Les flux d'Eliassen Palm dus aux ondes de Rossby

Dans l'établissement de la circulation générale de l'atmosphère, les ondes jouent un rôle essentiel. Elles sont produites par instabilité de l'écoulement du au forçâge moyen thermique (solaire direct ou infrarouge), ou encore par des causes plus locales comme les montagnes ou la convection. Une manière naturelle de décrire l'action de ces ondes sur l'écoulement moyen est d'opérer une séparation du type:

$$u(x,y,z,t) = \overline{u}(y,z,t) + u'(x,y,z,t) \text{ où } \overline{u} = \frac{1}{L}\int_0^L u dx. \tag{1}$$

Dans ce formalisme L est la longueur du cercle de latitude et on appelle $\overline{u}$ la moyenne zonale de u. En partant des équations de la dynamique quasi-géostrophique sur le plan β aux moyennes latitudes, le but de ce problème est de montrer que cette définition de l'écoulement en moyenne zonale n'est pas entièrement adaptée pour décrire l'influence des ondes de grande échelle sur l'écoulement moyen. Il s'agit aussi de dégager les propriétés essentielles que doit satisfaire une perturbation pour qu'elle influence l'écoulement moyen.

On rappelle l'approximation quasi géostrophique des équations du cours dans le plan β aux moyennes latitudes:

$$\begin{aligned} D_g u_g - f_0 v - \beta v_g &= -\partial_x \phi_e + X \\ D_g v_g + f_0 u + \beta u_g &= -\partial_y \phi_e + Y \\ \partial_z \Phi_e &= \tfrac{H}{R}\theta_e e^{-\kappa z/H} \\ D_g \theta_e + w\tfrac{d\theta_0}{dz} &= Q \\ \partial_x u + \partial_y v + \rho_0^{-1}\partial_z(\rho_0 w) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

On rappelle que dans l'approximation du plan β, le paramètre de Coriolis est représenté par $f = f0 + \beta y$ où f_0 et β sont des constantes. On rappelle aussi que dans l'approximation quasi géostrophique, la dérivée particulaire est estimée selon la vitesse géostrophique:

$$D_g = \partial_t + u_g\partial_x + v_g\partial_y \tag{3}$$

Et que la vitesse géostrophique est donnée par:

$$u_g = -\frac{\partial_y \Phi_e}{f_0}, \quad v_g = \frac{\partial_x \Phi_e}{f_0}. \tag{4}$$

Toujours dans ce formalisme quasi-géostrophique, u, v, et w sont les trois composantes de la vitesse et $\Phi_0(z)$ est la stratification du fluide au repos. Enfin, X, Y, et Q représentent les forçages et les dissipations mécaniques et thermiques. Pour une évolution réversible et adiabatique, $X = Y = Q = 0$.

1) Monter que $\overline{v}_g = 0$.

2) Former les équations pour lévolution des moyennes $\overline{u}_g$ et $\overline{\theta}_e$ (on exprimera les tendances $\rho_0\partial_t\overline{u}_g$ et $\rho_0\partial_t\overline{\theta}_e$ en fonction de la divergence des flux moyens $\rho_0\overline{v_g'u_g'}$ et $\rho_0\overline{v_g'\theta_e'}$.

3) Exprimer la conservation de la masse pour la circulation méridienne moyenne.

de partir d'une équation dévolution pour le tourbillon potentel quasi-géostrophique:

$$q = \partial_x v_g - \partial_y u_g + f_0 + \beta y + \frac{f_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0 \theta_e}{\theta_{0z}}\right)_z \tag{5}$$

4) A partir des Eq. (2) montrer que

$$D_g q = Z, \tag{6}$$

où Z n'est fonction que de X, Y, et Q.

5) En déduire une équation pour l'évolution de la perturbation de tourbillon potentiel, q', et dans le cadre général ou la perturbation est dissipé ou forcée ($Z' \neq 0$) et pour un écoulement de base quelconque $\overline{u}_0(y,z) \neq 0$.

6) Déduire de la question **5)**, une équation pour l'évolution de l'action moyenne:

$$\overline{A} = \frac{\rho_0}{2}\frac{\overline{q'^2}}{\overline{q}_{0y}}. \tag{7}$$

Dans la plupart des régions de l'atmosphère aux moyenne latitudes de l'hémisphère nord, $\overline{q}_{0y} > 0$ ce qui fait de $\overline{A}$ une quantité quadratique définie positive permettant de mesurer l'amplitude de l'onde.

7) Montrer que le flux de tourbillon potentiel moyen

$$\rho_0 \overline{v'_g q'} = \vec{\nabla} \cdot \vec{\overline{F}} \tag{8}$$

où $\vec{F}$ est le flux d'Eliassen-Palm avec $F^y = -\rho_0 u'_g v'_g$, $F^z = \rho_0 \frac{f_0 \theta'_e v'_g}{\theta_{0z}}$

8) Montrer que l'évolution de $\overline{A}$ peut aussi s'écrire sous la forme

$$\partial_t \overline{A} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\overline{F}} = \frac{\overline{Z'q'}}{\overline{q}_{0y}}. \tag{9}$$

9) Montrer que lorsque le forçage moyen $X = 0$, l'équation d'évolution pour la vitesse zonale moyenne $\overline{u}_g$ est de la forme

$$\partial_t \overline{u}_g - f_0 \overline{v}^* = \frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla} \cdot \vec{\overline{F}} \tag{10}$$

où $\overline{v}^*$ est la vitesse méridionale en "moyenne eulérienne transformée".

10) Définir une vitesse verticale $\overline{w}^*$ de façon à définir une circulation méridienne conservant la masse de l'atmosphère.

11) Exprimer l'équation pour la température potentielle moyenne établie à la question **2)** lorsque le chauffage moyen est nul $\overline{Q} = 0$ et en remplaçant $\overline{w}$ par $\overline{w}^*$

10) Déduire de l'ensemble de ces résultats qu'une perturbation linéaire, stationnaire, non forcée, non dissipée ne modifie pas l'écoulement moyen.