

Dynamique de l'atmosphère et météorologie

François Lott , flott@lmd.ens.fr et **Bernard Legras**, legras@lmd.ens.fr

I. Les ondes atmosphériques et leurs effets sur la circulation générale

3) Les ondes de gravité

a) Généralités sur les ondes en milieu lentement variable

b) Théorie linéaire des ondes de gravité et sources

a) Modèle heuristique, relation de dispersion

b) Ajustement géostrophique (ondes d'inertie gravité), montagnes, convection

c) Interaction avec l'écoulement moyen

– Propagation dans un milieu en mouvement

– Action flux d'action et vitesse de groupe

– Le théorème de non-interaction de Eliassen-Palm

a) Généralités sur les ondes en milieu lentement variable

Définition d'une onde en milieu variable:

$$u'(\vec{x}, t) = \Re \{ \hat{u}(\vec{x}, t) \exp i\chi(\vec{x}, t) \},$$

$\chi(\vec{x}, t)$ est la phase (réelle), $\hat{u}(\vec{x}, t)$ est l'amplitude (complexe).

Nombres d'onde et fréquence locale:

$$k = \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad l = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad m = \frac{\partial \chi}{\partial z}, \quad \omega = -\frac{\partial \chi}{\partial t}.$$

Hypothèse lentement variable:

\hat{u}, \vec{k} , et ω varient plus lentement dans l'espace et dans le temps que la phase χ .

Relation de Dispersion:

$$\omega = \Delta(\vec{k}, \vec{x}, t).$$

Vitesse de Groupe:

$$\vec{c}_g(\vec{k}, x, t) = \left(\frac{\partial \Delta}{\partial k}, \frac{\partial \Delta}{\partial l}, \frac{\partial \Delta}{\partial m} \right).$$

Définition des rayons:

$$d_g \vec{r} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{c}_g \cdot \vec{\nabla} \right) \vec{r} = \vec{c}_g.$$

a) Généralités sur les ondes en milieu lentement variable

Relations importantes:

loi de conservation des crêtes:

$$\frac{\partial \vec{k}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \omega, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x}, \quad \frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial x}, \quad \frac{\partial l}{\partial z} = \frac{\partial m}{\partial y}.$$

Variation des caractéristique de l'onde le long des rayons:

$$d_g k = -\frac{\partial \Delta}{\partial x}, \quad d_g l = -\frac{\partial \Delta}{\partial y}, \quad d_g m = -\frac{\partial \Delta}{\partial z}, \quad d_g \omega = +\frac{\partial \Delta}{\partial t}.$$

Relations concernant l'amplitude de l'onde:

(ne se déduisent pas simplement de l'analyse cinématique des variations de la phase χ)

$$\langle \vec{F} \rangle = \vec{c}_g \langle A \rangle,$$

A : Action; \vec{F} : Flux d'action; dans le cadre lentement variable, et avec $\langle . \rangle$ une moyenne sur la phase χ .

La forme de l'action A et du flux d'action \vec{F} dépendent du problème physique, mais satisfont une Eq. du type

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D$$

Où $D = 0$ en l'absence de processus dissipatifs ou diabatiques.

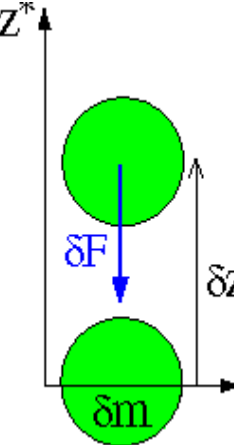
b) Theorie linéaire et sources: description heuristique

Mécanisme de rappel lié à la conservation de la Temp. potentielle: $\frac{D\theta}{Dt}=0$

Ou à la conservation de la densité en incompressible (Boussinesq): $\frac{D\rho}{Dt}=0$

Méthode de la parcelle:

(on néglige les variations de pression liées aux déplacements verticaux)



Densité du fluide au repos: $\rho_0(z^*)$
 Masse de la parcelle: $\delta m = \rho_0(z^*)\delta V = \text{cst}$
 Déplacement vertical: δz^* , vitesse $w = \frac{D\delta z^*}{Dt}$
 Force d'Archimède:

$$\begin{aligned}\delta F &= -g\delta V (\rho_0(z^*) - \rho_0(z + \delta z^*)) \\ &= \delta m \frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz^*} \delta z^* \\ &= -\delta m N^2 \delta z^*\end{aligned}$$

Loi de Newton: $\delta m \frac{Dw}{Dt} = \delta F$

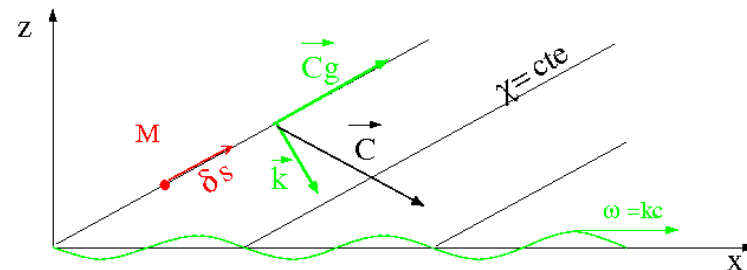
$$\frac{D^2 \delta z^*}{Dt^2} + N^2 \delta z^* = 0$$

