Contrôle du cours de Dynamique de l'atmosphère, année 2009-2010

Première partie, 14 points : Propagation verticale d'un paquet d'ondes de Rossby

Les groupes de questions **1-9**, **10-16**, et **17-21** peuvent être traités indépendament.
Pensez à traiter soigneusement mais succintement les questions et sous questions qualitatives faisant un lien entre l'exercice et le cours.

Aux moyennes latitudes, la dynamique dans la haute atmosphère est en grande partie controlée par des ondes de Rossby issues de la troposphère. Nous proposons d'analyser la propagation et l'interaction de ces ondes avec l'écoulement moyen dans le cas transitoire. Dans tout ce problème nous adoptons l'approximation quasi géostrophique formulée dans le plan β. Nous représentons les moyennes latitudes par un canal périodique de longueur L, limité en latitude par deux parois verticales imperméables distantes de $L/4$. La longueur $L = 20000km$ représente la circonférence de la terre à la latitude 60^o Nord et le paramètre de Coriolis s'écrit $f = f_0 + \beta y$ où $f_0 = 1.23\,10^{-4}\mathrm{s}^{-1}$ et $\beta = 1.14\,10^{-11}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1}$. Enfin, dans tout le problème, nous considérerons que la fréquence de Brunt Vaisala est constante et a pour valeur $N = 0.02$.

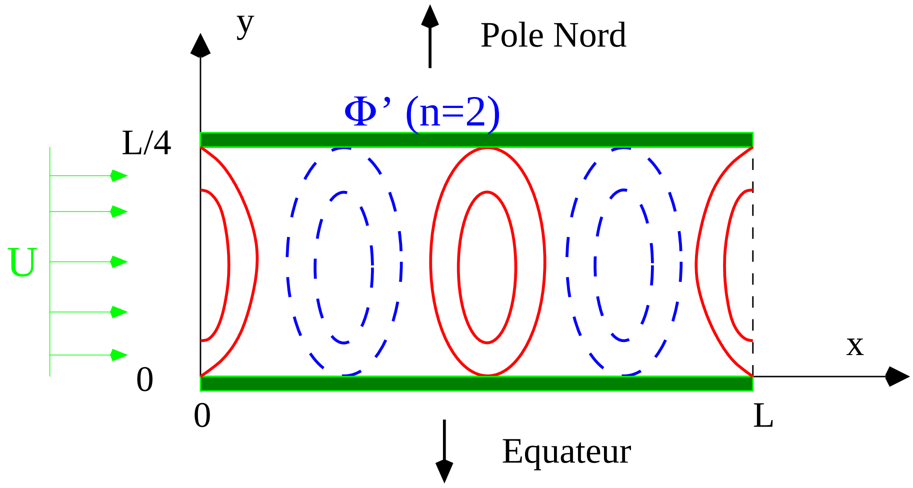

Figure 1 : *Géométrie du problème et Φ' en z=0, à l'instant où sa valeur est maximale. Lignes pointillées $\Phi' < 0$, lignes continues $\Phi' > 0$.*

Dans tout l'exercice nous prendrons aussi, pour faciliter les calculs, l'approximation de Boussinesq des équations quasi géostrophiques présentées dans le cours :

$$D_g u_g - f_0 v - \beta y v_g = -\partial_x \Phi_e, \tag{1}$$

$$D_g v_g + f_0 u + \beta y u_g = -\partial_y \Phi_e, \tag{2}$$

$$\partial_z \Phi = RT/H, \tag{3}$$

$$D_g \partial_z \Phi_e + N^2 w = 0, \tag{4}$$

$$\partial_x u + \partial_y v + \partial_z w = 0. \tag{5}$$

Dans ce système D_g est l'approximation quasi géostrophique de la dérivée Lagrangienne,

$$D_g = \partial_t + u_g \partial_x + v_g \partial_y, \tag{6}$$

H est une hauteur caractéristique constante et R est la constante des gaz pour l'atmosphère. Dans la suite, nous prendrons pour conditions aux limites latérales :

$$v_g = 0 \text{ en } y = 0, L/4. \tag{7}$$

On rappelle que dans ce système d'équations le terme de pression a été séparé en deux termes $\Phi = \Phi_0(z) + \Phi_e$. Φ_0 représente la stratification du fluide au repos et Φ_e est associé au mouvement. Les vitesses u, v et w représentent les trois composantes de la vitessse totale, tandis que u_g et v_g sont les deux composantes de la vitesse géostrophique.

