TD du cours 3 de DMAOA, année 2008-2009

I) Théorie des rayons dans un champ de vent

Les ondes dans les fluides différent des autres ondes par le fait qu'elles se propagent dans un milieu en mouvement décrit par le champ de vent $\vec{U}(\vec{x}, t)$. En géneral, les principes physiques permettent de se ramener aux propriétés des ondes dans un milieu au repos, si on se place dans un référentiel se déplaçant à la vitesse $\vec{U}$. Dans ce référentiel, on peut dans le cas où $\vec{U}$ et les autres propriétés du milieu varient lentement dans l'espace et dans le temps écrire une relation de dispersion du type,

$$\hat{\omega} = \Delta\left(\vec{k}, \vec{x}, t\right)$$

où les variations en $\vec{x}$ et t sont liés aux variations des proprit́és physiques du milieu ne faisant pas intervenir directement la vitesse. On appelle $\hat{\omega}$ la fréquence intrinsèque (ou relative) de l'onde.

I.1) Exprimer en fonction de $\hat{\omega}$ la fréquence de l'onde telle qu'elle est vue par un observateur fixe. C'est la fréquence absolue, on la notera ω.

I.2) Montrer que dans un milieu ne variant pas dans l'espace et dans le temps (propriétés physiques et vent), le nombre d'onde et la fréquence d'une onde ne se modifient pas pour un observateur se déplaçant à la vitesse,

$$\vec{U} + \vec{\hat{c}}_g,$$

où $\vec{\hat{c}}_g = \vec{\nabla}_{\vec{k}}\Delta$ est la vitesse de groupe intrinsèque.

I.3) Donner la loi d'évolution de la fréquence et des nombres d'ondes lorsque les propriétés physique du milieu et le vent varient dans l'espace et dans le temps.

On considère une onde se propageant dans un milieu aux propriétés physiques uniformes mais où le vent moyen varie dans la direction verticale et est de la forme:

$$\vec{U} = \overline{u}_0(z)\vec{e}_x$$

I.4) Montrer que la fréquence absolue de l'onde ne varie pas le long d'un rayon. Qu'en est-il de sa fréquence relative?

I.5) Sans faire de calcul, quel nombre d'onde varie? Le démontrer.

II) Les croix de Saint-Andrew

On propose d'étudier le champ d'ondes de gravité produites par un petit cylindre oscillant à une pulsation ω constante au centre d'une cuve d'eau salée et dont la salinité décroit avec la hauteur z^*. On se limite au cas bi-dimensionnel dans lequel les équations non-forcées de Boussinesq s'écrivent:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

$$\frac{D\mathrm{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z^*} - g\frac{\tilde{\rho}}{\rho_s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z^*} = 0$$

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} - \frac{\rho_s}{g}N^2\mathrm{w} = 0.$$

où $N^2 = -\frac{g}{\rho_s}\frac{d\rho_0}{dz^*}$. On rappelle que dans l'approximation de Boussinesq, la pression et la densité sont écrits sous la forme,

$$\begin{array}{cccc} p = & p_s(z)+ & p_0(z)+ & \tilde{p}(x,z,t) \\ \rho = & \rho_s+ & \rho_0(z)+ & \tilde{\rho}(x,z,t) \\ & \text{reference} & \text{stratif} & \text{du au} \\ & & \text{stable} & \text{mouvement} \end{array}$$

On se place dans le cadre où le forçage produit des ondes de petite amplitude.

II.1) Donner en fonction de u', w', p' et ρ' le système d'équations linéaires que doit satisfaire la perturbation induite par W_0.

On cherche à présent le solution sous la forme de superposition d'harmoniques chacune de la forme

$$\mathrm{w}'(w, x, z^*, t) = \Re\left\{\hat{w}e^{i(kx+mz^*-\omega t)}\right\} \tag{1}$$

où ω est la fréquence imposé.

II.2) Donner la relation de dispersion liant ω à k et m. Pour quelles valeurs de ω le cylindre produit-il des ondes internes de gravité se propageant vers le haut?

II.3) Calculer la vitesse de groupe $\vec{c}_g$. En déduire que l'angle θ que font les rayons d'onde avec l'horizontale ne varie qu'en fonction de la fréquence ω.

En discutant l'angle fait par l'onde pour différentes valeurs de ω vérifiez que le résultat obtenu est bien conforme aux résultats de l'expérience montrés sur la Figure 2.

II.4) Calculer la vitesse de phase $\vec{c}$. En déduire que

$$\vec{c}_g \cdot \vec{c} = 0.$$

Ce résultat est-il comforme aux structures d'ondes visibles sur la Figure 2?

Figure 1: *Protocole expérimentale pour l'étude des ondes internes de gravité produites par une source fixe oscillant à une fréquence ω. a) cylindre oscillant verticalement, b) pour produire la stratification on mélange continuement de l'eau salée avec de l'eau pure, et on injecte progressivement le mélange par le bas de la cuve. Au cours du temps, la fraction d'eau salé dans le mélange augmente, ce qui crée la stratification stable en densité.*

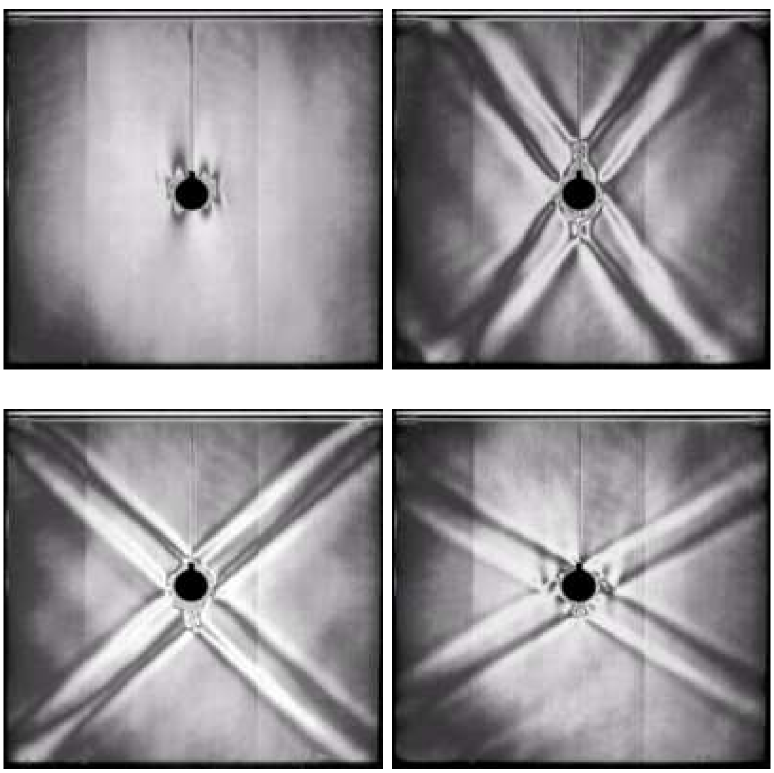

Figure 2: *Champs d'ondes produits par un cylindre oscillant au centre d'une cuve rectangulaire remplie d'un fluide stratifié en densité et dont la fréquence de Briünt-Väisälä est $N^{-1} = 4s$. a) $\omega^{-1} = 3.8s$, b)$\omega^{-1} = 5s$, c)$\omega^{-1} = 5s$, et d)$\omega^{-1} = 8s$.*