Extension de la méthode de la parcelle

(les variations spatiales de la pression sont effectivement nulles le long des lignes de phase constantes)

$m\omega < 0$ assure la propagation vers le haut

$\vec{c}_g \cdot \vec{k} = 0$, la vitesse de groupe est selon les lignes de phase



Déplacement vertical: $\delta z^* = \cos \theta \delta s$

Force de rappel projetée sur s: $\delta F = -\delta m \cos^2 \theta N^2 \delta s$

Bilan acceleration force:

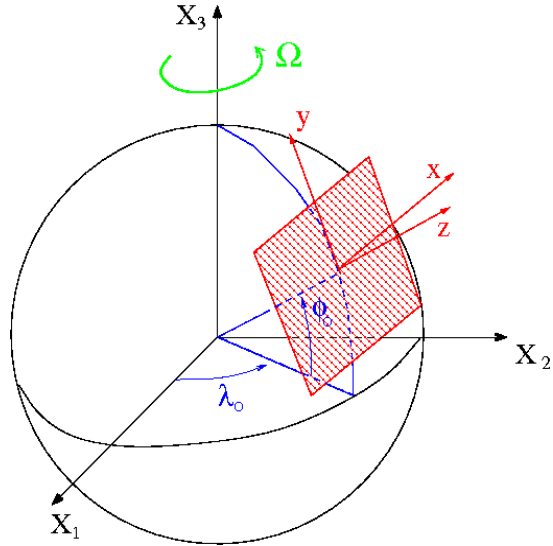
$$\frac{D^2 \delta s}{Dt^2} + N^2 \cos^2 \theta \delta s = 0$$

Relation de dispersion:

$$\omega = \pm N \cos \theta = \pm \frac{Nk}{\sqrt{k^2 + m^2}}$$

b) Theorie linéaire et sources: équations linéaires

Approximation du plan tangent ($f=f_0=\text{cte}$)



$$x = a \cos \phi_0 (\lambda - \lambda_0), \quad y = a(\phi - \phi_0)$$

$$2\Omega \sin \phi \sim 2\Omega \sin \phi_0 = f_0 = \text{cte}$$

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} \approx \begin{cases} \frac{Du}{Dt} - f_0 v \\ \frac{Dv}{Dt} + f_0 u \\ 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

et:

$$u = \frac{Dx}{Dt}, \quad v = \frac{Dy}{Dt}, \quad w = \frac{Dz}{Dt}.$$

Récapitulatif des équations
(app. hydrostatique):

$$\begin{aligned} \frac{Du}{Dt} - f_0 v &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + X \\ \frac{Dv}{Dt} + f_0 u &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y} + Y \\ 0 &= -\frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{RT}{H} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0 w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{D\Phi_z}{Dt} + \frac{\kappa \Phi_z}{H} w &= Q \end{aligned}$$

b) Theorie linéaire et sources: équations linéaires

Méthode des perturbations:

On cherche des solutions de petite amplitude ($O(\alpha)$) par rapport à un état thermique au repos, $\Phi_0(z)$, et éventuellement un vent zonal moyen non-perturbé $\bar{u}_0(z)$:

$$\begin{aligned}u(x, y, z, t) &= \bar{u}_0(z) + u'(x, y, z, t) + O(\alpha^2) \\ \Phi(x, y, z, t) &= \Phi_0(z) + \bar{\Phi}_0(y, z) + \Phi'(x, y, z, t) + O(\alpha^2) \\ v(x, y, z, t) &= v'(x, y, z, t) + O(\alpha^2) \\ w(x, y, z, t) &= w'(x, y, z, t) + O(\alpha^2)\end{aligned}$$

$\bar{u}_0(z)$ et $\bar{\Phi}_0(y, z)$ sont liés par l'équilibre du vent thermique.

Equations pour la perturbation à l'ordre $O(\alpha)$:

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) u' + \bar{u}_{0z} w' - f_0 v' = -\partial_x \Phi' + X'$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) v' + f_0 u' = -\partial_y \Phi' + Y'$$

$$0 = -\partial_z \Phi' + \frac{RT'}{H}$$

$$\partial_x u' + \partial_y v' + \frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 w') = 0$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_x) \Phi'_z + \bar{\Phi}_{0zy} v' + \bar{N}^2 w' = Q'$$

Fréquence de Brunt Vaisala

$$\bar{N}^2 = \underbrace{\Phi_{0zz} + \frac{\kappa}{H} \Phi_{0z}}_{N^2} + \bar{\Phi}_{0zz} + \frac{\kappa}{H} \bar{\Phi}_{0z}$$

N^2 étant sa valeur au repos.

b) Theorie linéaire et sources: relation de dispersion

Ondes de gravité pures (3D, $N^2=\text{cte}$, $\bar{u}_0=0$, $f_0=0$)

Equations linéarisées:

$$\begin{aligned}\partial_t u' + \Phi'_x &= 0, & \partial_t v' + \Phi'_y &= 0, \\ \partial_t \phi'_z + N^2 w' &= 0, & u'_x + v'_y + \frac{1}{\rho_0} (\rho_0 w')_z &= 0\end{aligned}$$

