

Les ondes planétaires libres

Durée: 3 heures, documents autorisés

Les figures sont à rendre annotées.

Un bon nombre de questions dans la Deuxième partie peuvent être traitées indépendamment du reste du problème.

La circulation dans la moyenne atmosphère est parfois modulée dans l'espace et dans le temps par des perturbations d'échelle planétaire affectant simultanément les 2 Hémisphères. Un exemple de ce type de perturbation est montré sur la Figure 1. L'objectif de ce problème est de montrer que ces perturbations sont des modes libres de la dynamique atmosphérique, c'est à dire qu'ils peuvent exister en l'absence de forçage externe.

Pour simplifier le problème, on considère des perturbations par rapport à une atmosphère isotherme et au repos:

$$\bar{u}_0 = 0, \quad T_0 = T_m = 240K.$$

On rappelle que dans le cadre non-forcé et non dissipatif les équations de la dynamique utilisées dans le cours s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega \sin \phi v &= -\frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{vu \tan \phi}{a} + 2\Omega \sin \phi u &= -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}, \end{aligned}$$

l'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{RT}{H},$$

la loi de conservation de la masse s'écrit

$$\frac{\rho_0}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \phi}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0,$$

et le premier principe de la thermodynamique s'écrit

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{\kappa T w}{H} = 0.$$

Toujours dans ce formalisme la condition à la limite au sol est donnée par:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = 0 \quad \text{en } z = 0.$$

En $z \rightarrow \infty$ on considèrera que la perturbation se propage vers le haut ou que la densité d'énergie mécanique associée à la perturbation tend vers 0.

On rappelle quelques définitions,

$$z = H \ln(p_r/p), \quad \rho_0 = \rho_r e^{-z/H}, \quad H = \frac{RT_m}{g}$$

où p_r et ρ_r sont des valeurs constantes de référence. On rappelle aussi la valeur de quelques constantes:

$$R = 287 \text{JK}^{-1} \text{kg}^{-1}, g = 9.81 \text{ms}^{-2}, \kappa = 2/7, a = 6400 \text{km}, \Omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \approx 7.27 \cdot 10^{-5} \text{s}^{-1}$$

On note les champs perturbés $u', v', w', T',$ et Φ' .

Première partie: structure verticale

- 1) Linéariser la condition à la limite inférieure.
- 2) Linéariser l'équation de la thermodynamique et l'exprimer en fonction de $\partial_z \Phi'$ et w' . Evaluer N^2 dans ce cadre, et l'exprimer en fonction de κ, g et H uniquement.
- 3) Linéariser les équation dynamiques et l'équation de conservation de la masse.
- 4) Justifier qu'il est légitime de chercher des solutions pour lesquelles u', v' et Φ' ont la même structure verticale.

Ce résultat permet de chercher des solutions de la forme:

$$(u', v', \Phi')(\lambda, \phi, z, t) = e^{z/2H} U(z) (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi})(\lambda, \phi, t),$$

$$w'(\lambda, \phi, z, t) = e^{z/2H} W(z) \tilde{w}(\lambda, \phi, t).$$

- 5) Ecrire les équations dynamiques et l'équation de conservation de la masse en fonction de $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ et $\tilde{\Phi}$. En déduire que l'on peut choisir pour U :

$$U = \frac{dW}{dz} - \frac{W}{2H}.$$

Que devient l'équation de conservation de la masse?

- 6) Ecrire l'équation de la thermodynamique en utilisant $\tilde{\Phi}$ et \tilde{w} . Si l'on fait le choix de la question (5) pour U , exprimer le rapport

$$\frac{\partial_t \tilde{\Phi}}{\tilde{w}}$$

en fonction de W . Justifier que ce rapport est égale à une constante que l'on notera gh , où h une constante dite de séparation.

- 7) En déduire l'équation donnant la structure verticale de W , l'exprimer en fonction de W, H et h uniquement.
- 8) Exprimer la condition à la limite inférieure en fonction de W, H et h uniquement.
- 9) Montrer que pour la valeur $h = \frac{7}{5}H$, il existe une solution pour W satisfaisant la condition à la limite inférieure.

Indication: On proposera tout d'abord une solution de type $W = W_0 \exp\left(\epsilon \Lambda \frac{z}{H}\right)$ avec $\epsilon = \pm 1$ et Λ une constante que l'on déterminera à l'aide du résultat de la question (7). On déterminera ensuite ϵ à l'aide de la condition à la limite en $z = 0$.

