Déferlement des Ondes de gravité

On propose d'étudier la propagation verticale d'une onde de gravité monochromatique bidimensionnelle, dont la longueur d'onde horizontale et la période sont:

$$\lambda_x = 2\pi/k = 20\text{km}, \;\; 2\pi/\omega = 5.5\text{hr}.$$

On considère de plus que la vitesse verticale maximum induite par cette onde à un niveau de référence $z = 0$ est donnée par la constante w_r =1mm/s. On se place dans le cadre de l'approximation Hydrostatique, et on prend pour coordonnée verticale l'altitude log-pression:

$$z = H \log\left(p_r/p\right).$$

Dans cette expression, la hauteur de référence $H = 7$km et $p_r = 100$mb est une pression de référence à la tropopause. On considère aussi que la fréquence de Brunt-Vaisala est constante:

$$N^2 = \Phi_{0zz} + \frac{k}{H}\Phi_{0z} = \text{cte.}$$

1) Lorsque le vent moyen $\overline{u} = 0$, former une équation pour la perturbation de la vitesse verticale w' induite par w_r.

2) Chercher une solution de la forme:

$$w' = \Re\left\{\hat{w}(z)e^{i(kx-\omega t)}e^{z/2H}\right\}.$$

Montrer que deux solution sont possibles, mais en utilisant un argument sur la vitesse de groupe verticale, n'en retenez qu'une.

3) Calculer l'altitude de déferlement, Z_b.

4) Refaire **3)** lorsque $\overline{u} = 5$m/s et $\overline{u} = -5$m/s. Commenter par rapport au déferlement des ondes de gravité dans les jets aux moyennes latitudes. Discuter aussi l'importance de ce résultat pour l'oscilation quasi-biennale.

On considère à présent que le vent moyen $\overline{u} = \Gamma z$, où la constante $\Gamma = 5.10^{-4}\text{s}^{-1}$.

5) Donner l'aproxmation WKB de la vitesse verticale induite par l'onde.

6) Sans faire de calcul lourd, montrer qu'il existe une altitde critique en dessous de laquelle on est certain que l'onde de gravité déferle.

Equations bidimensionnelles:

$$\frac{Du}{Dt} + \Phi_x = 0\,, \quad \Phi_z = \frac{RT}{H}\,,$$

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{\kappa T}{H}w = Q\,, \quad u_x + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0$$

$$\text{où :} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Fonction de courant: $\rho_0 u = +\frac{\partial\psi}{\partial z}\;;\;\; \rho_0 w = -\frac{\partial\psi}{\partial x}$