Dynamique de la moyenne atmosphère et des ondes atmosphériques

6) Les ondes équatoriales

a) Théorie dans le plan β-équatorial

b) Ondes de Kelvin

c) Ondes de Rossby-gravité

d) Ondes de Rossby

e) Ondes de gravité

a) Théorie dans le plan β équatorial

Equations linéarisées dans le plan tangent équatorial, solutions du type:

$$\left(u', v', w', \Phi'\right) = \Re\left[\left(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\Phi}\right) e^{i(s\lambda - 2\Omega\sigma t)}\right]$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{u} - 2\Omega\phi\hat{v} + \frac{is}{a}\hat{\Phi} = 0$$
$$-2i\Omega\sigma\hat{v} + 2\Omega\phi\hat{u} + \frac{1}{a}\hat{\Phi}_\phi = 0$$
$$\frac{is}{a}\hat{u} + \frac{1}{a}\hat{v}_\phi + \rho_0^{-1}\left(\rho_0\hat{w}\right)_z = 0$$
$$-2i\Omega\sigma\hat{\Phi}_z + N^2\hat{w} = 0$$

Des deux premières équations il est raisonnable de chercher des solutions telles que $\hat{u}$, $\hat{v}$, et $\hat{\Phi}$ aient la même structure verticale:

$$\left(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\Phi}\right) = e^{z/2H}U(Z)\left(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}\right)(\phi)$$

$$\hat{w} = e^{z/2H}W(Z)\tilde{w}(\phi)$$

On introduit alors une constante de séparation h telle que

$$U = W_z - W/2H, \quad U_z + U/2H = -W\frac{N^2}{gh}$$

- On garde un formalisme proche de celui utilisé pour les marées:

γ=4Ω²a²/(gh)

- La séparation en structures verticales correspond à la méthode de séparation des variables. Elle permet de traiter le cas où ***N*** varie.

- Lorsque ***N=cte***, elle est équivalente à chercher des solutions ayant un nombre d'onde vertical ***m*** tel que:

m²=N²/gh-1/4H²

$$-2i\Omega\sigma\tilde{u} - 2\Omega\phi\tilde{v} + \frac{is}{a}\tilde{\Phi} = 0$$
$$-2i\Omega\sigma\tilde{v} + 2\Omega\phi\tilde{u} + \frac{1}{a}\tilde{\Phi}_\phi = 0$$
$$\frac{is}{a}\tilde{u} + \frac{1}{a}\tilde{v}_\phi - 2i\frac{\Omega\sigma}{gh}\tilde{\Phi} = 0$$

Equation de structure verticale:

$$W_{zz} + \underbrace{\left(\frac{N^2}{gh} - \frac{1}{4H^2}\right)}_{\approx m^2} W = 0$$

b) Les ondes de Kelvin

γ=4a²Ω²/(gh)

m²=N²/(gh)-1/(4H²)=γN²/(4Ωa²)−1/(4H ²)

Théorie

Relations de polarizations en fonction de $\tilde{v}$

$$\left(\gamma\sigma^2 - s^2\right)\tilde{u} = i\sigma\gamma\phi\tilde{v} - is\tilde{v}_\phi$$
$$\left(\gamma\sigma^2 - s^2\right)\tilde{\Phi} = -2i\Omega\sigma a\tilde{v}_\phi + 2i\Omega as\phi\tilde{v}$$

Onde de Kelvin: $\tilde{v} = 0$. Il faut

$$\sigma = s/\sqrt{\gamma}$$

pour qu'une solution finie et non-triviale existe, sa structure est donnée par:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2}, \quad \tilde{u} = \frac{\tilde{\Phi}}{\sqrt{gh}}$$

- Remarque générale:

Par rapport au problème des marées, il est plus simple de chercher des solutions en utilisant la vitesse méridienne.

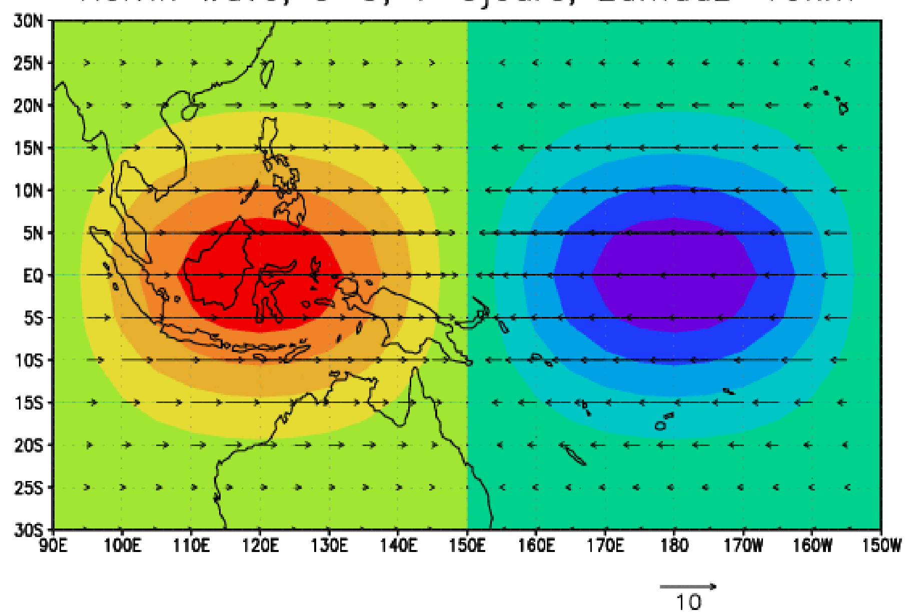
Propagation vers l'Est uniquement

Vitesse de phase ***c=2Ωaσ/s=(gh)**$^{1/2}$*

Structure spatiale d'une onde de gravité piégée dans la bande équatoriale

Le confinement augmente avec γ (ou lorsque ***h*** diminue)

Kelvin wave, s=3, T=5jours, Lamdaz=10km



b) Les ondes de Kelvin

$\gamma=4a^2\Omega^2/(gh)$

$m^2=N^2/(gh)-1/(4H^2)=\gamma N^2/(4\Omega a^2)-1/(4H^2)$

Observations (1)

Données tous les jours pendant un an, décomposition spectrale:

$$T(\lambda,\phi,z,t)=\sum_{s=0}^{s=\mathrm{nlo}/2}\ \sum_{j=-\mathrm{nda}/2}^{\mathrm{nda}/2}\hat{T}(\phi,z)e^{i(s\lambda-2\Omega\sigma_j t)}$$

nlo: points en longitude; nda: nombre de jours dans l'année; $\sigma_j=\frac{j}{2\mathrm{nda}}$.

Question: Quelles sont les perturbations dominantes qui font varier T dans la stratosphère équatoriale?

On construit les périodigrammes:

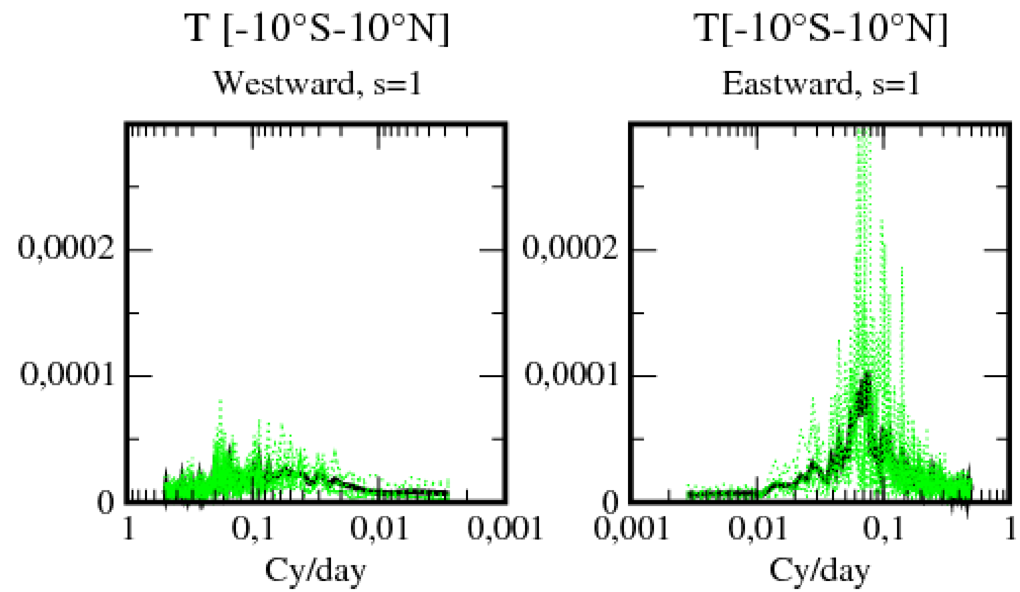
$$P_T(\phi,z,s,\sigma)=\hat{T}\hat{T}^*.$$

En moyenne et sur la basse stratosphère équatoriale

$$<P_T>(s,\sigma)=\sum_{-10^0N}^{10^0N}\ \sum_{16\mathrm{km}}^{32\mathrm{km}}\hat{T}\hat{T}^*$$

On peut moyenner sur plusieurs années $<P_T>$ pour réduire la variance spectrale, on cherche alors à estimer le Spectre, S_T.

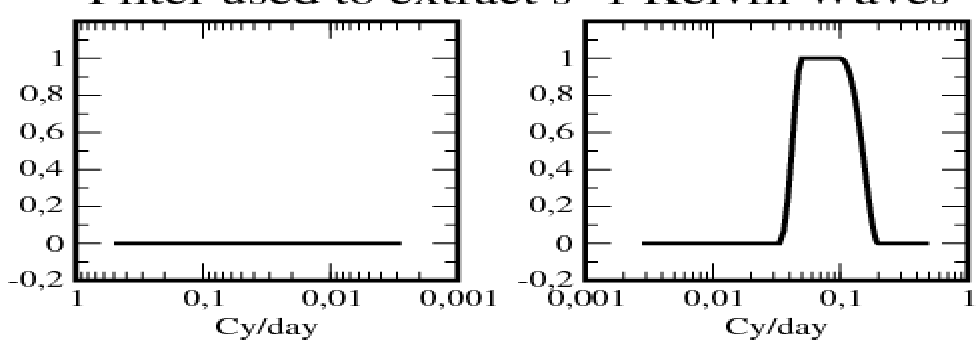
11 1-year Spectra, NCEP data



- Pour le nombre d'onde s=1, les perturbations qui font le plus varier T, sont des ondes vers l'Est de période entre 10 et 20 jours.
- Pour extraire ces perturbations, on introduit un filtre dans l'espace spectral qui ne garde que s=1 et les fréquences ente 10 et 20 jours.

$$\hat{F}=\delta(s-1)\hat{f}(\sigma)$$

Filter used to extract s=1 Kelvin Waves



b) Les ondes de Kelvin

$\gamma=4a^2\Omega^2/(gh)$

$m^2=N^2/(gh)-1/(4H^2)=\gamma N^2/(4\Omega a^2)-1/(4H^2)$

Observations (2)

On reconstruit alors un champ de T filtré:

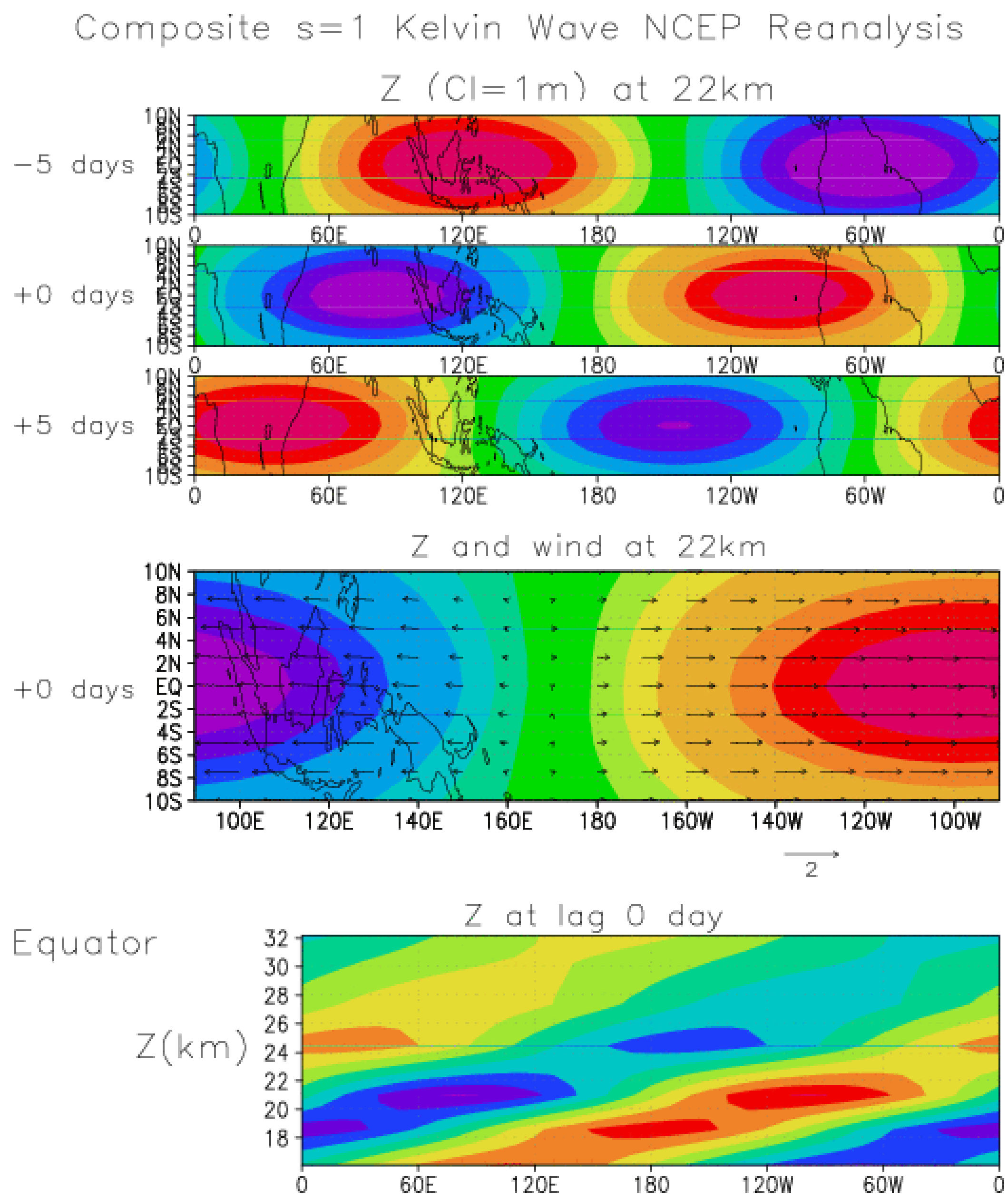
$$T_F(\lambda,\phi,z,t)=\sum_{s=0}^{s=\mathrm{nlo}/2}\ \sum_{j=-\mathrm{nda},2}^{\mathrm{nda}}\hat{F}\hat{T}(\phi,z)e^{i(s\lambda-2\Omega\sigma_j t)}$$

Comme l'onde de kelvin à une altitude cible donnée $z_c =$ 22km, et à une latitude données λ a une structure uniforme en latitude, on forme l'indice:

$$K_1=\sum_{\phi=-10^oN}^{10^oN}T_F(\lambda=0,\phi,z_c,t)$$

Les extrema de K_1 indiquent le passage des crètes et des creux de l'onde de Kelvin au-dessus du méridien de Greenwich, et à l'altitude z_c.

