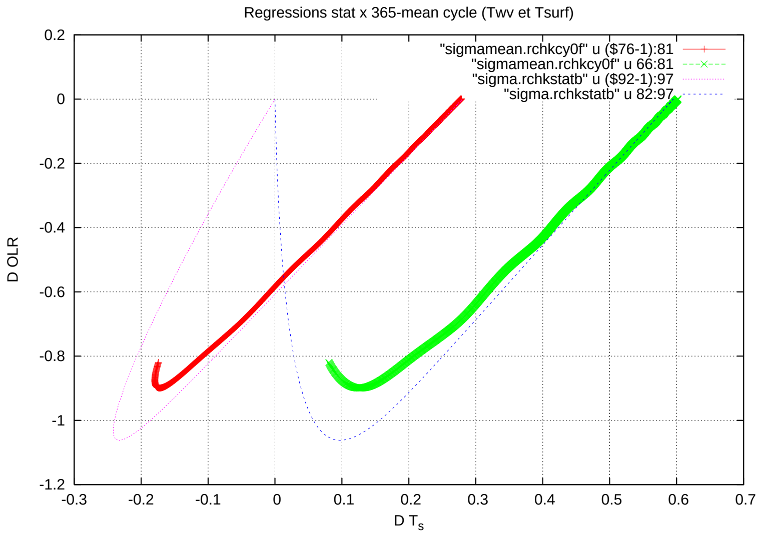

FIG. 45 – Comparaison du statique avec cycle en moyenne mobile annuelle.

ceci malgré une dépendance temporelle de pentes différentes, montrant même un oscillation s'amplifiant au-delà de 6000 jours, qui finit d'ailleurs en bruit numérique : On va tenter

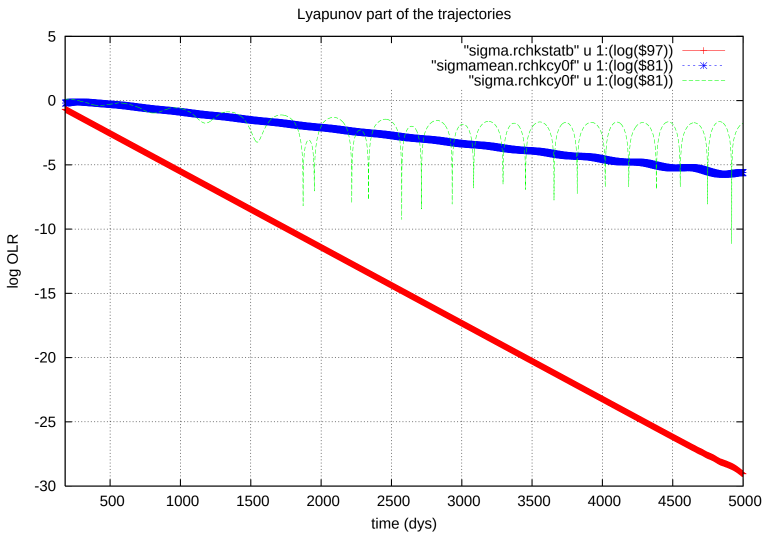

FIG. 46 – Comparaison des décroissances Lyapunov.

d'expliquer ces observations. Tout d'abord, formalisons la prise de moyenne mobile sur une période du cycle. On définit les effets-en-retour moyens par

$$< \sigma^T > (t) = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} ds \int_0^s \Phi(s, \tau) \, | b(\tau) > s(\tau) \, d\tau \tag{133}$$

où on a choisi le début de la période courante mais où tout aussi bien cette définition pourra être associée au temps $t + T/2$. Pour analyser son comportement à des temps éloignés de l'origine des perturbations, on dérive :

$$\partial_t < \sigma^T > (t) = \frac{1}{T} \int_0^{t+T} \Phi(t + T, \tau) \, | b(\tau) > s(\tau) d\tau - \frac{1}{T} \int_0^t \Phi(t, \tau) \, | b(\tau) > s(\tau) d\tau \tag{134}$$

On décompose la première intégrale en $\int_0^{t+T} = \int_0^T + \int_T^{t+T}$, ce qui laisse finalement

$$\partial_t <\sigma^T>(t) = \frac{1}{T}\Phi(t,0)\int_0^T \Phi(T,\tau)\mid b(\tau)> s(\tau)d\tau \tag{135}$$

où l'intégrale restante n'est autre que $\overline{\sigma}^F$ que l'on retrouve encore ici :

$$\partial_t <\sigma^T>(t) = \frac{1}{T}\Phi(t,0)\overline{\sigma}^F \tag{136}$$

Les temps de décroissance-Lyapunov de la dérivée temporelle et de la fonction coïncident et sont ceux du propagateur lui-même. On se retrouve avec le premier exposant de Lyapunov, mettons $(-\lambda_1)$ réel :

$$\partial_t <\sigma^T>(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{<\zeta_1^{-1}|\overline{\sigma}^F>}{T}\, e^{-\lambda_1 t}\mid\psi_1^F> \tag{137}$$

