

# Thermodynamique de l'atmosphère

## 1 Introduction

### Notion de parcelle d'air

L'atmosphère est composée d'un ensemble de molécules. Pour la description de la plupart des phénomènes étudiés, le suivi des comportements individuels des molécules est impossible, et on s'intéressera aux effets de comportement d'ensemble ou moyen.

On définit pour cela des *parcelles* d'air. Ces parcelles auront une dimension suffisamment grande pour contenir un grand nombre de molécules et pouvoir moyenner leur comportement. La dimension sera en revanche petite par rapport au phénomène considéré, on pourra donc considérer que les variables macroscopiques d'intérêt (température, vitesse...) sont quasiment constantes à l'échelle de la parcelle. La taille des parcelles peut aller de quelques cm à 100 km suivant les applications.

Les échanges moléculaires avec l'extérieur d'une parcelle sont en général très faibles ; on pourra donc suivre une parcelle qui conservera certaines propriétés. En particulier, la température et la masse volumique d'une parcelle peuvent être différentes de celles de l'air environnant (pas d'équilibre thermique). Par contre, la pression à l'intérieur d'une parcelle s'ajuste très rapidement à celle de l'environnement (équilibre dynamique).

Les limites d'une parcelle sont arbitraires, mais ne correspondent en général pas à des barrières physiques. On cherchera donc en général à ne pas exprimer de lois sous des formes qui dépendraient des dimensions de la parcelle. Une façon d'y parvenir est d'utiliser des grandeurs volumiques ou massiques.

## 2 Gaz parfaits

On appelle gaz parfait un gaz suffisamment dilué pour que les interactions entre les molécules du gaz soient négligeables. La relation entre pression, volume et température d'un gaz parfait s'écrit :

$$pV = nR^*T$$

où  $n$  est le nombre de moles du gaz et  $R^* = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  la constante universelle des gaz parfaits<sup>1</sup>.

---

1. On utilisera dans ce chapitre la notation  $X^*$  pour toutes les grandeurs molaires, et  $X$  pour les grandeurs massiques

L'atmosphère est un mélange homogène (sur les premiers 100 km) de différents gaz. Pour un certain volume  $V$  à la température  $T$ , on peut écrire pour chaque gaz  $i$  :

$$p_i V = n_i R^* T$$

avec  $p_i$  la pression partielle du gaz et  $n_i$  son nombre de moles. En faisant la somme sur tous les gaz, on obtient

$$pV = \Sigma(n_i)R^*T$$

(on a utilisé la loi de Dalton  $p = \Sigma p_i$ ).

Par ailleurs, la masse totale contenue dans ce volume peut s'écrire  $m = \Sigma n_i M_i$  où  $M_i$  est la masse molaire du gaz  $i$ . En divisant l'équation précédente par  $m$ , on obtient :

$$\frac{p}{\rho} = \frac{\Sigma n_i}{\Sigma n_i M_i} R^* T$$

On pose  $M = \frac{\Sigma n_i M_i}{\Sigma n_i}$  la masse molaire de l'air, et  $R = R^*/M$  (*constante de l'air sec*,  $R = 287 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ ). On a alors l'équation des gaz parfaits pour l'atmosphère :

$$\frac{p}{\rho} = RT \quad (1)$$

## 3 Équilibre hydrostatique

### 3.1 Bilan des forces

On appelle équilibre hydrostatique l'équilibre des forces s'exerçant sur une parcelle sur la verticale. On considère une parcelle d'air à une altitude  $z$ , d'épaisseur  $\delta z$  et de section  $\delta S$ . Les forces s'exerçant sur la parcelle sont :

- Son poids  $-mg$
- Les forces de pression  $p(z)\delta S - p(z + \delta z)\delta S \simeq -\frac{\partial p}{\partial z}\delta z\delta S$
- Les forces de viscosité sont négligeables.

