Contrôle du cours de DMA0A, année 2008-2009

Durée: 2 heures 30, documents autorisés. Les 2 exercices sont entièrement indépendants l'un de l'autre.

EXERCICE 1 (14 points):

Ecoulement moyen associé au passage d'une onde transitoire

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution temporelle d'une perturbation bidimensionnelle dans le plan (x, z) où x est une direction horizontale et z la direction verticale. La structure de la perturbation étudié à l'instant $t = 0$ est donnée par

$$w'(t = 0, x, z) = \Re\left\{W_0(z)e^{i(kx+mz)}\right\} \tag{1}$$

Dans l'équation (1) k est un nombre d'onde horizontal constant, m est un nombre d'onde vertical local constant et $W_0(z)$ est une fonction réelle variant lentement dans la direction verticale. On considérera aussi que la perturbation dans l'Eq. (1) est due à une ondes se propageant vers le haut.

Q1) Rappelez ce que veux dire varier lentement dans une direction donnée.

Q2) Exprimez le ici mathématiquement pour la direction verticale et à l'aide de $W_0(z)$ et m.

Pour simplifier le traitement analytique du problème, on se limite à une version incompressible des équations utilisées dans le cours, on néglige la force de Coriolis et on néglige les effets diabatiques et dissipatifs. Dans ce cadre les équations que nous utiliserons sont données par:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \tag{2a}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{RT}{H}, \tag{2b}$$

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{\kappa T}{H} w = 0, \tag{2c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{2d}$$

Q3) Identifiez à quel processus physique correspond chacune de ces équations.

Q4) Que représentent $\frac{D}{Dt}$, Φ, R, H, et κ.

Dans tout ce problème, on étudie des perturbations de petite amplitude se propageant dans un milieu stratifié verticalement et dont la stratification au repos est donnée par le profil $T_0(z)$. On introduit alors la fonction associé au mouvement Φ_e, c'est à dire que l'on re-écrit

$$\Phi = \Phi_0(z) + \Phi_e(t, x, z) \tag{3}$$

Q5) Re-écrire les Eqs. (2a), (2c), et (2d) en éliminant la Température, et en substituant pour Φ, Φ_e et une fréquence de Brünt-Väisälä N^2 que l'on définira en fonction de $T_0(z)$.

Q6) Donnez une valeur caractéristique de N^2 pour la moyenne atmosphère.

On considère dans la suite que N^2 est constant et que la perturbation évolue dans un écoulement de base au repos (c'est à dire $\overline{u}_0(z) = 0$ dans la terminologie du cours).

Q7) Linéarisez les Eqs. obtenues à la question **Q5)** pour de petites perturbations u', w', et Φ'_{ez}.

On cherche à présent des solutions sous la forme d'ondes monochromatiques selon x,

$$(u', w', \Phi'_{ez}) = \Re\left\{\left(\hat{u}, \hat{w}, \hat{\Phi}_{ez}\right)(z,t)\, e^{ikx}\right\} \tag{4}$$

Q8) Montrez que l'on peut déduire de la question **Q7)** l'équation suivante pour $\hat{w}$:

$$\frac{\partial^4 \hat{w}}{\partial z^2 \partial t^2} - k^2 N^2 \hat{w} = 0. \tag{5}$$

Pour déterminer $\hat{w}$, on fait l'hypothèse que la condition initiale dans l'Eq. (1) produit une perturbation variant lentement dans la verticale <u>et</u> dans le temps. On cherchera donc une solution de la forme

$$\hat{w} = W(t,z) e^{i(mz - \omega t)}, \tag{6}$$

où m est la constante déjà introduite dans l'Eq. 1, ω est une pulsation constante que l'on prendra positive par convention et $W(t,z)$ est une fonction caractérisant l'amplitude de l'onde.

Q9) Exprimez mathématiquement ce que veux dire lentement variable dans le temps.

Q10) Montrez que l'Eq. (5) s'exprime en fonction de W sous la forme

$$\left(\partial_z^2 + 2im\partial_z - m^2\right)\left(\partial_t^2 - 2i\omega\partial_t - \omega^2\right) W - k^2 N^2 W = 0. \tag{7}$$

Q11) En utilisant les hypothèses "lentement variable", déduire des termes dominants l'Eq. (7) une relation de dispersion liant ω à m (on parle de l'ordre 0 de l'Eq. (7)).

