

Dynamique de la moyenne atmosphère et des ondes atmosphériques

Cours 4: Les ondes de gravité

A) Généralité sur les ondes en milieu lentement variable

B) Description Heuristique des ondes de gravité

C) Théorie des ondes de gravité (Approximation de Boussinesq)

- Relation de dispersion, milieu au repos, ondes d'Inertie Gravité
- Propagation dans un milieu en mouvement
- Interaction avec l'écoulement moyen (Th. de Eliassen et Palm)
- Densité d'Action, Flux d'Action et vitesse de groupe

● Généralités sur les ondes en milieu lentement variable

On considère un état de base quelconque variant dans l'espace et dans le temps. On considère que les perturbations par rapport à cet état de base peuvent s'écrire:

$$u'(\vec{x}, t) = \Re \{ \hat{u}(\vec{x}, t) \exp i\chi(\vec{x}, t) \},$$

où la phase $\chi(\vec{x}, t)$ est réelle. On définit alors le nombre d'onde local $\vec{k} = (k, l, m)$ et la fréquence locale ω par:

$$k = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad m = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

On considère alors que \hat{u}, \vec{k} , et ω varient beaucoup plus lentement dans l'espace et dans le temps que ne le fait la phase χ . Dans ce cadre, le physique du problème fait que l'on peut souvent écrire une Relation de Dispersion:

$$\omega = \Delta(\vec{k}, \vec{x}, t).$$

On définit alors la Vitesse de Groupe:

$$\vec{c}_g(\vec{k}, x, t) = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial k}, \frac{\partial \Delta}{\partial l}, \frac{\partial \Delta}{\partial m} \right).$$

Les variations temporelles des propriétés de l'onde pour un observateur se déplaçant à la vitesse de groupe sont mesurées par l'opérateur:

$$d_g = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \vec{\nabla}.$$

De ces définitions et relations on déduit un ensemble très important de relations, par exemple:

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \omega, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x}, \quad \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial x}, \quad \frac{\partial l}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial y}.$$

Mais surtout les équations dites de tracé des rayons:

$$d_g k = -\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \quad d_g l = -\frac{\partial \Delta}{\partial y}, \quad d_g m = -\frac{\partial \Delta}{\partial z}, \quad d_g \omega = +\frac{\partial \Delta}{\partial t}.$$

Où un rayon est la trajectoire d'un point se déplaçant à la vitesse de groupe:

$$d_g \vec{x} = \vec{c}_g.$$

Des études en général complexes permettent de montrer:

$$\langle \vec{F} \rangle = \vec{c}_g \langle A \rangle,$$

toujours dans le cadre lentement variable, et où $\langle . \rangle$ est une moyenne sur la phase χ .

● Description Heuristique:

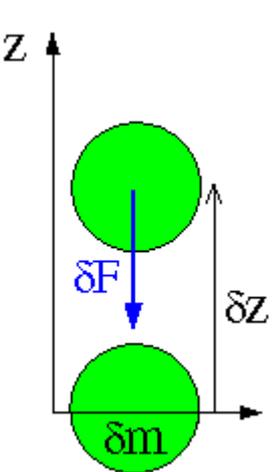
- Le mécanisme de rappel à l'origine des ondes de gravité est lié à la conservation de la Température Potentielle
- Pour un fluide incompressible (par ex.: approximation de Boussinesq) elle est équivalente à la conservation de la densité (ou de la T....)

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Méthode de la parcelle

(on néglige les variations de pression liées aux déplacements verticaux)



Densité du fluide au repos: $\rho_0(z)$
 Masse de la parcelle: $\delta m = \rho_0(z)\delta V = \text{const}$
 Déplacement vertical: δz , vitesse $w = \frac{D\delta z}{Dt}$
 Force d'Archimède:

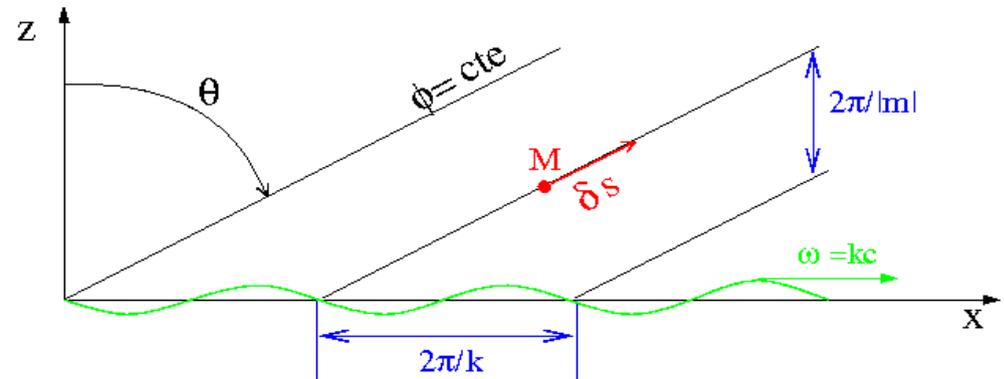
$$\begin{aligned} \delta F &= -g\delta V (\rho_0(z) - \rho_0(z + \delta z)) \\ &= \delta m \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \delta z \\ &= -\delta m N^2 \delta z \end{aligned}$$