Solution monochromatique:

$$u' = \Re \{ \hat{u} \exp i(kx + ly + mz - \omega t) \} e^{z/2H}$$

$k > 0$ **par convention dans tout le cours.**

Relations de polarization:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= \frac{k}{\omega} \hat{\Phi}, & \hat{v} &= \frac{l}{\omega} \hat{\Phi}, \\ \hat{w} &= \left(-m + \frac{i}{2H} \right) \frac{\omega \hat{\Phi}}{N^2}.\end{aligned}$$

Relation de dispersion:

$$\omega = \pm N \sqrt{\frac{k^2 + l^2}{m^2 + \frac{1}{4H^2}}}$$

Vitesse de phase et vitesse de groupe:

$$\vec{c} = \frac{\omega}{\|\vec{k}\|^2} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}; \quad \vec{c}_g = \omega \begin{pmatrix} \frac{k}{k^2 + l^2} \\ \frac{l}{k^2 + l^2} \\ -\frac{m}{m^2 + \frac{1}{4H^2}} \end{pmatrix}$$

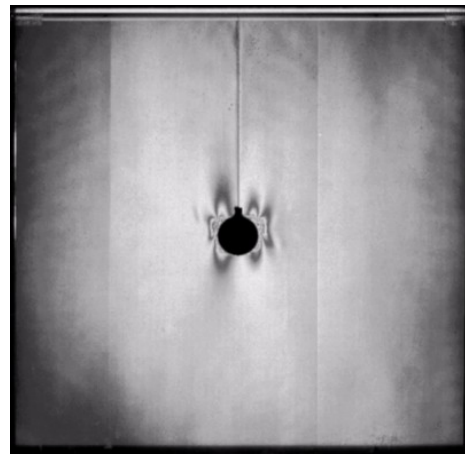
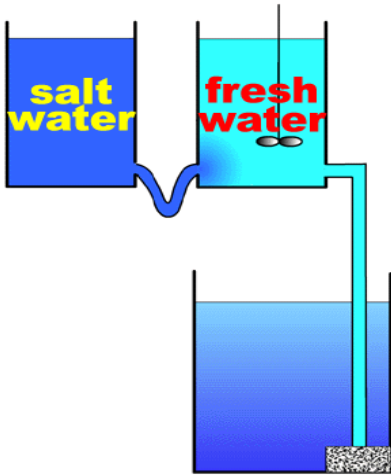
•Par rapport à la solution heuristique, on vérifie que $m\omega < 0$ assure la propagation vers le haut.

•La relation de dispersion ressemble (dans la limite Boussinesq et Hydrostatique, voir TD)

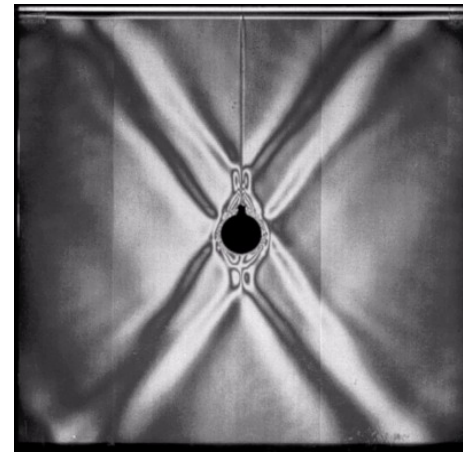
•Toujours dans cette limite, on retrouve que la vitesse de phase et la vitesse de groupe sont perpendiculaires

b) Theorie linéaire et sources

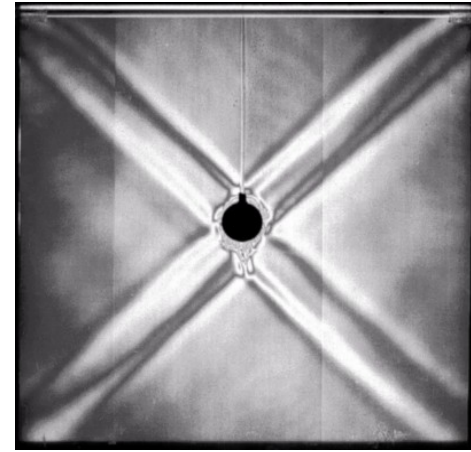
Vérification expérimentale (GFD on-line Sakai, Iizawa, Aramaki) $1/N \sim 4s$



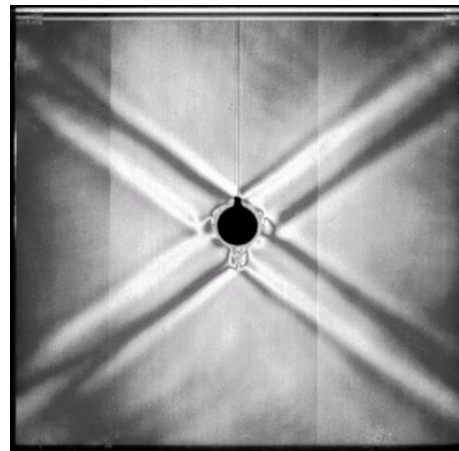
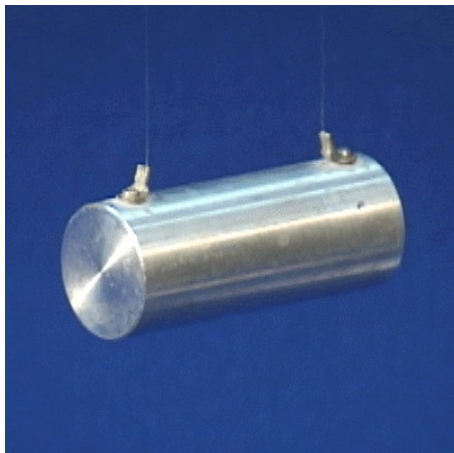
$1/\omega = 3.8s$



