TD des cours 4 et 8, DMAOA 2007-2008

Les Flux d'Eliassen et Palm dus aux ondes de Rossby

Dans l'établissement de la circulation générale de l'atmosphère, les ondes jouent un rôle essentiel. Elles sont produites par instabilité de l'écoulement du au forçage moyen thermique (solaire direct ou infrarouge), ou encore par des causes plus locales comme les montagnes ou la convection. Une manière naturelle de décrire l'action de ces ondes sur l'écoulement moyen est d'opérer une séparation du type :

$$u = \overline{u} + u', \text{ où } \overline{u} = \frac{1}{L}\int_0^L u\,dx, \ \widetilde{s} = \overline{s} + s', \text{ ect.} \qquad \textbf{(I)}$$

Dans ce formalisme, L est la longueur du cercle de latitude et on appelle $\overline{u}$ la moyenne zonale de u. En partant des équations de la dynamique quasi-géostrophique sur le plan β aux moyennes latitudes, le but de cet exercice est de montrer que cette définition de l'écoulement en moyenne zonale n'est pas entièrement adaptée pour d'écrire l'influence des ondes de grande échelle sur l'écoulement moyen. Il s'agit aussi de dégager les propriétés essentielles que doit satisfaire une perturbation pour qu'elle influence l'écoulement moyen. On rappelle l'approximation quasi géostrophique des équations du cours dans le plan β aux moyennes latitudes :

$$D_g u_g - \beta y\, v_g - f_0 v = -\frac{\partial \Phi_e}{\partial x} + X \qquad \textbf{(IIa)}$$

$$D_g v_g + \beta y\, u_g + f_0 u = -\frac{1}{\rho_r}\frac{\partial \Phi_e}{\partial y} + Y \qquad \textbf{(IIb)}$$

$$\frac{\partial \Phi_e}{\partial z} = \frac{H}{R}\theta_e e^{-\kappa z/H} \qquad \textbf{(IIc)}$$

$$D_g \theta_e + w\frac{d\theta_0}{dz} = Q \qquad \textbf{(IId)}$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \rho_0^{-1}\partial_z(\rho_0 w) = 0 \qquad \textbf{(IIe)}$$

On rappelle que dans l'approximation du plan β, le paramètre de Coriolis est représenté par $f=f_0+\beta y$ où f_0 et β sont des constantes. On rappelle aussi que dans l'approximation quasi géostrophique, la dérivée particulaire est estimée selon la vitesse géostrophique,

$$D_g = \partial_t + u_g\partial_x + v_g\partial_y, \qquad \textbf{(IIf)}$$

Et que la vitesse géostrophique est donnée par

$$u_g = -\frac{\partial_y \Phi_e}{f_O}, \ v_g = \frac{\partial_x \Phi_e}{f_O}. \qquad \textbf{(IIg)}$$

Toujours dans ce formalisme quasi-géostrophique, u, v, et w sont les trois composantes de la vitesse et $\Phi_0(z)$ est la stratification du fluide au repos. Enfin, X, Y et Q représentent les forçages et les dissipations mécaniques et thermiques de l'écoulement. Pour une évolution réversible et adiabatique, X=Y=Q=0.

1) Montrer que $\overline{v_g} = 0$.

2) Former les équations d'évolution des moyennes $\rho_0\,\overline{u}_g$, et $\rho_0\,\overline{\theta}_e$. On exprimera les tendances dues à la perturbation en fonction des flux $\rho_0\,\overline{v'_g u'_g}$ et $\rho_0\,\overline{v'_g \theta_e'}$.

3) Exprimer la conservation de la masse pour l'écoulement moyen.

Pour mettre en évidence certaines propriétés générales des flux $\rho_0 \overline{v'_g u'_g}$ et $\rho_0 \overline{v'_g \theta_e'}$ en présence d'ondes de Rossby ou d'instabilités baroclines et/ou barotropes, il est important de partir d'une équation d'évolution pour le tourbillon potentiel quasi-géostrophique q :

$$q = \partial_x v_g - \partial_y u_g + f_0 + \beta y + \frac{f_0}{\rho_0} \partial_z \left(\frac{\rho_0 \theta_e}{\theta_{0z}} \right) \qquad \textbf{(IIIa)}$$

4) A partir des équations quasi géostrophiques (II) montrer que le tourbillon potentiel quasi géostrophique satisfait une équation de la forme,

$$D_g q = Z \qquad \textbf{(IV)}$$

Où Z est une fonction des forçâges X, Y et Q uniquement. On donnera Z.

5) Donner l'équation d'évolution linéaire de la perturbation de tourbillon potentielle q' dans le cadre générale ou les termes de forçage et de dissipation de la perturbation ne sont pas nuls : $Z' \neq 0$, et pour un écoulement de base $\overline{u}_0(y,z), \overline{\theta}_0(y,z)$ non nul.

6) Déduire de cette équation, une équation pour l'évolution de l'action moyenne de l'onde :

$$A = \frac{\rho_0}{2} \frac{\overline{q'^2}}{\overline{q}_{0y}} \qquad \textbf{(V)}$$

en fonction de Z' et $\rho_0 \overline{v'_g q'}$.

Dans la plupart des régions de l'atmosphère aux moyennes latitudes de l'Hémisphère Nord, $\overline{q}_y > 0$ et dans ces régions *A* est bien une quantité quadratique définie positive permettant de mesurer l'amplitude de l'onde.

7) Montrer que le flux de tourbillon potentiel, $\rho_0 \overline{v'_g q'}$ est lui-même la divergence d'un flux que l'on notera $\vec{F}$: $\rho_0 \overline{v'_g q'} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_y F^y + \partial_z F^z$. Exprimer F^y et F^z en fonction des flux méridiens: $\rho \overline{v'_g u'_g}$ et $\rho_0 \overline{v'_g \theta_e'}$. Noter que l'évolution de l'action *A* peut s'écrire sous la forme.

$$\partial_t A + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\overline{Z'q'}}{\overline{q}_y} \qquad \textbf{(VII)}$$

8) Montrer que lorsque le forçage moyen $\overline{X} = 0$ l'équation d'évolution pour la vitesse zonale moyenne $\overline{u}_g$ établie en **2)** peut s'écrire sous la forme :

$$\partial_t \overline{u}_g - f_0 \overline{v}^* = \rho_0^{-1} \partial_z \overline{F^z} \qquad \textbf{(VIII)}$$

où $\overline{v}^*$ est une vitesse méridionale dite en « moyenne transformée » que l'on exprimera.

9) Définir une vitesse verticale « en moyenne transformée » $\overline{w}^*$ de façon à ce que la circulation méridienne « en moyenne transformée » soit non divergente.

10) Exprimer l'équation d'évolution de l'entropie moyenne obtenue en **2)** à l'aide de $\overline{w}^*$ et en l'absence de chauffage moyen $\overline{Q} = 0$.

11) Déduire de ces résultats qu'une perturbation stationnaire et non dissipée/non forcée ne modifie pas l'écoulement moyen.