

Durée: 3 heures, documents autorisés. Les 3 exercices sont entièrement indépendants les uns des autres.

EXERCICE 1 (7 points):
Circulation induite par l'ozone et par les ondes de gravité dans le
Modèle de St Venant

Pour étudier la circulation en moyenne zonale de la moyenne atmosphère, on utilise le modèle axisymétrique en couche mince présenté dans le cours (voir Figure 1).

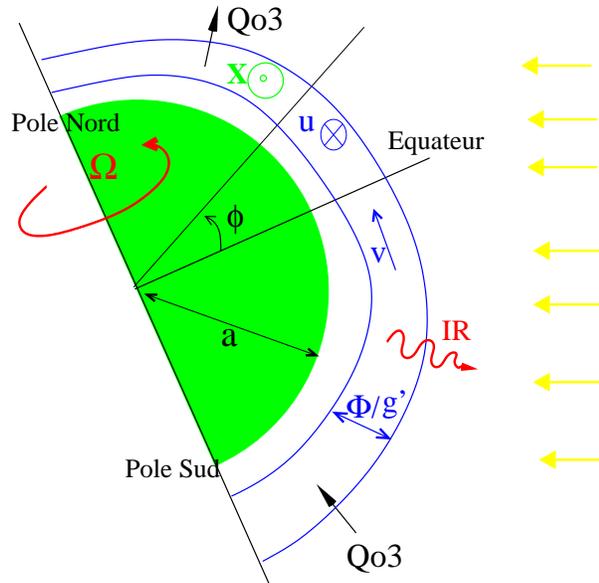


Figure 1:

Schéma illustrant la dynamique du modèle de Saint Venant tel qu'il est utilisé dans ce problème.

On rappelle que dans ce modèle les effets de l'ozone et des ondes sont représentés par des forçages externes que l'on place donc dans les termes de droite des équations de Saint-Venant:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) u - \left(2\Omega + \frac{u}{a \cos \phi} \right) v \sin \phi = X, \quad (1a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) v + \left(2\Omega + \frac{u}{a \cos \phi} \right) u \sin \phi + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} = 0, \quad (1b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi v \cos \phi}{\partial \phi} = Q - Q_s - \alpha (\Phi - \Phi_s). \quad (1c)$$

Dans ce système d'équation $u(t, \phi)$ et $v(t, \phi)$ sont les composantes zonales et méridienne du vent, $\Phi(t, \phi)$ est le géopotentiel, il est directement lié à l'épaisseur de la couche fluide et représente donc la Température. Toujours dans ce système d'équations ϕ est la latitude, a est le rayon de la terre et Ω sont taux de rotation. Dans les termes de droite des Eqs. (1), les fonctions X et Q sont les forçages externes, tandis que α est une constante de relaxation thermique. Enfin Φ_s et Q_s sont des constantes caractérisant le fluide au repos (elles vérifient donc $Q_s = \alpha \Phi_s$).

Valeurs: $a = 6400\text{km}$, $\Omega = 7.27 \cdot 10^{-5}\text{s}^{-1}$, $\Phi_s = 4.10^4\text{m}^2\text{s}^{-2}$, $\alpha = 7.72 \cdot 10^{-7}\text{s}^{-1}$, $Q_s = \alpha\Phi_s$.

Dans tout le problème, on s'intéresse à la réponse stationnaire de l'atmosphère lorsque $t \rightarrow \infty$ et en considérant que les forçages commencent à être actifs à partir de l'instant $t = 0$, et ne varient plus en fonction du temps ensuite: $X = X(\phi)$, $Q = Q(\phi)$.

On considère aussi que les réponses à X et à Q sont de suffisamment faibles amplitudes pour pouvoir être étudiées séparément et pour que les termes non linéaires puissent souvent être négligés.