Pour intégrer, on va séparer le vecteur de Floquet en sa moyenne et son anomalie $\psi_1^F(t) = \overline{\psi}_1^F + \psi'$, avec $T\overline{\psi} = \int_0^T \psi(\tau)d\tau$; alors, la contribution principale à $\overline{\sigma}$ est

$$<\sigma^T>(t) - <\sigma^T>(t_L) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{<\zeta_1^{-1}|\overline{\sigma}^F>}{\lambda_1 T}\,(e^{-\lambda_1 t_L} - e^{-\lambda_1 t})\mid\overline{\psi}>_1^F \tag{138}$$

à laquelle[1] s'ajoute une partie de faibles fluctuations

$$... + \frac{<\zeta_1^{-1}|\overline{\sigma}^F>}{T}\int_{t_L}^t e^{-\lambda_1\tau}\mid\psi_1'(\tau)> d\tau \tag{139}$$

dont on peut voir que l'amplitude des composantes reste faible, $< \exp(-\lambda_1 t_L)\max|\psi|$ avec le même facteur que devant la partie Lyapunov. On peut déjà remarquer que ce résultat explique la courbe bleue de la Fig. 46, formée d'une décroissance-Lyapunov avec une légère fluctuation résiduelle.

La limite asymptotique de $<\sigma^T>$ est ainsi

$$<\sigma^T>(\infty) = <\sigma^T>(t_L) + e^{-\lambda_1 t_L}\frac{<\zeta_1^{-1}|\overline{\sigma}^F>}{\lambda_1 T}\mid\overline{\psi}_1^F> \tag{140}$$

et sa décroissnace-Lyaounov est issue de

$$\boxed{<\sigma^T>(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} -\frac{<\zeta_1^{-1}|\overline{\sigma}^F>}{\lambda_1 T}e^{-\lambda_1 t}\mid\overline{\psi}_1^F>} \tag{141}$$

avec une partie résiduelle faiblement oscillante. C'est bien ce qu'on a trouvé avec mini-C, la pente est le premier Lyapunov ($\approx -1.210^{-3}$. Mais on a une pente cinq fois plus faible qu'avec le stat (!) tout en conservant le facteur global — aller donc comprendre ça. Pour ne pas perdre, remarquons q'une autre décomposition de l'intégrale première de (134) $\int_0^{t+T} = \int_t^{t+T} + \int_0^t$ donne

$$T\partial_t <\sigma^T>(t) = \overline{\sigma}(t) - [I - \Phi(t+T,t)]\sigma \tag{142}$$

et qui bien évidement avec la précédente redonne l'expression donnée de $\overline{\sigma}(t)$.

Encore une facétie résultant de la transformation de Laplace d'une fonction périodique ; ça donne

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \Phi(\tau,0)d\tau = \sum_i \frac{1}{I - e^{-\lambda_i T}}\int_0^T e^{-\lambda_i\tau}\psi_i^F(\tau)d\tau <\zeta_i^{-1}| \tag{143}$$

[1] celà n'a en effet pas des sens d'intégrer a partir de $t=0$, car alors tous les V.P. interviennent. t_L est un temps multiple de $-1/(\lambda_1)$ où seul intervient encore la décroissance de Lyapunov.

ceci en remarquant que pour la borne infinie, l'intégrale donne la transformée de Laplace de symbole λ_i. Ça fournit une analogie que l'on peut trouver inspirante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Psi^F(t) & = & \Phi(t,0)\ Z\ e^{\Lambda t} \\ \overline{\Psi}^F & = & \int_0^\infty \Phi(\tau,0) d\tau Z \dfrac{I - e^{\Lambda T}}{T} \end{array} \right. \tag{144}$$

On peut de même l'appliquer à la limite asymptotique de $\overline{\sigma}$:

$$<\sigma^T(\infty)> - <\sigma^T(0)> = \sum_i \frac{<\zeta_i^{-1}|\overline{\sigma}^F>}{T} \int_0^\infty e^{-\lambda_i \tau}\ |\psi_i^F(\tau)> d\tau \tag{145}$$

on a ce résultat :

$$\int_0^\infty e^{-\lambda_1 \tau}\ |\psi>_1^F\ (\tau) d\tau = \frac{1}{1 - e^{-\lambda_1 T}} \int_0^T e^{-\lambda_1 \tau}\ |\psi_1^F(\tau)> d\tau \tag{146}$$

