Contrôle du cours de DMA0A, année 2006-2007

Durée: 3 heures, documents autorisés.

Onde d'Inertie-Gravité dans un cisaillement de vent

On propose d'illustrer le concept de flux d'Eliassen et Palm et de circulation méridienne transformée dans le cadre des ondes de gravité se propageant verticalement dans un front thermique aux moyennes latitudes. On adopte pour cela l'approximation du plan tangent où le paramètre de Coriolis f est constant. On utilise les équations de Boussinesq non forcées écritent sous la forme,

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{1a}$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \tag{1b}$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + b, \tag{1c}$$

$$\frac{Db}{Dt} = 0., \tag{1d}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1e}$$

et où la dérivée particulaire est donnée par

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}. \tag{1f}$$

Dans ce système d'équations, z est la hauteur géométrique, $w = \frac{Dz}{Dt}$ est la vitesse verticale, $\Phi = \frac{p-p_r(z)}{\rho_r}$ est un potentiel avec p la pression, $p_r(z)$ une pression de référence et ρ_r une densité de référence constante. Dans les équations de bilan pour la quantité de mouvement verticale (1c) et de l'énergie interne (1d), la poussée $b = \frac{g}{\theta_r}(\theta - \theta_r)$ où θ est la température potentielle et θ_r est une constante. Lorsque le fluide est au repos la poussée a pour valeur $b_0(z)$, c'est la stratification au repos. Dans la suite du problème, on considèrera que la fréquence de Brunt Vaisala $N^2 = \frac{db_0}{dz}$ est constante.

On considère un écoulement de base unidirectionnel selon x et cisaillé verticalement,

$$\overline{u}_0(z) = \overline{u}_0(0) + \Lambda z, \tag{2}$$

où le cisaillement Λ est aussi constant.

A) Montrer qu'à l'écoulement de base $\overline{u}_0(z)$ est associé une stratification de base

$$\overline{b}_0(y,z) = N^2 z - f\Lambda y, \tag{3}$$

et un potentiel de base, $\overline{\Phi}_0(y,z)$ que l'on donnera.

On considère à présent que cet écoulement de base est modifié par une petite perturbation dont les champs ne varient pas selon y. On introduit pour cela un petit paramètre α caractérisant l'amplitude de la perturbation et on écrit les champs dynamiques sous la forme:

$$(u, v, w, \Phi, b)(x, y, z, t) = (\overline{u}_0(z), 0, 0, \overline{\Phi}_0(y, z), \overline{b}_0(y, z)) + \underbrace{(u', v', w', \Phi', b')}_{O(\alpha)}(x, z, t) + O(\alpha^2). \quad (4)$$

Dans cette équation et dans la suite du problème, $O(\alpha^n)$ indique que n est l'ordre de grandeur le plus bas des termes concernés.

B) Donner les équations linéarisées (c'est à dire à l'ordre de grandeur O(α)) que satisfont u', v', w', Φ' et b'.

On utilise dans la suite le fait que le champ de vitesse (u', w') est non divergent en introduisant la fonction de courant ψ':

$$u' = \partial_z \psi', w' = -\partial_x \psi'. \quad (5)$$

Une simplification supplémentaire consiste à éliminer la pression.

C) Former une équation linéaire pour l'évolution de

$$\Delta\psi' = \partial_z u' - \partial_x w' = \partial_z^2 \psi' + \partial_x^2 \psi'. \quad (6)$$

En déduire que le système d'équations pour la perturbation se ramène à un système de 3 équations ne faisant intervenir que ψ', v' et b'.

On considère à présent que notre perturbation est essentiellement due à une onde monochromatique stationnaire ayant pour fréquence absolue ω et pour nombre d'onde horizontal k:

$$(\psi', v', b') = \Re\left\{ \left(\hat{\psi}, \hat{v}, \hat{b}\right)(z) e^{i(kx - \omega t)} \right\} + O(\alpha^2), \quad (7a)$$

où $\Re$ indique la partie réelle, $\hat{\psi}$, $\hat{v}$ et $\hat{b}$ étant des fonctions complexes. On note la fréquence intrinsèque de l'onde monochromatique dans **(7a)**:

$$\hat{\omega} = \omega - k\overline{u}_0 \quad (7b)$$

D) Etablir les relations de polarisation:

$$\hat{v} = i\frac{f}{\hat{\omega}}\hat{\psi}_z\ , \quad \hat{b} = \frac{f^2\Lambda}{\hat{\omega}^2}\hat{\psi}_z - \frac{kN^2}{\hat{\omega}}\hat{\psi}. \quad (8)$$

Sans faire de calculs lourds, indiquer comment vous pouvez vous ramener à une équation pour $\hat{\psi}$ seulement.

Cette équation peut s'écrire:

$$\partial_z\left(\frac{\hat{\omega}^2 - f^2}{\hat{\omega}^2}\partial_z\hat{\psi}\right) + \frac{N^2 - \hat{\omega}^2}{\hat{\omega}^2}k^2\hat{\psi} = 0. \quad (9)$$

E) Commenter ce qui se passe aux altitudes où $\hat{\omega} = \pm f$. A quelles altitudes discutées dans le cours cela vous fait-il penser? (ne pas faire de calculs lourds)

On cherche à présent à déterminer si une onde de ce type modifie l'écoulement moyen. On considère pour cela un domaine périodique en x et on définie la moyenne par l'opérateur:

$$\overline{u} = \frac{1}{L}\int_O^L u dx. \tag{10}$$

Ici, L est la longueur du domaine considéré. Dans ce cadre, le nombre d'onde k est tel que l'onde monochromatique de l'Eq. (7a) soit aussi périodique sur le domaine considéré. Cela nous permet de décrire nos champs dynamiques en faisant une séparation entre perturbation et écoulement moyen du type:

$$(u, v, w, \Phi, b) = \left(\overline{u}, \overline{v}, \overline{w}, \overline{\Phi}, \overline{b}\right) + (u', v', w', \Phi', b')\,. \tag{11}$$

Comme les perturbations considérées ne varient pas en y on peu montrer en tout généralité qu'elles ne produisent pas, par interactions nonlinéaires, de champ moyen variant en y. En d'autre terme, cela revient à écrire que

$$\overline{u} - \overline{u}_0(z), \overline{v}, \overline{w}, \overline{\Phi} - \overline{\Phi}_0(y, z), \text{ et } \overline{b} - \overline{b}_0(y, z) \tag{12}$$

sont indépendants de y.

F) Sans faire de calculs, vous attendez-vous à ce que l'onde monochromatique dans **(7a)** modifie l'écoulement moyen?

Nous allons à présent clarifier ce résultat, et envisager dans un premier temps que la l'onde monochromatique dans **(7a)** affecte l'écoulement moyen à l'ordre $O(\alpha^2)$.

G) En considérant que $\overline{w}(0) = 0$, montrer à l'aide de l'équation de la continuité donnée en (1) que $\overline{w} = 0$ partout.

En reprenant les équations de départ **(1)**, former une équation pour l'évolution du vent zonal moyen $\overline{u}$ en fonction de $\overline{v}$ et du flux $-\overline{u'w'}$.

Indication: on montrera et on utilisera le fait que $\partial_x u' + \partial_z w' = 0$.

H) Montrer que pour notre perturbation,

$$-\overline{u'w'} = -\frac{1}{2}\Re\left\{ik\hat{\psi}_z\hat{\psi}^*\right\} + O(\alpha^3) \tag{13}$$

où $\hat{\psi}^*$ est le complexe conjugué de $\hat{\psi}$. Montrer de la même manière que:

$$\overline{v'b'} = +\frac{1}{2}\Re\left\{i\frac{kN^2 f}{\hat{\omega}^2}\hat{\psi}_z\hat{\psi}^*\right\} + O(\alpha^3). \tag{14}$$

On introduit la grandeur,

$$F^z = -w'u' + \frac{f}{N^2}v'b'. \tag{15}$$

I) Sans faire de calcul, reconnaissez-vous de quoi il s'agit?

Estimez $\overline{F^z}$ à l'ordre $O(\alpha^2)$ et en fonction de $\hat{\psi}$.

J) En multipliant l'Eq. (8) par $ik\hat{\psi}^*$ et en intégrant par partie montrer que:

$$\partial_z \overline{F^z} = O(\alpha^3) \tag{16}$$

En déduire que $-\partial_z \overline{u'w'} \neq 0$ à l'ordre $O(\alpha^2)$.

En reprenant l'équation pour l'évolution de $\overline{u}$ trouvée en **G)**, ce dernier résultat signifie-t'il que notre onde monochromatique modifie le vent moyen?

K) Proposer un formalisme pour l'équation du vent zonal moyen dans lequel la dérivée selon z de $\overline{F^z}$ apparaisse directement comme l'unique forçâge par les ondes.

Indications: dans ce formalisme, la circulation méridienne n'est plus exprime par $\overline{v}$ mais par une circulation $\overline{v}^*$ que l'on exprimera (ne pas confondre le symbole $*$ utilisé ici avec la définition du complexe conjugué). On repartira de la question **G)**.

L) Dans ce formalisme, notre onde monochromatique modifie-t'elle l'écoulement moyen?

Faites le lien entre $\overline{v}^*$ et la circulation dite de Brewer-Dobson présentée dans le cours.

Questions de cours

(1/2 page maximum par question)

M) Dans la moyenne atmosphère, l'Ozone est essentiellement produite au voisinage de la stratopause équatoriale (en moyenne en longitude et en moyenne sur l'année). Pourtant, c'est aux moyennes latitudes et dans les régions polaires de l'Hémisphère Nord que le contenu d'Ozone intégré verticalement est le plus grand (en moyenne en longitude et en moyenne sur l'année). A quoi cela-est-il du?

N) Comment expliquez-vous que les minima absolus de Température en moyenne zonale et dans l'atmosphère neutre se trouvent à la mésopause et en été?

O) Souvent, au cours de l'Hiver et dans l'Hémisphère nord, la Température dans les régions polaires atteind des valeurs anormalement grandes pendant plusieurs jours. A quoi cela est-il du?

P) A qu'elle type d'onde associez-vous les marées atmosphériques?

Pourquoi les marées atmosphériques ont-elles des périodes solaires (par opposition aux marées océaniques)?

Expliquez brièvement pourquoi les marées au sol sont dominées par un signal de nombre d'ondes planétaire $s = 2$. Qu'elle est la période de cette marée?