

# Conducteurs en équilibre électrostatique, Condensateurs

A. Spiga, Interrogation MP\*, Lycée Condorcet

## Charge "induite" dans un conducteur par une charge ponctuelle extérieure (d'après écrit X)

Un matériau conducteur semi-infini est limité par sa surface libre que l'on prendra comme plan  $xOy$ . Sur l'axe  $Oz$  perpendiculaire à cette surface et orienté vers l'intérieur du conducteur, on place à l'extérieur du conducteur une charge ponctuelle  $q$  positive en  $A$  à la distance  $h$  de la surface libre. On suppose que le matériau est un conducteur parfait.

### 1

Etudier à l'équilibre le champ à l'intérieur du conducteur. Où sont nécessairement situées les charges électriques apparaissant sous l'influence de la charge  $q$ ? Etudier également le champ  $\vec{E}(M)$  dans le vide à l'extérieur du conducteur, au voisinage immédiat d'un point  $M$  de la surface, en le liant à la densité surfacique de charge  $\sigma(M)$  sur le conducteur.

### 2

On admettra que dans le demi-espace vide ( $z < 0$ ) le champ électrique et son potentiel, créés par la charge  $q$  en  $A$  et le conducteur, sont identiques à ceux qui seraient donnés, en l'absence de milieu conducteur, par la même charge  $q$  en  $A$  et une charge  $-q$  placée au point image  $A'$ , symétrique de  $A$  par rapport au plan  $xOy$ .

(a) Vérifier que  $(xOy)$  est pour le système des deux charges une surface équipotentielle. Donner la valeur de ce potentiel.

(b) En déduire le champ électrique  $\vec{E}(M)$  au voisinage d'un point  $M$  de la surface du conducteur, situé à une distance  $r$  de l'origine  $O$ . Préciser direction et sens de  $\vec{E}(M)$ .

(c) Déterminer la densité surfacique de charge  $\sigma(r)$ . Montrer que l'on a l'inégalité simple :

$$\left| \frac{\partial \sigma}{\partial r} \right| \leq \frac{3}{2} \frac{|\sigma|}{h}$$

### 3

Calculer la charge totale portée par la surface du conducteur, puis calculer la force exercée par le conducteur sur la charge  $q$  placée en  $A$ .

## Condensateur tronconique

Un condensateur est formé d'une électrode tronconique et d'une électrode plane. Le sommet du cône est sur le plan. Soit  $a + b$  la longueur du segment initiateur du cône de révolution (celui-ci est tronqué, et  $b$  est la longueur du segment initiateur de l'électrode tronconique). L'angle d'ouverture du cône est  $\alpha$ . L'électrode tronconique est au potentiel  $V = U$  et l'électrode plane est à la masse  $V = 0$ .

### 1

Déterminer le champ et le potentiel ainsi que la distribution des charges des armatures. On se placera dans une zone où les effets de bord n'interviennent pas.

2

Calculer la capacité du condensateur ainsi formé.

## Conducteur cylindrique

Dans un conducteur cylindrique, la conductivité passe progressivement de  $\gamma_1$  à  $\gamma_2$  à la traversée d'une couche limite suivant une loi  $\gamma(x)$ . Le conducteur est parcouru par un courant continu de densité  $\vec{j}$ .

1

Montrer qu'il apparaît dans la couche limite une densité de charges  $\rho(x)$ . L'exprimer.

2

L'épaisseur de transition étant petite, on modélise la couche limite par une densité superficielle de charges  $\sigma$ . Calculer  $\sigma$ .

3

On donne :

$$\gamma(x) = \gamma_0 + \gamma_1 \tanh\left(\frac{x}{a}\right)$$

Représenter  $\gamma(x)$  et  $\rho(x)$ .

## Résistance

Un fil fin est parallèle à un plan. Tous deux sont bons conducteurs et le milieu intermédiaire est faiblement conducteur. Quelle est la résistance entre électrodes, par unité de longueur ? Remarque : on considérera que le fil est cylindrique de rayon de base  $r$ .