et ainsi

$$<\sigma^T(\infty)> = <\sigma^T(0)> + \sum_i \frac{<\zeta_i^{-1}|\overline{\sigma}^F>}{T(1 - e^{-\lambda_i}T)} \int_0^T e^{-\lambda_i \tau}\ |\psi_1^F(\tau)> d\tau \tag{147}$$

nouveau réglage du mini-Clim On effectue un réglage pour, d'une part, éclairer la couche de surface en partie, le reste donné à CMO (50-50). Le réglage de la ostepin du flux vers CMO censé prendre en compte un épaississement progressif conduit au réglage coef 0.2 fois celui vers tropo, et un facteur 60 quand le flux change de signe sur 0.5 K :

```
flux_CMO:  h_surf_CMO*(T_noLW_phi-T_ocean_eta)
                     *(1.+60.*ostepin(T_ocean_eta+dm1-T_noLW_phi,us2))
```

avec ça, on observe toujours une petite irrégularité de T_{2m} quand le soleil a culminé, avec des conséquences intéressantes sur les deux premiers VF :

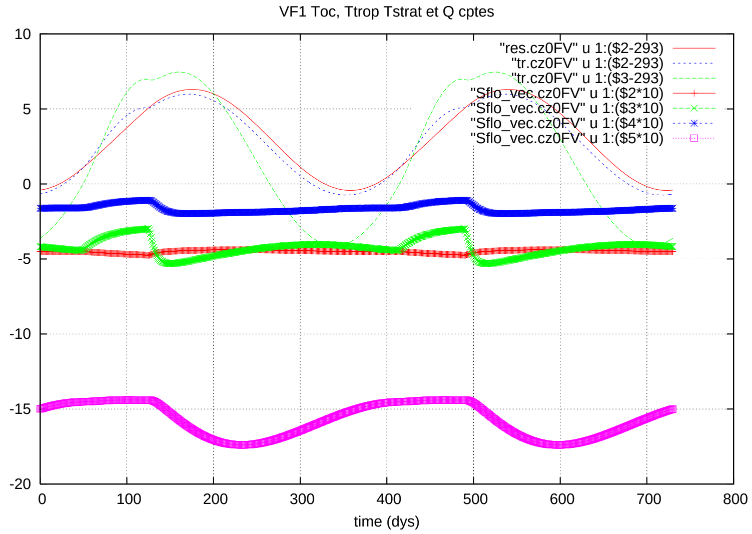

FIG. 47 – Deux cycles en température et premier vecteur de Floquet.

où on voit l'impact de ce phénomène sur le rebroussement des composantes. On constate que les quatre perturbations des C.I. ont même signe par contre, le deuxième

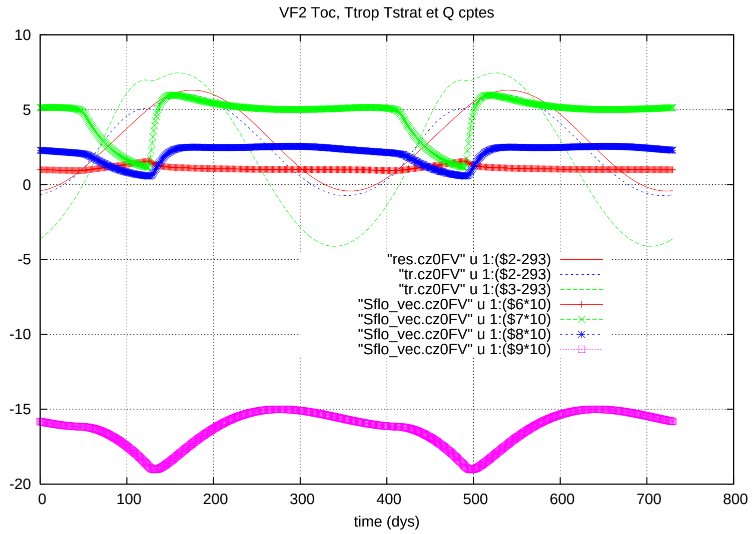

FIG. 48 – Deuxième vecteur de Floquet.

Floquet oppose le signe des trois températures et Q. On doit se baser là-dessus our l'interprètation, ce sera pour plus tard, après bloquage océan pour référence, et essai de bloquer le lent — annulation de la chaleur latente ?

