

Dynamique de l'atmosphère et météorologie

François Lott , flott@lmd.ens.fr et **Bernard Legras**, legras@lmd.ens.fr

I. Les ondes atmosphériques et leurs effets sur la circulation générale

5) Les marées atmosphériques (hors programme)

a) Observations

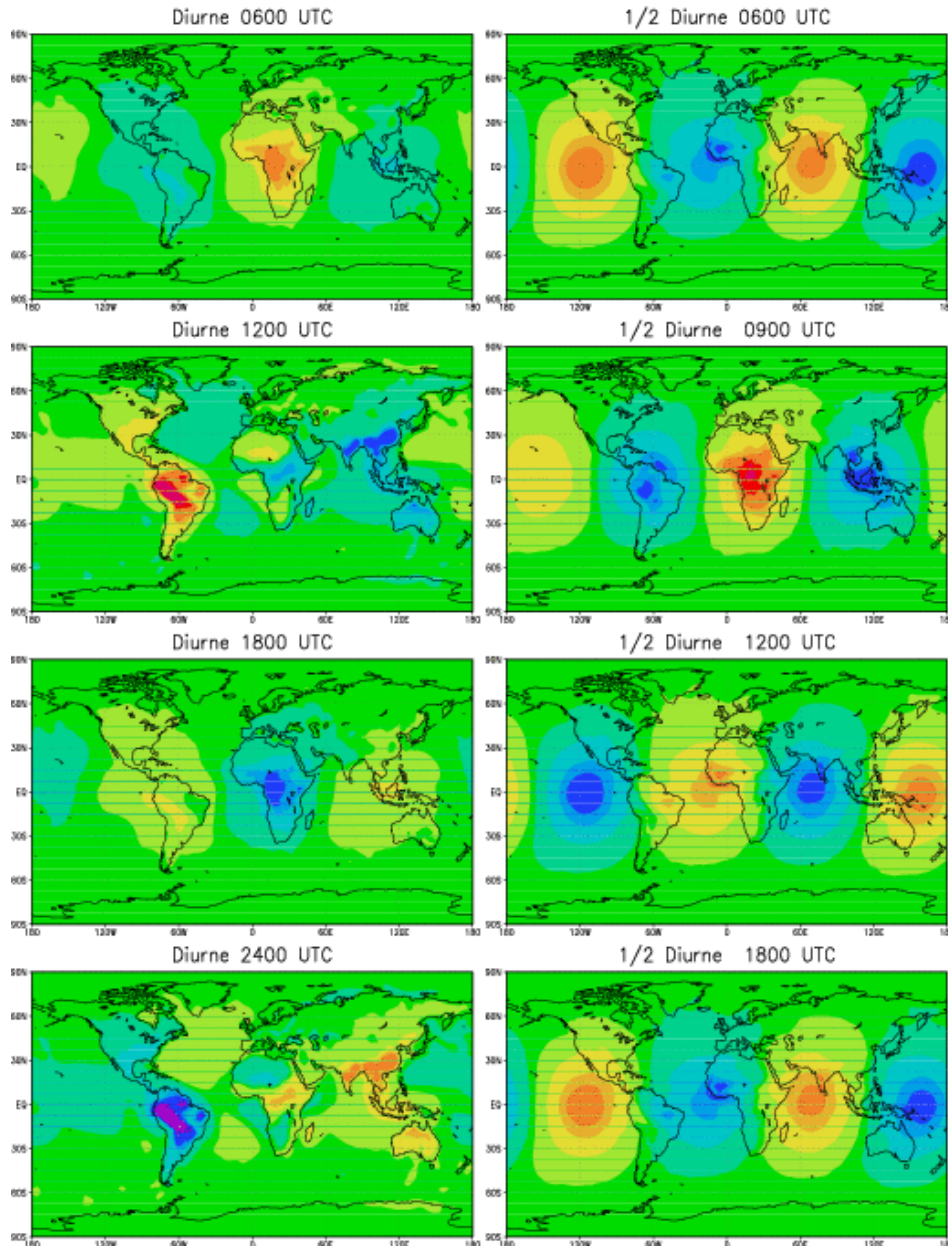
b) Théorie des marées

Modes propres de Hough

Projection des Equations sur les modes propres de Hough

a) Observations

– Signal au sol (Pression, CI: 20Pa)