Après division par la masse de la parcelle  $m = \rho\delta z\delta S$ , l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2)$$

Au repos, l'accélération est nulle et on obtient alors la relation de l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (3)$$

Cet équilibre est très bien vérifié aux échelles d'intérêt en météorologie. Interprétation : *la différence de pression entre deux niveaux verticaux est proportionnelle à la masse d'air (par unité de surface) entre ces niveaux.*

### 3.2 Atmosphère isotherme

En utilisant l'équation (1), l'équilibre hydrostatique (3) s'écrit

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g \frac{p}{RT} \quad (4)$$

On peut intégrer cette équation si on connaît  $T$  en fonction de  $p$  ou  $z$ . On peut alors séparer les variables :

$$RT \frac{dp}{p} = -g dz$$

Dans le cas simple où la température  $T$  est constante – ou varie peu –, on obtient

$$p = p_0 e^{-gz/RT}$$

Où  $p_0$  est la pression à  $z = 0$ . La quantité  $H = RT/g$  est homogène à une longueur appelée *hauteur d'échelle*. Elle vaut environ 7 km dans la troposphère.

### 3.3 Atmosphère à gradient constant

Pour déterminer les variations verticales de pression de manière un peu plus précise, on peut faire l'hypothèse d'un gradient vertical de  $T$  constant :

$$T = T_0 + \gamma z$$

L'équation (4) s'écrit alors :

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{R(T_0 + \gamma z)}$$

En intégrant entre le niveau de la mer ( $z = 0, p = p_0$ ) et ( $z, p$ ), on obtient :

$$\ln\left(\frac{p_0}{p}\right) = \frac{g}{R\gamma} \ln\left(\frac{T_0 + \gamma z}{T_0}\right)$$
$$p = p_0 \cdot \left(1 + \frac{\gamma z}{T_0}\right)^{-\frac{g}{R\gamma}} = p_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-\frac{g}{R\gamma}} \quad (5)$$

On peut vérifier que cette valeur de  $p$  se réduit à celle de l'atmosphère isotherme quand  $\gamma$  tend vers 0.

L'équation (5) s'applique par exemple dans le cadre de l'*atmosphère standard*, définie par  $T_0 = 15^\circ\text{C}$ ,  $p_0 = 1013,25 \text{ hPa}$ , et  $\gamma = -6,5^\circ\text{C}\cdot\text{km}^{-1}$  jusqu'à 11 km, puis  $\gamma = 0$ . Cette approximation est utilisée dans les altimètres des avions de ligne, pour convertir  $p$  mesurée en  $z$ . A plus basse altitude, on utilise plutôt une valeur de  $p_0$  variable (observée ou calibrée), mais toujours la valeur standard de  $\gamma$ .

Une deuxième application est le calcul de la pression rapportée au niveau de la mer ( $z = 0$ ). On utilise la pression et la température mesurées à une station (en général située à  $z > 0$ ) et une valeur de  $\gamma$  mesurée ou standard.

### 3.4 Équation hypsométrique

Dans le cas général, on connaît plutôt  $T$  en fonction de  $p$ , les deux valeurs pouvant être mesurées simultanément. En intégrant l'équation (4) entre deux niveaux  $a$  et  $b$ , on obtient alors :

$$R \int_a^b T \, d \ln p = - \int_a^b g \, dz$$

Les variations de  $g$  avec  $z$  sont très faibles. On définit la température moyenne entre  $a$  et  $b$  :

$$\langle T \rangle = \frac{\int_a^b T \, d \ln p}{\int_a^b d \ln p}$$

On a alors

$$R \langle T \rangle \int_a^b d \ln p = -g \int_a^b dz$$

soit :

$$g(z_a - z_b) = R \langle T \rangle \ln \left( \frac{p_b}{p_a} \right) \quad (6)$$

Cette relation est appelée *équation hypsométrique* (du grec « hypso » pour « hauteur »).