On a pu constater qu'avec ce réglage, les vp et VF r et l 3 et 4 décrochaient numériquement plus loin que précédemment, ce qui a permi de les initialiser par capture à $t = 330$ jours. On constate que l3 VF3 est lisible assez loin : de même pour le quatrième

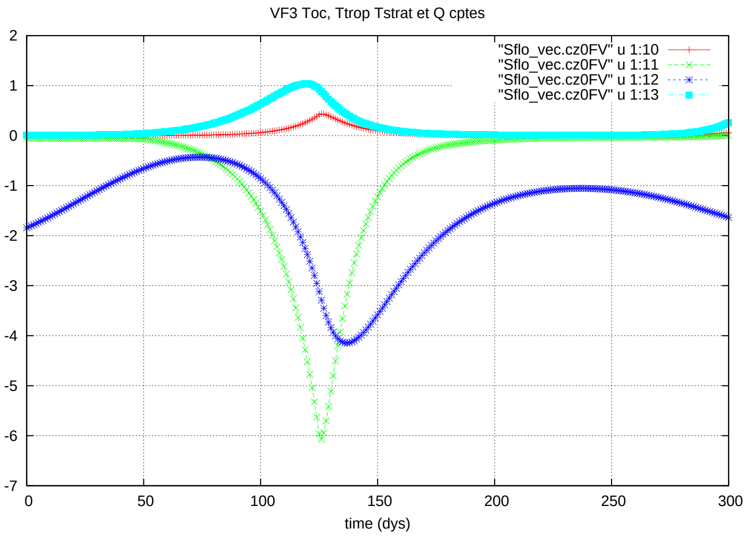

FIG. 49 – Troisième vecteur de Floquet.

Ce fort impact sur VF3, profitant de sa lisibilité miraculeuse — on ne l'obtenait pas avec

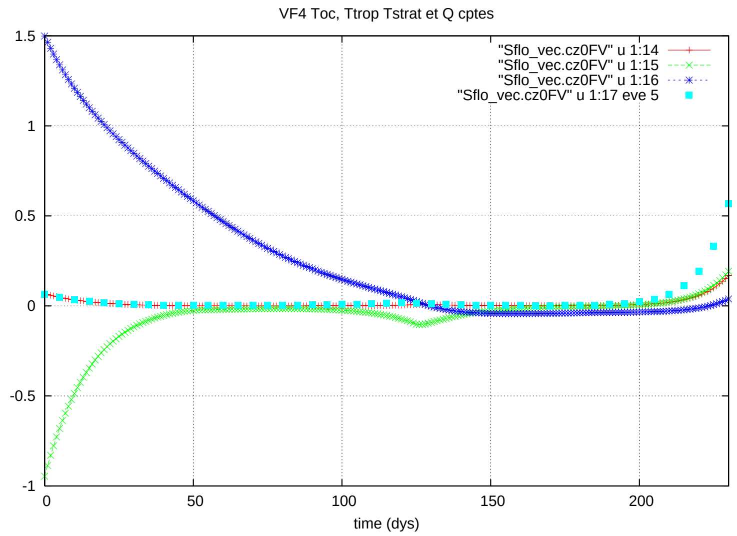

FIG. 50 – Quatrième vecteur de Floquet.

Pablo — mérite analyse ! Il semble s'agir d'un mode particulier à la température de strato.

Floquet gauche par adjoint Comme il faut passer manifestement à un calcul adjoint pour les VF inverses, on a stocké la aspha de tous les pas de temps, à relire à rebrousse-remps et à tranposer (options aspha_b pour écrire, aspha_read pour écrire).

Après quoi on avance l'adjoint en avant mais en adjoint ... hum, si vous me suivez. Et voilà la comparaison avec une inversion de Ψ^F par SVD.

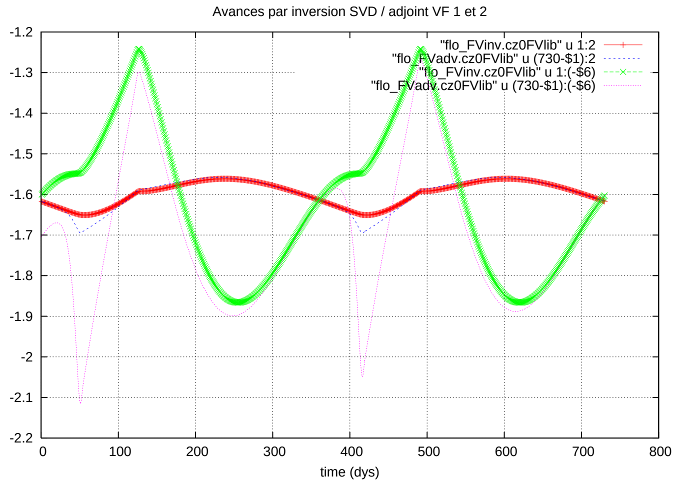

FIG. 51 – Comparaison de calculs de VF inverses.

Là, c'est assez proche et on peut soupçonner un faible impact sur les effets-en-retour.