Q12) Déduire de l'ordre de grandeur suivant (ordre 1) une équation du type

$$\partial_t W + C_z \partial_z W = 0. \tag{8}$$

Q13) Exprimez C_z, à quelle grandeur introduite dans le cours correspond-elle? le vérifier.

Q14) Montrez que l'Eq. (8) admet une solution du type

$$W(t,z) = W_0(z - C_z t) \tag{9}$$

à quelle condition sur m cette solution correspond-t'elle à l'enveloppe d'une onde se propageant vers le haut?

Q15) Vérifiez à postériori l'hypothèse lentement variable dans le temps.

On étudie à présent l'effet du paquet d'onde sur l'écoulement moyen, où la moyenne est définie comme une moyenne sur la longueur d'onde horizontale:

$$\overline{u} = \frac{k}{2\pi}\int_0^{2\pi/k} u dx. \tag{10}$$

Q16) En reprenant les Eqs. (2a) et (2c), montrez que

$$\partial_t \overline{u} = -\partial_z \overline{u'w'}. \tag{11}$$

Indication: on vérifira que $\overline{w} = 0$.

Q17) A quelle quantité correspond $-\overline{u'w'}$?

Exprimez $-\overline{u'w'}$ en fonction de $\hat{u}$ et $\hat{w}$, puis $\hat{u}$ en fonction de $\hat{w}_z$.

Q18) Déduire de ce résultat et de l'Eq. 9 une expression pour $\overline{u'w'}$ qui ne fasse intervenir que W_0, C_z, z, et t.

Q19) Montrez que

$$\overline{u} = \frac{m^2}{2k\omega} W_0^2(z - C_z t). \tag{12}$$

Q20) Ce dernier résultat est-il conforme au théorème de non-interaction de Eliassen et Palm?

Q21) Discuter le lien entre le signe de $\overline{u}$ et le signe de la vitesse de phase horizontale. Ce résultat vous étonne-t'il?

EXERCICE 2 (6 points):
Description d'une onde

Les cartes sur la Figure 1 présentent des composites de champs dynamiques issues des réanalyses du CEPPMT. Les données ont été filtrées dans l'espace et dans le temps de manière à extraire la structure caractéristique d'une des ondes planétaires jouant un rôle très important sur le dynamique de la stratosphère.

Q22) A un instant donné et à une altitude log-pression donnée dans la basse stratosphère (21km), les champs de la hauteur du géopotentiel $Z = \Phi/g$ et du vent horizontal (u, v) associés à notre perturbation sont présentés sur la Figure 1a.

Reconnaissez-vous de quel type d'onde il s'agit? Justifiez.

Décrire le mécanisme de propagation horizontale de cette perturbation.

Q23) Les champs sur la Figure 1b montrent en fonction de la longitude et du temps, l'évolution de la Température T à l'équateur associée à notre perturbation.

Quelle est le signe et la valeur de sa vitesse de phase horizontale?

Pour le type de perturbation que vous avez identifié à la question **22)**, cela vous étonne-t'il?

24) Toujours à partir de la Figure 2b, essayer de déduire le signe de la vitesse de groupe horizontale de la perturbation.

Cela vous étonne-t'il? Justifiez en utilisant la relation de dispersion correspondant à la perturbation montrée sur la Figure 1.

Q25) La Figure 1c montre à un instant donné et en fonction de la longitude et de l'altitude, la structure du géopotentiel dans la bande équatoriale associée à la perturbation.

Justifiez que cette onde se propage vers le haut.

On note aussi sur la Figure 1c que la perturbation est fortement atténuée dans la direction verticale dans la basse stratosphère. Savez-vous à quoi cela est du?

Q26) La Figure 1d montre une carte de l'évolution au cours du temps et en fonction de l'altitude de l'amplitude de notre perturbation (couleurs). Les lignes en noir montrent l'évolution caractéristique du vent zonal moyen dans la bande équatoriale lors du passage de ce type de perturbation. Les lignes continues (pointillées) correspondants à des valeurs positives (négatives) on voit donc que le vent zonal a tendance à diminuer lorsque notre perturbation est atténuée.

Cela vous étonne-t'il?

Sur quelle phase de l'oscillation Quasi-Biennale (Est ou Ouest) pensez vous que ce type d'onde agit?