1) Montrez que les Eqs. (1a) et (1b) se re-écrivent

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \cos \phi u - 2\Omega \sin \phi \cos \phi v = \cos \phi X$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) \cos \phi v + 2\Omega \sin \phi \cos \phi u + \sin \phi \frac{u^2 + v^2}{a} = -\frac{\cos \phi}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

2) En prenant pour coordonnée $\mu = \sin \phi$ et en prenant pour variables $U = u \cos \phi$, $V = v \cos \phi$, en déduire que les Eqs. (1) se re-écrivent:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{a} \frac{\partial}{\partial \mu}\right) U - 2\Omega \mu V = \sqrt{1 - \mu^2} X, \quad (2a)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{V}{a} \frac{\partial}{\partial \mu}\right) V + 2\Omega \mu U + \frac{\mu}{1 - \mu^2} \frac{U^2 + V^2}{a} + (1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} = 0, \quad (2b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi V}{\partial \mu} = Q - Q_s - \alpha (\Phi - \Phi_s). \quad (2c)$$

On s'intéresse en premier à la réponse au forçage Q et on prend donc $X = 0$.

3) Que représentent Q et $\alpha (\Phi - \Phi_s)$?

4) Proposez un état d'équilibre radiatif vers lequel tend Φ lorsque $t \rightarrow \infty$.

Que vaut cet équilibre lorsque Q est donné par

$$Q - Q_s = -Q_0 \mu^3, \quad (3)$$

où $Q_0 > 0$ est une constante.

Quelle saison représente grossièrement le forçage donné par l'Eq. (3)?

5) Donnez la relation géostrophique et en déduire une valeur pour U induite par le forçage donné par l'Eq. (3).

Discutez du signe de U dans chaque hémisphère, le résultat est-il conforme à la circulation observée dans la moyenne atmosphère?

6) Montrez que pour une parcelle fluide déplacée lorsque le forçage se met en place, la quantité

$$M = U + a\Omega (1 - \mu^2) \quad (4)$$

se conserve.

A quelle quantité utilisée dans le cours M se rapporte-t'il?

7) En déduire une expression pour la position initiale μ_0 des particules fluides ayant la vitesse trouvée à la Question 5).

Dans quel hémisphère les parcelles d'air se sont-elles éloignées (rapprochées) de l'axe de rotation de la terre?

Ce résultat est-il conforme au champ de vitesse trouvé à la Question 5)?

On s'intéresse à présent à la réponse au forçage X et on prend donc $Q = 0$.

8) Proposez une forme stationnaire et linéarisée des équations du mouvement trouvées à la Question 2).

9) On considère un forçage mécanique donné par

$$X = -X_0\mu (1 + \mu^2) (1 - \mu^2)^{1/2} \quad (5)$$

où X_0 est une constante positive que l'on prendra égale à $X_0 = 1\text{m/s/jour}$. En quoi se forçage est-il représentatif de l'effet des ondes de gravité dans la mésosphère en hiver de l'hémisphère Nord?

10) Proposez une solution pour la vitesse méridienne V .

En discutant du signe de V commentez en rapport à la circulation de Brewer-Dobson dans la moyenne atmosphère.

Donnez l'ordre de grandeur de V .

En quoi cette solution est-elle agéostrophique?

11) Exprimez les variations du potentiel Φ .

12) Déduire de l'équilibre géostrophique la vitesse zonale U .

Donnez son ordre de grandeur et comparez à celui de V . Cela vous surprend-il?

En ajoutant au champ de U produit par le forçage Q (Question 5)), dire en quoi l'effet du forçage X rappelle ici celui produit par les ondes de gravité dans la mésosphère.