## 4 Premier principe

### 4.1 Énergie interne

Un système thermodynamique possède, en plus de son énergie d'ensemble (cinétique, potentielle), une *énergie interne*  $U$ . Le premier principe de la thermodynamique énonce que les variations d'énergie interne sont égales à la somme du travail et de la chaleur reçus :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

Dans le cas d'un gaz parfait, l'énergie potentielle d'interaction des molécules du gaz est négligeable, et l'énergie interne est égale à l'énergie cinétique des molécules, qui dépend seulement de la température. On peut montrer que

$$U = n \cdot \frac{\nu R^* T}{2}$$

où  $\nu$  est le nombre de degrés de liberté des molécules. Pour un gaz (principalement) diatomique comme l'air,  $\nu = 5$  (3 degrés de translation et 2 de rotation). Dans le cas de variations quasi-statiques d'un gaz, le travail s'écrit  $\delta W = -p \, dV$ , où  $p$  est la pression du gaz.

On définit la *chaleur molaire* à volume constant  $C_v^*$  comme la quantité de chaleur à apporter pour chauffer le gaz au cours d'une transformation à volume constant (isochore) :

$$C_v^* = \frac{1}{n} \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_v$$

D'autre part, pour une transformation isochore  $\delta W = 0$  donc  $dU = \delta Q$  et en remplaçant

$$C_v^* = \frac{1}{n} \left( \frac{dU}{dT} \right)$$

( $dU$  ne dépend que de  $dT$  dans tous les cas). On en déduit que pour une transformation quelconque

$$dU = nC_v^* dT \quad \text{et} \quad C_v^* = \frac{\nu R^*}{2}$$

## 4.2 Enthalpie

Pour l'étude de l'atmosphère il est plus simple de s'intéresser à des transformations à pression plutôt qu'à volume constant. On utilise donc l'*enthalpie*  $H = U + pV$ . On a

$$dH = dU + d(pV) = V dp + \delta Q$$

Pour une transformation à pression constante (isobare) on a  $dH = \delta Q$ , avec  $\delta Q$  donnée par la chaleur molaire à pression constante

$$C_p^* = \frac{1}{n} \left( \frac{\delta Q}{\delta T} \right)_p$$

D'autre part, en utilisant  $d(pV) = nR^* dT$  (relation des gaz parfaits), on obtient

$$dH = nC_v^* dT + nR^* dT$$

pour une transformation quelconque. On en déduit que  $dH = nC_p^* dT$  avec la relation de Mayer :

$$C_p^* = C_v^* + R^* = \frac{(\nu + 2)R^*}{2}$$

## 4.3 Transformations dans l'atmosphère

Les résultats précédents ont montré que

$$dH = nC_p^* dT = V dp + \delta Q$$

pour une transformation quelconque d'une parcelle d'air. En divisant cette relation par la masse  $m$  de la parcelle, on obtient

$$dh = C_p dT = \frac{dp}{\rho} + \delta q$$

Avec  $h$ ,  $\delta q$  l'enthalpie et la chaleur reçue *massiques* et  $C_p = C_p^*/M$  la chaleur massique de l'air.  $C_p = 1004 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$  La version du premier principe utilisée sera donc :

$$C_p dT - \frac{dp}{\rho} = \delta q \quad (7)$$

## 5 Transformations adiabatiques

Les échanges de chaleur d'une parcelle d'air avec son environnement peuvent s'effectuer par :

- Transfert radiatif : l'atmosphère se refroidit en émettant dans l'infrarouge. Ces échanges sont faibles et peuvent être négligés sauf à l'échelle de la circulation générale<sup>2</sup>
- Condensation ou évaporation d'eau : a lieu uniquement quand l'air est à saturation.
- Les échanges par diffusion moléculaire sont négligeables sauf à quelques centimètres du sol.

On peut donc en général considérer que l'évolution de la parcelle est adiabatique, soit  $\delta q = 0$ .

### 5.1 Température potentielle

Avec  $\delta q = 0$ , l'équation (1) devient :

$$C_p dT - \frac{RT}{p} dp = 0$$

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} = 0$$

On note  $\kappa = R/C_p$ . On obtient en intégrant :  $T \cdot p^{-\kappa} = \text{cste}$ . On définit la *température potentielle*  $\theta$  par :

$$\theta = T \cdot \left( \frac{p}{p_0} \right)^{-\kappa} \quad (8)$$

où  $p_0$  est une pression de référence égale à 1000 hPa.  $\theta$  a donc la dimension d'une température (on l'exprime en Kelvin), et est conservée au cours de transformations adiabatiques.  $\theta$  est égale à la température d'une parcelle ramenée de façon adiabatique à une pression  $p_0$ .

---

2. Le refroidissement/réchauffement peut être localement élevé au sommet/à la base de nuages.

## 5.2 Profil vertical

Dans le cas où la parcelle est en équilibre hydrostatique, (7) devient avec (3)

$$C_p dT + g dz = \delta q$$

Si la parcelle a un déplacement vertical adiabatique, on a donc

$$\frac{dT}{dz} = \frac{-g}{C_p} = \Gamma_a \quad (9)$$

Ce qui donne un refroidissement de 10 °C par km d'élévation.  $\Gamma_a$  est le *gradient adiabatique* de température. On définit également l'*énergie statique*

$$e_s = C_p T + gz = \text{cste} \quad (10)$$

L'énergie statique est la somme de l'enthalpie et de l'énergie potentielle de gravitation par unité de masse, et est conservée pour des transformations adiabatiques<sup>3</sup> Les variations ou différences de  $e_s$  et  $\theta$  sont reliées par :

$$de_s = C_p T d \ln \theta$$

## 6 Air humide, air saturé

### 6.1 Mesure de la vapeur d'eau

Pour définir la quantité de vapeur d'eau présente dans une parcelle, on utilise soit la *pression partielle*  $e$ , soit le *rapport de mélange*

$$r = \frac{m_{\text{vapeur}}}{m_{\text{air sec}}}$$

L'ordre de grandeur de  $r$  est de 0 à 20·g/kg. Pr conséquent,  $e \ll p$  et  $r \ll 1$ , et on a

$$r \simeq \frac{M_{\text{vap}}}{M} \frac{e}{p} = 0,622 \frac{e}{p}$$

Le rapport de mélange est conservé si il n'y a pas de changement de phase.

---

3. L'énergie cinétique  $e_c$  est négligeable. Typiquement,  $\delta e_c = 50 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  (variation de  $10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et  $\delta e_s = 10\,000 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  (variation de 1000 m ou 10 °C)

## 6.2 Évaporation, Saturation

L'évaporation est l'échappement de molécules d'eau depuis une phase liquide vers une phase gazeuse. L'échappement est plus facile pour des molécules ayant une énergie cinétique importante, le taux d'évaporation à partir d'une surface dépend donc de la température de l'eau.

Le taux de condensation (gaz vers liquide) dépend lui de la pression de la phase gazeuse. Il existe une valeur de la pression partielle  $e_{\text{sat}}$  pour laquelle il y a équilibre : les taux d'évaporation et de condensation sont égaux. Si  $e < e_{\text{sat}}$ , l'évaporation domine et  $e$  augmente. Cet équilibre est défini pour une interface *plane* entre liquide et gaz. Les variations de  $e_{\text{sat}}$  avec la température sont données par la formule de Clausius-Clapeyron, qui s'écrit de façon approchée :

$$\frac{1}{e_{\text{sat}}} \frac{de_{\text{sat}}}{dT} = \frac{L}{R_{\text{vap}} T^2} \quad (11)$$

Avec  $R_{\text{vap}} = R^*/M_{\text{vap}}$  la constante des gaz pour la vapeur d'eau. La forme de  $e_{\text{sat}}$  est proche d'une exponentielle (variations de  $e_{\text{sat}}$  plus rapides que celles de  $L$  ou  $T$ ). Le *rapport de mélange saturant* est naturellement défini par  $r_{\text{sat}} \approx 0,622e_{\text{sat}}/p$ . L'influence de  $T$  sur  $r_{\text{sat}}$  domine celle de  $p$ .

