TD du cours 8 de DMA, année 2009-2010

Action et flux d'Eliasen Palm pour les ondes de Rossby

On rapelle que dans le cadre de l'approximation quasi-géostrophique utilisée dans le cours, la conservation de la vorticité potentielle quasi géostrophique q s'écrit,

$$(\partial_t + u_g\partial_x + v_g\partial_y)\, q = Z. \tag{1}$$

où Z représente les processus irreversibles et diabatiques.

1) Pour un écoulement moyen donné $\overline{u}_g(y,z)$ (et donc de vorticité potentielle donnée $\overline{q}(y,z)$), établir une équation linéaire pour l'évolution de la perturbation de vorticité potentielle q' associée à une onde de Rossby.

2) En déduire la loi pour l'évolution de l'action:

$$(\partial_t + \overline{u}_g\partial_x)\, A + \rho_0 v_g' q' = \rho_0 \frac{Z'q'}{\overline{q}_y}, \quad \text{où} \quad A = \rho_0 \frac{q'^2}{2\overline{q}_y}. \quad \text{et où} \quad \rho_0(z) = \rho_s e^{-z/H}. \tag{2}$$

3) Sachant que

$$q' = v_{gx}' - u_{gy}' + \frac{f_0}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0 \Phi_z'}{N^2}\right)_z \quad \text{et que} \quad v_g' = -\Phi_x'/f_0, \; u_g' = \Phi_y'/f_0$$

montrer EN NE FAISANT QU'ESQUISSER LES CALCULS,

$$\rho_0 q' v_g' = +\partial_x\left(\frac{\rho_0}{2}\left({v_g'}^2 - {u_g'}^2 - \frac{{\Phi_z'}^2}{2N^2}\right)\right) - \partial_y\left(\rho_0 v_g' u_g'\right) + \partial_z\left(\rho_0 \frac{f_0 \Phi_z' v_g'}{N^2}\right) \tag{3}$$

4) En déduire qu'en moyenne zonale l'Action moyenne $\overline{A}$ évolue selon une équation du type

$$\partial_t \overline{A} + \vec{\nabla}\cdot\vec{F} = \rho_0 \frac{\overline{Z'q'}}{\overline{q}_y}. \tag{4}$$

On donnera le vecteur $\vec{F}$.

5) Déduire de vos calculs le théorème de non-interaction d'Eliasen-Palm.

Indication: On utilisera qu'en l'absence de forçâge moyen, les équations d'évolution de l'écoulement moyen par les ondes dans la formalisme Eulérien transformé s'écrivent:

$$\partial_t \overline{u}_g - f_0 \overline{v^*} = +\frac{1}{\rho_0}\vec{\nabla}.\vec{F}, \quad \overline{v^*}_y + \frac{(\rho_0 \overline{w^*})_z}{\rho_0} = 0, \quad \partial_t \overline{\Phi}_z + N^2 \overline{w^*} = 0,$$

où le flux d'Eliasen Palm $\vec{F} = \left(-\overline{\rho_0 v_g' u_g'} \;,\; \frac{f_0\rho_0}{N^2}\overline{v_g'\Phi_z'}\right)$,

et où la vitesse méridienne transformée $\overline{w^*} = \overline{w} + \frac{1}{N^2}\left(\overline{v_g'\Phi_z'}\right)_y \;,\; \overline{v^*} = \overline{v} - \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\rho_0}{N^2}\overline{v_g'\Phi_z'}\right)_z.$