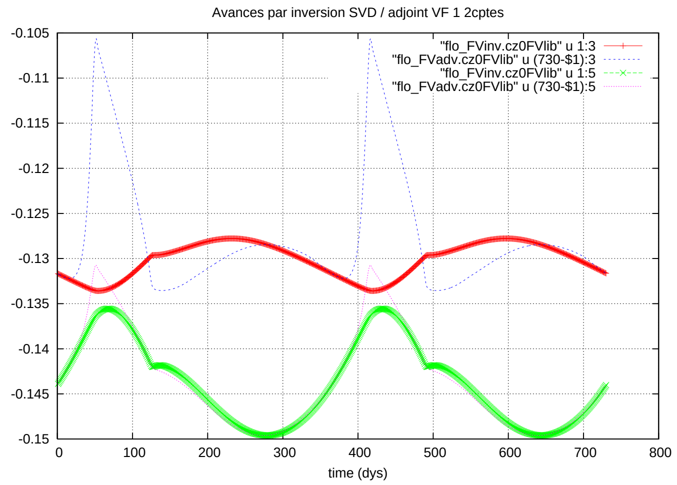

FIG. 52 – Comparaison de calculs de VF inverses.

Mais pour pour la T tropo VF1 et T oc VF2 de la Fig. 52 , c'est moins évident ! de même que pour la T stratro Fig 53 du deuxième VF inverse.

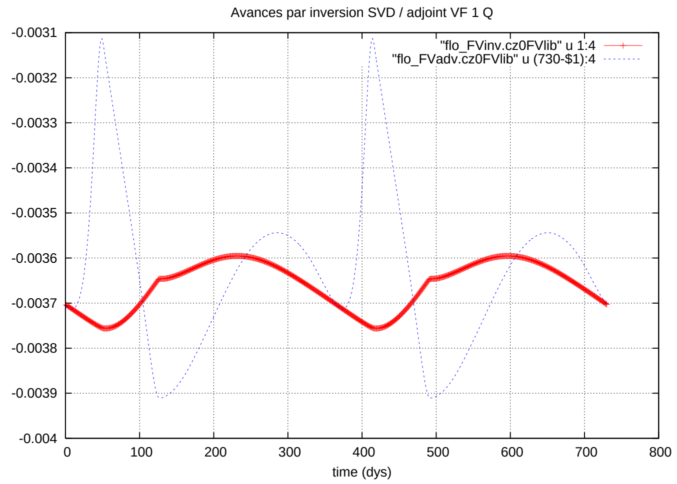

Fig. 53 – Comparaison de calculs de VF inverses.

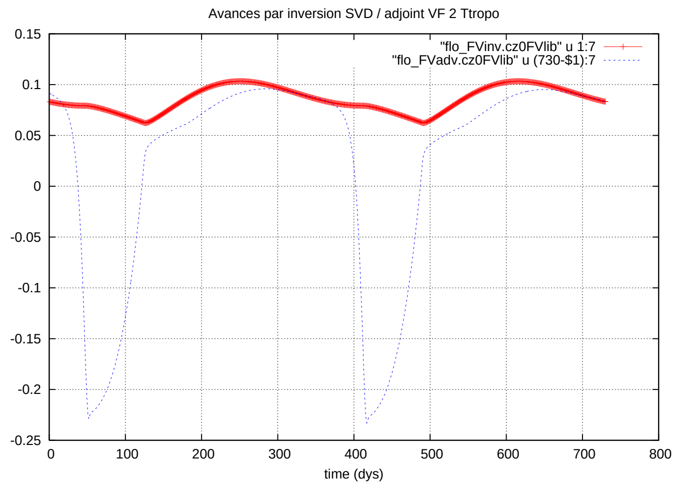

Fig. 54 – Comparaison de calculs de VF inverses.

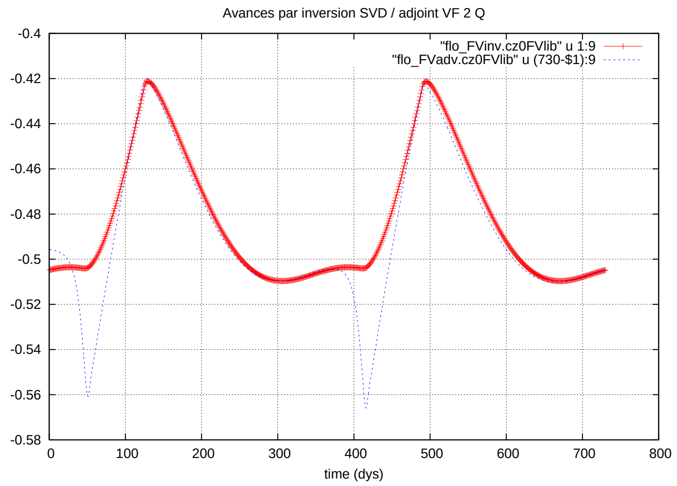

Fig. 55 – Comparaison de calculs de VF inverses.