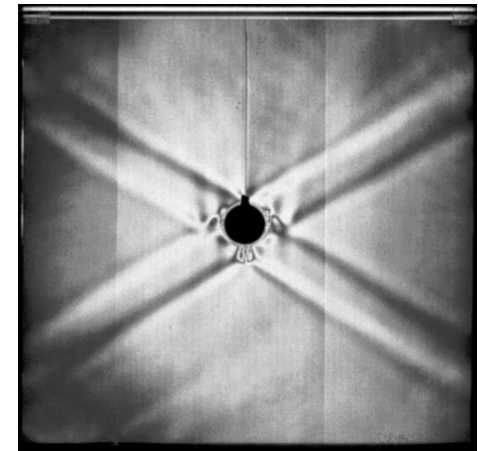
$1/\omega = 5s$



$1/\omega = 6s$



$1/\omega = 7s$



$1/\omega = 8s$

b) Theorie linéaire et sources: l'ajustement géostrophique

Les Ondes d'inertie gravité (3D, $N^2 = \text{cte}$, $\bar{u}_0 = 0$, $f_0 = \text{cte}$)

Equations linéarisées:

$$\begin{aligned} \partial_t u' - f_0 v' + \Phi'_x &= 0, & \partial_t v' + f_0 u' + \Phi'_y &= 0, \\ \partial_t \phi'_z + N^2 w' &= 0 & u'_x + v'_y + \frac{1}{\rho_0} (\rho_0 w')_z &= 0 \end{aligned}$$

Relations de polarizations:

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \frac{k\omega + ilf_0}{\omega^2 - f_0^2} \hat{\Phi}, & \hat{v} &= \frac{l\omega - ikf_0}{\omega} \hat{\Phi}, \\ \hat{w} &= \left(-m + \frac{i}{2H}\right) \frac{\omega \hat{\Phi}}{N^2}. \end{aligned}$$

Relation de dispersion:

$$\omega = \pm \sqrt{f_0^2 + \frac{k^2 + l^2}{m^2 + \frac{1}{4H^2}} N^2}$$

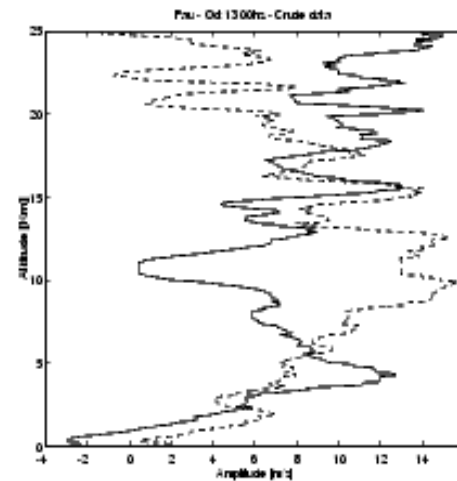
Souvent les forçages imposent ω , k , et l , on écrit alors:

$$m^2 = \frac{N^2(k^2 + l^2)}{\omega^2 - f^2} - \frac{1}{4H^2}$$

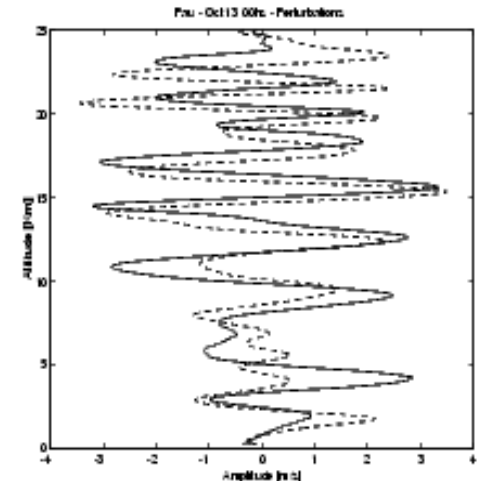
Seules les ondes avec $\omega > f$ se propagent vers le haut.

Observation: RS haute résolution effectué à Pau le 13 Octobre 1990 (u continue, v pointillée)

Brutes



Filtrées



Relation de polarisation entre \hat{u} et \hat{v} :

$$\hat{v} = \frac{l\omega - ikf}{k\omega + ilf} \hat{u}$$

Pour des ondes produites par ajustement géostrophique:

$$\omega \approx f \text{ donc } \hat{v} \approx -i\hat{u}$$

Dans l'espace physique à x et t données:

$$u' = \Re \{ \hat{u} e^{imz} \} = \|\hat{u}\| \cos(mz + \chi_s)$$

$$v' = \Re \{ -i\hat{u} e^{imz} \} = \|\hat{u}\| \sin(mz + \chi_s)$$

NB: $m < 0$ pour permettre la propagation vers le haut.

b) Theorie linéaire et sources

Les ondes de gravité produites par les montagnes (3D, $N^2 = \text{cte}$, $\vec{u}_0 \neq 0$, $f_0 = 0$)