Loi de Newton: $\delta m \frac{Dw}{Dt} = \delta F$

$$\frac{D^2 \delta z}{Dt^2} + N^2 \delta z = 0$$

Extension de la méthode de la parcelle

(les variations de pression sont effectivement négligeables le long des lignes de phase constantes)



Déplacement vertical: $\delta z = \cos \theta \delta s$

Force de rappel projetée sur s: $\delta F = -\delta m \cos^2 \theta N^2 \delta s$

Bilan acceleration force:

$$\frac{D^2 \delta s}{Dt^2} + N^2 \cos^2 \theta \delta s = 0$$

Relation de dispersion:

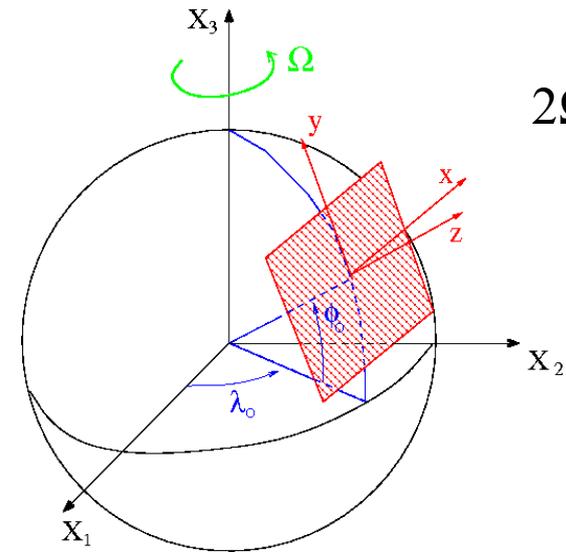
$$\omega = \pm N \cos \theta = \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}}$$

● Théorie des ondes de gravité

Approximation du plan tangent

$$x = a \cos(\lambda - \lambda_0), \quad y = a(\phi - \phi_0)$$

$$2\Omega \sin\phi \sim 2\Omega \sin\phi_0 = f = \text{cte}$$



$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} \approx \begin{cases} \frac{Du}{Dt} - fv \\ \frac{Dv}{Dt} + fu \\ \frac{Dw}{Dt} \end{cases}$$

Avec:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z^*}$$

et:

$$u = \frac{Dx}{Dt}, \quad v = \frac{Dy}{Dt}, \quad w = \frac{Dz^*}{Dt}$$

Approximation de Boussinesq

Forces de pression et gravité:

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p - g\vec{z} \approx -\frac{1}{\rho_r} \vec{\nabla} \tilde{p} - g \frac{\tilde{\rho}}{\rho_r} \approx -\frac{1}{\rho_r} \vec{\nabla} \tilde{p} + g \frac{\tilde{\theta}}{\theta_r}$$

On a séparé la pression et la densité (ou la T potentielle) en trois termes:

$$\rho = \rho_r + \rho_0(z) + \tilde{\rho}, \quad p = p_r(z) + p_0(z) + \tilde{p}, \quad \theta = \theta_r + \theta_0(z) + \tilde{\theta}$$

Dans ce formalisme, et en considérant le fluide incompressible, il vient:

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} + X \\ \frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} + Y \\ \frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial z^*} + g \frac{\tilde{\theta}}{\theta_r} + Z \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z^*} = 0 \\ \frac{D\tilde{\theta}}{Dt} + \frac{\theta_r}{g} N^2 w = Q \end{cases}$$

Ondes de gravité pures ($N^2 = \text{cte}$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $f = 0$)

Equations linéarisées:

$$\begin{aligned} \partial_t u' + \Phi'_x &= 0, & \partial_t v' + \Phi'_y &= 0, \\ \partial_t w' + \Phi'_z - b' &= 0, & u'_x + v'_y + w'_{z^*} &= 0 \\ \partial_t b' + N^2 w' &= 0 \end{aligned}$$

On cherche une solution de la forme:

$$u' = \Re \{ \hat{u} \exp i(kx + ly + mz^* - \omega t) \}$$

avec $k > 0$ par convention.

Cela donne les relations de polarizations:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{k}{\omega} \hat{\Phi}, & \hat{v} &= \frac{l}{\omega} \hat{\Phi}, \\ \hat{w} &= -\frac{m\omega}{N^2 - \omega^2} \hat{\Phi}, & \hat{b} &= i \frac{mN^2}{N^2 - \omega^2} \hat{\Phi}. \end{aligned}$$

Et la Relation de dispersion:

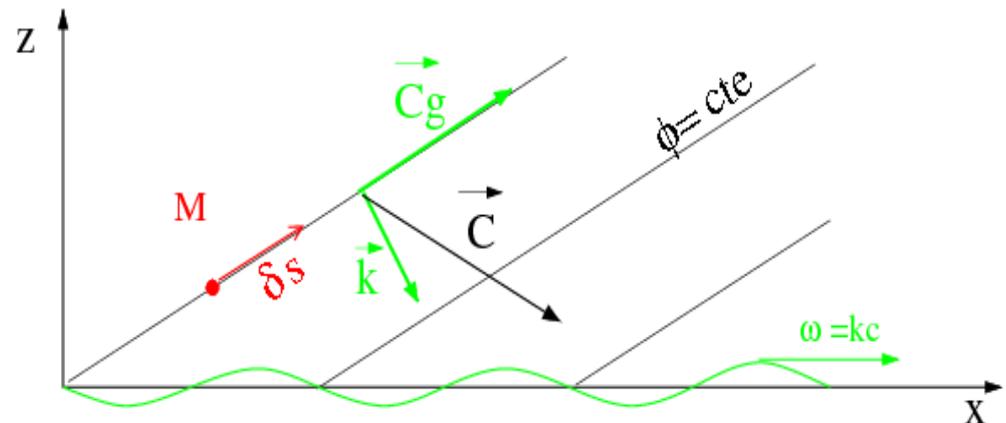
$$\omega = N \frac{(k^2 + l^2)^{1/2}}{(m^2 + k^2 + l^2)^{1/2}}.$$