- La marée diurne est faible sur les océans et ne présente pas de structures migratoires de grande échelle. Elle est due à des effets de contrastes thermiques nuit/jour qui sont plus marqué sur les terres.
- La marée $\frac{1}{2}$ diurne a un fort aspect migratoire, elle est dominée par des structures de grande échelle témoignant d'un forçage assez lisse, et loin du sol.
- Une raisonnance $\frac{1}{2}$ diurne au forçage gravitationnel est difficile à défendre (pas de modes propres barotropes à cette fréquence et dans l'atmosphère).
- La théorie moderne des marées attribue la plupart de leur énergie au forçage thermique. Pour la marée semi-diurne, ce forçage est essentiellement dû à l'Ozone dans la stratosphère.
- Ces cartes sont issues d'un GCM, LMDz, qui sous-estime le signal $\frac{1}{2}$ diurne barocline (absence de stratosphère bien résolue).

a) Observations

– Signal en altitude (She et al. JGR 2005)

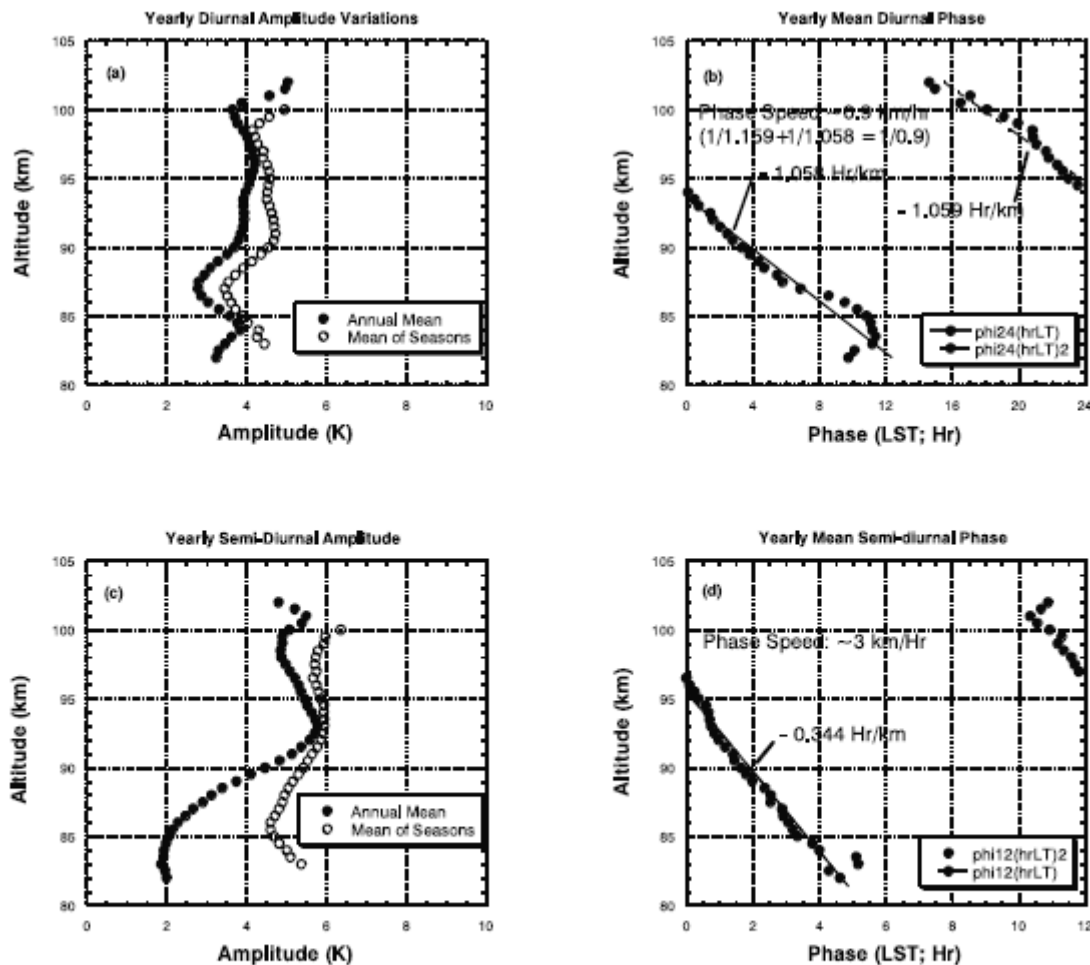


Figure 5. Diurnal (a and b), semidiurnal (c and d), temperature tidal amplitude and phase of an annual mean day. Notice the clear downward phase progression for diurnal and semidiurnal tides, giving a respective phase speed of 0.9 km/hr and 3.0 km/hr. Two amplitudes, annual mean (solid) and mean of seasons (open), are shown for comparison.

- Les marées deviennent importantes dans la haute mésosphère. Amplitudes de plusieurs K.
- Diurnes et semi-diurnes sont alors comparables. Cela reste vrai à d'autres localisations.
- Noter la variation de la phase, indiquant la propagation verticale du signal.
- Noter que la vitesse de phase verticale est négative

b) Théorie des marées

Equations linéarisées

Equations linéarisées:

$$u'_t - 2\Omega \sin \phi v' + \frac{1}{a \cos \phi} \Phi'_\lambda = 0$$

$$v'_t + 2\Omega \sin \phi u' + \frac{1}{a} \Phi'_\phi = 0$$

$$\frac{1}{a \cos \phi} (u'_\lambda + (v' \cos \phi)_\phi) + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z = 0$$

$$\Phi'_{zt} + N^2 w' = R_H^{J'}$$

Changement de variables: $\underline{u} = u' \cos \phi$,
 $\underline{v} = v' \cos \phi$, $\mu = \sin \phi$ et $\underline{J} = R_H^{J'}$.

$$\underline{u}_t - 2\Omega \mu \underline{v} + \frac{1}{a} \Phi'_\lambda = 0$$

$$\underline{v}_t + 2\Omega \mu \underline{u} + \frac{1-\mu^2}{a} \Phi'_\mu = 0$$

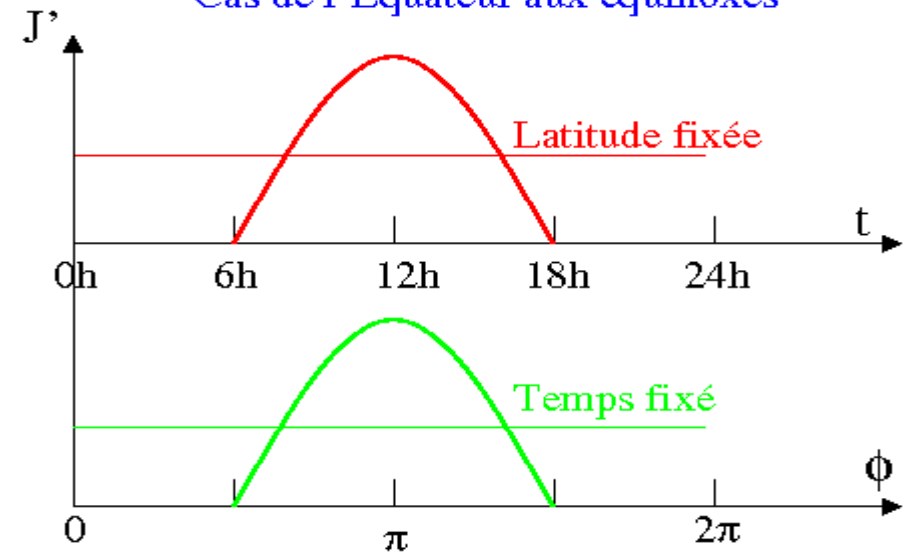
$$\frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-\mu^2} \underline{u}_\lambda + \underline{v}_\mu \right) + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z = 0$$

$$\Phi'_{zt} + N^2 w' = \underline{J}$$

On décompose le forçage solaire diurne dans le temps et dans la direction horizontale:

$$\underline{J}(\lambda, \mu, z, t) = \Re \left(\sum_s \hat{J}^{s,\sigma}(\mu, z) e^{i(s\lambda - 2\Omega\sigma t)} \right)$$

Cycle journalier du chauffage à z donné
 Cas de l'Equateur aux équinoxes



- En chaque endroit de l'atmosphère le cycle journalier moyen peut se décomposer en une partie diurne, 1/2 diurne, 1/3 diurne....
- Pour une terre et une atmosphère homogènes en longitude: Espace et temps sont liés et
 - Diurne: $\sigma=-1/2$, $s=1$
 - 1/2 diurne: $\sigma=-1$, $s=2$
 - Ect.....
- On garde la notation générale en σ, s pour d' autres études: marées non-migratoires, ondes planétaires (modes libres).....

b) Théorie des marées

Equations des marées

(on prend $s > 0$ par convention)

On cherche alors une solution forcée de la forme:

$$(\underline{u}, \underline{v}, w', \Phi') = \Re \left[(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\Phi}) e^{i(s\lambda - 2\Omega\sigma t)} \right]$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{u} - 2\Omega\mu\hat{v} + \frac{is}{a}\hat{\Phi} = 0$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{v} + 2\Omega\mu\hat{u} + \frac{1-\mu^2}{a}\hat{\Phi}_\mu = 0$$

$$\frac{is}{a(1-\mu^2)}\hat{u} + \frac{1}{a}\hat{v}_\mu + \rho_0^{-1}(\rho_0\hat{w})_z = 0$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{\Phi}_z + N^2\hat{w} = \hat{J}$$

Relations de polarizations pour \hat{u} et \hat{v} :

$$2a\Omega(\sigma^2 - \mu^2)\hat{u} = s\sigma\hat{\Phi} + \mu(1 - \mu^2)\hat{\Phi}_\mu$$

$$2a\Omega(\sigma^2 - \mu^2)\hat{v} = -is\mu\hat{\Phi} - i\sigma(1 - \mu^2)\hat{\Phi}_\mu$$

Injectées dans la continuité:

$$\mathcal{L}^{\sigma,s}\hat{\Phi} + i\frac{2a^2\Omega}{\sigma}\frac{1}{\rho_0}(\rho_0\hat{w})_z = 0$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{\Phi}_z + N^2\hat{w} = \hat{J}$$

$$\mathcal{L}^{\sigma,s}\hat{\Phi} = \partial_\mu \frac{1-\mu^2}{\sigma^2 - \mu^2} \partial_\mu \hat{\Phi} - \frac{1}{\sigma^2 - \mu^2} \left[-\frac{s(\sigma^2 + \mu^2)}{\sigma(\sigma^2 - \mu^2)} + \frac{s}{1 - \mu^2} \right] \hat{\Phi}$$

Pour résoudre ce problème, il est essentiel de connaître les modes propres de l'opérateur auto-adjoint $\mathcal{L}^{\sigma s}$: $\mathcal{L}^{\sigma s}\Phi + \gamma\Phi = 0$

Pour des conditions aux limites simples:

Φ borné en $\mu=1$, et $\mu=-1$

Les fonctions propres sont les fonctions de Hough, $\Theta_n^{\sigma s}$:

$$\mathcal{L}^{\sigma s}\Theta_n^{\sigma s} + \gamma_n^{\sigma s}\Theta_n^{\sigma s} = 0$$

il y en a une infinité dénombrable. Elles forment une base orthogonale.

Les valeurs propres $\gamma_n^{\sigma s}$ sont réelles ce sont les paramètres de Lamb.

Ils y en a des **<0** lorsque **$|\sigma| < 1$**

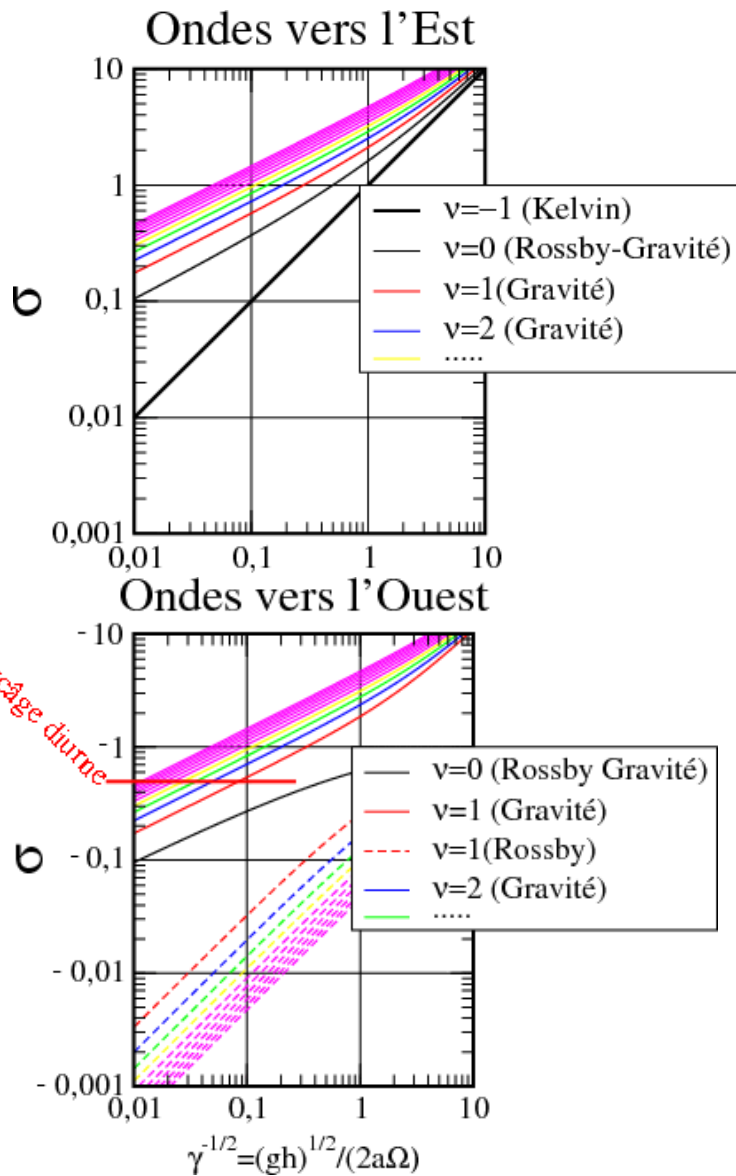
On définit aussi la hauteur équivalente $\mathbf{h}_n^{\sigma s}$

$$\gamma_n^{\sigma s} = 4\Omega^2 a^2 / (g \mathbf{h}_n^{\sigma s})$$

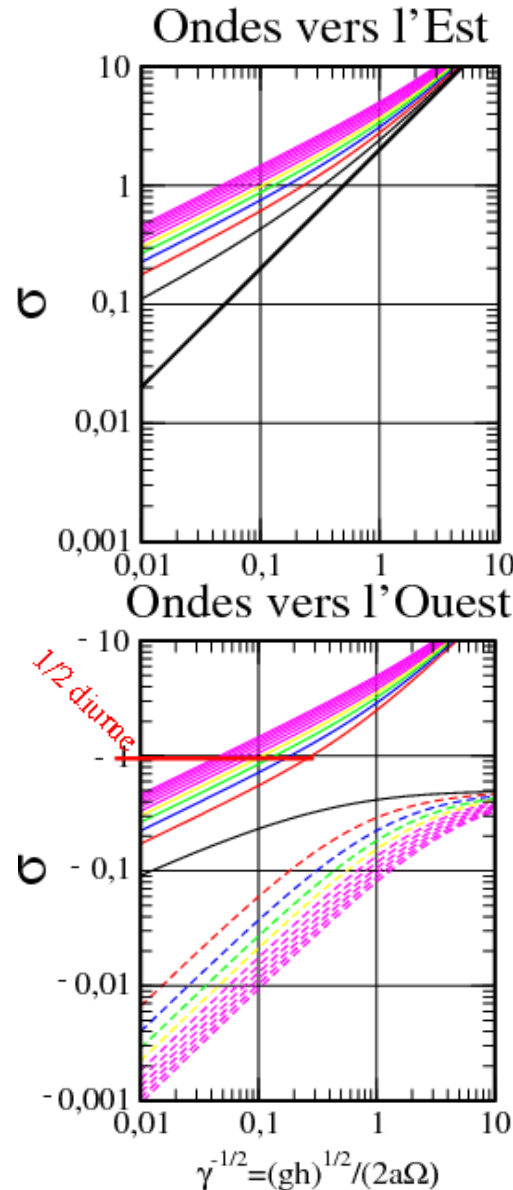
b) Théorie des marées

Valeurs propres dans l'approximation du plan b-équatorial (voir Ondes Equatoriales)

$$s=1: \gamma_n^{\sigma 1}$$



$$s=2: \gamma_n^{\sigma 2}$$



Attention:

Le paramètre v représente le nombre de noeux pour la vitesse méridienne entre les pôles (voir les "ondes équatoriales")

Approximation valable pour $\gamma \gg 1$.

Les solutions avec $h < 0$ ne sont pas représentées

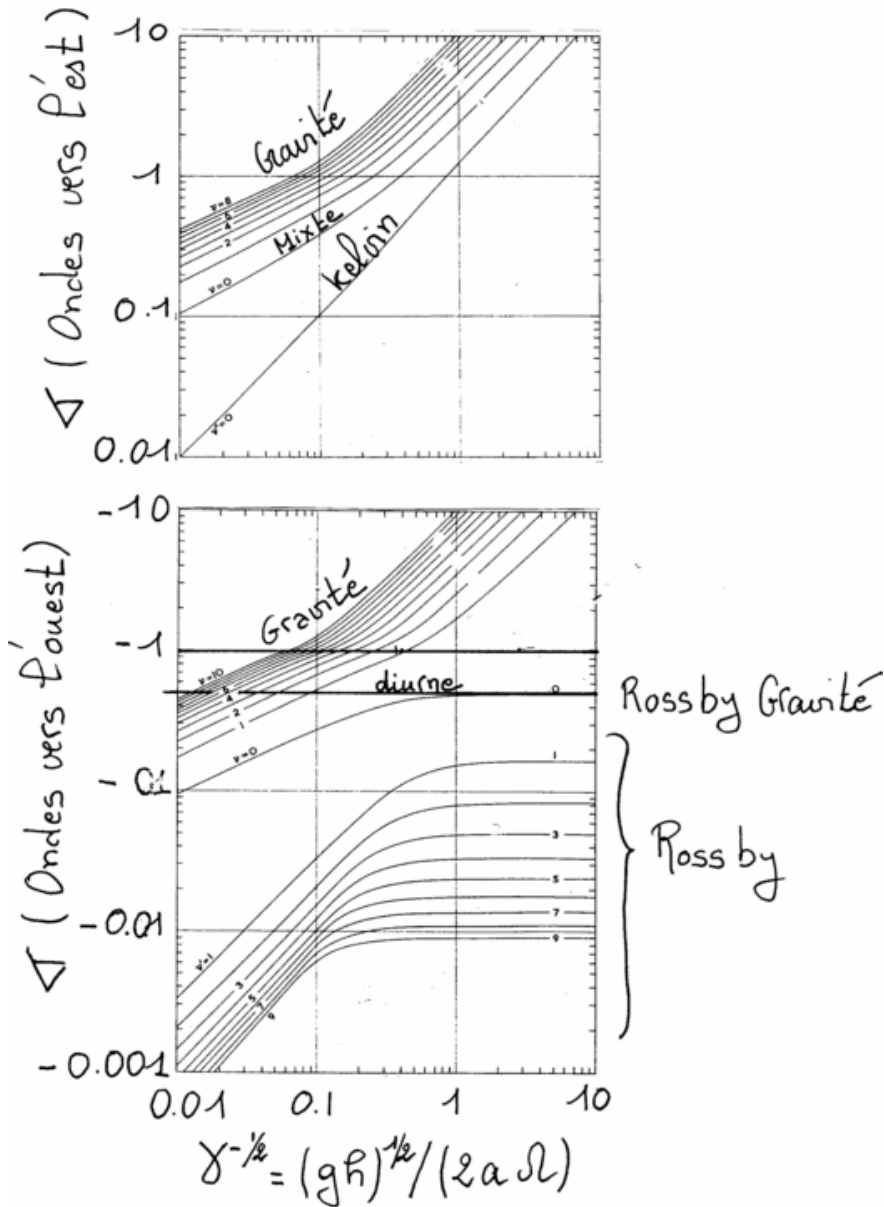
Le forçage diurne excite beaucoup, le forçage $1/2$ diurne n'en excite pas

Le forçage diurne ne force pas l'onde de Rossby gravité (contrairement à ce qu'on voit sur la figure)

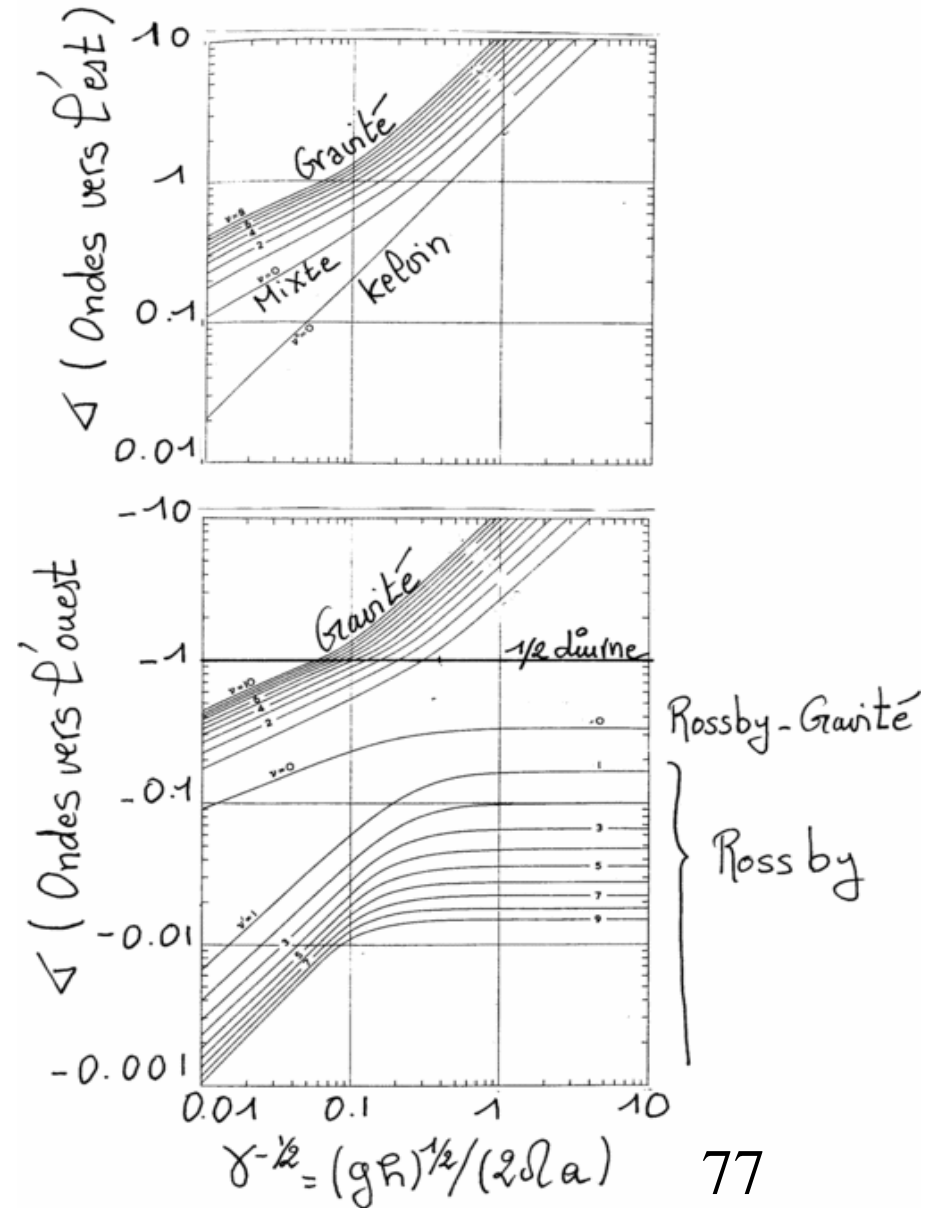
b) Théorie des marées

Valeurs propres exactes (Longuet-Higgins 1969)

Valeurs propres pour $S=1$, $h>0$



Valeurs propres pour $S=2$, $h>0$

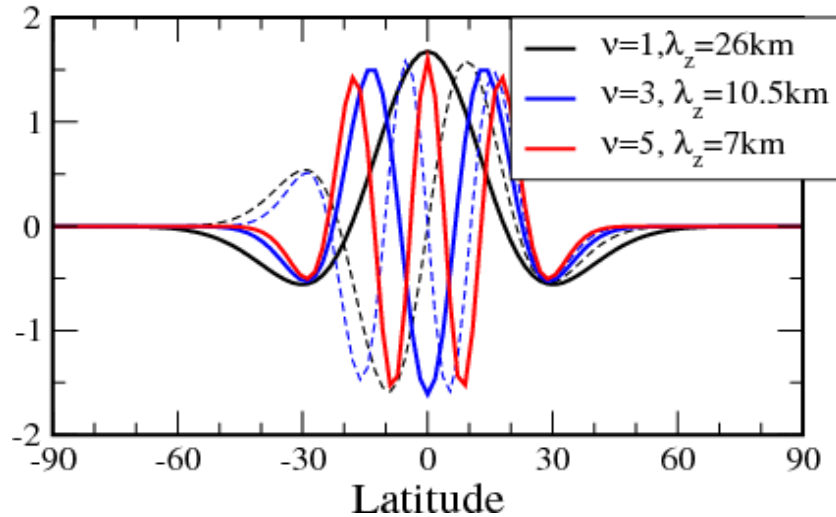


b) Théorie des marées

Modes propres et structure spatiale du forçage thermique

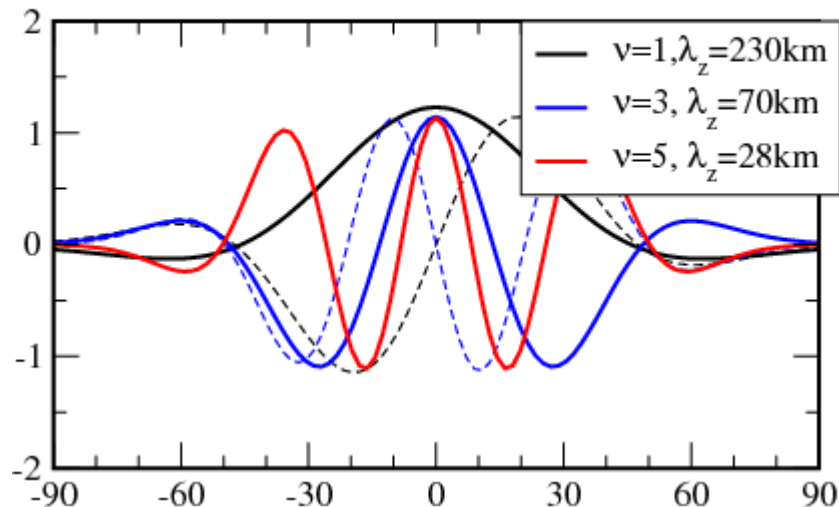
Modes propres, $s=1$, $\sigma=-0.5$ (Diurne)

β -plane approximation

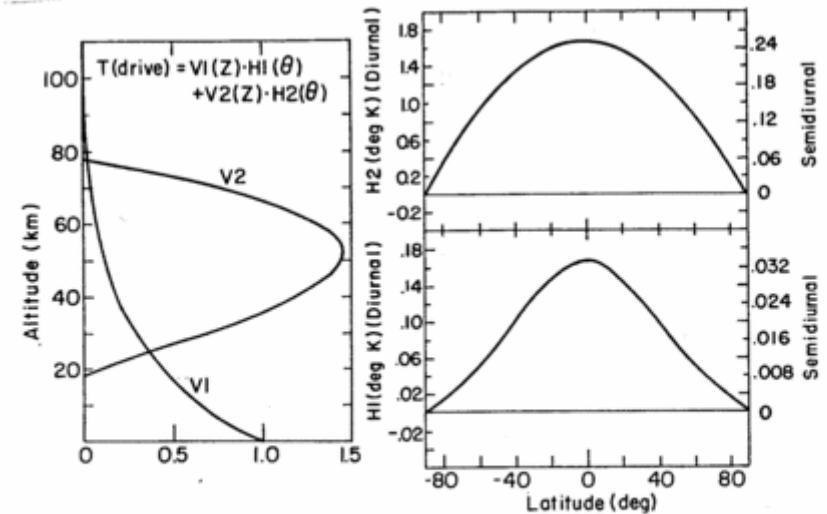


Modes propres, $s=2$, $\sigma=-1$ (1/2-Diurne)

β -plane approximation



Chapman et Lindzen (1970)



Vertical distributions of thermal excitation due to water vapor (V1) and ozone (V2); latitude distributions for water vapor (H1) and ozone (H2). After Lindzen (1968a).

La projection de l'équation des marées sur les modes propres,

$$(\hat{\Phi}, \hat{w}, \hat{J}) = \sum_{n=1}^{\infty} (\hat{\Phi}_n(z), \hat{w}_n(z), \hat{J}_n(z)) \Theta_n(\phi) e^{z/2H},$$

permet de se ramener à la résolution d'une équation sur la structure verticale:

$$\frac{d^2 \hat{w}_n}{dz^2} + \left(\frac{N^2}{\underbrace{gh_n}_{m^2}} - \frac{1}{4H^2} \right) \hat{w}_n = \frac{\hat{J}_n}{gh_n}$$

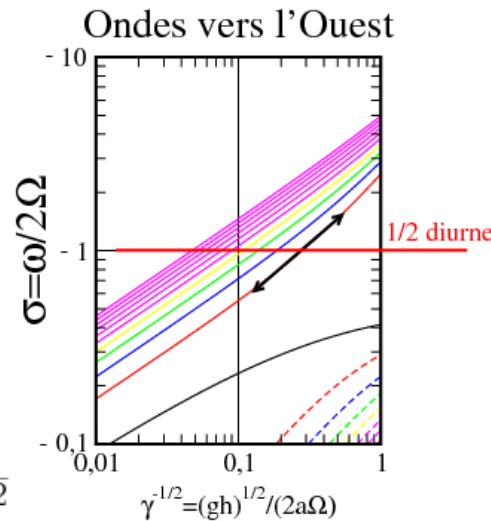
b) Théorie des marées

Conditions aux limites

En $z = \infty$ on pose $N = \text{cte}$, $\hat{J}_n = 0$.

Si $\frac{N^2}{gh} < \frac{1}{4H^2}$, on retient la solution évanescente.

Si $\frac{N^2}{gh} > \frac{1}{4H^2}$, on retient la solution pour laquelle $C_{gz} > 0$



$$m^2 = \frac{N^2}{gh_n} - \frac{1}{4H^2}$$

D'après le graphe de dispersion,

$$\frac{\partial h_n}{\partial \omega} < 0 \text{ lorsque } \omega < 0$$

$$\text{Comme, } m \frac{\partial m}{\partial \omega} = -\frac{N^2}{gh_n^2} \frac{\partial h_n}{\partial \omega} > 0,$$

Il faut donc $m > 0$.

En $z = 0$:

→ On impose souvent Φ à la tropopause, mais ce n'est pas adapté au problème des marées.

→ Pour le problème des marées on impose la condition de glissement:

$$\frac{Dz^*}{Dt} = \frac{Dz_s^*}{Dt} \text{ en } z^* = z_s^*,$$

où z_s^* est le relief.

Si $z_s^* = 0$, cette condition devient:

$$\frac{D\Phi}{Dt} = 0 \text{ en } z^* = 0.$$

Linéarisée et exprimée en coordonnée z :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + w \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0.$$

Après décomposition sur les modes propres, on obtient en $z = 0$:

$$\frac{4a^2\Omega^2}{\gamma_n} \left(\frac{\partial \hat{w}_n}{\partial z} - \frac{\hat{w}_n}{2H} \right) + \hat{w}_n \frac{RT_0(0)}{H} = 0.$$