Les cartes montrées sont des cartes composites indexés aux maximas et aux minima les plus forts de K_1.



a) (retour à la) Théorie dans le plan β équatorial

Solutions pour v#0

On injecte les relations de polarization dans le bilan de quantité de mouvement selon ϕ:

$$-2i\Omega\sigma\tilde{v} + 2\Omega\phi\tilde{u} + \frac{1}{a}\tilde{\Phi}_{\phi} = 0$$

Il vient l'équation pour $\tilde{v}$

$$\tilde{v}_{\phi\phi} + \left(\gamma\sigma^2 - s^2 - \frac{s}{\sigma} - \gamma\phi^2\right)\tilde{v} = 0$$

Dont on cherche des solutions de la forme:

$$\tilde{v}\left(\phi\right) = e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2} V\left(\gamma^{1/4}\phi\right)$$

Equation pour V, $(x = \gamma^{1/4}\phi)$:

$$\ddot{V} - 2x\dot{V} + \left(\gamma^{1/2}\sigma^2 - \frac{s^2}{\gamma^{1/2}} - \frac{s}{\gamma^{1/2}\sigma} - 1\right)V = 0$$

- **Les polynomes de Hermite, $H_\nu(x)$:**

Eq. différentielle: $H_\nu'' - 2xH_\nu' + 2\nu H_\nu = 0$

Récurrence: $H_\nu' = 2\nu H_{\nu-1}$; $H_{\nu+1} = 2xH_\nu - 2\nu H_{\nu-1}$

Quelques exemples: $H_0 = 1$, $H_1 = 2x$, ...

Ils forment une base orthogonale pour les fonctions sur $-1<x<+1$, moyennant le poid e^{-x^2}

Relation de dispersion:

$$\gamma^{1/2}(2\nu + 1) = \gamma\sigma^2 - s^2 - \frac{s}{\sigma}$$

Forme de la solution:

$$\tilde{v}(\phi) = \tilde{v}_0 e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2} H_\nu\left(\gamma^{1/4}\phi\right)$$

$$\tilde{u}(\phi) = i\tilde{v}_0\gamma^{1/4}e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2}\times \left[\frac{H_{\nu+1}\left(\gamma^{1/4}\phi\right)}{2\left(\gamma^{1/2}\sigma - s\right)} + \frac{\nu H_{\nu-1}\left(\gamma^{1/4}\phi\right)}{\gamma^{1/2}\sigma + s}\right]$$

$$\tilde{\Phi}(\phi) = 2ia\Omega\tilde{v}_0\gamma^{-1/4}e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2}\times \left[\frac{H_{\nu+1}\left(\gamma^{1/4}\phi\right)}{2\left(\gamma^{1/2}\sigma - s\right)} - \frac{\nu H_{\nu-1}\left(\gamma^{1/4}\phi\right)}{\gamma^{1/2}\sigma + s}\right]$$

c) Les ondes de Rossby-gravité

γ=4a²Ω²/(gh)

$$\gamma = 4a^2\Omega^2/(gh)$$

$$m^2 = N^2/(gh) - 1/(4H^2) = \gamma N^2/(4\Omega a^2) - 1/(4H^2)$$

Théorie

La relation de dispersion devient,

$$\gamma^{1/2} = \gamma\sigma^2 - s^2 - \frac{s}{\sigma}$$

Elle se reécrit:

$$\sigma^2\left(\gamma^{1/2} + s/\sigma\right)\left(\gamma^{1/2} - s/\sigma\right) = \left(\gamma^{1/2} + s/\sigma\right)$$

Comme la solution $\gamma^{1/2} + s/\sigma = 0$ n'est pas réaliste (voir la description des ondes de Kelvin), il vient:

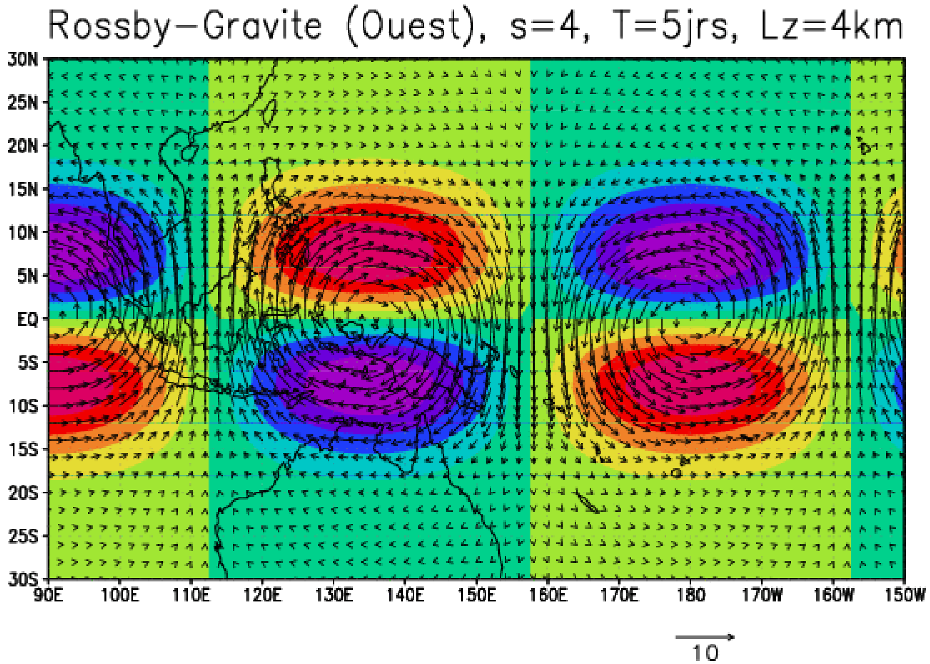
$$\gamma^{1/2} = \frac{1 + s\sigma}{\sigma^2}$$

