

**TD1: La fréquence de Brunt-Vaisala en coordonnées log-pressure,  $z$**

1) Montrer que

$$\Phi_z = \frac{RT}{H}$$

2) Montrer que

$$N^2 = N_*^2 \frac{T^2}{T_m^2} = \Phi_{zz} + \frac{\kappa}{H} \Phi_z$$

**TD2: Equations fondamentales en coordonnées isentropes**

Dans beaucoup d'applications en dynamique de la moyenne atmosphère il est plus simple de prendre la température potentielle  $\theta$  comme coordonnée verticale. Cela n'a de sens que si l'approximation hydrostatique est valable. Dans ce cadre la composante verticale du déplacement des particules fluides est

$$\dot{\theta} = \frac{D\theta}{Dt},$$

et le bilan d'énergie interne s'écrit simplement

$$\dot{\theta} = Q,$$

où  $Q$  est le chauffage diabatique.

1) Donner l'expression pour la dérivée particulaire d'une quantité scalaire  $b$  en prenant  $\theta$  pour coordonnée verticale.

Indication: On rappelle qu'une quantité scalaire  $b$  peut se décrire sous forme Eulérienne  $b = B(x, y, \theta, t)$  ou sous forme Lagrangienne:  $b = \mathcal{B}(X, Y, \Theta, t)$  où  $X, Y$ , et  $\Theta$  sont les positions initiales de la particule fluide. On passe de l'Eulérien au Lagrangien via le vecteur trajectoire  $\vec{\phi}(X, Y, \Theta, t)$  satisfaisant par exemple:

$$\left( \frac{\partial \phi^x}{\partial t} \right)_{XY\Theta} = u = \frac{Dx}{Dt}.$$

Le dernier terme à droite est une notation un peu abusive mais efficace indiquant la variation de la position  $x$  de la particule fluide au cours du mouvement. Le passage de l'Eulérien au Lagrangien s'écrit:

$$b = B(x, y, \theta, t) = B(\vec{\phi}(X, Y, \Theta, t), t) = \mathcal{B}(X, Y, \Theta, t)$$

et la définition de la dérivée particulaire est:

$$\frac{Db}{Dt} = \left( \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right)_{XY\Theta}$$

2) Exprimer la dérivée particulaire pour un écoulement adiabatique.

- 3) Montrer que les composantes horizontales des forces de pression en coordonnées isentropes sont de la forme:

$$+\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{z^*} = \frac{\partial M}{\partial x}$$

ou  $M$  est le potentiel de Montgomery:

$$M = C_p T + \Phi$$

- 4) Montrer que pour un élément de volume  $\delta V$  la masse est  $\delta M = \sigma \delta x \delta y \delta \theta$ , ou  $\sigma = -p_\theta/g$ . En déduire l'équation de conservation de la masse en fonction de  $\sigma$ .

- 5) En utilisant la relation hydrostatique  $p_{z^*} = -\rho g$ , montrer que::

$$M_\theta = C_p (p/p_s)^\kappa .$$

Solution:

En coordonnées isentropes, les équations du mouvement s'écrivent:

$$\begin{aligned} \tilde{D}u - \left( f + \frac{u \tan \phi}{a} \right) v + \frac{M_\lambda}{a \cos \phi} &= X - Qu_\theta \\ \tilde{D}v + \left( f + \frac{u \tan \phi}{a} \right) u + \frac{M_\phi}{a} &= Y - Qv_\theta \\ \sigma_t + \frac{1}{a \cos \phi} ((\sigma u)_\lambda + (\sigma v \cos \phi)_\phi) &= -(Q\sigma)_\theta \\ M_\theta &= C_p (p/p_s)^\kappa \\ \sigma &= -g^{-1} p_\theta \end{aligned}$$

où:

$$\tilde{D} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}$$