- 10) Cette solution permet-elle à la densité d'énergie de la perturbation de s'annuler lorsque $z \rightarrow \infty$? Indication: Ne pas faire de calcul lourd mais utiliser que la densité d'énergie mécanique est donnée par:

$$E = \frac{\rho_0}{2} \left(u'^2 + v'^2 + \frac{(\partial_z \Phi')^2}{N^2} \right)$$

- 11) Exprimer les deux équations de la dynamique et l'équation de conservation de la masse en fonction de \tilde{u} , \tilde{v} et $\tilde{\Phi}$.

Deuxième partie: structure horizontale

Pour un océan de profondeur H_O , les mouvements barotropes sont décrits à l'aide des équations en couche mince:

$$\frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega \sin \phi v = -\frac{g}{a \cos \phi} \frac{\partial H_O}{\partial \lambda},$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \frac{vu \tan \phi}{a} + 2\Omega \sin \phi u = -\frac{g}{a} \frac{\partial H_O}{\partial \phi},$$

$$\frac{DH_O}{Dt} + \frac{H_0}{a \cos \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \phi}{\partial \phi} \right) = 0.$$

Pour une planète couverte d'un océan uniforme de profondeur au repos H_r , cet océan admet des mouvements oscillatoires de petite amplitude qui ont largement été étudié dans le cadre de la théorie des marées océaniques. Pour un nombre d'onde horizontal s donné, ces mouvements libres ont des fréquences ω bien déterminées: pour une profondeur H_r donnée, il y en a une infinité dénombrable, un certain nombre d'entre elles sont montrées sur les Figures 2 et 4. Chacune de ces fréquences correspond à une structure méridienne précise, quelques exemples sont donnés sur les Figures 3 et 5.

- 12) En quoi la théorie des marées océanique peut-elle aider à trouver la structure des ondes libres se propageant dans l'atmosphère moyenne.

Indication: on comparera le résultat de la question 11 aux équations en couche mince linéarisées. On notera \tilde{H}_O l'anomalie de hauteur de l'océan:

$$H_O = H_r + \tilde{H}_O.$$

- 13) Déterminer à l'aide de la Figure 1 le nombre d'onde s et la période de l'onde planétaire observée. En déduire sa fréquence normalisée $\frac{\omega}{2\Omega}$.
- 14) Localiser cette onde sur la Figure 2 ou sur la Figure 4, qu'elle type de correspondance vous attendez-vous à trouver entre h et H_r ? La trouvez-vous?
- 15) La structure méridienne correspond-elle? De quel type d'onde s'agit-il?
- 16) Tracer le champ des vitesses sur la Figure 1, justifier.

- 17) En quoi la méthode de détermination des ondes planétaires libres présentée ici, diffère-t-elle de l'évaluation des marées atmosphériques présentée dans le cours?
- 18) Indiquer sur les Figures 2 et 4 les forçage dominant des marées atmosphériques. Quels types d'ondes sont associés à ces marées?
- 19) Les Figures 2 à 5 ont été obtenues en utilisant la théorie des ondes équatoriales. En quoi le formalisme utilisé pour décrire les ondes équatoriales diffère-t'il du formalisme utilisé pour décrire les marées atmosphériques.