Forme de la solution:

$$\left(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}\right) = \tilde{v}_0\left(i\sigma\gamma^{1/2}\phi, 1, 2ia\Omega\sigma\phi\right)e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2}$$

- <u>Les Ondes de Rossby Gravité:</u>

Propagation vers l'Est où vers l'Ouest, les plus fréquentes vont vers l'Ouest et ont pour nombre d'ondes s=4, 5.



c) Les ondes de Rossby-gravité

γ=4a²Ω²/(gh)

m²=N²/(gh)-1/(4H²)=γN²/(4Ωa²)−1/(4H ²)

Observations (1)

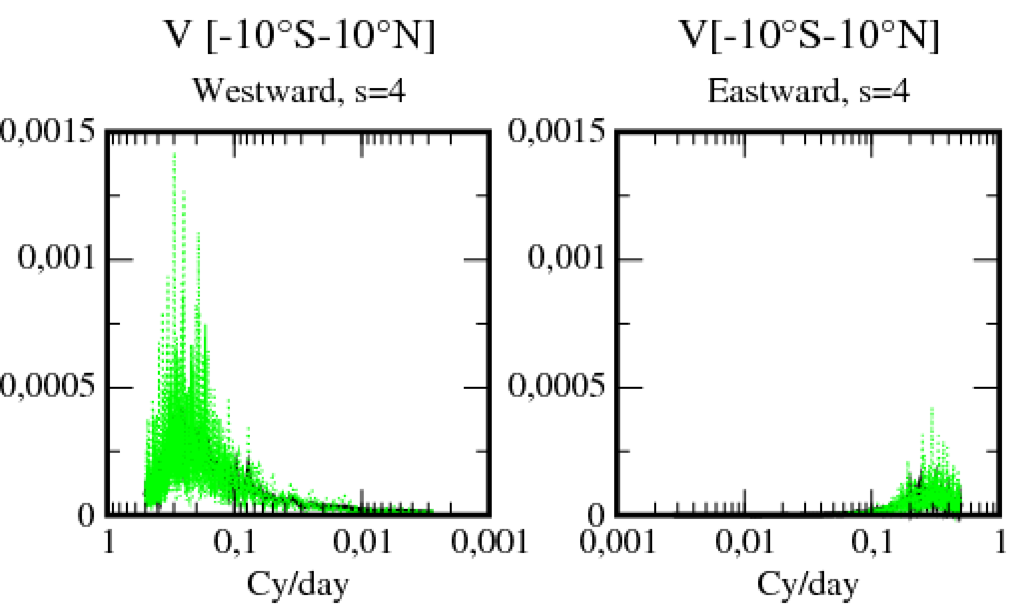
Pour distinguer de l'onde de Kelvin, on travaille sur la vitesse méridienne:

$$V(\lambda,\phi,z,t)=\sum_{s=0}^{s=\text{nlo}/2}\sum_{j=-\text{nda}/2}^{\text{nda}/2}\hat{V}(\phi,z)e^{i(s\lambda-2\Omega\sigma_j t)}$$

On construit la moyenne des périodigramme sur la basse stratosphère équatoriale

$$<P_V>(s,\sigma)=\sum_{-10^0 N}^{10^0 N}\sum_{16\text{km}}^{32\text{km}}\hat{V}\hat{V}^*$$

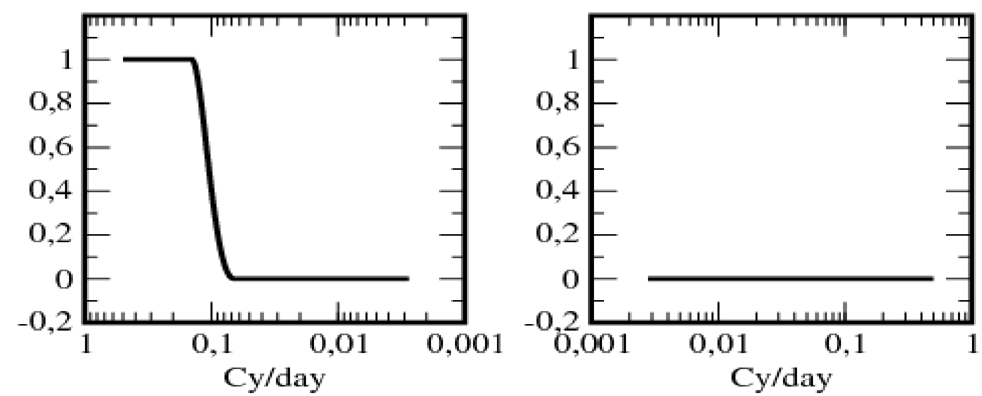
11 1-year Spectra, NCEP data



- Pour l'onde s=4, le signal vers l'Ouest domine, on filtre V avec un filtre qui couvre les périodes correspondants (1-10j vers l'ouest).