EXERCICE 2 (7 points):

Action et Flux d'Eliassen Palm pour les ondes de gravité et dans l'Approximation hydrostatique

On propose d'illustrer les concepts de flux d'Eliassen et d'Action dans le cadre des ondes de gravité. On adopte pour cela l'approximation hydrostatique, on se place dans le cadre du plan tangent, on néglige la force de Coriolis, et on utilise une version bidimensionnelle des équations utilisées dans le cours:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial\Phi}{\partial x} + X, \quad (6a)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \frac{RT}{H}, \quad (6b)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = Q, \quad (6c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0, \quad (6d)$$

$$\text{avec: } \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + w \frac{\partial}{\partial z}. \quad (6e)$$

Dans le système d'Eqs. (6), z est la hauteur log-pression $z = H \ln(p_s/p)$ où p_s est une constante, et H est la hauteur caractéristique $H = RT_m/g$ avec $T_m = 240\text{K}$. Par ailleurs, u et w sont les composantes horizontale et verticale de la vitesse, $u = \frac{Dx}{Dt}$, $w = \frac{Dz}{Dt}$, Φ est le géopotential, T est la Température et $\theta = T(p_s/p)^\kappa$ est la Température potentielle. Enfin, la densité de référence est $\rho_0(z) = \rho_s \exp(-z/H)$ où ρ_s est une constante.

On considère un écoulement de base $\bar{u}_0(z)$, $w_0 = 0$, $\bar{\Phi}_0(z)$, et on étudie les petites perturbations par rapport à cet écoulement de base que l'on notera u' , w' , Φ' , T' .

13) Montrez que les approximations linéaires des équations que satisfait la perturbation sont:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + w' \bar{u}_{0z} = -\frac{\partial\Phi'}{\partial x} + X' \quad (7a)$$

$$\Phi'_z = \frac{RT'}{H} \quad (7b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \Phi'_z + N^2 w' = J' \quad (7c)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w'}{\partial z} = 0. \quad (7d)$$

On donnera l'expression de $N^2(z)$ en fonction de $\Phi_0(z)$ et de J' .

Remarque: on a noté $\bar{u}_{0z} = \frac{d\bar{u}_0}{dz}$, et $\Phi'_z = \frac{\partial\Phi'}{\partial z}$.

14) Montrez que l'Eq. (7a) peut s'écrire:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) u'_z + \rho_0 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0} \right)_z w' + \frac{\partial\Phi'_z}{\partial x} = X'_z \quad (8)$$

Pour construire une quantité quadratique associée à l'onde et dont l'évolution puisse s'écrire sous forme conservative, il est nécessaire de procéder à une série de calculs intermédiaires un petit peu fastidieux. Il vous est demandé dans les questions suivantes de refaire ces calculs, mais ne vous perdez pas dans les détails, soyez succints et appuyez-vous sur les équations et les résultats donnés dans l'énoncé: décrire les grandes lignes du calcul sans en résoudre les détails vous apportera aussi des points. Notez aussi que chaque question peut être traitée en utilisant le résultat d'une des questions précédentes. De ce fait, échouer à une question n'empêche pas de traiter les suivantes!

15) Premier calcul intermédiaire, montrez que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{u'_z \Phi'_z}{N^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Phi_z'^2}{2N^2}\right) + u'_z w' + \rho_0 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0}\right)_z \frac{w' \Phi'_z}{N^2} = D'_1. \quad (9)$$

On exprimera D'_1 et on montrera que $D'_1 = 0$ si $X' = Q' = 0$.

16) Second calcul intermédiaire, montrez que l'Eq. (9) peut se réécrire:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{u'_z \Phi'_z}{N^2}\right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho_0 \frac{\Phi_z'^2}{2N^2} + \rho_0 \frac{u'^2}{2}\right) + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial z} \frac{u' w'}{\partial z} + \rho_0 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0}\right)_z \frac{w' \Phi'_z}{N^2} = D_1. \quad (10)$$

17) Troisième calcul intermédiaire, montrez que:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\rho_0 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0}\right)_z \frac{\Phi_z'^2}{2N^4}\right) + \rho_0 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0}\right)_z \frac{w' \Phi'_z}{N^2} = D'_2. \quad (11)$$

On exprimera D'_2 et on montrera que $D'_2 = 0$ si $Q' = 0$.