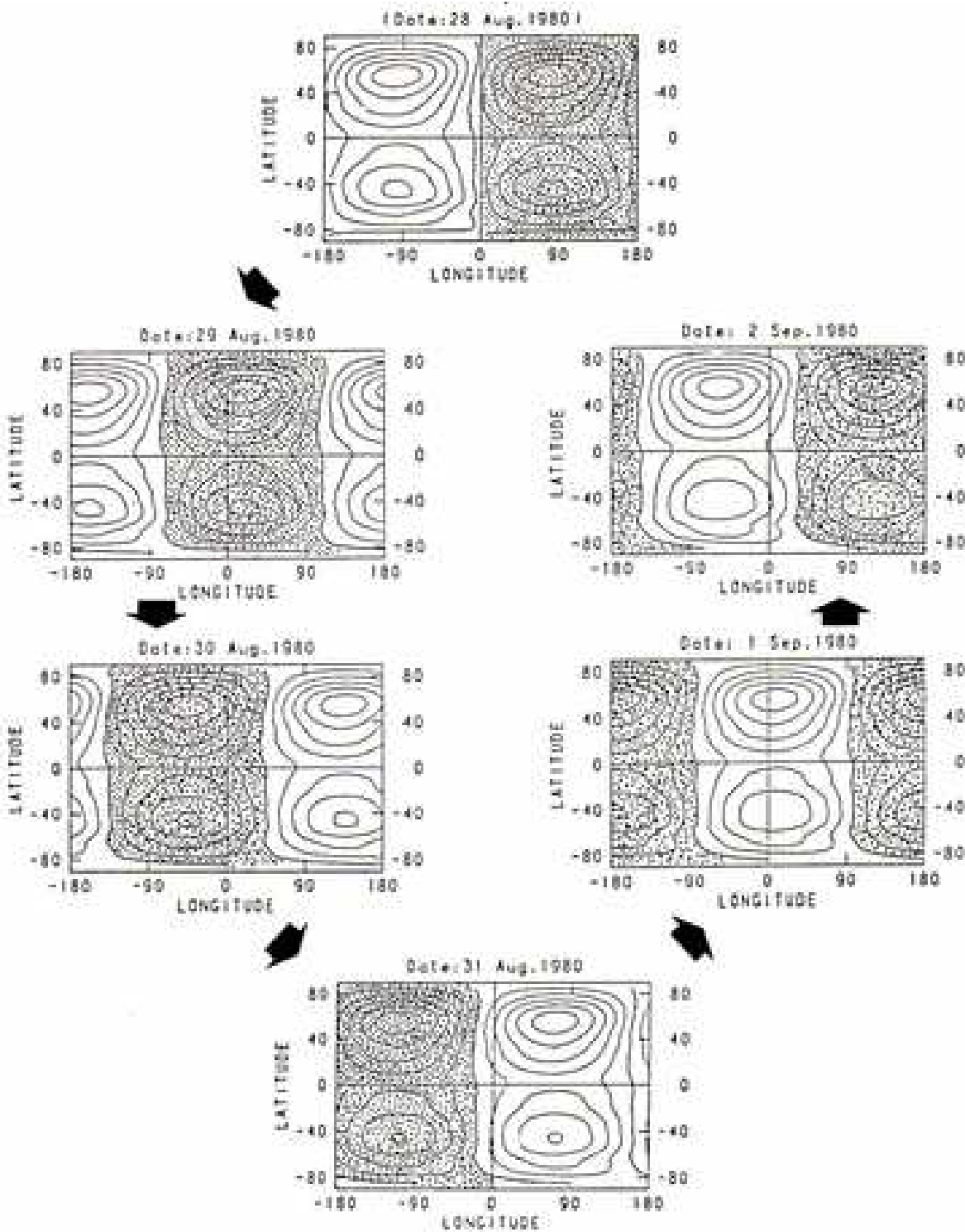


Figure 1

Anomalie de Géopotential à $z=50\text{km}$ et durant 6 jours en Août-Septembre 1980. Observations depuis le satellite TIROS-N (Hirota et Hirooka 1980). L'intervalle entre les iso- Φ est de $200\text{m}^2\text{s}^{-2}$

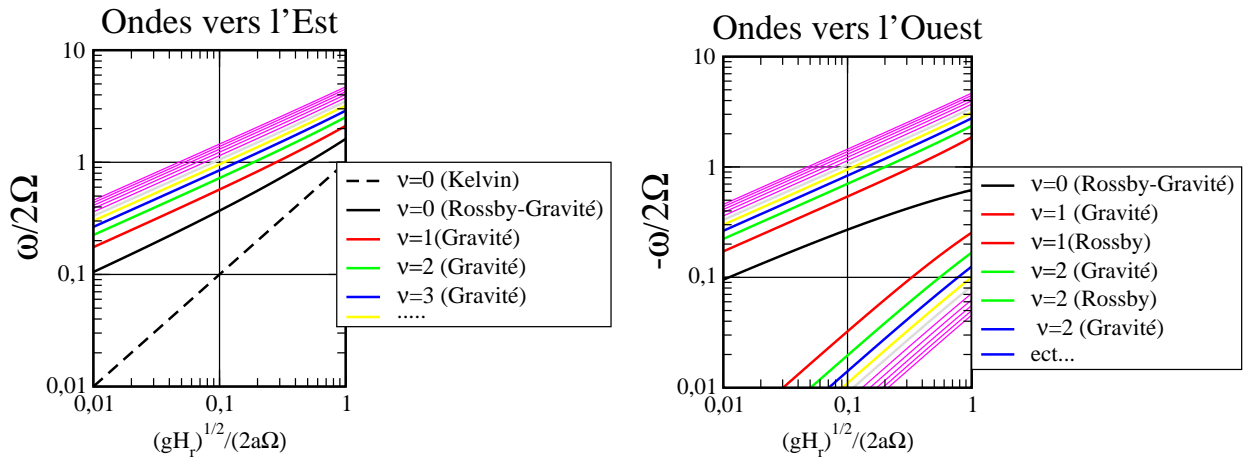


Figure 2: Diagramme de dispersion des modes propres des équations en couche mince pour le nombre d'onde zonal $s = 1$.

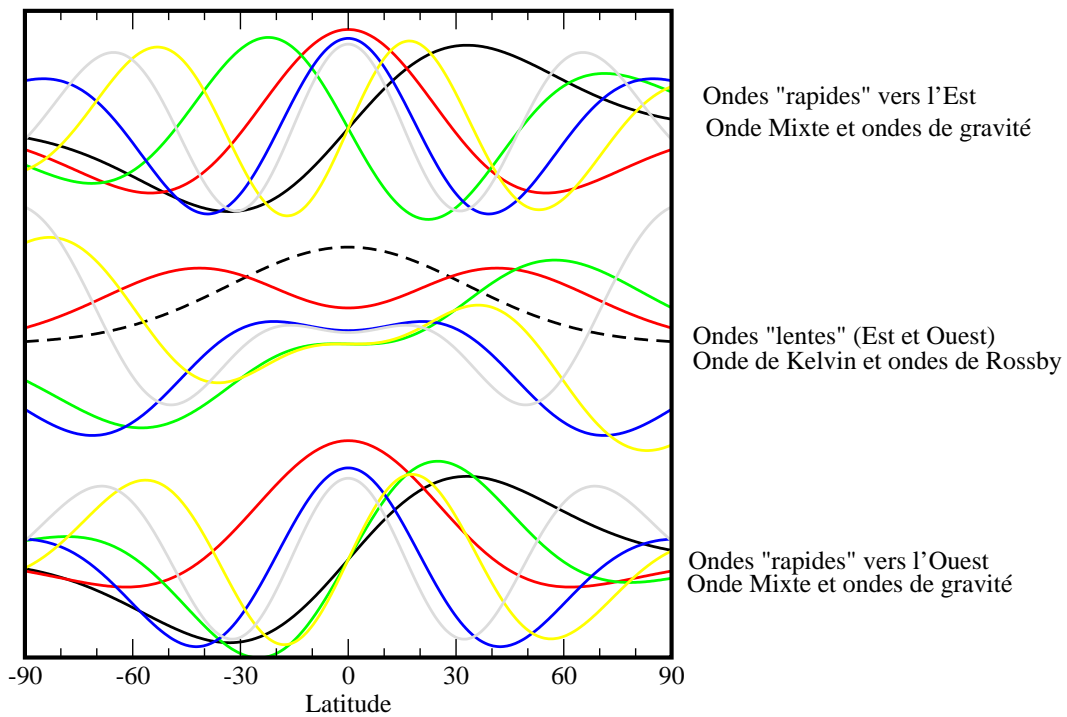


Figure 3: Structure méridienne de l'anomalie de hauteur \tilde{H}_0 associée aux modes propres des équations en couche mince pour $H_r = 9.8\text{km}$ et $s = 1$. Seuls les 18 modes les plus graves (au sens des variations en latitudes) sont représentés. Il y a une certaine correspondance entre les couleurs des courbes sur les Figures 2 et 3.