Vitesse de phase et vitesse de groupe

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} \omega/k \\ \omega/l \\ \omega/m \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_g = \frac{\omega}{k^2 + l^2} \begin{pmatrix} m^2 k \\ m^2 l \\ -m(k^2 + l^2) \end{pmatrix}$$

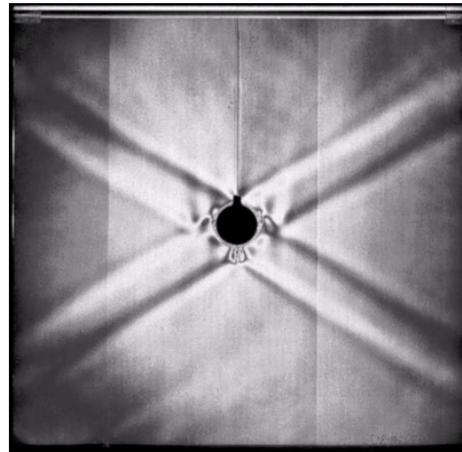
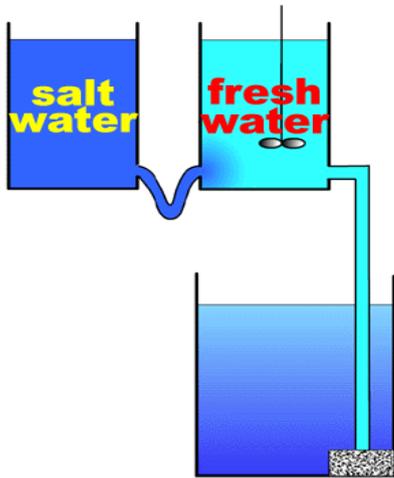
$m\omega < 0$ assure la propagation vers le haut

$\vec{C} \cdot \vec{k} = 0$, la vitesse de groupe est selon les lignes de phase

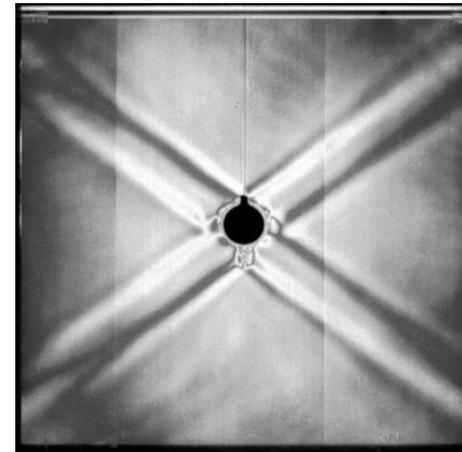


Ondes de gravité pures ($N^2 = \text{cte}$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $f = 0$)

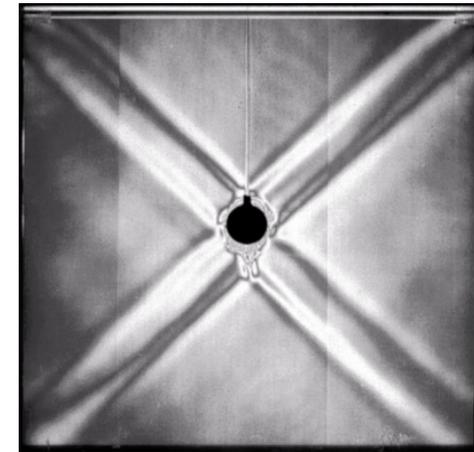
Expériences de Laboratoire (GFD on-line Sakai, Iizawa, Aramaki) $1/N \sim 4s$



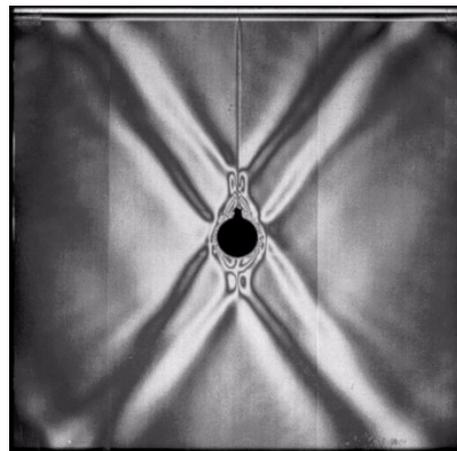
$1/\omega = 8s$



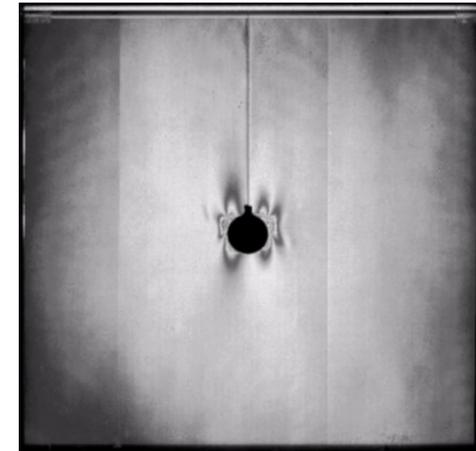
$1/\omega = 7s$



$1/\omega = 6s$



$1/\omega = 5s$



$1/\omega = 3.8s$

Ondes d'inertie gravité ($N^2 = \text{cte}$, $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $f = \text{cte}$)