1) Exprimez l'équilibre géostrophique dans notre système d'équations.

2) Exprimez l'équilibre du vent thermique.

3) Montrer que $\partial_x D_g v_g = D_g \partial_x v_g$.

4) En admettant que de la même manière que $\partial_y D_g u_g = D_g \partial_y u_g$ établir la loi de conservation de la vorticié relative :

$$D_g \left(\partial_x v_g - \partial_y u_g + f_0 + \beta y \right) - f_0 \partial_z w = 0. \tag{8}$$

5) Montrer que $\partial_z D_g \partial_z \Phi_e = D_g \partial^2_{zz} \Phi_e$.

6) En déduire que

$$D_g \partial^2_{zz} \Phi_e + N^2 \partial_z w = 0 \tag{9}$$

7) Déduire des résultats précédents une équation d'évolution pour la vorticité potentielle quasi-géostrophique :

$$\eta_{qg} = \frac{\partial^2_{xx}\Phi_e + \partial^2_{yy}\Phi_e}{f_0} + \frac{f_0}{N^2}\partial^2_{zz}\Phi_e + f_0 + \beta_y \tag{10}$$

On considère à présent que l'écoulement est constitué d'un vent moyen U dans la direction x, uniforme dans le temps et dans l'espace, et d'une perturbation stationnaire de petite amplitude Φ' imposée par une ondulation du potentiel Φ' à la tropopause (que nous placerons en $z = 0$).

8) Donnez une approximation linéaire de la loi de conservation de η_{qg} en exprimant la perturbation à l'aide de Φ' uniquement.

9) Exprimez les conditions aux limites en $y = 0, L/4$ à l'aide de Φ'.

On considère à présent que l'ondulation du potentiel est imposé à la tropopause et est de la forme :

$$\Phi'(x, y, z = 0) = \Re \left(H_0(t) \ \sin ly \ e^{ikx} \right), \tag{11}$$

où $\Re$ représente la partie réelle, H_0 est une fonction réelle positive variant lentement dans le temps. On considère que cette fonction est nulle pour $t \to -\infty$ croit monotoniquement pendant une interval de temps fini et jusqu'à $t = 0$, puis décroit monotoniquement en un temps fini pour revenir à 0 en $t \to \infty$.

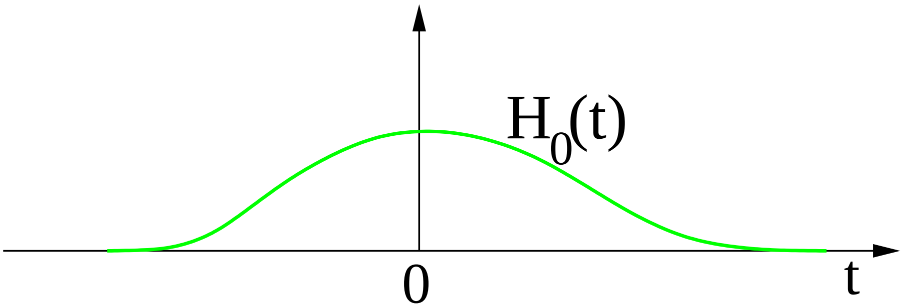

Figure 2 : *Evolution temporelle caractéristique de l'amplitude du forçâge à la tropopause.*

En ce qui concerne la structure spatiale du forçâge, k est un nombre d'onde zonal positif de la forme

$$k = s\frac{2\pi}{L}, \tag{12}$$

et s est entier : $s = 1, 2, ...$ Enfin, on se limite à l'étude du mode méridien le plus long, c'est à dire ayant pour nombre d'onde méridien :

$$l = \frac{4\pi}{L}. \tag{13}$$

A ce forçâge, il est naturel de chercher une réponse de la forme,

$$\Phi' = \Re\left(\hat{\varphi}(z,t)\ \sin ly\ e^{ikx}\right), \tag{14}$$

où $\varphi(z,t)$ est une fonction complexe.

10) A partir du résultat de la question **8)** montrez que $\varphi(z,t)$ satisfait l'équation,

$$(\partial_t + ikU)\left(\frac{f^2}{N^2}\varphi_{zz} - \left(k^2 + l^2\right)\varphi\right) + ik\beta\varphi(z,t) = 0, \tag{15}$$

et permet de satisfaire aux conditions à la limite latérales.