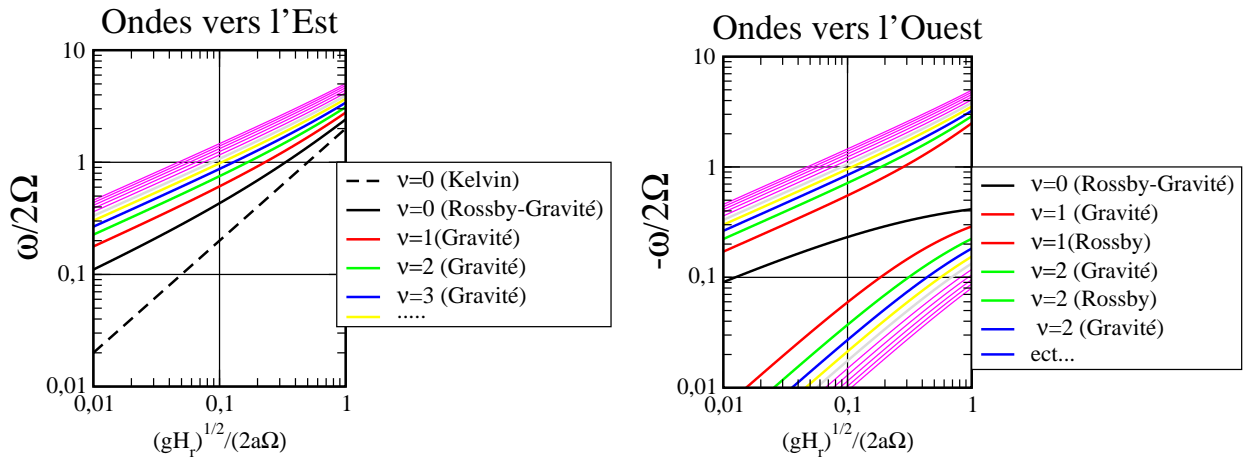


Figure 4: Diagramme de dispersion des modes propres des équations en couche mince pour le nombre d'onde zonal $s = 2$.

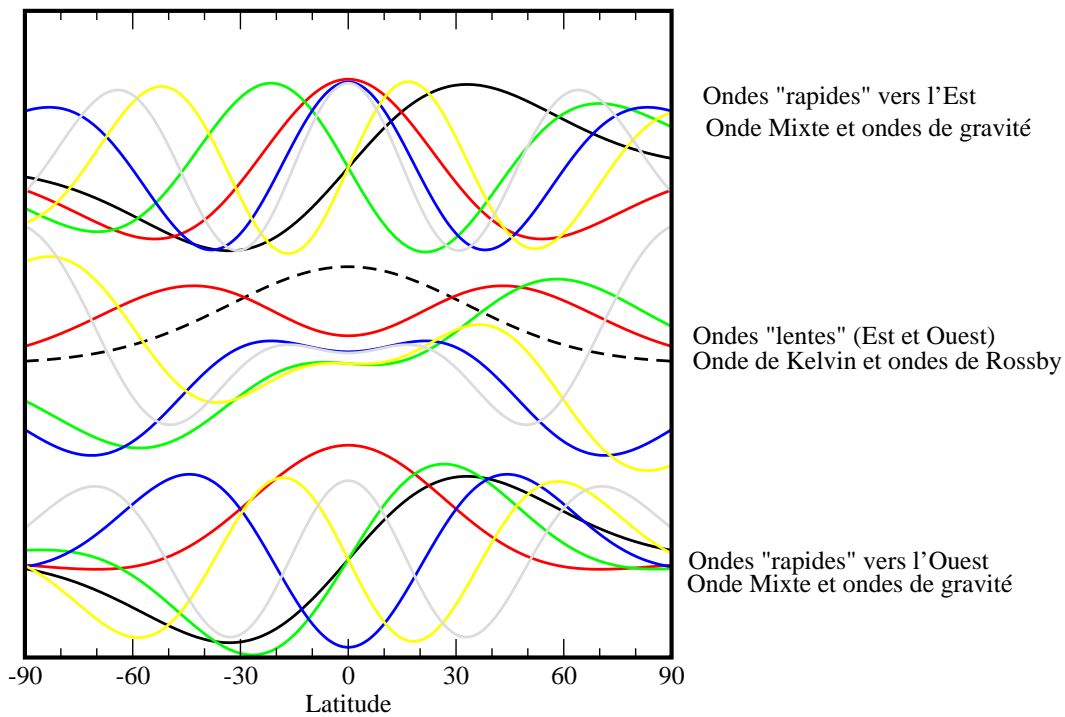


Figure 5: Structure méridienne de l'anomalie de hauteur \tilde{H}_0 associée aux modes propres des équations en couche mince pour $H_r = 9.8\text{km}$ et $s = 2$. Seuls les 18 modes les plus graves (au sens des variations en latitudes) sont représentés. Il y a une certaine correspondance entre les couleurs des courbes sur les Figures 4 et 5.