18) En déduire une équation de la forme,

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D, \quad (12)$$

$$\text{où } A = -\rho_0 \frac{u'_z \Phi'_z}{N^2} + \rho_0^2 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0}\right)_z \frac{\Phi_z'^2}{2N^4}, \quad \vec{F} = (F^x, F^z), \quad \text{et } \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \partial_x F^x + \partial_z F^z.$$

Vous exprimerez F^x , F^z , et D .

19) On considère à présent un domaine périodique dans la direction x et de longueur L . A partir de l'Eq. (12) donnez une équation d'évolution pour la valeur moyenne de l'action A :

$$\bar{A} = \frac{1}{L} \int_0^L A dx. \quad (13)$$

20) On étudie à présent les effets non-linéaires que notre perturbation peut produire sur le vent zonal moyen \bar{u} . En repartant des Eqs. (6), montrez que lorsque le forçage mécanique moyen $\bar{X} = 0$,

$$\rho_0 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{F}^z}{\partial z}. \quad (14)$$

21) Énoncez à partir de ces différents résultats le théorème de non-interaction de Eliassen et Palm.

EXERCICE 3 (6 points): Description d'un paquet d'onde

Les cartes sur la Figure 2 présentent des composites de champs dynamiques issues des réanalyses du CEPPMT. Les données ont été filtrées dans l'espace et dans le temps de manière à extraire la structure caractéristique d'une des ondes planétaires jouant un rôle très important sur le dynamique de la stratosphère.

- 22)** A un instant donné et à une altitude log-pressure donnée dans la basse stratosphère (21km), les champs de la hauteur du géopotential $Z = \Phi/g$ et du vent horizontal (u, v) associés à notre perturbation sont présentés sur la Figure 2a.

Reconnaissez-vous de quel type d'onde il s'agit? Justifiez.

- 23)** Les champs sur la Figure 2b montrent en fonction de la longitude et du temps, l'évolution de la vitesse méridienne v à l'équateur associée à notre perturbation.

Quelle est le signe et la valeur de sa vitesse de phase horizontale?

Pour le type de perturbation que vous avez identifié à la question **22)**, cela vous étonne-t'il?

Décrive le mécanisme de propagation horizontale de cette perturbation.

- 24)** Toujours à partir de la Figure 2b, donnez le signe de la vitesse de groupe horizontale de la perturbation.

Cela vous étonne-t'il? Justifiez en utilisant la relation de dispersion correspondant à la perturbation montrée sur la Figure 2.

- 25)** La Figure 2c montre à un instant donné et en fonction de la longitude et de l'altitude, la structure du vent méridien dans la bande équatoriale associé à la perturbation.

Justifiez que celle-ci se propage bien vers le haut.

On note aussi sur la Figure 2c que la perturbation est fortement atténuée dans la direction verticale. Savez-vous à quoi cela est dû?

- 26)** La Figure 2d montre une carte de l'évolution au cours du temps et en fonction de l'altitude de l'amplitude de notre perturbation (couleurs). Les lignes en noir montrent l'évolution caractéristique du vent zonal moyen dans la bande équatoriale lors du passage de ce type de perturbation. Les lignes continues (pointillées) correspondants à des valeurs positives (négatives) on voit donc que le vent zonal a tendance à diminuer lorsque notre perturbation est atténuée.

Cela vous étonne-t'il?

Sur quelle phase de l'oscillation Quasi-Biennale (Est ou Ouest) pensez vous que ce type d'onde agit?

- 27)** Donnez au contraire l'exemple d'une onde d'échelle planétaire accélérant le vent zonal moyen dans la basse stratosphère équatoriale.