Dans l'atmosphère, loin de la surface, il n'y a pas d'interface liquide/gaz permanente. Si  $e < e_{\text{sat}}$ , il n'y a ni condensation ni évaporation. Si  $e$  devient supérieure à  $e_{\text{sat}}$ , il y a condensation sous forme de gouttes d'eau liquide (qui se forment plus vite qu'elles ne s'évaporent). Ces gouttes s'évaporent dès que  $e < e_{\text{sat}}$ .

On peut définir plusieurs mesures de l'humidité de l'air qui prennent en compte le seuil  $r_{\text{sat}}$  :

- *humidité relative H.R.* =  $r/r_{\text{sat}}$  (exprimée en pourcentage).
- Température de rosée : la température à laquelle la condensation se produit suite à un refroidissement *isobare*.
- Niveau de condensation : l'altitude ou la pression à laquelle la condensation se produit suite à un refroidissement par *soulèvement adiabatique*.

## Ébullition

L'ébullition est un cas particulier : des bulles de gaz se forment à l'*intérieur* du liquide bouillant. Dans le cas de l'eau, ce gaz est donc de la vapeur d'eau. La pression dans ces bulles est égale à celle du liquide, soit à peu près la pression atmosphérique si le liquide est en contact avec l'air. Les bulles sont d'autre part stables si leur pression est supérieure à la pression saturante. L'ébullition se produit donc à une température  $T_b$  telle que

$$e_{\text{sat}}(T_b) = p_{\text{atm}}$$



### 6.3 Transformations pseudo-adiabatiques

La condensation de vapeur d'eau s'accompagne d'un dégagement de chaleur latente. L'approximation pseudo-adiabatique consiste à négliger la présence d'eau liquide ou vapeur, sauf pour calculer la chaleur échangée :

- La chaleur latente dégagée n'est pas utilisée pour chauffer les gouttes d'eau présentes.
- On considère une masse d'air sec constante et on néglige les pertes de masse par précipitation.

Si une masse de vapeur  $dm_v$  est condensée, on a  $\delta Q = L dm_v$  soit

$$\delta q = \frac{L dm_v}{m_a} = -L dr$$

(condensation :  $r$  diminue)

L'équation (7) devient :

$$C_p dT - \frac{dp}{\rho} + L dr = 0 \quad (12)$$

### 6.4 Profil vertical saturé

Pour une parcelle à saturation subissant des mouvements verticaux, (12) s'écrit aussi :

$$C_p dT + g dz + L dr = 0$$

A saturation,  $r = r_{\text{sat}}(T, p)$  et on peut écrire

$$dr_{\text{sat}} = \frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial T} dT + \frac{\partial r_{\text{sat}}}{\partial p} dp$$

Le deuxième terme est plus petit car les variations de  $r_{\text{sat}}$  avec  $T$  dominent. On a alors  $dr_{\text{sat}} \simeq (dr_{\text{sat}}/dT) \cdot dT$  et

$$\left( C_p + L \frac{dr_{\text{sat}}}{dT} \right) dT + g dz = 0$$

soit

$$\frac{dT}{dz_{\text{sat}}} = \frac{-g}{C_p + L \frac{dr_{\text{sat}}}{dT}} = \Gamma_s \quad (13)$$

Comme  $dr_{\text{sat}}/dT$  est positif, on a toujours  $dT/dz_{\text{sat}} > dT/dz_{\text{adiab}}$ .

Important : les profils verticaux adiabatique et saturé de température sont ceux suivis par une parcelle en déplacement, pas forcément ceux de l'atmosphère.

Comme pour le cas adiabatique, on peut aussi intégrer l'équation pour obtenir :

$$e_h = C_p T + gz + Lr = \text{cste} \quad (14)$$

La quantité  $e_h$  est appelée *énergie statique humide* et est conservée pour des mouvements adiabatiques ( $r$  et  $e_s$  sont séparément conservés) ou saturés (pseudo-adiabatiques).

## 7 Stabilité et instabilité verticale

### 7.1 Forces de flottabilité

Soit une parcelle de température  $T_p$  dans un environnement à la température  $T_e$ . Suivant l'équation (2), la somme des forces massiques s'exerçant sur la parcelle suivant la verticale est :

$$F_z = -g - \frac{1}{\rho_p} \frac{\partial p}{\partial z}$$

Où  $\rho_p$  est la masse volumique de la parcelle. L'environnement étant en équilibre hydrostatique, on a par ailleurs

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho_e g$$

avec  $\rho_e$  la masse volumique dans l'environnement. Finalement, la somme des forces vaut

$$F_z = g \left( \frac{\rho_e}{\rho_p} - 1 \right) = g \cdot \frac{\rho_e - \rho_p}{\rho_p}$$

ou, en utilisant  $\rho_p = p/RT_p$  et  $\rho_e = p/RT_e$ ,

$$F_z = g \cdot \frac{T_p - T_e}{T_e}$$

La résultante des forces est donc dirigée vers le haut si la parcelle est moins dense, ou plus chaude, que son environnement.

### 7.2 Stabilité

Une parcelle partant d'une altitude initiale  $z_0$  avec une température  $T_0$  suivra en se déplaçant verticalement un profil de température  $\Gamma_a$ , ou  $\Gamma_s$  si elle est saturée. L'environnement a lui un profil  $dT_e/dz = \Gamma_e$ .

Pour un déplacement  $\delta z$ , la température de la parcelle devient  $T_0 + \Gamma_a \delta z$ , dans un environnement à la température  $T_0 + \Gamma_e \delta z$  (en supposant que la parcelle était à la température de l'environnement à son altitude initiale). La résultante des forces est alors :

$$F_z = \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = g \frac{\Gamma_a - \Gamma_e}{T_e} \delta z \quad (15)$$

Dans le cas où  $\Gamma_a - \Gamma_e > 0$  (la température de l'environnement décroît de plus de 10 °C par km),  $F_z$  est du signe de  $\delta z$  et le déplacement vertical sera amplifié (exponentiellement). On est dans une situation *instable*. Q

Si  $\Gamma_a - \Gamma_e < 0$ , les forces de flottabilité s'opposent aux déplacements verticaux : on est dans une situation *stable*. Pour une parcelle déplacée verticalement, la solution de

l'équation (15) est une oscillation autour de sa position d'équilibre avec la pulsation  $N$  donnée par :

$$N^2 = g \frac{\Gamma_a - \Gamma_e}{T_e} \quad (16)$$

$N$  est appelée *fréquence de Brunt-Väisälä*. La stabilité est d'autant plus grande (et  $N$  élevée) que la température de l'environnement décroît lentement (ou même augmente : on parle alors d'*inversion*) avec l'altitude. On peut aussi exprimer  $N$  en fonction des températures potentielles à partir de l'équation (16), en utilisant que  $\theta_p$  est conservée au cours du déplacement :

$$N^2 = \frac{g}{\theta_e} \frac{\partial \theta_e}{\partial z} \quad (17)$$

La condition de stabilité ou instabilité devient alors que la température potentielle de l'environnement augmente ou diminue avec l'altitude. Si la parcelle est saturée, le gradient vertical saturé  $\Gamma_s$  remplace  $\Gamma_a$  dans la discussion précédente, et l'expression (17) n'est plus valable.