

TD du cours 3 de DMAOA, année 2007-2008

Modification de l'écoulement moyen par une onde de gravité transitoire

On propose d'étudier la propagation d'une onde de gravité transitoire de longueur d'onde horizontale, $\lambda_x=20\text{km}$, et forcée en $z^* = 0$ par une vitesse verticale dont la structure est donnée par:

$$w'(z^* = 0, x, t) = \Re \left\{ W_0(t) e^{i(kx - \omega t)} \right\}, \quad (1)$$

où $W_0(t)$ est une fonction réelle variant lentement au cours du temps. On se place dans le cadre où l'écoulement de base est tel que $\bar{u}_0 = 0$ et $N^2 = \text{cte}$. On se limite au cas bi-dimensionnel dans lequel les équations non-forcées de Boussinesq s'écrivent:

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} \\ \frac{DW}{Dt} = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z^*} + g \frac{\bar{\theta}}{\theta_r} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z^*} = 0 \\ \frac{D\bar{\theta}}{Dt} + \frac{\theta_r}{g} N^2 W = 0. \end{cases} \quad (2)$$

On se place dans le cadre où le forçage W_0 est de petite amplitude.

- 1) Donner en fonction de u' , w' , p' et θ' le système d'équations linéaires que doit satisfaire la perturbation induite par W_0 .
- 2) Se ramener à une équation aux dérivées partielles en x , z^* et t pour la vitesse verticale w'

On cherche à présent une solution de la forme

$$w'(w, z^*, t) = \Re \left\{ \hat{W}(z^*, t) e^{i(kx + mz^* - \omega t)} \right\} \quad (3)$$

où m est une constante.

- 3) Donner l'équation que doit satisfaire \hat{W} .
- 4) Rappeler ce que signifie lentement variable dans le temps.

- 5) En supposant que l'onde varie aussi lentement dans la direction verticale, proposer une approximation à l'ordre le plus bas (ordre 0) de l'équation trouvée en 3). En déduire la valeur de m en fonction de k et ω .
- 6) A partir d'une approximation à l'ordre suivant (ordre 1) de l'équation trouvée en 3), montrer que l'enveloppe \hat{W} satisfait une équation du type:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{W} + C_{gz} \frac{\partial}{\partial z} \hat{W} = 0 \quad (4)$$

- 7) Faites le lien entre C_{gz} et la vitesse de groupe verticale dont la définition a été donnée dans le cours.
- 8) Montrer que l'équation (4) admet des solutions de la forme,

$$\hat{W} = G(z^* - z^*/C_{gz})$$

En déduire la valeur de m pour que l'onde se propage vers le haut. Déterminer G en fonction de W_0 .

- 9) A quelle condition sur la pulsation du forçage ω l'hypothèse lentement variable en z^* s'applique-t'elle bien?
- 10) Exprimer le flux vertical d'Eliassen et Palm $\overline{u'w'}$ associé à cette onde. La moyenne est ici une moyenne horizontale évaluée sur une longueur d'onde horizontale λ_x de la perturbation.
- 11) Décrire l'évolution du vent moyen \bar{u} au passage de cette onde.
- 12) Discuter ce résultat en relation avec le théorème de Eliassen et Palm donné dans le cours.