Q27) Donnez au contraire l'exemple d'une onde d'échelle planétaire ayant l'effet opposé sur le vent zonal moyen dans la basse stratosphère équatoriale.

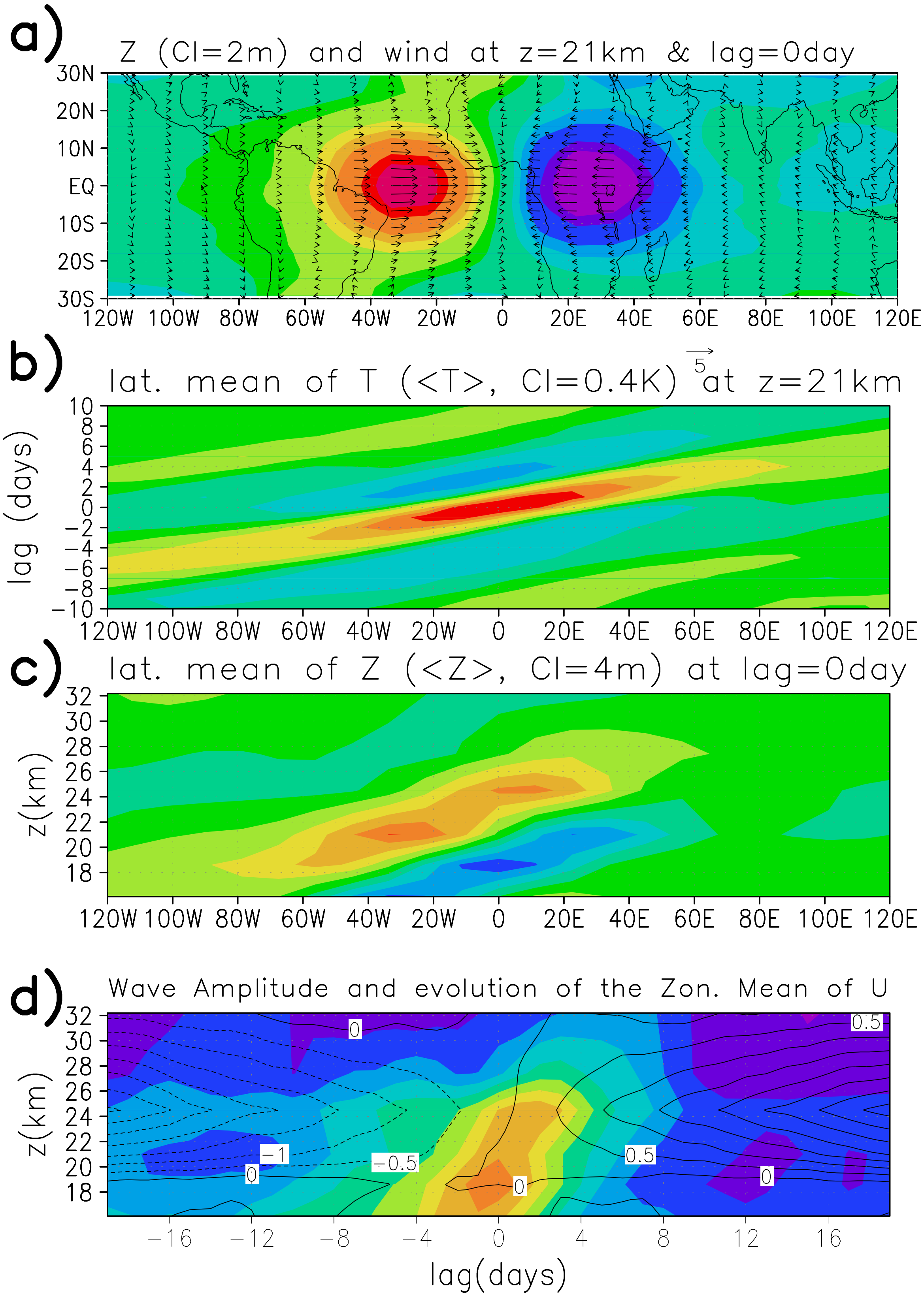

Figure 1:

Cartes composites correspondants à des perturbations affectant la basse stratosphère dans les données de réanalyse du CEPPMT. Les couleurs chaudes correspondent aux valeurs positives et les couleurs froides aus valeurs négatives.