Condition à la limite inférieure linéarisée:

$$w' \approx \vec{u}_0(0) \cdot \vec{\nabla} h$$

Comme la montagne est stationnaire, elle impose $\omega = 0$, c'est la présence d'un vent incident \vec{u}_0 qui permet la propagation vers le haut:

$$m^2 = \frac{N^2 k^2}{\hat{\omega}^2} - \frac{1}{4H^2}$$

(ondes assez courtes donc on prend $f = 0$)

La fréquence intrinsèque:

$$\hat{\omega} = \omega - \vec{k} \cdot \vec{u}_0(z) = -\vec{k} \cdot \vec{u}_0(z)$$

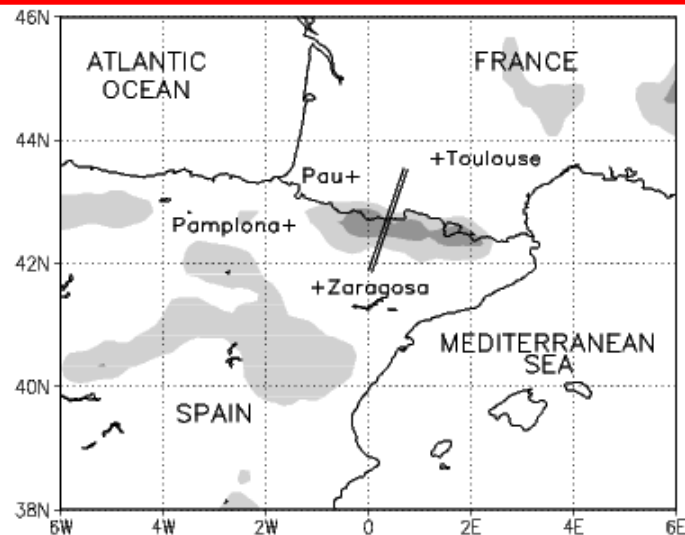


Figure 1: Smoothed terrain elevation and PYREX data used. + denotes the location of the high resolution soundings. The two thick lines indicate the location of the high resolution soundings. The two thick lines indicate the airplane paths during the IOP 3. The light and dark shaded areas denote terrain elevation above 1000m and 1500m respectively.

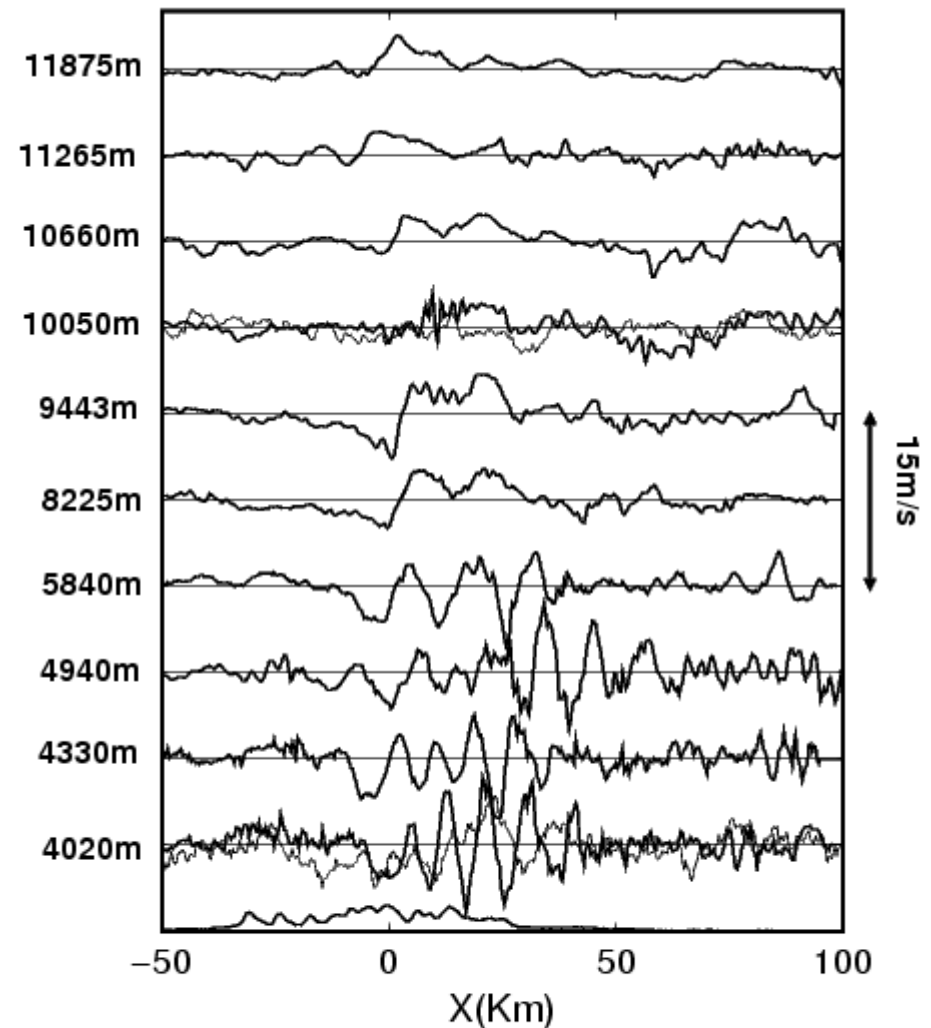


Figure 2: Observed vertical velocities from different Aircraft legs. 15 October 1990 around 6 UTC. Thick lower curve represent the Pyrénées, the thin curve at the Z=4km and Z=10km are red noises surrogate with characteristics adapted to the measured vertical velocity at that levels.