Sachant que H_0 varie lentement dans le temps, c'est à dire que $|d_t H_0| << kUH_0$ on cherche pour φ une solution de la forme

$$\varphi = E(z,t)e^{imz} \tag{16}$$

ou m est un nombre d'onde vertical constant, et $E(z,t)$ une fonction réelle décrivant l'enveloppe de l'onde et variant lentement en z et en t. (c'est à dire $|\partial_t E| << |kUE|$ et $|\partial_z E| << |mE|$).

11) Exprimer m^2 en utilisant l'Eq. (16) et en formant une approximation de (15) à l'ordre dominant (c'est à dire l'ordre le plus bas).

12) A quelle condition la fonction $\varphi(z,t)$ décrit-elle une onde se propageant verticalement ?

Indication : On donnera un critère distinguant en fonction du nombre d'onde horizontal (k,l), les ondes se propageant verticalement vers la moyenne atmosphère de celles restant piégées au dessus de $z = 0$.

13) Exprimez le critère obtenu à la question **12)** en fonction de l'entier s introduit dans la définition du nombre d'onde k par l'Eq. (12). Pour $U = 10$m/s, indiquer en fonction de s les ondes pouvant aller dans la stratosphère.

En se limitant à l'hémisphère nord expliquez en quoi ce dernier résultat controle les échelles spatiales de la variabilité de la circulation dans la moyenne atmosphère ?

Pourquoi n'y a-t'il pas d'ondes planétaires en été (toujours pour l'Hémisphère Nord et dans la moyenne atmosphère) ?

14) En prenant une approximation de l'Eq. (15) à l'ordre suivant de celui pris dans la question **11)** montrer que l'enveloppe E varie suivant une equation du type

$$\frac{\partial E}{\partial t} + C_{gz}\frac{\partial E}{\partial z} = 0 \tag{17}$$

où C_{gz} est une constante que l'on déterminera.

A quelle quantité introduite dans le cours correspond C_{gz} ?

15) En déduire qu'une solution satisfaisant la condition à la limite s'écrit :

$$E(z,t) = H_0(t - z/C_{gz}) \tag{18}$$

16) A quelle condition sur le signe de m l'enveloppe de l'onde se propage-t'elle bien vers le haut.

Ce résultat est-il conforme aux variations avec l'altitude de de phase des ondes de Rossby quasi-stationnaires observées dans la stratosphère en hiver et aux moyennes latitudes ?

On cherche à présent à estimer l'influence du passage de cette onde sur l'écoulement moyen. On utilise pour cela le formalisme de la moyenne Eulérienne transformée pour les Equations (1)–(4) :

$$\partial_t \overline{u}_g - f_0 \overline{v^*} = \vec{\nabla}.\vec{F} \tag{19}$$

$$\partial_y \overline{v^*} + \partial_z \overline{w^*} = 0. \tag{20}$$

$$\partial_t \overline{\Phi}_z + N^2 \overline{w^*} = -\alpha \overline{\Phi}_z \tag{21}$$

où la divergence du flux d'Eliasen Palm :

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = -\partial_y \overline{v_g' u_g'} + \partial_z \left(\frac{f_0}{N^2} \overline{v_g' \Phi_z'} \right) \tag{22}$$

et ou ($\overline{v^*}$,$\overline{w^*}$) sont les deux composantes de la vitesse méridienne en moyenne Eulérienne transformée. Notez que dans l'équation de la thermodynamique (l'Eq. 21) nous avons introduit un petit paramètre α représentant l'émission infrarouge moyenne qui équilibre le changement de Température éventuel (proportionel à $\overline{\Phi}_z$) produit par le passage de l'onde. Cette relaxattion infrarouge nous permettra surtout de simplifier le traitement analytique de la réponse en nous limitant à sa partie quasiment stationnaire.

On peut montrer que pour le paquet d'onde dont l'amplitude est donnée par la formule (18) les deux composantes du flux d'Eliasen Palm valent

$$\overline{v_g' u_g'} = 0, \quad \frac{f_0}{N^2} \overline{v_g' \Phi_z'} = -\frac{km}{2N^2} \sin^2 ly \, H_0^2(t - z/C_{gz}) \tag{23}$$

17) Déterminer la divergence $\vec{\nabla}.\vec{F}$.

Suivant que le résultat est nul ou non nul dire si cela vous étonne et expliquer pourquoi.

18) En utilisant le fait que H_0 varie très lentement au cours du temps, donner une approximation quasi stationnaire de la composante méridienne $\overline{v^*}$ permettant d'équilibrer $\vec{\nabla}.\vec{F}$.

19) En déduire une approximation quasi-stationnaire de $\overline{w^*}$, en appliquant le principe dit du "Downward Control" : $\overline{w^*} \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow \infty$.

20) Déduire que lors de son passage le paquet d'onde réchauffé les regions septentrionales de notre canal et refroidie les régions subtropicales.

<u>Indication :</u> Dans le formalisme du plan β que nous avons adopté les régions septentrionales sont celles pour lesquelles $L/8 < y < L/4$ et les régions subtropicales celles pour lesquelles $0 < y < L/8$.

21) Quel phénomène majeur de la circulation stratosphérique notre modèle essaie-t'il de représenter.

Quelles différences y-a-t'il entre les interactions ondes-écoulement moyen décrites ici et celles se produisant dans le monde réel ?

Deuxième partie, 6 points

Ces questions demandent des réponses **concises** et exploitent directement les résulats du cours pours les trois premières. La dernière vise à retrouver rapidement et par une approche thermodynamique, un résulta abtenu à l'issu d'un calcul détaillé dans le cours.

Energie de la convection

Au dessus d'une station située dans les tropiques, la température décroît de 7 K par km de 1000 à 200 HPa et le profil est isotherme au-dessus. A la surface, la température est de 30°C et l'humidité relative est suffisante pour assurer presqu'immédiatement la saturation si un mouvement vertical se produit. En approximant la décroissance de température de l'adiabatique saturée par 6,5 K par km, calculez la vitesse maximale atteinte au sein des tours convectives.

Critères d'intabilité et vorticité

Une anomalie de vorticité potentielle positive au niveau de la tropopause est-elle associée à une déviation positive ou négative de la température ? Quel est l'effet d'une anomalie froide au sol ? Dans le modèle de Eady, la vorticité potentielle est uniforme à l'intérieur de l'écoulement et la température possède un gradient méridien négatif sur les frontières supérieures et inférieures. Est ce compatible avec le développement d'une instabilité barocline ? Pourquoi ?

La réponse à cette question n'implique aucun calcul.

Jet d'est et moussons

La figure 3 représente le vent horizontal à 200 hPa dans la région tropicale moyenné sur la période de la mousson de juin à septembre. :

Propagation verticale d'un paquet d'ondes de Rossby

a) Identifiez sur la figure le jet qui s'étend, dans l'hémisphère nord de l'Indonésie à l'Afrique. et indiquez ses zones de confluence et diffluence dans l'hémisphère nord.

b) En admettant que l'équilibre du vent thermique s'applique à ce jet dans l'hémisphère nord, et que les lignes de température sont à peu près zonales, indiquez l'orientation du vecteur $\vec{Q}$ dans les zones de confluence et de diffluence.

c) Quelle est la circulation agéostrophique induite dans les zones de confluence et diffluence ? Faites deux schémas dans un plan méridien altitude-latitude.

d) Quel peut être l'effet induit sur les moussons africaines et asiatiques (renforcement ou affaiblissement) ?. Justifiez. (On peut se contenter de considérer la mousson comme une gigantesque brise de mer dans le plan méridien)

La réponse à cette question n'implique aucun calcul.

Intensité d'un cyclone tropicale

a) Un cyclone tropical peut être considéré comme une machine thermique de Carnot avec une source chaude au sol et une source froide en altitude. Justifiez cette affirmation et décrivez la nature des isothermes et adiabatiques dans ce modèle simplifié.

b) Ecrivez le principe de Carnot pour le flux de chaleur entrant Q_1 et le flux sortant Q_2, avec les températures correspondantes T_1 et T_2. En utilisant la conservation de l'énergie et en supposant que l'entropie produite est nulle, écrivez le travail produit W en fonction de Q_1, $T - 1$ et T_2.

c) On suppose que le flux au sol d'une quantité A peut être donné par la formule aérodynamique $\tau_A = \rho C_A |V| (A_S - A_B)$ où ρ est la densité, V la vitesse du vent, A_S et A_B sont les valeurs de A au sol et au sommet de la couche limite, et C_A est un coefficient aérodynamique empirique. Montrez que l'on peut ainsi écrire $W = \rho C_D |V|^3$.

d) En appliquant le même principe au flux de chaleur (que vous pouvez assimiler à un flux d'enthalpie) , donnez une expression de $|V|$ en fonction des températures et d'autres quantités.

e) Tenez compte du fait que la dissipation de l'énergie cinétique la convertit en chaleur et obtenez une nouvelle estimation de $|V[$.