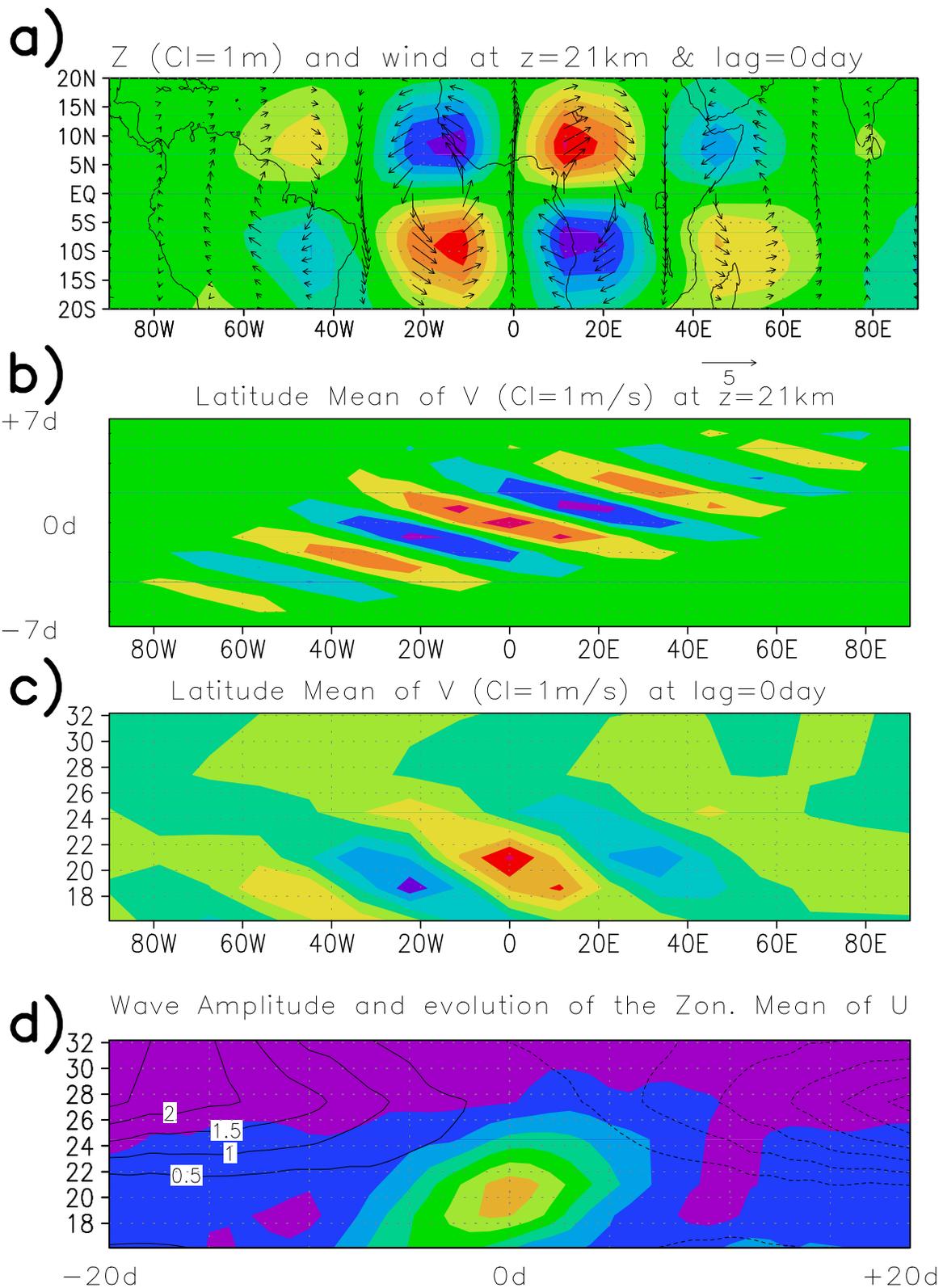


Figure 2:

Cartes composites des perturbations affectant la basse stratosphère dans les données de réanalyse du CEPPMT. Les couleurs chaudes correspondent aux valeurs positives et les couleurs froides aux valeurs négatives.