b) Theorie linéaire et sources

Ondes de gravité issues de la convection

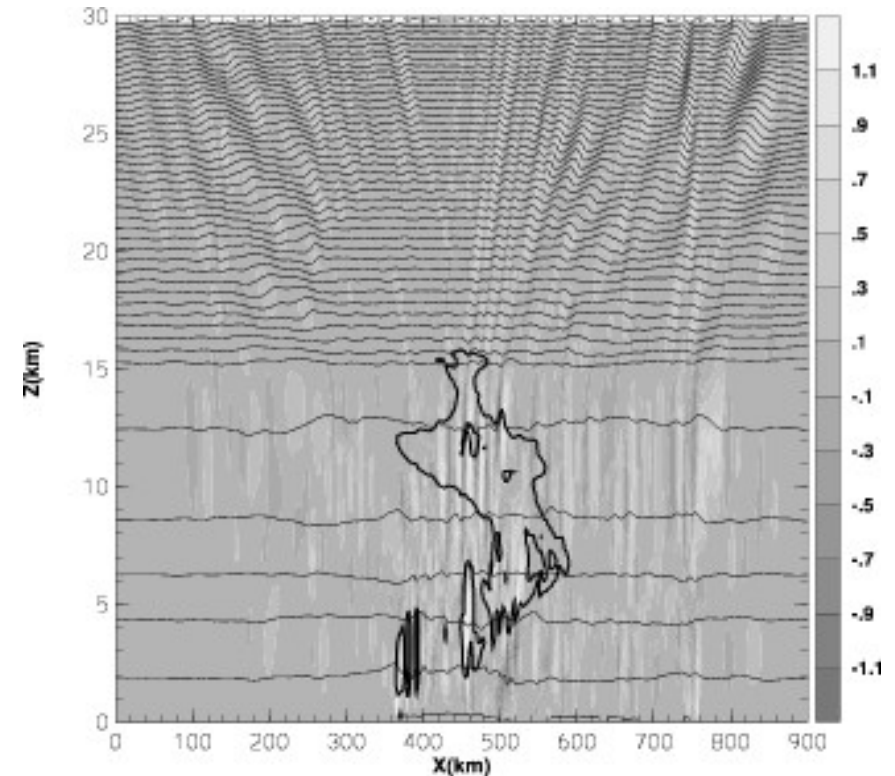
Un chauffage stationnaire dans l'espace mais d'amplitude fluctuant dans le temps:

$$Q(x, t) = f(x)g(t)$$

produit des ondes se propageant vers l'est et vers l'ouest.

Par exemple si $f = Q_0 \cos kx$ et $g = \cos \omega t$

$$Q = Q_0 \cos(kx - \omega t) + Q_0 \cos(kx + \omega t)$$



Simulation numérique des ondes de gravité
produite par un nuage convectif
(Alexander et Holton 1997)

Autres sources:

les instabilités hydrodynamiques (Kelvin-Helmholtz par ex. Mais c'est moins efficace)

c) Interaction avec l'écoulement moyen

Ondes de gravité dans un milieu en mouvement: Action

$$(N^2(z) \neq 0, u_0(z) \neq 0, f=0, 2D(x-z))$$

Equations linéarisées (ordre 1 en α),

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_w) u' + \bar{u}_{0z} w' = -\partial_x \Phi' + X'$$

$$\partial_x u' + \frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 w') = 0$$

$$(\partial_t + \bar{u}_0 \partial_w) \Phi'_z + N^2 w' = Q'$$

Re-formulation et dérivation de l'Action:

$$\begin{aligned} & \left((\partial_t + \bar{u}_0 \partial_w) u'_z + \bar{u}_{0zz} w' + \Phi'_{zx} = X'_z \right) \times \left(-\rho_0 \frac{\Phi'_z}{N^2} \right) + \\ & \left((\partial_t + \bar{u}_0 \partial_w) \Phi'_z + N^2 w' = Q' \right) \times \left(-\rho_0 \frac{u'_z}{N^2} + \bar{u}_{0zz} \frac{\rho_0 \Phi'_z}{N^4} \right) = \end{aligned}$$

Loi de conservation de l'action A:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = D.$$

Avec:

$$A = -\rho_0 \frac{u'_z \Phi'_z}{N^2} + \rho_0^2 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0} \right)_z \frac{\Phi'^2_z}{2N^4},$$

$$F^x = \bar{u}_0 A - \rho_0 \frac{u'^2}{2} - \rho_0 \frac{\Phi'^2_z}{2N^2},$$

$$F^z = -\rho_0 u' w'.$$

$$D = -\rho_0 \frac{X'_z \Phi'_z}{N^2} - \rho_0 \frac{u'_z Q'}{N^2} + \rho_0^2 \left(\frac{\bar{u}_{0z}}{\rho_0} \right)_z \frac{Q' \Phi'_z}{N^4}.$$

$F^z = -\rho_0 u' w'$ est la composante verticale du flux d'Eliassen-Palm des ondes de gravité

