TD du cours 4 de DMAOA, année 2009-2010

Relation de dispersion des ondes de Rossby

On rappelle la loi de conservation de la vorticité potentielle quasi-géostrophique:

$$(\partial_t + u_g\partial_x + v_g\partial_y)\, q_g = 0,$$

où q_g est la vorticité potentielle Quasi-Géostrophique,

$$q_g = \underbrace{\partial_x v_g - \partial_y u_g + f_0 + \beta y}_{\xi_g} + f_0\rho_0^{-1}\left(\rho_0\theta_e/\theta_{0z}\right)_z$$

On introduisant la fonction de courrant:

$$\psi = \frac{\phi_e}{f_0}$$

$$\underbrace{v_g = \partial_x\psi\ ,\ \ u_g = -\partial_y\psi}_{\text{Equilibre Géostrophique}}\ , \qquad \underbrace{\theta_e = \partial_z\psi\frac{f_0 H}{R}e^{\kappa z/H}}_{\text{Equilibre Hydrostatique}}$$

1) Exprimer q_g en fonction de ψ.

2) Exprimer la valeur moyenne de q_g, $\overline{q}_{g0}$ pour un écoulement zonal moyen uniforme $\overline{u}_0$ =cte et de statification au repos $N^2 = \Phi_{0zz} + \frac{k}{H}\Phi_{0z}$ uniforme.

3) Linéariser l'équation obtenue en **1)** pour de petites perturbations.

4) En exprimant ψ' sous la forme d'une onde monochromatique

$$\psi' = \Re\left\{\hat{\varphi}e^{z/2H}e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}\right\}$$

donner la relation de dispersion des ondes de Rossby.

5) Discuter quelles ondes de Rossby forcées par les montagnes peuvent se propager vers la mésosphère.

II) Les croix de Saint-Andrew

Reprise du TD du cours 3

On propose d'étudier le champ d'ondes de gravité produites par un petit cylindre oscillant à une pulsation ω constante au centre d'une cuve d'eau salée et dont la salinité décroit avec la hauteur z^*. On se limite au cas bi-dimensionnel dans lequel les équations non-forcées de Boussinesq s'écrivent:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$$

$$\frac{D\mathrm{w}}{Dt} = -\frac{1}{\rho_s}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial z^*} - g\frac{\tilde{\rho}}{\rho_s}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{w}}{\partial z^*} = 0$$

$$\frac{D\tilde{\rho}}{Dt} - \frac{\rho_s}{g}N^2\mathrm{w} = 0. \frac{D\tilde{\rho}}{Dt} - \frac{\rho_s}{g}N^2\mathrm{w} = 0.$$

où $N^2 = -\frac{g}{\rho_s}\frac{d\rho_0}{dz^*}$. On rappelle que dans l'approximation de Boussinesq, la pressio n et la densité sont écrits sous la forme,

$p =$	$p_s(z)+$	$p_0(z)+$	$\tilde{p}(x,z,t)$
$\rho =$	ρ_s+	$\rho_0(z)+$	$\tilde{\rho}(x,z,t)$
	reference	stratif stable	du au mouvement

On se place dans le cadre où le forçage produit des ondes de petite amplitude.

II.1) Donner en fonction de u', w', p' et ρ' le système d'équations linéaires que doit satisfaire la perturbation induite par W_0.

On cherche à présent le solution sous la forme de superposition d'harmoniques chacune de la forme

$$\mathrm{w}'(w, x, z^*, t) = \Re\left\{\hat{w}e^{i(kx+mz^*-\omega t)}\right\} \tag{1}$$

où ω est la fréquence imposé.

II.2) Donner la relation de dispersion liant ω à k et m. Pour quelles valeurs de ω le cylindre produit-il des ondes internes de gravité se propageant vers le haut?

II.3) Calculer la vitesse de groupe $\vec{c}_g$. En déduire que l'angle θ que font les rayons d'onde avec l'horizontale ne varie qu'en fonction de la fréquence ω.

En discutant l'angle fait par l'onde pour différentes valeurs de ω vérifiez que le résultat obtenu est bien conforme aux résultats de l'expérience montrés sur la Figure 2.

II.4) Calculer la vitesse de phase $\vec{c}$. En déduire que

$$\vec{c}_g \cdot \vec{c} = 0.$$

Ce résultat est-il comforme aux structures d'ondes visibles sur la Figure 2?