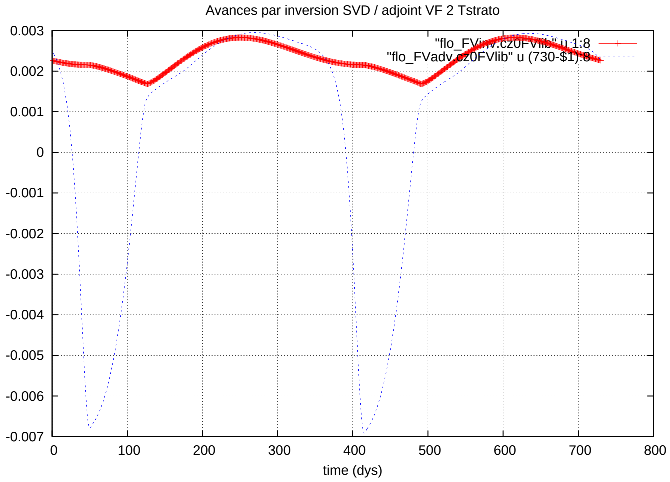

FIG. 56 – Comparaison de calculs de VF inverses.

Un autre essai pour voir l'impact d'une modulation Fourier à deux coefficients des VF 3 et 4, Fig. 57 :

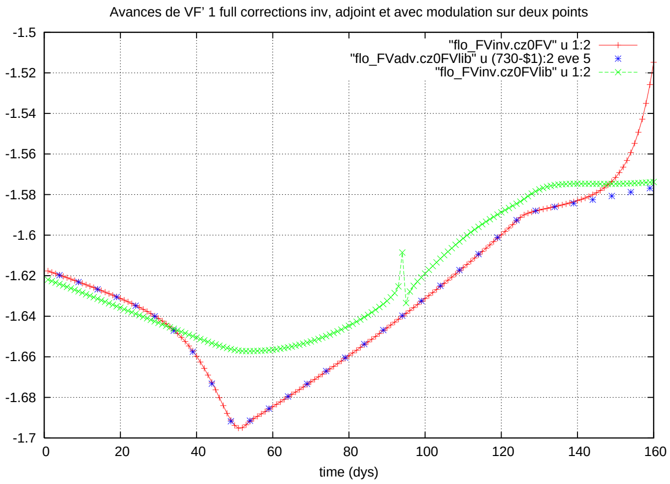

FIG. 57 – Comparaison de calculs de VF inverses ; rouge avec les quatre VF calculés et inversés, en bleu le calcul exact par adjoint, et en vert l'inversion SVD pour la modulation des VF 3 et 4.

La conclusion de tout ça, c'est qu'il semble difficile de trouver une alternative au calcul des premiet vecteurs Ψ^{-F} par l'adjoint. C'est triste (pour les algorithmes a faire) mais c'est classe et ça réhabilite l'adjoint qu'on a tenté de sous-classer — le fit par les sensibilités étant autrement efficace que les Minuit ou autres descentes via l'adjoint ...

Ce résultat interroge fortement l'ensemble des algorithmes compartant des termes à intégrer de type adjoint, comme on l'a vu pour Ψ^{-F} mais par prolongement pour la matrice de var-covar du filtre de Kalman. Ce qui serait élégant et donc pertinent serait d'imaginer un algorithme type consistant en calculs aller-retour des éléments en souffrance d'intégration. Faut-il lancer un concours à travers l'unsecte, ou encore plus large ?

des algorithmes aller-retour, donc On considère une fois de plus l'intégrale totale :

$$\overline{\sigma}(t) = \int_t^{t+T} \Phi(t+T,\tau)\,|b(\tau)> s(\tau)d\tau \tag{148}$$

. Par ses bornes d'intégration, on voit qu'elle est du type aller-retour, la variable courante t apparaissant de l'amont à l'aval. De même la décomposition de l'intégrale en $\int_t^{t+T} = \int_t^T + \int_T^{t+T}$ montre bien ces deux aspects amont-aval, en remarquant de plus qu'à la période T se manifestent des contraintes, on va le voir sur les Floquet.

De manière générale, le propagateur maille $\Phi(t+T,t)$ est de ce type et est déterminé par l'EDP :

$$\partial_t \Phi(t+T,t) = A\Phi(t+T,t) - \Phi(t+T,t)A \tag{149}$$

formée d'une avance et d'un terme retour. On peut aller chercher dans les articles de Vautard, Ghill et autres le fondamental de la nécessité de prendre en compte ce deuxième terme par l'adjoint du fait de la variété instable — ceci à expliciter dans ce contexte. Moui, sauf que je trouve riend de direct pour l'explication, sinon qu'ils disent que instable en direct correspond à stable en adjoint.