Equations linéarisées:

$$\begin{aligned} \partial_t u' - f v' + \Phi'_x &= 0, & \partial_t v' + f u' + \Phi'_y &= 0, \\ \partial_t w' + \Phi'_{z^*} - b' &= 0, & u'_x + v'_y + w'_{z^*} &= 0 \\ \partial_t b' + N^2 w' &= 0 \end{aligned}$$

Relations de polarizations:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{k\omega + ilf}{\omega^2 - f^2} \hat{\Phi}, & \hat{v} &= \frac{l\omega - ikf}{\omega^2 - f^2} \hat{\Phi}, \\ \hat{w} &= -\frac{m\omega}{N^2 - \omega^2} \hat{\Phi}, & \hat{b} &= i \frac{mN^2}{N^2 - \omega^2} \hat{\Phi}. \end{aligned}$$

Et la Relation de dispersion:

$$\omega = \frac{(N^2 (k^2 + l^2) + f^2 m^2)^{1/2}}{(k^2 + l^2 + m^2)^{1/2}}.$$

Comme les forçages imposent souvent, ω , k et l on écrit aussi:

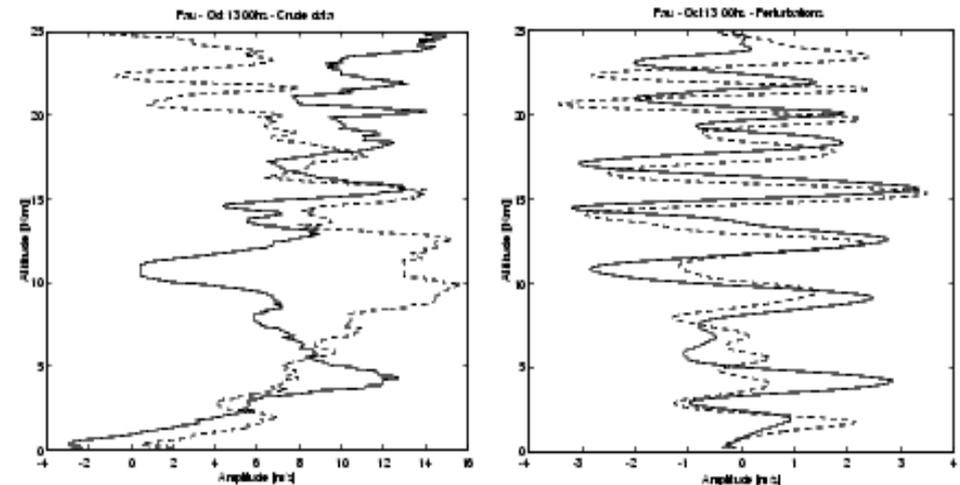
$$m^2 = \frac{N^2 - \omega^2}{\omega^2 - f^2} (k^2 + l^2),$$

seules les ondes dont la fréquence est comprise entre f et N se propagent verticalement.

Observation: RS haute résolution effectué à Pau le 13 Octobre 1990 (u continue, v pointillée)

Brutes

Filtrées



Relation de polarization entre \hat{u} et \hat{v} :

$$\hat{v} = \frac{l\omega - ikf}{k\omega + ilf} \hat{u}$$

Pour des ondes produites par ajustement géostrophique:

$$\omega \approx f \text{ donc } \hat{v} \approx -i\hat{u}$$

Dans l'espace physique à x et t données:

$$u' = \Re \{ \hat{u} e^{imz^*} \} = \|\hat{u}\| \cos(mz^* + \chi)$$

$$v' = \Re \{ -i\hat{u} e^{imz^*} \} = \|\hat{u}\| \sin(mz^* + \chi)$$

NB: $m < 0$ pour permettre la propagation vers le haut.

Ondes de gravité dans un milieu en mouvement (I)

$$(\theta_0(z) \neq 0, u_0(z) \neq 0, v_0(z) = 0, f = 0, 2D(x-z))$$

Séparation perturbation-écoulement de base

$$u = \bar{u}_0(z^*) + u' + O(\alpha^2), \tilde{\theta} = \theta' + O(\alpha^2)$$

Equations linéarisées (ordre 1 en α),

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) u' + \bar{u}_{0z^*} w' = -\partial_x \Phi' + X'$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) w' = -\partial_{z^*} \Phi' + b' + Z'$$

$$\partial_x u' + \partial_{z^*} w' = 0$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) b' + N^2 w' = J'$$

Re-formulation en fonction de courant et vorticité:

$$u' = \psi'_{z^*}, w' = -\psi'_x, \text{ et } \xi' = \Delta \psi'$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) \xi' - \bar{u}_{0z^*z^*} \psi'_x + b'_x = X'_{z^*} - Z'_x \times b'/N^2$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) b' - N^2 \psi'_x = J' \quad \times -\bar{u}_{0z^*z^*} b'/N^4$$

Donne la loi de conservation de l'action A :