- A est une quantité quadratique de signe définie, c'est le pseudo-moment



- \vec{F} est le flux de pseudo-moment
- Pour une onde stationnaire, non forcée et non-dissipée:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0.$$

- L'équation du bilan d'énergie de l'onde ne permet pas d'établir ce résultat formellement:

$$E = \rho_0 \left(\frac{u'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + \frac{b'^2}{2N^2} \right)$$

c) Interaction avec l'écoulement moyen

Ondes de gravité dans un milieu en mouvement: Action en milieu lentement variable ($N^2(z) \neq 0, u_0(z) \neq 0, f=0, 2D(x-z)$)

Formulation générale pour la perturbation:

$$(u', w', \Phi') = (\hat{u}, \hat{w}, \hat{\Phi}) (\vec{x}, t) e^{i\chi(\vec{x}, t)} e^{z/2H}$$

Cas lentement variable sans dissipation

$$\hat{u} \approx \frac{k}{\hat{\omega}} \hat{\Phi}, \quad \hat{w} \approx -\frac{k}{m} \hat{u} \approx -\frac{k^2}{m\hat{\omega}} \hat{\Phi}$$

où $\hat{\omega} = \omega - k\bar{u}_0$ est la fréquence intrinsèque.

Flux vertical d'Action:

$$F^z = -\rho_s \frac{\hat{u}\hat{w}e^{2i\chi} + \hat{u}^*\hat{w}^*e^{-2i\chi} + \hat{u}\hat{w}^* + \hat{u}^*\hat{w}}{4}$$

En moyenne et sur la phase:

$$\langle F^z \rangle = -\frac{\rho_s}{2} \hat{u}\hat{w}^* \approx \rho_s \frac{k^3}{m\hat{\omega}^2} \frac{|\hat{\Phi}|^2}{2}$$

Pour l'action on montre aussi que

$$\langle A \rangle \approx -\rho_s \frac{m^2 k}{\hat{w} N^2} \frac{|\hat{\Phi}|^2}{2} = \frac{\langle F^z \rangle}{C_{gz}}$$

Vitesse de groupe verticale:

$$C_{gz} \approx -\frac{\hat{\omega}}{m}$$

- La fréquence intrinsèque est la fréquence mesurée par un observateur se déplaçant à la vitesse $\bar{u}_0(z)$
- C'est sur cette quantité que s'applique la relation de dispersion obtenue en milieu au repos.
- $\langle A \rangle$ est une quantité quadratique, elle caractérise l'amplitude de l'onde. C'est l'Action.
- On montre de la même manière,

$$\langle F^x \rangle \approx C_{gx} \langle A \rangle$$

$$\langle A \rangle = \frac{k \langle E \rangle}{\hat{\omega}}$$

c) Interaction avec l'écoulement moyen

Théorème de non-interaction (Eliassen et Palm), domaine périodique en x

Séparation onde-écoulement moyen:

$$u = \bar{u}(z) + u', \quad \Phi_z = \bar{\Phi}_z(z) + \Phi'_z$$

Moyenne zonale:

$$\bar{u}(z, t) = \frac{1}{L} \int_0^L u(x, z, t) dx$$

$(\bar{u}(z, t) = \bar{u}_0(z), \bar{\Phi}(z) = \bar{\Phi}_0(z))$ si l'onde n'a pas d'effet)

Equations pour l'écoulement moyen, sans forçage moyen

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{u} &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 \overline{u' w'}) = +\frac{1}{\rho_0} \partial_z \overline{F^z} \\ \partial_t \bar{\Phi}_z &= -\frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 \overline{\Phi'_z w'}) \end{aligned}$$

Flux de chaleur:

$$\rho_0 \overline{\Phi'_z w'} = -\partial_t \frac{\rho_0 \overline{\Phi'^2_z}}{2N^2} + \frac{\rho_0 \overline{Q' b'}}{N^2}.$$

Il est nul pour une onde stationnaire adiabatique.

- Pour une onde stationnaire non-dissipée adiabatique et linéaire:

$$\frac{\partial \overline{F^z}}{\partial z} = 0$$

- Il n'y a pas d'accélération moyenne
- C'est le théorème de non-interaction d'Eliassen et Palm
- Une telle onde ne transporte pas de chaleur.

c) Interaction avec l'écoulement moyen

signe de $\overline{F^z}$ et signe de l'accélération lorsque l'onde est dissipée

Si $\langle F^z \rangle$ est évalué comme une moyenne zonale $\overline{F^z}$

$$\partial_t \bar{u} = -\frac{1}{\rho_0} \partial_z (\rho_0 \overline{u'w'}) = +\frac{1}{\rho_0} \partial_z \overline{F^z}$$

La propagation vers le haut impose (rappel: $k > 0$):

$$\text{sign}(m) = -\text{sign}(\hat{\omega})$$

comme:

$$\overline{F^z} \approx \rho_s \frac{k^3}{m \hat{\omega}^2} \frac{|\Phi|^2}{2} \approx -\rho_s \frac{kN}{\hat{\omega}} \frac{|\Phi|^2}{2}$$

Les ondes se propageant vers l'Est ($\hat{\omega} > 0$) accélèrent l'écoulement moyen lorsqu'elles déferlent:

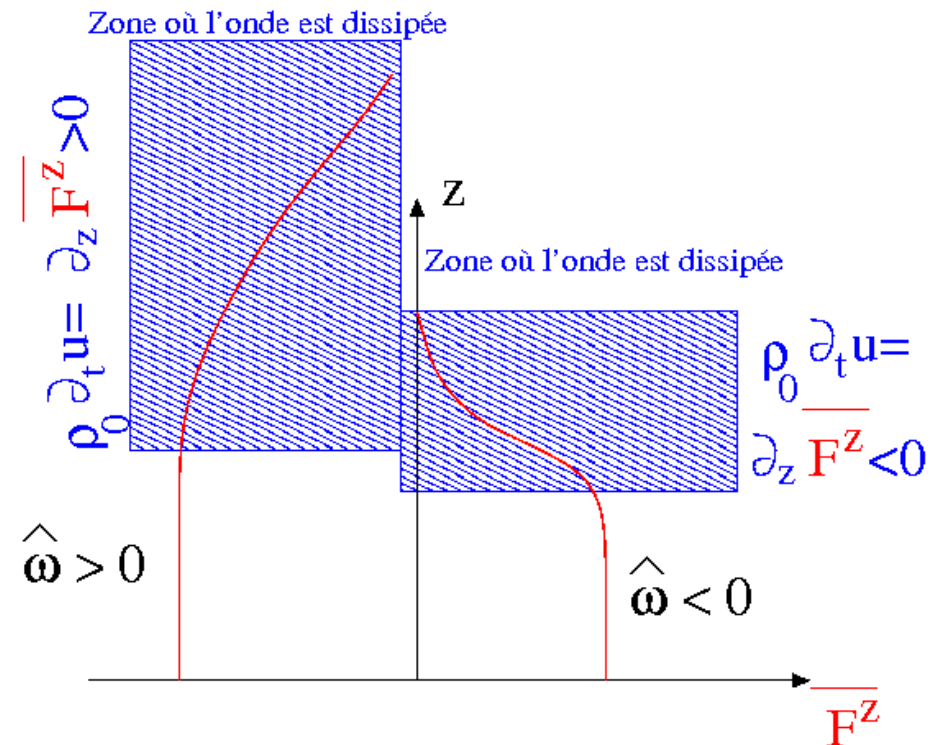
$$\partial_z \overline{F^z} > 0.$$

Les ondes se propageant vers l'ouest ($\hat{\omega} < 0$) freinent l'écoulement moyen lorsqu'elles déferlent:

$$\partial_z \overline{F^z} < 0.$$

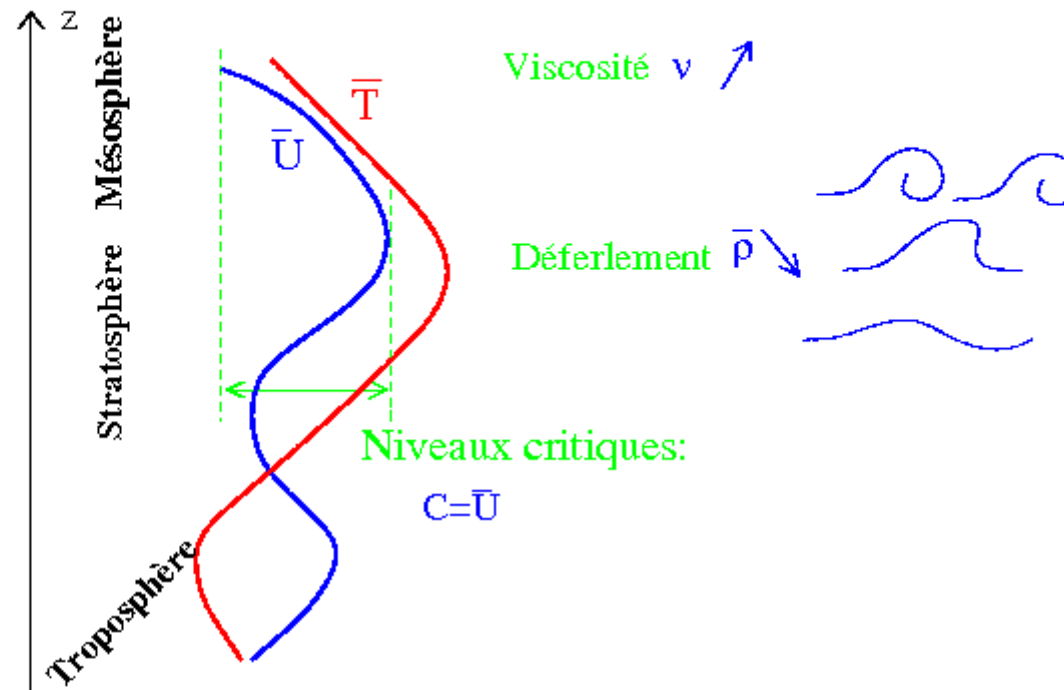
Lorsque la fréquence intrinsèque $\hat{\omega}$ change de signe, $\overline{F^{z*}}$ s'annule dans la plupart des cas.

Il s'agit d'un niveau critique et l'onde déferle et/ou est dissipée avant d'y arriver.



Résumé

→ Propagation et interaction avec l'écoulement de grande échelle



→ Sources:

