Dynamique de l'atmosphère et météorologie

François Lott , flott@lmd.ens.fr et **Bernard Legras**, legras@lmd.ens.fr

I. Les ondes atmosphériques et leurs effets sur la circulation générale

4) Les ondes de Rossby

a)Conservation de la vorticité potentielle

b)Description heuristique des ondes de Rossby

c)Théorie linéaire des ondes de Rossby

- Relation de dispersion, milieu au repos
- milieu en mouvement

d)Observations

a) Conservation de la vorticité potentielle

Approximation du plan β aux moyennes latitudes

Equations en coordonnées Log-Pression:

$$\frac{Du}{Dt} - \left(2\Omega \sin\phi + \frac{u\tan\phi}{a}\right)v + \frac{\Phi_\lambda}{a\cos\phi} = X$$

$$\frac{Dv}{Dt} + \left(2\Omega \sin\phi + \frac{u\tan\phi}{a}\right)u + \frac{\Phi_\phi}{a} = Y$$

$$\Phi_z = \frac{RT}{H}$$

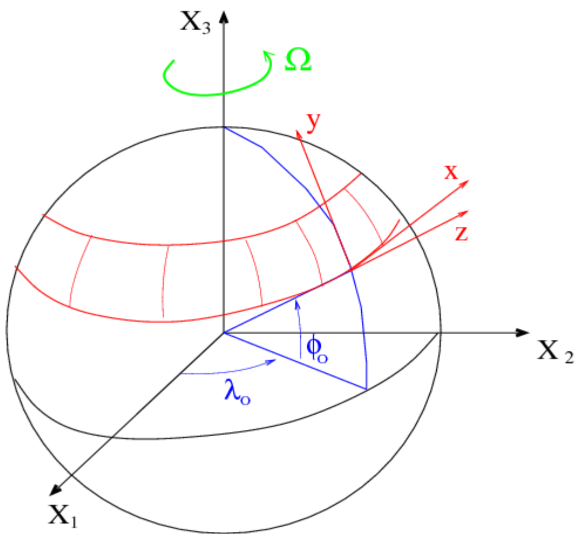
$$\frac{u_\lambda + (v\cos\phi)_\phi}{a\cos\phi} + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0.$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = Q \quad \text{où} \quad \frac{D\Phi_z}{Dt} + \frac{\kappa\Phi_z}{H}w = \frac{RJ}{HC_p}$$

avec: $$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial}{\partial\phi} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

La dérivation de la conservation de la vorticité potentielle est valable dans un cadre beaucoup plus général

Approximation du plan β



Dérivée particulaire:

$$\frac{D}{Dt} \approx \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

Avec: $x = a\cos\phi_0\,(\lambda - \lambda_0)$, $y = a\,(\phi - \phi_0)$.

Terme de Coriolis:

$$\begin{aligned} 2\Omega\sin\phi &\approx 2\Omega\sin\phi_0 + 2\Omega\cos\phi_0\,(\phi - \phi_0) \\ &\approx f_0 + \beta y = f \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{2\Omega\cos\phi_0}{a}$$

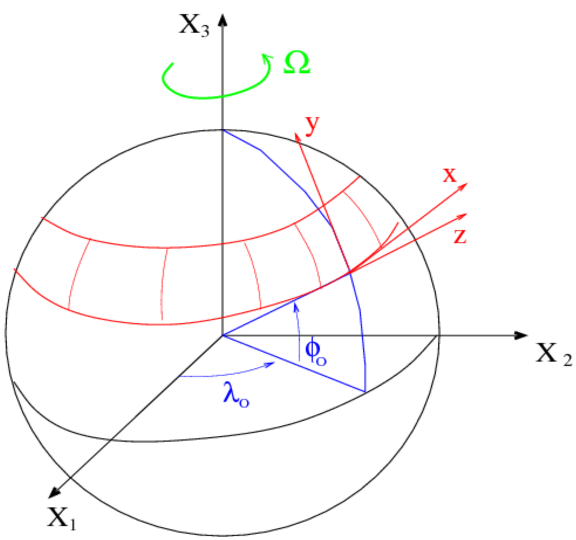
Continuité: $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \rho_0^{-1}\frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} = 0$

Les termes de sphéricité $\tan\phi\frac{uv}{a}$ et $\tan\phi\frac{u^2}{a}$ sont aussi négligés.

a) Conservation de la vorticité potentielle

Approximation du plan β aux moyennes latitudes

Formulation dans le plan β



Récapitulatif des équations:

$$\frac{Du}{Dt} - fv + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = X$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = Y$$

$$\Phi_z - \frac{R}{H}\Theta e^{-\kappa z/H} = 0$$

$$u_x + v_y + \frac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = Q$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$$

a) Conservation de la vorticité potentielle

Rappel de la méthode générale

On forme le rotationel des équations du mouvement

$$\begin{array}{ll} \partial_x & \frac{Du}{Dt} - fv + \Phi_x = X \\ \partial_y \wedge & \frac{Dv}{Dt} + fu + \Phi_y = Y \\ \partial_z & \Phi_z - \frac{R\theta}{H} e^{-\kappa z/H} = 0 \end{array}$$

$$D_t \vec{\xi_a} + \vec{\xi_a}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + ... + \frac{Re^{-\kappa z/H}}{Y} \vec{k} \wedge \vec{\nabla}\theta = \vec{\nabla} \wedge \vec{X}$$

$\vec{\xi_a}$ est le tourbillon absolu, dans ce cours:

$$\vec{\xi_a} = \left(-v_z, u_z, v_x - u_y + f\right)$$

On multiplie par le gradient de θ, $\vec{\nabla}\theta$:

$$D_t\left(\vec{\xi_a}\cdot\vec{\nabla}\theta\right) + \vec{\xi_a}\cdot\vec{\nabla}\theta\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) + (.....)\cdot\vec{\nabla}\theta = \vec{\xi_a} D_t \vec{\nabla}\theta + \left(\vec{\nabla}\wedge\vec{X}\right)\cdot\vec{\nabla}\theta$$

Pour estimer $\vec{\xi_a} D_t \vec{\nabla}\theta$ on utilise le gradient de l'équation de la thermodynamique:

$$\vec{\xi_a}\cdot\underbrace{\left(\vec{\nabla} D_t\theta = \vec{\nabla} Q\right)}_{\text{Thermo. Eq.}} \rightarrow \vec{\xi_a}\cdot D_t\vec{\nabla}\theta + \vec{\xi_a}\cdot(....) = \vec{\xi_a}\cdot\vec{\nabla} Q$$

Les termes en bleu s'annulent et il vient:

$$D_t\underbrace{\left(\vec{\xi_a}\cdot\vec{\nabla}\theta\right)}_{\rho_0 P} + \underbrace{\vec{\xi_a}\cdot\vec{\nabla}\theta}_{\rho_0 P}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\right) = \underbrace{\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{X}\right)\cdot\vec{\nabla}\theta + \vec{\xi_a}\cdot\vec{\nabla} Q}_{\text{Production}}$$

P est la vorticité potentielle

- En formant l'équation d'évolution de la vorticité, on fait disparaitre les termes de pression.
- En multipliant l'équation d'évolution du vecteur de vorticité par le gradient de θ, on fait disparaître le terme de production barocline.
- Ce n'est qu'à ce stade qu'intervient l'équation de conservation de la masse (cette méthode est applicable sur les Equations primitives et sans tenir compte de l'approximation hydrostatique)

De la conservation de la masse:

$$u_x + v_y + w_z = \vec{\nabla}\cdot\vec{u} = -\rho_{0z}/\rho_0 w$$

On déduit:

$$\rho_0 \frac{DP}{Dt} = \text{Production} = -\vec{\nabla}\cdot\vec{J_N}$$

Ou le flux irreversible de PV,

$$\vec{J_N} = -\vec{X}\wedge\vec{\nabla}\theta - Q\vec{\xi_a}$$

a) Conservation de la vorticité potentielle

Interprétation dynamique

Interprétation dynamique:

$$\rho_O P = \vec{\xi}_a \cdot \vec{\nabla}\theta$$

Où $\vec{\xi}_a$ est l'appr. hydrostatique de la vorticité absolue:

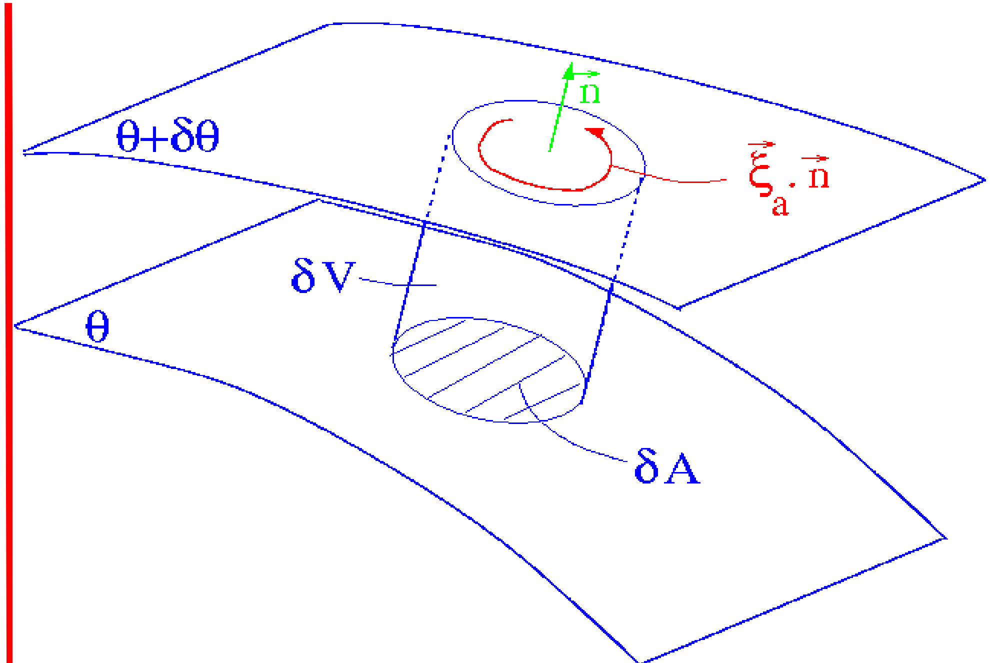
$$\vec{\xi}_a = \left(-v_z, u_z, v_x - u_y + f\right)$$

Pour un volume matériel δV délimité par une surface matérie δA localisée sur une isentrope θ = cte et compris entre θ = cte et $\theta + \delta\theta$ la masse δM est conservée:

$$\delta M = \rho_0 \delta A \frac{\delta\theta}{\|\vec{\nabla}\theta\|}$$

On peut écrire:

$$P = \left(\vec{\xi}_a \cdot \vec{n}\right) \underbrace{\delta A \frac{\delta M}{\delta\theta}}_{\text{cte}}$$



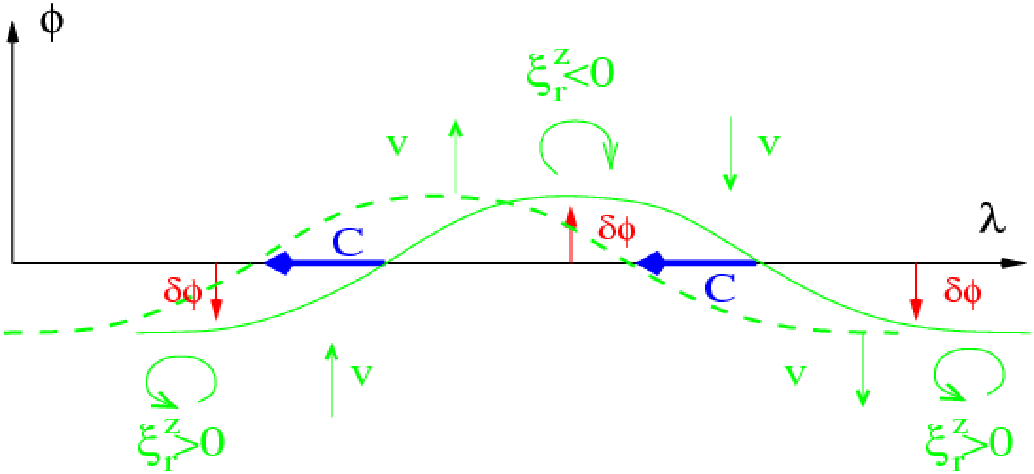
- En l'absence de processus adiabatiques, δA reste sur la même isentrope
- En l'absence de friction et de processus adiabatiques P est conservé au cours du déplacement de δV
- Lorsque les isentropes s'écartent, la conservation de la masse (δM) fait que δA diminue, donc la rotation selon la normale à la surface isentrope augmente.
- C'est une version "fluide" de la conservation du moment cinétique

b) Description Heuristique des ondes de Rossby

- Le mécanisme de rappel à l'origine des ondes de Rossby est lié à la conservation de la vorticité Potentielle $\frac{DP}{Dt}=0$

Méthode de la parcelle (1)

on néglige les variations de pression liées aux déplacements, ce qui est entièrement légitime pour des arguments liés à la conservation de la vorticité



Au voisinage d'une latitude tempérée, ϕ_0, et à une latitude donnée λ_0 on imagine un déplacement horizontal vers le Nord $\delta\phi>0$.

La parcelle vient d'une région ou la vorticité planétaire est $2\Omega\sin\phi_0$, elle se retrouve dans une région où elle est +forte $2\Omega\sin(\phi_0+\delta\phi)$

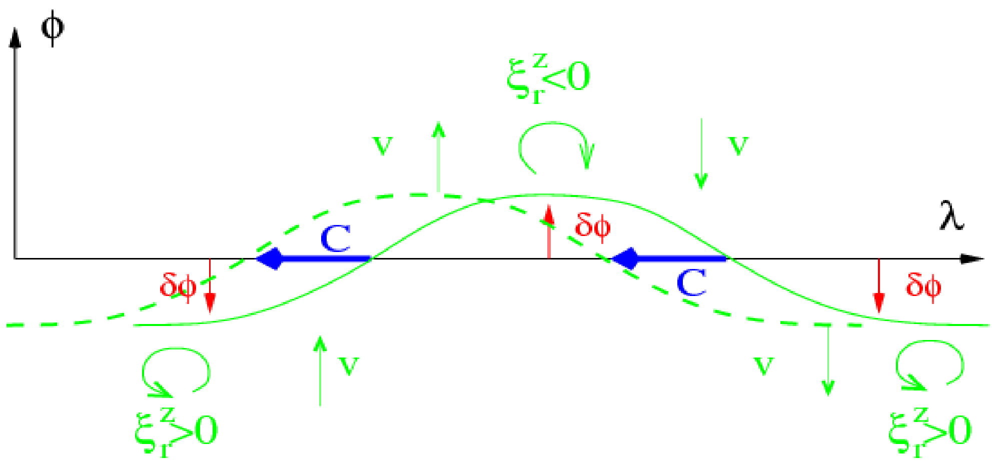
Par conservation de P, elle doit acquérir une vortivité relative $\xi_r^z<0$: v_g négatif àl'ouest de λ_0, positif à l'est.

v_g induit un déplacement $\delta\phi>0$ à l'Ouest de λ_0

La perturbation initiale se déplace vers l'ouest

b) Description Heuristique des ondes de Rossby:

Méthode de la parcelle (2):



Mise sous forme d'onde: $\delta\phi = f(t)\, e^{ikx}$

Conservation de P:

$\xi_r^z = v_{,x} = -2\Omega \cos\phi_0\, \delta\phi = -2\Omega \cos\phi_0\, f(t)\, e^{ikx}$

Vitesse méridienne induite:

$v = (2i\Omega \cos\phi_0)/k\, f(t)\, e^{ikx} = a(\delta\phi)_{,t} = a\, df/dt\, e^{ikx}$

Solution: $f(t) = f_0 e^{-i\omega t}$

Relation de dispersion:

$\omega = -(2\Omega \cos\phi_0)/(ka) = -\beta/k$

Hypothèses sous-jascentes à cette dérivation heuristique:

Nombre d'onde selon x uniquement, pas d'écoulement moyen.

Argument basé entièrement sur la conservation de P (ondes de gravité négligées): Dynamique équilibrée (par ex Quasi Géostrophique)

La conservation de la vorticité potentielle ne considère que la composante verticale de la vorticité absolue ξ_a^z (Approximation QG)

La conservation de la vorticité potentielle ne prend pas en compte la compression des particules fluides (barotrope)

Dans la suite, nous ne considèrerons que les hypothèses en bleu

c) Théorie des ondes de Rossby

L'approximation quasi-géostrophique

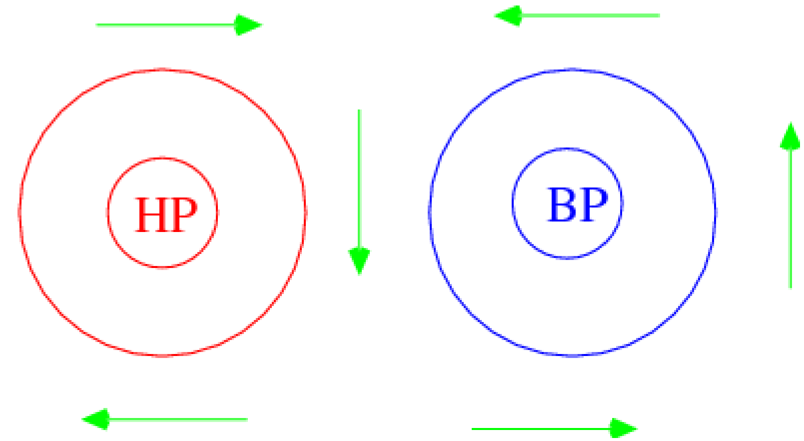
Pour les mouvements de grande échelle aux moyennes latitudes,

$$u \approx u_g = -\frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi_e}{\partial y}, \quad v \approx u_g = \frac{1}{f_0}\frac{\partial \Phi_e}{\partial x}$$

L'approximation Quasi-Géostrophique des équations sur le plan β:

$$\begin{aligned}
&D_g u_g - \beta y v_g - f_0 v + \partial_x \Phi_e = X \\
&D_g v_g + \beta y u_g + f_0 u + \partial_y \Phi_e = Y \\
&\partial_z \Phi_e - \tfrac{R}{H}\theta_e e^{-\kappa z/H} = 0 \\
&u_x + v_y + \tfrac{(\rho_0 w)_z}{\rho_0} = 0 \\
&D_g \theta_e + \theta_{0z} w = Q
\end{aligned}$$

où: $\quad D_g = \partial_t + u_g \partial_x + v_g \partial_y.$



Remarques:

La relation géostrophique utilisée fait intervenir f_0 seulement (et non f)

$\Phi_0(z)$ est un profil de référence au repos, lié à un profil thermique au repos $T_0(z)$ (ou $\Theta_0(z)$):

$$\Phi = \Phi_0(z) + \Phi_e(x,y,z,t)$$

Φ_e est associé au mouvement (cette séparation n'est pas propre à l'approximation QG)

c) Théorie des ondes de Rossby

La vorticité potentielle quasi-géostrophique

La dynamique est décrite par l'évolution de la vorticité potentielle:

$$D_g q_g = -X_y + Y_x + f_0 \rho_0^{-1} \left(\rho_O Q/\theta_{0z}\right)_z$$

Où q_g est la vorticité potentielle Quasi-Géostrophique:

$$q_g = \underbrace{\partial_x v_g - \partial_y u_g + f_0 + \beta y}_{\xi_g} + f_0 \rho_0^{-1} \left(\rho_0 \theta_e/\theta_{0z}\right)_z$$

ξ_g est la composante verticale de la vorticité absolue quasi-géostrophique.

En effet, une fois connue q_g on peut revenir à Φ_e via l'inversion d'une équation elliptique

En introduisant la fonction de courrant:

$$\psi = \frac{\phi_e}{f_0}$$

$$\underbrace{v_g = \partial_x \psi \ , \ u_g = -\partial_y \psi}_{\text{Equilibre Géostrophique}}, \quad \underbrace{\theta_e = \partial_z \psi \frac{f_0 H}{R} e^{\kappa z/H}}_{\text{Equilibre Hydrostatique}}$$

$$q_g = f_0 + \beta y + \psi_{xx} + \psi_{yy} + \rho_0^{-1} \left(\frac{\rho_0 f_0^2}{N^2} \psi_z\right)_z$$

C) Théorie des ondes de Rossby

Linéarisation et relation de dispersion dans un milieu uniforme

Séparation entre état de base et perturbation:

$$u_g = \overline{u}_0(y,z) + u'_g + O(\alpha^2)\ , \quad v_g = v'_g + O(\alpha^2)\ ,$$

$$\theta_e = \overline{\theta}_0 + \theta' + O(\alpha^2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \overline{u}_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) q' + v' \overline{q}_{0y} = Z'$$

Le gradient de vorticité potentielle de l'écoulement de base joue un rôle central:

$$\overline{q}_{0y} = \beta - \overline{u}_{0yy} - \rho_0^{-1} \left(\frac{\rho_O f_0^2}{N^2} \overline{u}_{0z}\right)_z$$

Milieu uniforme:

$$\overline{u}_0 = \text{const}\ , \quad N^2 = cte \text{ et } \ \overline{q}_{0y} = \beta$$

On cherche une solution du type:

$$\psi' = \Re\left\{\hat{\varphi} e^{z/2H} e^{i(kx+ly+mz-\omega t)}\right\}$$

Avec $k > O$ par convention.
Relation de dispersion:

$$\hat{\omega} = -\frac{k\beta}{k^2 + l^2 + \frac{f^2}{N^2}\left(m^2 + 1/(4H^2)\right)}$$

c) Théorie des ondes de Rossby

Propagations verticales et horizontales

Milieu uniforme:

Vitesse de groupe verticale

$$C_{gz} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial m} = + \frac{2k\beta m f^2/N^2}{\left(k^2 + l^2 + \frac{f^2}{N^2}(m^2 + 1/(4H^2))\right)^2}$$

Impose $m > 0$, pour assurer la propagation vers le haut.