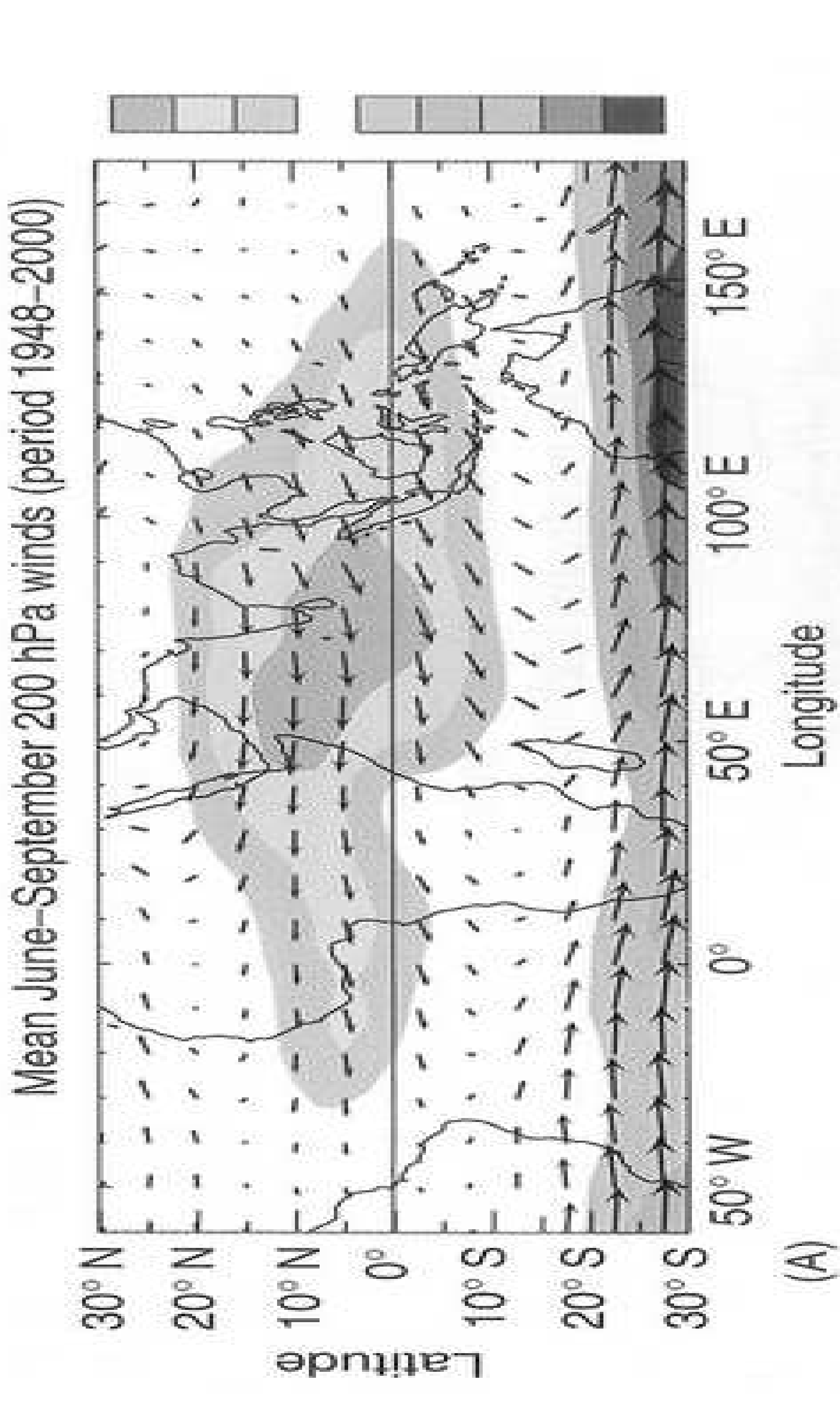

Figure 3 : *Carte du vent à 200 hPa au desssus de l'Afrique ete de l'Océan Indien pendant l'été.*