Le filtre de Kalman fait également apparaître cette dualité :

$$\partial_t P(t) \quad = (AP + PA^\dagger) + \text{sources} \tag{150}$$

mais la symétrie et positivité de la var-covar P permet a priori une intégration vers l'avant — tout en insistant sur les problèmes numériques rencontrés par Pat, en rapport peut-être avec cette dualité.

On en infère l'intérêt réitéré d'envisager une systématique de traitement de ce type de système, que l'on va explorer avec notre problème de détermination des Floquet à gauche.

$$\partial_t \overline{\sigma} = A\overline{\sigma} + [I - \Phi(t+T,t)]\,|b(t)> s(t) \tag{151}$$

avec les C.I. : $\overline{\sigma}(0) = \sigma(T)$.

Partons de la forme la plus élémentaire d'une IFC périodique

$$\partial_t \overline{\sigma_k}(t) = A\overline{\sigma_k}(t) + [1 - e^{\lambda_k T}]\,|\psi_k^F(t)> <\psi_k^{-F}(t)\,|\,b(t)> s(t) \tag{152}$$

Du point de vue algorithmique, après détermination des Z et Z^{-1} aller, on aurait retour :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t <\psi_k^{-F}|\,(t) & = - <\psi_k^{-F}|\,A + \lambda_k <\psi_k^{-F}| \\ \theta_k^i(t) & = <\psi_k^{-F}|\,b_i>(t) \end{array}\right. \tag{153}$$

pour déterminer $\theta_k^i(t)$ nécessaire pour l'intégration en avant de $\overline{\sigma}_k^i$.

Une intégration en avant :

$$\partial_t \xi_k^i(t) = \lambda_k \xi_k^i + \theta_k^i\ , \quad \xi_k^i(0) = 0\ ; \tag{154}$$

permet d'initialiser $\overline{\sigma}_k^i$, pour enfin avancer

$$\left\{\begin{array}{ccl} \partial_t\,|\psi_k^F>(t) & = & A\,|\psi_k^F> -\lambda_k\,|\psi_k^F>\ ; \quad |\psi_k^F>= \zeta_k \\ \partial_t \overline{\sigma}_k^i(t) & = & A\overline{\sigma}_k^i + (1 - e^{\lambda_k T})\theta_k^i\,|\psi_k^F> \\ \overline{\varrho}_k^i(t) & = & <c|\,\overline{\sigma}_k^i(t)\ ; \quad \overline{\sigma}_k^i(0) = \xi_k^i(T)\ . \end{array}\right. \tag{155}$$

Ainsi en réalité, on n'a besoin de l'adjoint que pour déterminer des vecteurs à gauche de Floquet, rien n'empêche de calculer en avant θ_k^i.

6.10 Composantes Inclusives de rétroaction

Pour répondre à la question de JLD du 3 avril, on a d'une part, que la somme de tous les effets-en-retour reste égale à 1 ; les différents effets partagent les mêmes vecteurs et exposants de Floquet, dont les éléments vont être sélectionnés différentiellement par $< c_i \mid$ (une ligne de $\Psi^F(t)$), et par la contribution de $\Psi^{-F}(\tau) \mid b(\tau) >$. On aura ainsi des composantes dont les phases et les amplitudes diffèrent dans l'intra-saisonnier, autrement dit avec un découpage de la ΔT_{tot} variable : bref, on a une variation saisonnière de la contribution au total de chaque effet des rétroactions. Bien sùr, si c'est une perturbation de température qui est imposée, la somme est constante, mais si c'est perturbé par un forçage constant, que dire sans récupérer le $\mid b(t) >$ impactant les températures ?

un beau résultat amont La démonstration de (95) suggère une propriété générale du propagateur dans le cadre des hypothèses de Floquet :

$$\boxed{\begin{aligned}\int_0^{t+nT} \Phi(t+nT,\tau)d\tau = \ & e^{\Lambda nT} \int_0^t \Psi^F(t) e^{\Lambda(t-\tau)} \Psi^{-F}(\tau) d\tau \\ & + \int_t^{t+T} \Psi^F(t) \left[\frac{I - e^{\Lambda nT}}{I - e^{\Lambda T}} e^{\Lambda(t+T-\tau)}\right]_d \Psi^{-F}(\tau) d\tau\end{aligned}} \tag{156}$$

avec d'éventuels termes périodiques en facteur à droite dans l'intégrale. Il s'agit d'une identité remarquable, qui intervient dans l'analyse de rétroaction, et qui semble d'une grande richesse comparée à, par exemple, l'analyse de Lyapunov, puisqu'on a deux interventions de ΛnT, l'une portant sur l'amplification d'un terme intra-maille, l'autre sur une intégrale périodique en t.

La démonstration peut être effectuée sous cette forme globale, mais on va procéder par décomposition-recomposition de Schür pour le traitement des cas particuliers.