Notez aussi:

$$m^2 = \frac{N^2}{f^2}\left(\frac{\beta}{\overline{u}_0 - C} - k^2 - l^2\right) - 1/4H^2$$

Noter la présence de niveaux critiques aux basses latitudes.

Les lignes de phases sont inclinées vers l'Est

Seules les ondes longues se propagent vers le haut.

Milieu variable:

$$\overline{u}_0(y, z), \quad N^2(z) = cte \text{ et } \overline{q}_{0y} = \beta - \overline{u}_{0yy} - \rho_O^{-1}\left(\frac{\rho_0 f^2}{N^2}\overline{u}_{0z}\right)_z$$

En considérant que le forçage dans la troposphère impose ω et k, on cherche une solution du type:

$$\psi' = \Re\left\{\hat{\varphi}(y, z)e^{z/2H}e^{i(kx - \omega t)}\right\}$$

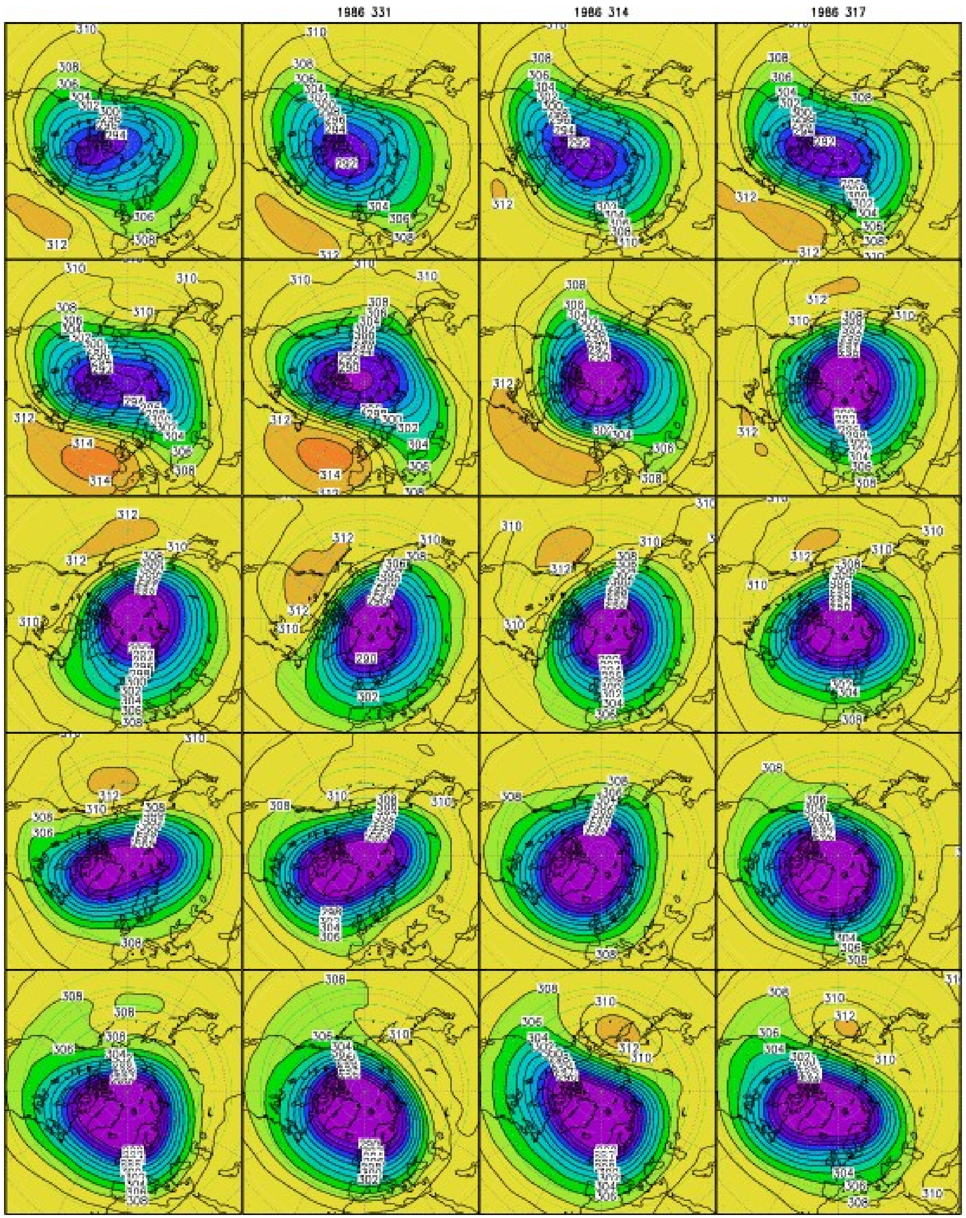
Equation pour la structure de $\hat{\varphi}$:

$$\hat{\varphi_{yy}} + \frac{f^2}{N^2}\hat{\varphi}_{zz} + \underbrace{\left(\frac{\overline{q}_{0y}}{\overline{u}_0 - c} - k^2 - \frac{1}{4H^2}\right)}_{\text{Index de refraction}}\hat{\varphi} = 0$$

d) Observations

Hauteur géopotentiel ($Z=\Phi/g$) à 10hPa ($z\sim32$km)

Décembre 1986, une carte tout les 3 jours, Données NCEP



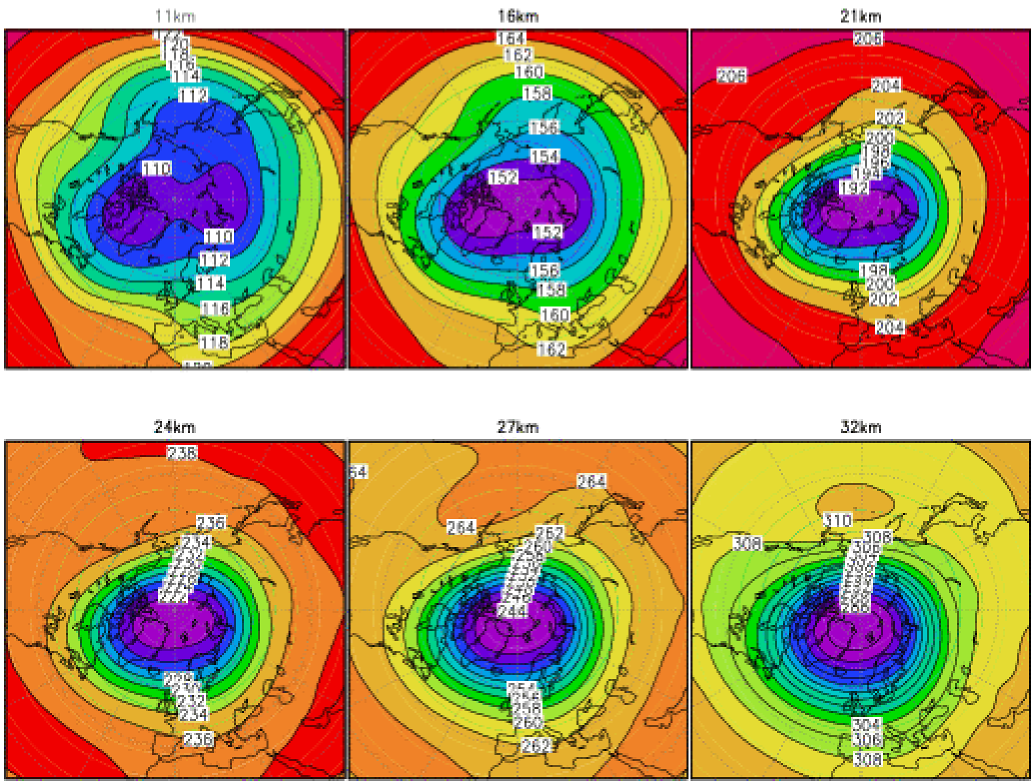
- Il s'agit du vortex polaire Arctique
- Noter l'échelle très grande de sa déformation
- L'évolution assez lente de sa déformation

d) Observations

Composante stationnaire de la déformation du vortex polaire

Onde planétaire stationnaire: moyenne en Décembre de $Z=\Phi/g$

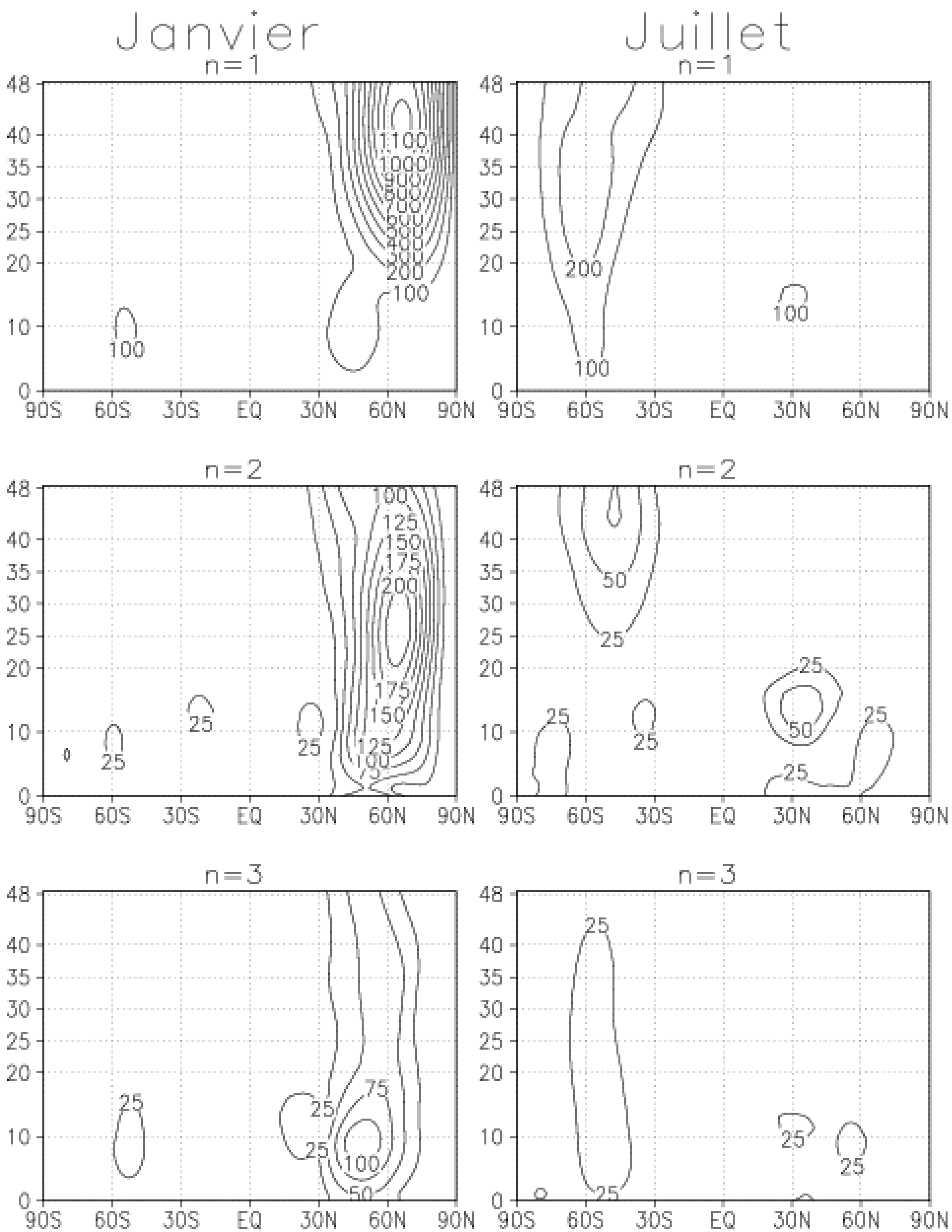
11km, 16km, 21km, 24km, 27km, et 32km (Données NCEP, 1980-2000)



- Noter le lent changement de phase avec l'altitude ($\sim -\pi/4$ entre 16km, et 32km)
- Noter l'échelle très grande de sa déformation
- L'évolution assez lente de sa déformation

d) Observations

Moyenne mensuelle de Φ, analyse ondes par ondes.



Données CEPPMT, 1981-2002

Analyse harmonique du géopotentiel un jour donné:

$$\Phi(\lambda,\phi,z,t) = \sum_{s=0}^{\infty} \hat{\Phi}_s(\phi,z,t)e^{is\lambda}$$

- Seules les ondes 1 et 2 passent dans la stratosphère
- Les ondes planétaires ne passent qu'en Hiver
- L'onde 1 domine