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D.$$

Avec:

$$A = \frac{\xi' b'}{N^2} - \bar{u}_{0z^*z^*} \frac{b'^2}{2N^4},$$

$$F^x = \bar{u}_0 A + \frac{\psi'^2_{z^*}}{2} - \frac{\psi'^2_x}{2} + \frac{b'^2}{2N^2}, \quad F^{z^*} = -\psi'_{z^*} \psi'_x = u' w'$$

$$D = \frac{b'}{N^2} (X'_{z^*} - Z'_x) - \frac{\bar{u}_{0z^*z^*}}{N^4} b' J' + \frac{\xi' J'}{N^2}$$

- A est une quantité quadratique de signe définie, c'est le pseudo-moment

- L'énergie de l'onde ne satisfait pas une relation de ce type

$$E = \frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \frac{b'^2}{2N^2}$$

- F est le flux de pseudo-moment

- Pour une onde stationnaire non-dissipée

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0.$$

Ondes de gravité dans un milieu en mouvement (II)

Théorème de non-interaction (Eliassen et Palm), domaine périodique en x

On se demande à quelles conditions l'onde peut modifier l'écoulement moyen:

$$u = \bar{u}(z^*) + u', \quad \tilde{\theta} = \bar{\theta}(z^*) + \theta'$$

Définition de la moyenne:

$$\bar{u}(z^*, t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, z, t) dx$$

Remarque: $\bar{u}(z^*, t) = \bar{u}_0(z^*)$ si l'onde n'a pas d'effets.

Equations pour l'écoulement moyen, sans forçage moyen (ce forçage permet éventuellement de produire l'écoulement de base $\bar{u}_0(z^*)$):

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} &= -\partial_{z^*} (\overline{u'w'}) = -\partial_{z^*} \overline{F^{z^*}} \\ \partial_{z^*} \bar{w} &= 0 \quad \rightarrow \quad \bar{w} = 0 \\ \partial_t \bar{b} &= -\partial_{z^*} (\overline{b'w'}) \end{aligned}$$

Pour évaluer le flux de chaleur moyen, on note qu'il vaut:

$$\overline{b'w'} = -\partial_t \frac{\overline{b^2}}{2N^2} + \frac{\overline{J'b'}}{N}.$$

Il est nul pour une onde stationnaire adiabatique.

- Pour une onde stationnaire non-dissipée adiabatique et linéaire:

$$- \frac{\partial \overline{F^{z^*}}}{\partial z^*} = 0$$

- Il n'y a pas d'accélération moyenne
- C'est le théorème de non-interaction d'Eliassen et Palm
- Une telle onde ne transporte pas de chaleur.

Ondes de gravité dans un milieu en mouvement (III)

Densité d'Action, de Flux d'Action et vitesse de groupe en milieu lentement variable, lien avec la densité d'énergie de la perturbation.

Relation de Polarisation en WKB, pas de dissipations:

$$\hat{\xi} = -(k^2 + m^2) \hat{\psi} + O(\alpha'), \quad \hat{b} = -\frac{kN^2}{\hat{\omega}} \hat{\psi} + O(\alpha').$$

α' est un petit paramètre caractérisant l'approximation WKB. Par exemple: $\|\partial_t \hat{\psi}\| = \alpha' \|\omega \hat{\psi}\| \ll \|\omega \hat{\psi}\|$

$\hat{\omega}$ est la fréquence intrinsèque de l'onde:

$$\hat{\omega}(z^*) = \omega - k\bar{u}_0(z^*)$$

Relation de dispersion: $\hat{\omega}^2 = \frac{k^2 N^2}{m^2 + k^2}$

Action: $A = \frac{\xi' b'}{N^2} - \frac{\bar{u}_{0x^*} b'^2}{2N^4}$

en WKB le second terme est négligeable et il vient:

$$A = \frac{\hat{\xi} \hat{b} e^{2i\chi} + \hat{\xi}^* \hat{b}^* e^{-2i\chi} + \hat{\xi} \hat{b}^* + \hat{\xi}^* \hat{b}}{4N^2}.$$

Soit en moyenne sur la phase χ :

$$\langle A \rangle = \frac{\hat{\xi} \hat{b}^* + \hat{\xi}^* \hat{b}}{4N^2} = \frac{k(k^2 + m^2)}{2\hat{\omega}} \|\hat{\psi}\|^2.$$

De même, la composante verticale du flux d'action

$$\langle F^{z^*} \rangle = -\frac{mk}{2} \|\hat{\psi}\|^2 = -\frac{m\hat{\omega}}{(k^2 + m^2)} \langle A \rangle = C_g^{z^*} \langle A \rangle.$$

On peut aussi montrer que:

$$\langle A \rangle = \frac{k \langle E \rangle}{\hat{\omega}}$$

- La fréquence intrinsèque est la fréquence mesurée par un observateur se déplaçant à la vitesse $u_0(z)$
- C'est sur cette quantité que s'applique la relation de dispersion obtenue en milieu au repos
- $\langle A \rangle$ est une quantité >0 quadratique, elle caractérise l'amplitude de l'onde. C'est l'Action.
- On montre de la même manière:
 - $\langle F^x \rangle = C_g^x \langle A \rangle$
- $\langle F \rangle$ est le flux d'Action.

Ondes de gravité dans un milieu en mouvement (IV)

Retour sur le signe de $\langle F^{z*} \rangle$ et sur le signe de l'accélération induite lorsque l'onde est dissipée

Si $\langle \cdot \rangle$ est évalué comme une moyenne zonale $\bar{\cdot}$

$$\partial_t \bar{u} = -\partial_{z^*} \overline{u'w'} = -\partial_{z^*} \overline{F^{z*}}$$

Pour une onde monochromatique en k et ω la propagation vers le haut impose

$$\text{sign}(m) = -\text{sign}(\hat{\omega})$$

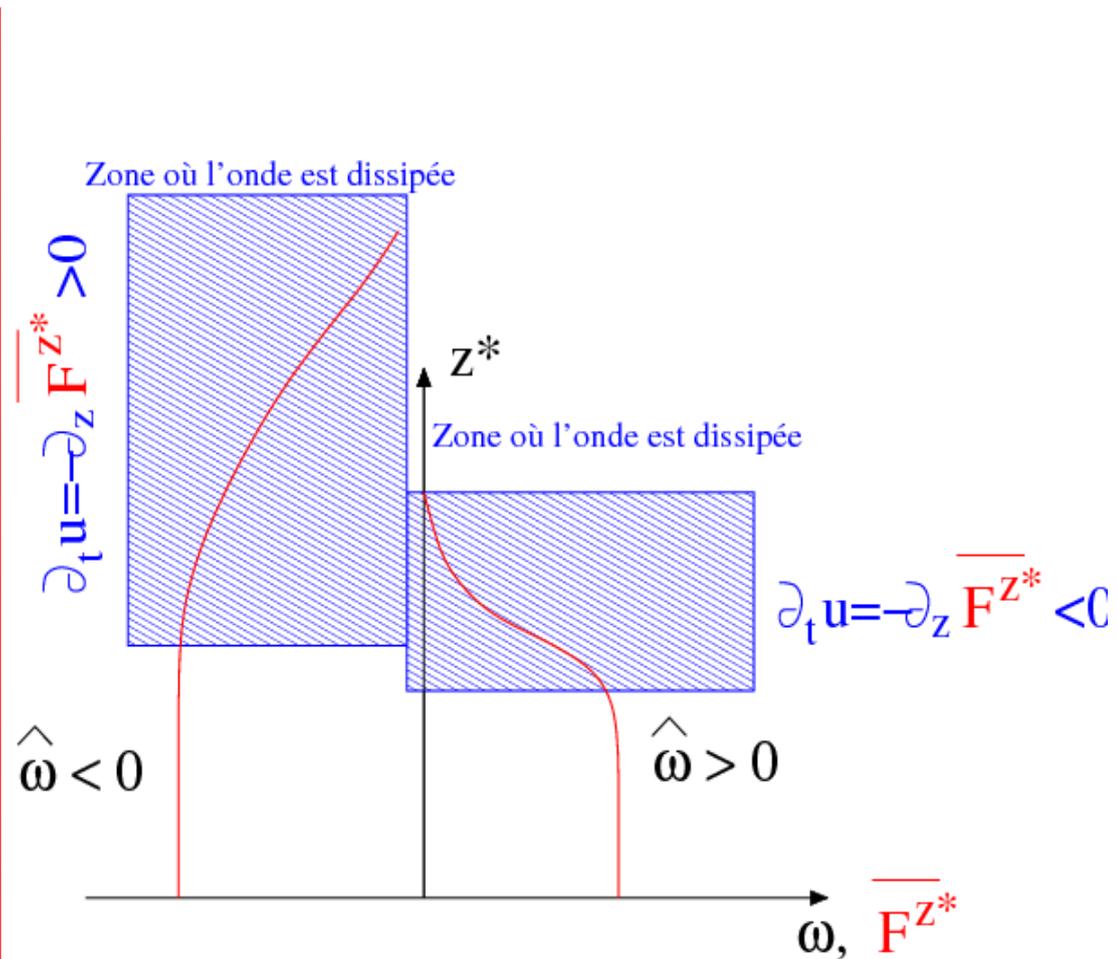
donc:

$$\overline{F^{z*}} = -\frac{mk}{2} \|\hat{\psi}\|^2 = \text{sign}(\hat{\omega}) \frac{\|m\|k}{2} \|\hat{\psi}\|^2$$

Les ondes se propageant vers l'Est ($\omega > 0$) freinent l'écoulement moyen lorsqu'elles déferlent.

Les ondes se propageant vers l'ouest ($\omega < 0$) accélèrent l'écoulement moyen lorsqu'elles déferlent.

Lorsque la fréquence intrinsèque $\hat{\omega}$ change de signe, $\overline{F^{z*}}$ s'annule dans la plupart des cas (il s'agit d'un niveau critique)



Les source d'ondes de gravité (I): les montagnes

Condition à la limite inférieure linéarisée:

$$w' = \vec{u}_0(0) \cdot \vec{\nabla} h$$

Comme la montagne est stationnaire, elle impose $\omega = 0$, c'est la présence d'un vent incident \vec{u}_0 qui permet la propagation vers le haut:

$$m^2 = \frac{N^2 - \hat{\omega}^2}{\hat{\omega}^2} (k^2 + l^2).$$

(ondes assez courtes donc on prend $f = 0$)

La fréquence intrinsèque:

$$\hat{\omega} = \omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_0(z) = -\vec{k} \cdot \vec{u}_0(z)$$

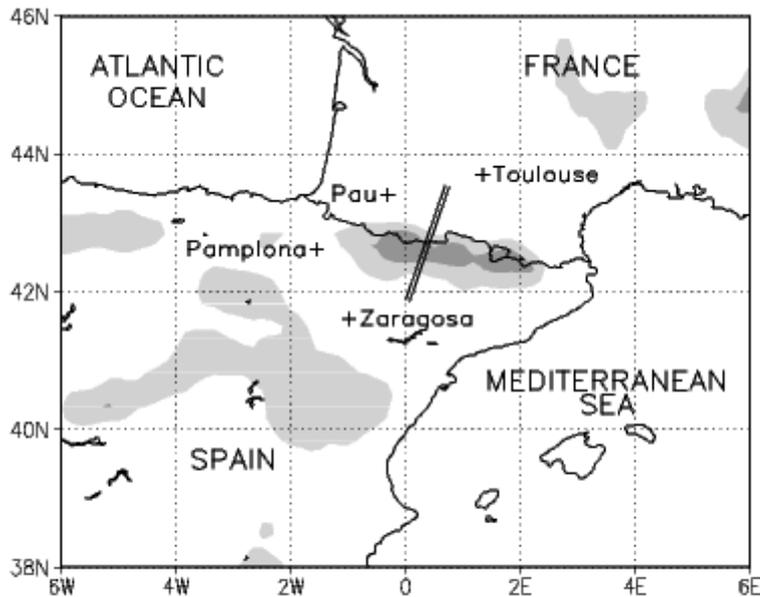


Figure 1: Smoothed terrain elevation and PYREX data used. + denotes the location of the high resolution soundings. The two thick lines indicate the airplane paths during the IOP 3. The light and dark shaded areas denote terrain elevation above 1000m and 1500m respectively.

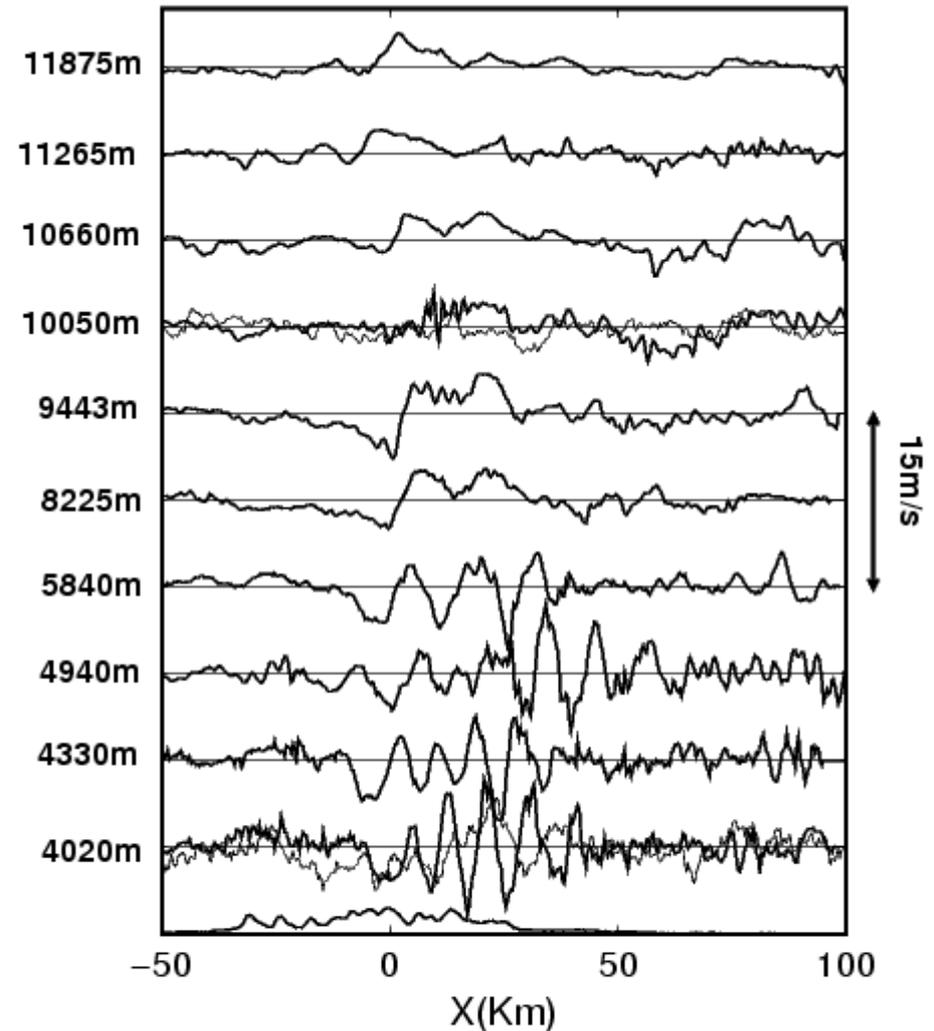


Figure 2: Observed vertical velocities from different Aircraft legs. 15 October 1990 around 6 UTC. Thick lower curve represent the Pyrénées, the thin curve at the Z=4km and Z=10km are red noises surrogate with characteristics adapted to the measured vertical velocity at that levels.

Les source d'ondes de gravité (II): la convection

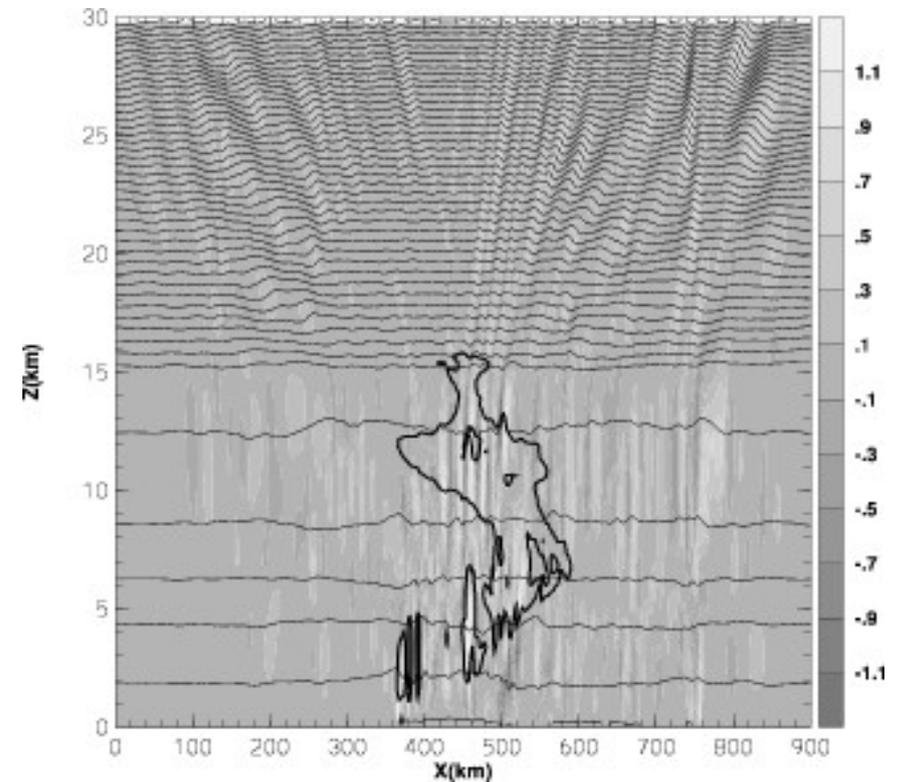
Un chauffage stationnaire dans l'espace mais d'amplitude fluctuant dans le temps:

$$Q(x, t) = f(x)g(t)$$

produit des ondes se propageant vers l'est et vers l'ouest.

Par exemple si $f = Q_0 \cos kx$ et $g = \cos \omega t$

$$Q = Q_0 \cos(kx - \omega t) + Q_0 \cos(kx + \omega t)$$



Simulation numérique des ondes de gravité produite par un nuage convectif (Alexander et Holton 1997)

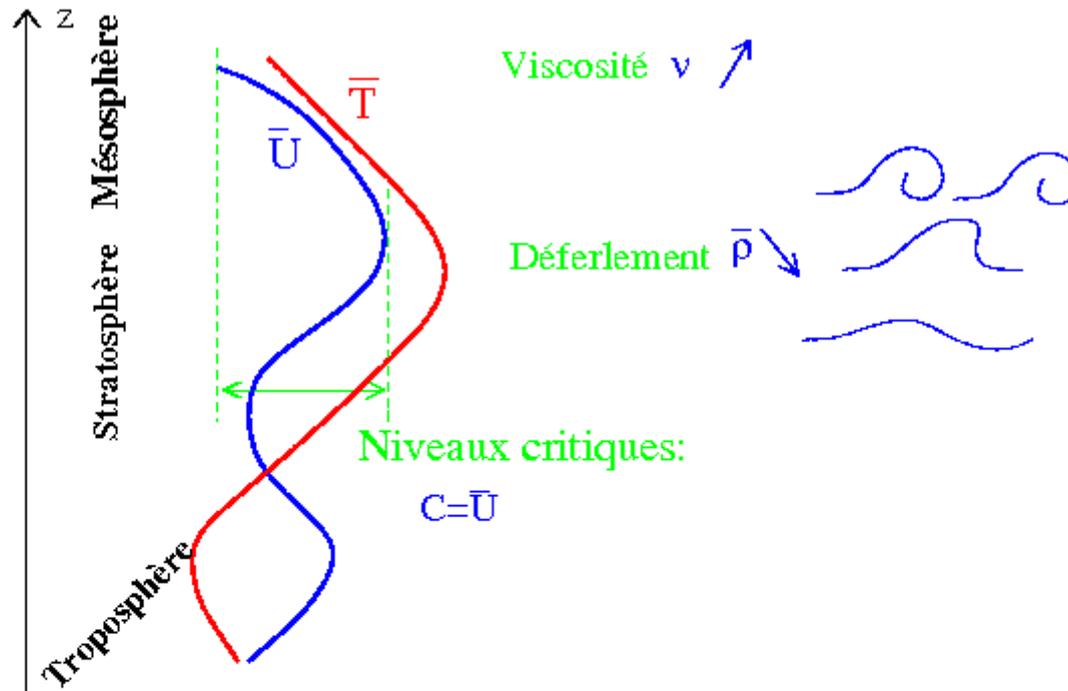
Mais aussi:

(III) l'ajustement géostrophique au sommet du jet troposphérique

(IV) les instabilités hydrodynamiques (Kelvin-Helmholtz par ex. mais c'est moins efficace)

Les source d'ondes de gravité. Résumé

→ Propagation et interaction avec l'écoulement de grande échelle



→ Sources:

