TD du cours 4 de DMAOA, année 2006-2007

Modification de l'écoulement moyen par une onde de gravité transitoire

On propose d'étudier la propagation d'une onde de gravité transitoire de longueur d'onde horizontale, λ_x=20km, et forcée en $z^* = 0$ par une vitesse verticale dont la structure est donnée par:

$$\mathrm{w}'(z^* = 0, x, t) = \Re\left\{W_0(t)e^{i(kx-\omega t)}\right\}, \tag{1}$$

où $W_0(t)$ est une fonction réelle variant lentement au cours du temps. On se place dans le cadre ou l'écoulement de base est tel que $\overline{u}_0 = 0$ et N^2 =cte. On se limite au cas bi-dimensionnel dans lequel les équations non-forcées de Boussinesq s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial x} \\ \frac{D\mathrm{W}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial\tilde{p}}{\partial z^*} + g\frac{\tilde{\theta}}{\theta_r} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial z^*} = 0 \\ \frac{D\tilde{\theta}}{Dt} + \frac{\theta_r}{g}N^2\mathrm{w} = 0. \end{cases} \tag{2}$$

On se place dans le cadre où le forçage W_0 est de petite amplitude.

1) Donner en fonction de u', w$'$, p' et θ' le système d'équations linéaires que doit satisfaire la perturbation induite par W_0.

2) Se ramener à une équation aux dérivées partielles en x, z^* et t pour la vitesse verticale w$'$

On cherche à présent une solution de la forme

$$\mathrm{w}'(w, z^*, t) = \Re\left\{\hat{W}(z^*, t)e^{i(kx+mz^*-\omega t)}\right\} \tag{3}$$

où m est une constante.

3) Donner l'équation que doit satisfaire $\hat{W}$.

4) Rappeler ce que signifie lentement variable dans le temps.

5) En supposant que l'onde varie aussi lentement dans la direction verticale, proposer une approximation à l'ordre le plus bas (ordre 0) de l'équation trouvée en 3). En déduire la valeur de m en fonction de k et ω.

6) A partir d'une approximation à l'ordre suivant (ordre 1) de l'équation trouvée en 3), montrer que l'enveloppe $\hat{W}$ satisfait une équation du type:

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{W} + C_{gz}\frac{\partial}{\partial z}\hat{W} = 0 \tag{4}$$

7) Faites le lien entre C_{gz} et la vitesse de groupe verticale dont la définition a été donnée dans le cours.

8) Montrer que l'équation (4) admet des solutions de la forme,

$$\hat{W} = G(z^* - C_{gz}z^*)$$

En déduire la valeur de m pour que l'onde se propage vers le haut. Déterminer G en fonction de W_0.

9) A quelle condition sur la pulsation du forçâge ω l'hypothèse lentement variable en z^* s'applique-t'elle bien?

10) Exprimer le flux vertical d'Eliassen et Palm $\overline{u'\mathrm{w}'}$ associé à cette onde. La moyenne est ici une moyenne horizontale évaluée sur une longueur d'onde horizontale λ_x de la perturbation.

11) Décrire l'évolution du vent moyen $\overline{u}$ au passage de cette onde.

12) Discuter ce résultat en relation avec le théorème de Eliassen et Palm donné dans le cours.