On écrit d'abord le propagateur sous sa forme de Floquet

$$\int_0^{t+nT} \Phi(t+nT,\tau)d\tau = \int_0^{t+nT} \Psi^F(t) e^{\Lambda(t+nT-\tau)} \Psi^{-F}(\tau) d\tau \tag{157}$$

puis, pour chaque composante (k) de Schür, on décompose les bornes de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\int_0^{t+nT} e^{\lambda_k(t+nT-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau = \\ e^{\lambda_k nT} \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau \\ + e^{\lambda_k(n-1)T} \int_t^{t+T} e^{\lambda_k(t+T-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau \\ + e^{\lambda_k(n-2)T} \int_{t+T}^{t+2T} e^{\lambda_k(t+2T-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau \\ + \quad \ldots \\ + e^{\lambda_k(n-n)T} \int_{t+(n-1)T}^{t+2T} e^{\lambda_k(t+nT-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau\end{aligned}$$

avec cette écriture, l'intégrale est périodique en t et on en facteur une somme géométrique, si bien que $(\lambda_k \neq 0)$:

$$\begin{aligned}\int_0^{t+nT} e^{\lambda_k(t+nT-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau \quad & = \\ e^{\lambda_k nT} \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau & \\ + \frac{1 - e^{\lambda_k nT}}{1 - e^{\lambda_k T}} \int_t^{t+T} e^{\lambda_k(t+T-\tau)} \mid \psi_k^F(t) >< \psi_k^{-F}(\tau) \mid d\tau &\end{aligned} \tag{158}$$

il suffit de recomposer pour obtenir (156). Pour un système pértiodique ($\lambda_0 = 0$) :

$$\begin{aligned}\int_0^{t+nT} \mid \psi_0^F(t) >< \psi_0^{-F}(\tau) \mid d\tau \quad &= \\ \int_0^{t} \mid \psi_0^F(t) >< \psi_0^{-F}(\tau) \mid d\tau \quad &+ \quad n\int_t^{t+T} \mid \psi_0^F(t) >< \psi_0^{-F}(\tau) \mid d\tau\end{aligned} \tag{159}$$

en faisant de plus remarquer que l'intégrale peut être également prise entre 0 et$T$, l'intégrande étant périodique. On conçoit comment les deux modes de calcul Floquet et Floquet_bis s'identifient alors dans ce cas particulier — comparer (159) et (88).

De ces résultats découlent les différents cas particuliers dont (95), puisqu'on peut étendre l'identité avec des facteurs supplémentaires périodiques en t ou τ, comme $< c(t) \mid$ et $\mid b(\tau) > s(\tau)$.

questions liminaires Pour bien assimiler ces résultats, faudra :

1. donner des indications de la valeur moyenne et de l'amplitude de ϱ^∞ ;
2. mieux, mettre ϱ^∞ sous la forme $\overline{\varrho} + \varrho_\pi(t)$, avec cette dernière fonction périodique de valeur moyenne nulle ;
3. la question subsidiaire étant de trouver une matrice A constante donnant la même valeur moyenne $\frac{g_i}{1-g}$;

A propos de valeur moyenne, il y a peu de choses à dire en général ce-crois-je, sinon que de remarquer la constance en t du facteur de $\Psi^F(t)e^{\Lambda t}$ dans

$$< c \mid \int_t^{t+T} \Psi^F(t) e^{\Lambda t} \left[\left[\frac{I - e^{\Lambda n T}}{I - e^{\Lambda T}} \right] \right]_d \Psi^{-F}(\tau) \mid b(\tau) > s(\tau) d\tau \tag{160}$$

lorsque $< c \mid = c^{ste}$, ce qui permet de calculer sur une période la valeur moyenne de ce produit :$\partial_t \overline{\Psi^F(t)\exp(\Lambda t)} = A\overline{\Psi^F(t)\exp(\Lambda t)}$. Quand à l'intégrale restante, prise sur un intégrande périodique, elle ne dépend pas de t et peut donc être calculée entre 0 et T. A voir donc.

conclusions provisoires On a élaboré deux outils d'analyse permettant d'une part, d'expliciter des effets moyens (mais globaux) sur champs, d'autre part d'atteindre la limite cyclique de l'effet-en-retour de chaque composante inclusive. Reste à combiner ces outils pour atteindre notre objectif dans le cas d'un système périodique maillé.

Un objectif plus ambitieux sera de montrer par quel transitoire un système peut atteindre son cycle limite (ou son équilibre asymptotique), autrement dit combiner l'analyse de Lyapunov et de Floquet ... S'il y a des idées, je suis preneur.

Il y a également l'analyse en bifurcations, suggérée par JLD[1], qui provoque me semble-t-il un retour vers l'analyse des modes neutres de Farell & Yoannou mainte fois évoquée dans ces cahiers.

[1] avril 2008