$$\hat{F}=\delta(s-4)\hat{f}(\sigma)$$

Filter used to extract s=4 mixed Waves



On reconstruit alors un champ de V filtré:

$$V_F(\lambda,\phi,z,t)=\sum_{s=0}^{s=\text{nlo}/2}\sum_{j=-\text{nda}/2}^{\text{nda}/2}\hat{F}\hat{V}(\phi,z)e^{i(s\lambda-2\Omega\sigma t)}$$

Comme les ondes mixtes à une altitude cible donnée $z_c=22$km, et à une latitude données λ ont une structure en V uniforme en latitude, on forme l'indice:

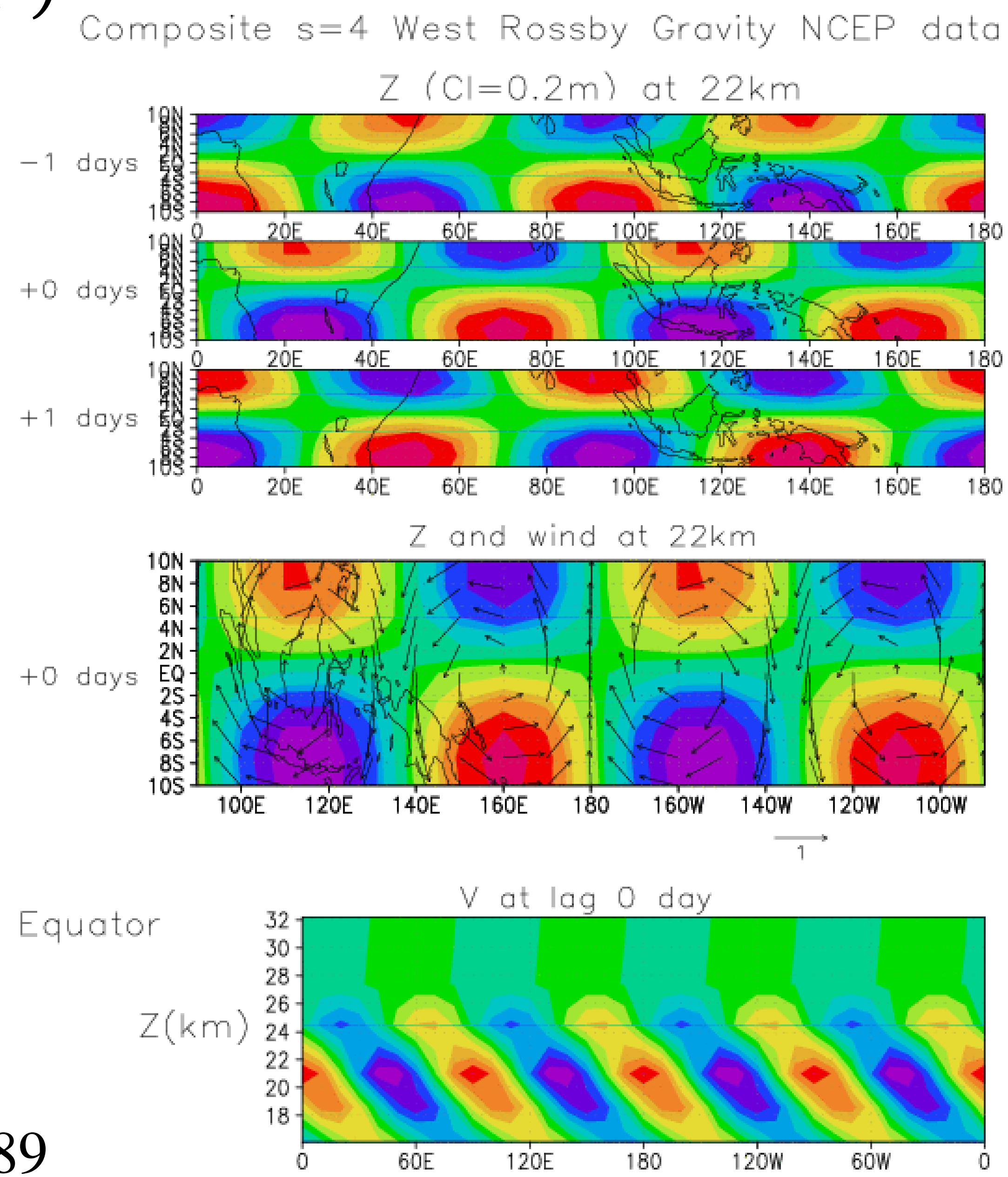
$$M_4=\sum_{\phi=-10^oN}^{10^oN}V_F(\lambda=0,\phi,z_c,t)$$

c) Les ondes de Rossby-gravité

$\gamma = 4a^2\Omega^2/(gh)$

$m^2 = N^2/(gh) - 1/(4H^2) = \gamma N^2/(4\Omega a^2) - 1/(4H^2)$

Observations (2)



d) Les ondes de Rossby

$\gamma = 4a^2\Omega^2/(gh)$

$m^2 = N^2/(gh) - 1/(4H^2) = \gamma N^2/(4\Omega a^2) - 1/(4H^2)$

Théorie:

$\nu = 1, 2, \ldots$

Ce sont les solutions pour lesquelles:

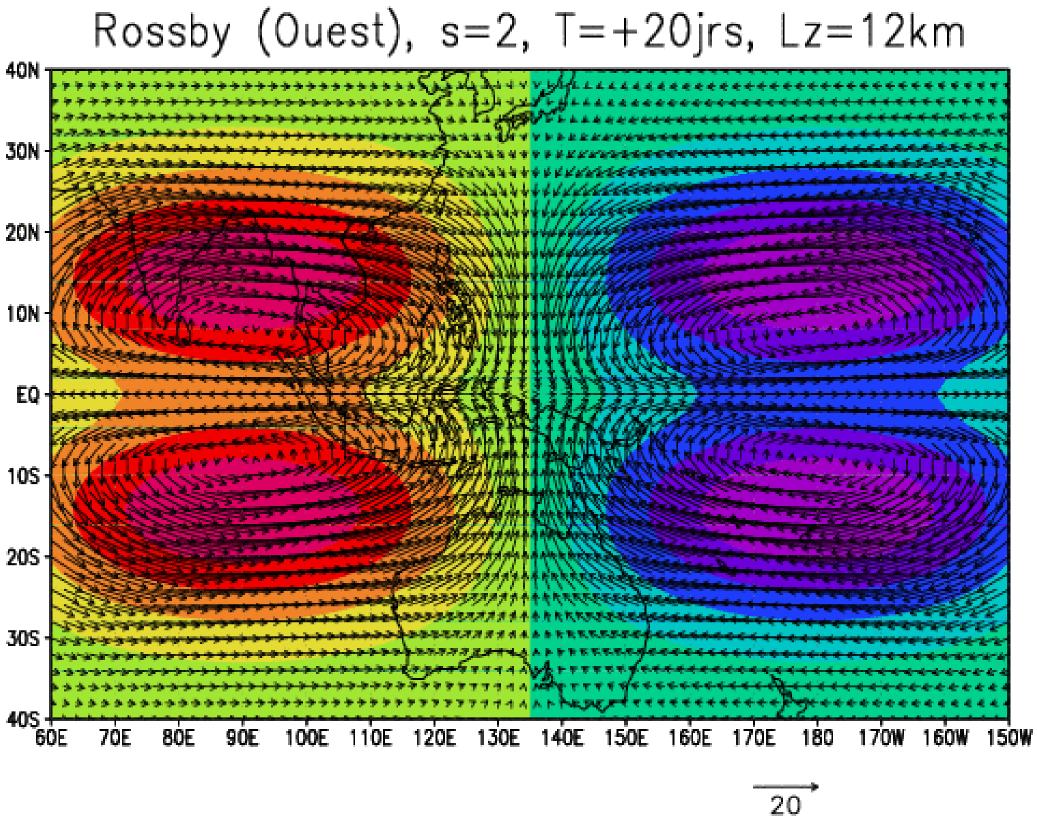
$$\gamma^{1/2} = \frac{2\nu + 1 - \sqrt{(2\nu+1)^2 + \sigma^2 s^2 + \sigma s}}{2\sigma^2}$$

Il faut $-1 < \sigma s < 0$ pour avoir des solutions réalistes.

- Les Ondes de Rossby:

Propagation vers l'Ouest.

Exemple pour $\nu=1$



d) <u>Les ondes de Rossby</u>

$\gamma=4a^2\Omega^2/(gh)$

$m^2=N^2/(gh)-1/(4H^2)=\gamma N^2/(4\Omega a^2)-1/(4H^2)$

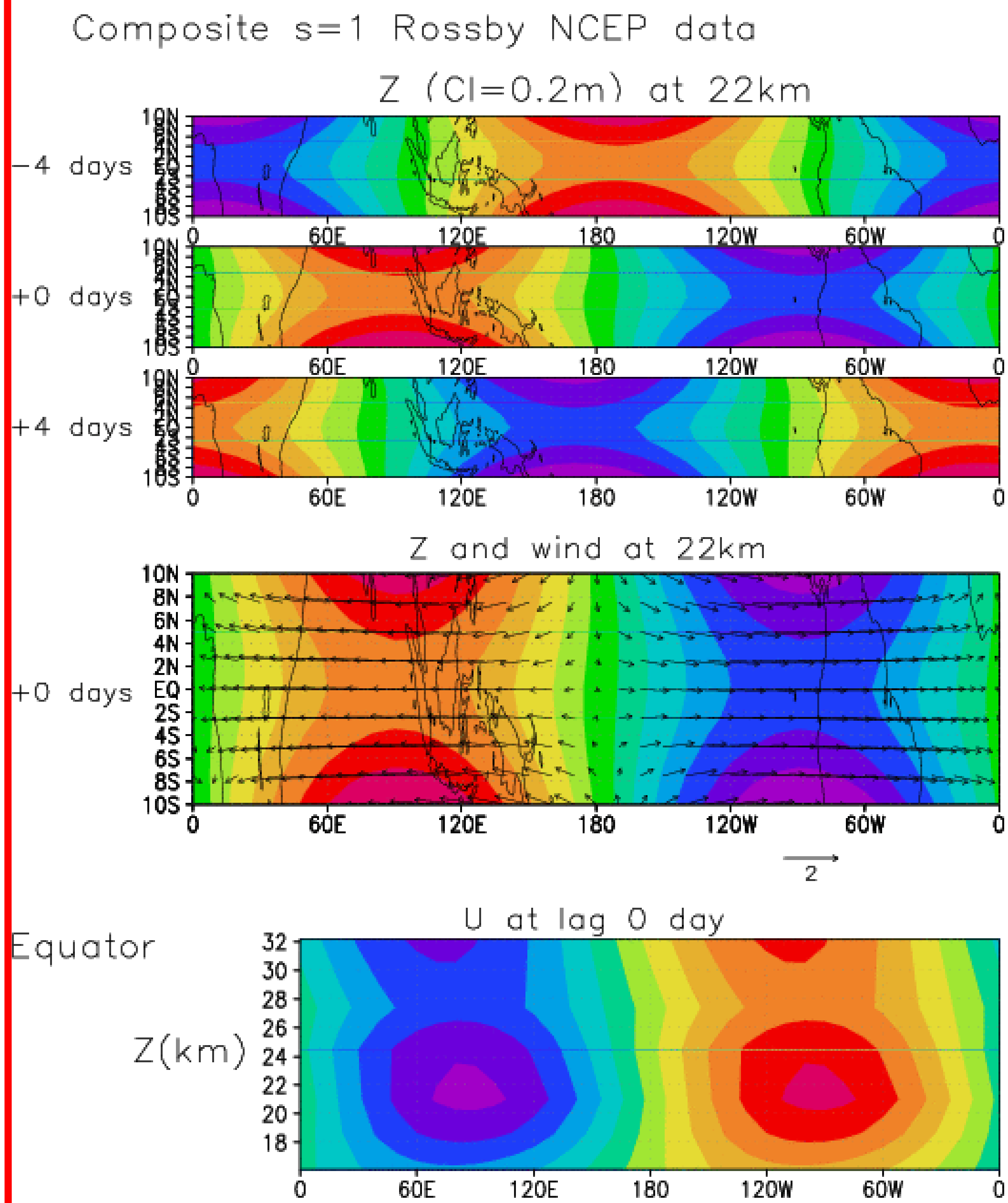
Observations:

On reconstruit alors un champ de V filtré:

$$V_F(\lambda,\phi,z,t)=\sum_{s=0}^{s=\mathrm{nlo}/2}\ \sum_{\sigma=-\mathrm{nda},2}^{\mathrm{nda}}\hat{F}\hat{V}(\phi,z)e^{i(s\lambda-2\Omega\sigma t)}$$

Comme pour les ondes de Rossby, V change de signe à l'équateur, on forme l'indice:

$$R_1=\sum_{\phi=-10^oN}^{10^oN}\phi V_F(\lambda=0,\phi,z_c,t)$$



e) Les ondes de gravité

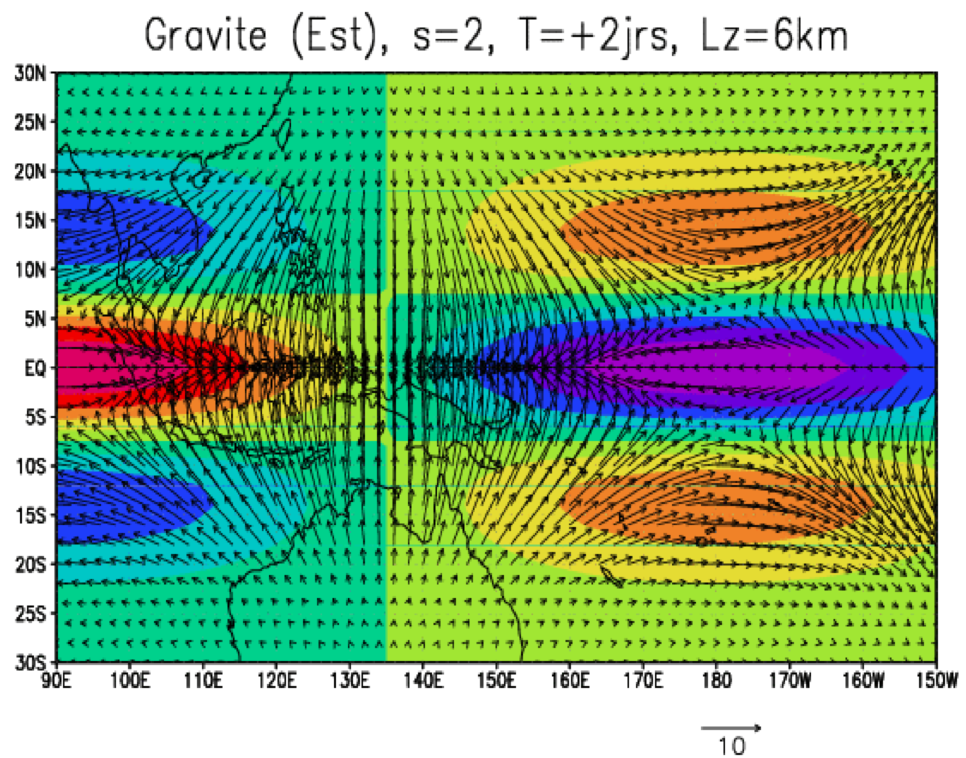
$\gamma=4a^2\Omega^2/(gh)$

$m^2=N^2/(gh)-1/(4H^2)=\gamma N^2/(4\Omega a^2)-1/(4H^2)$

Théorie:

Ce sont les solutions pour lesquelles:

$$\gamma^{1/2} = \frac{2\nu + 1 + \sqrt{(2\nu+1)^2 + \sigma^2 s^2 + \sigma s}}{2\sigma^2}$$



Propagation vers l'Est ou vers l'Ouest

Exemple pour $\nu=1$

C'est la structure dynamique des modes de marées