TDs du cours 1 de DMAOA, année 2006-2007

TD1: La fréquence de Brunt-Vaisala en coordonnées log-pression, z

1) Montrer que

$$\Phi_z = \frac{RT}{H}$$

2) Montrer que

$$N^2 = N_*^2 \frac{T^2}{T_m^2} = \Phi_{zz} + \frac{\kappa}{H}\Phi_z$$

TD2: Equations fondamentales en coordonnées isentropes

Dans beaucoup d'applications en dynamique de la moyenne atmosphère il est plus simple de prendre la température potentielle θ comme coordonnée verticale. Cela n'a de sens que si l'approximation hydrostatique est valable. Dans ce cadre la composante verticale du déplacement des particules fluides est

$$\dot{\theta} = \frac{D\theta}{Dt},$$

et le bilan d'énergie interne s'écrit simplement

$$\dot{\theta} = Q,$$

où Q est le chauffage diabatique. On se place dans le cadre de coordonnées cartésiennes (x, y, z^*) pour simplifier les calculs.

1) Donner l'expression pour la dérivée particulaire d'une quantité scalaire b dans ce cadre.

Indication: On rappelle qu'une quantité scalaire b peut se décrire sous forme Eulérienne $b = B(x, y, \theta, t)$ ou sous forme Lagrangienne: $b = \mathcal{B}(X, Y, \Theta, t)$ où X, Y, et Θ sont les positions initiales de la particule fluide. On passe de l'Eulérien au Lagrangien via le vecteur trajectoire $\vec{\phi}(X, Y, \Theta, t)$ satisfaisant par exemple:

$$\left(\frac{\partial \phi^x}{\partial t}\right)_{XY\Theta} = u = \frac{Dx}{Dt}.$$

Le dernier terme à droite est une notation un peu abusive mais efficace indiquant la variation de la position x de la particule fluide au cours du mouvement. Le passage de l'Eulérien au Lagrangien s'écrit:

$$b = B(x, y, \theta, t) = B(\vec{\phi}(X, Y, \Theta, t), t) = \mathcal{B}(X, Y, \Theta, t)$$

et la définition de la d érivée particulaire est:

$$\frac{Db}{Dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}\right)_{XY\Theta}$$

2) Exprimer la dérivée particulaire pour un écoulement adiabatique.

3) Montrer que les composantes horizontales des forces de pression en coordonnées isentropes sont de la forme:

$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{z^*} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

ou M est le potentiel de Montgomery:

$$M = C_p T + \Phi$$

4) Montrer que pour un élement de volume δV la masse est $\delta M = \sigma \delta x \delta y \delta \theta$, ou $\sigma = -p_\theta / g$. En déduire l'quation de conservation de la masse en fonction de σ.

5) En utilisant la relation hydrostatique $p_{z^*} = -\rho g$, montrer que::

$$M_\theta = C_p \left(p/p_s\right)^\kappa .$$

Solution:

En coordonnées isentropes, les équations du mouvement s'écrivent:

$$\begin{array}{l}
\tilde{D}u - \left(f + \frac{u\tan\phi}{a}\right)v + \frac{M_\lambda}{a\cos\phi} = X - Qu_\theta \\
\tilde{D}v + \left(f + \frac{u\tan\phi}{a}\right)u + \frac{M_\phi}{a} = Y - Qv_\theta \\
\sigma_t + \frac{1}{a\cos\phi}\left((\sigma u)_\lambda + (\sigma v\cos\phi)_\phi\right) = -(Q\sigma)_\theta \\
M_\theta = C_p(p/p_s)^\kappa \\
\sigma = -g^{-1}p_\theta
\end{array}$$

où:

$$\tilde{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\phi}$$