

Dynamique de l'atmosphère et météorologie

François Lott, flott@lmd.ens.fr et **Bernard Legras**, legras@lmd.ens.fr

I. Les ondes atmosphériques et leurs effets sur la circulation générale

6) Les ondes équatoriales

a) Théorie dans le plan β -équatorial

Formulation générale et Ondes de Kelvin

Décomposition en modes propres dans la direction horizontale

Ondes de Rossby-gravité, Ondes de Rossby, et ondes de gravité

b) Observations dans la basse stratosphère

Méthodologie

Ondes de Kelvin

Ondes de Rossby-Gravité

Ondes de Rossby

a) Théorie dans le plan β équatorial

Formulation générale et ondes de Kelvin

Equations linéarisées

Etat moyen au repos avec stratification $T_0(z)$

$$(\bar{u}_0(\lambda, \phi) = \bar{\Phi}_e((\lambda, \phi) = 0)$$

$$u'_t - 2\Omega \sin \phi v' + \frac{1}{a \cos \phi} \Phi'_\lambda = 0$$

$$v'_t + 2\Omega \sin \phi u' + \frac{1}{a} \Phi'_\phi = 0$$

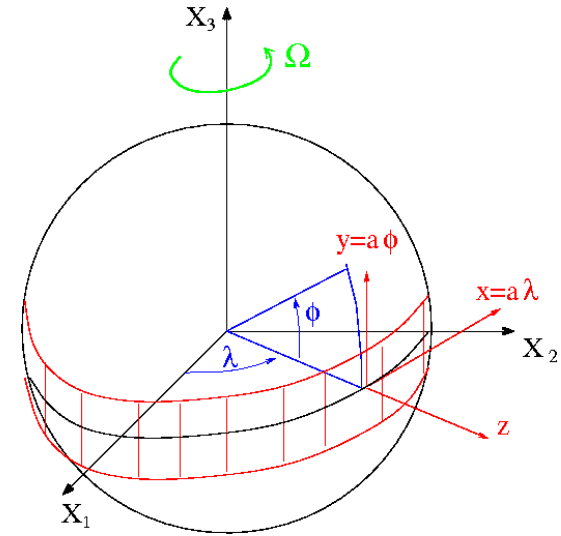
$$\frac{1}{a \cos \phi} (u'_\lambda + (v' \cos \phi)_\phi) + \rho_0^{-1} (\rho_0 w')_z = 0$$

$$\Phi'_{zt} + N^2 w' = 0$$

s : nombre d'onde zonal (>0 par convention!)

σ : fréquence,

$\sigma=1, 0.5, 0.1, \dots$ (périodes 12h, 1j, 5j....)



Approximation du plan β -équatorial

solutions monochromatiques:

$$(u', v', w', \Phi') = \Re \left[(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}, \hat{\Phi}) e^{i(s\lambda - 2\Omega\sigma t)} \right]$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{u} - 2\Omega\phi\hat{v} + \frac{is}{a}\hat{\Phi} = 0$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{v} + 2\Omega\phi\hat{u} + \frac{1}{a}\hat{\Phi}_\phi = 0$$

$$\frac{is}{a}\hat{u} + \frac{1}{a}\hat{v}_\phi + \rho_0^{-1} (\rho_0 \hat{w})_z = 0$$

$$-2i\Omega\sigma\hat{\Phi}_z + N^2 \hat{w} = 0$$

a) Théorie dans le plan β équatorial

Formulation générale et ondes de Kelvin

Méthode de la séparation des variables:

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{\Phi}) = e^{z/2H} U(Z) (\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}) (\phi)$$

$$\hat{w} = e^{z/2H} W(Z) \tilde{w}(\phi)$$

Constante de séparation h :

$$U = W_z - W/2H, \quad U_z + U/2H = -W \frac{N^2}{gh}$$

Structure verticale:

$$W_{zz} + \underbrace{\left(\frac{N^2}{gh} - \frac{1}{4H^2} \right)}_{m^2} W = 0$$

Continuité

Analogue à celle des équations de Saint-Venant

$$\underbrace{-2i\Omega\sigma \frac{\tilde{\Phi}}{g}}_{\partial_t h'} + \underbrace{h \left(\frac{is}{a} \tilde{u} + \frac{1}{a} \tilde{v}_\phi \right)}_{h \vec{\nabla} \cdot \vec{u}'} = 0$$

- La direction verticale n'apparaît pas dans les équations du mouvement horizontal
- Elle apparaît dans l'équation thermique et dans l'équation de la continuité
- La séparation en structures verticales permet de traiter le cas où N varie.
- Lorsque $N=cte$, les solutions ont un nombre d'onde vertical m tel que:

$$m^2 = N^2/gh - 1/4H^2$$

- Paramètre de Lamb:

$$\gamma = 4a^2 \Omega^2 / (gh)$$

Structure horizontale:

Relations de polarisations en fonction de \tilde{v}

$$\begin{aligned} (\gamma\sigma^2 - s^2) \tilde{u} &= i\sigma\gamma\phi\tilde{v} - is\tilde{v}_\phi \\ (\gamma\sigma^2 - s^2) \tilde{\Phi} &= -2i\Omega\sigma a\tilde{v}_\phi + 2i\Omega a s\phi\tilde{v} \end{aligned}$$

a) Théorie dans le plan β équatorial

Formulation générale et ondes de Kelvin

Ondes de Kelvin: $\tilde{v} = 0$ ($\nu = -1$!)

Relation de dispersion:

$$\sigma = s/\sqrt{\gamma}$$

Structure méridienne:

$$\tilde{\Phi} = \tilde{\Phi}_0 e^{-\gamma^{1/2} \phi^2/2}, \quad \tilde{u} = \frac{\tilde{\Phi}}{\sqrt{gh}}.$$

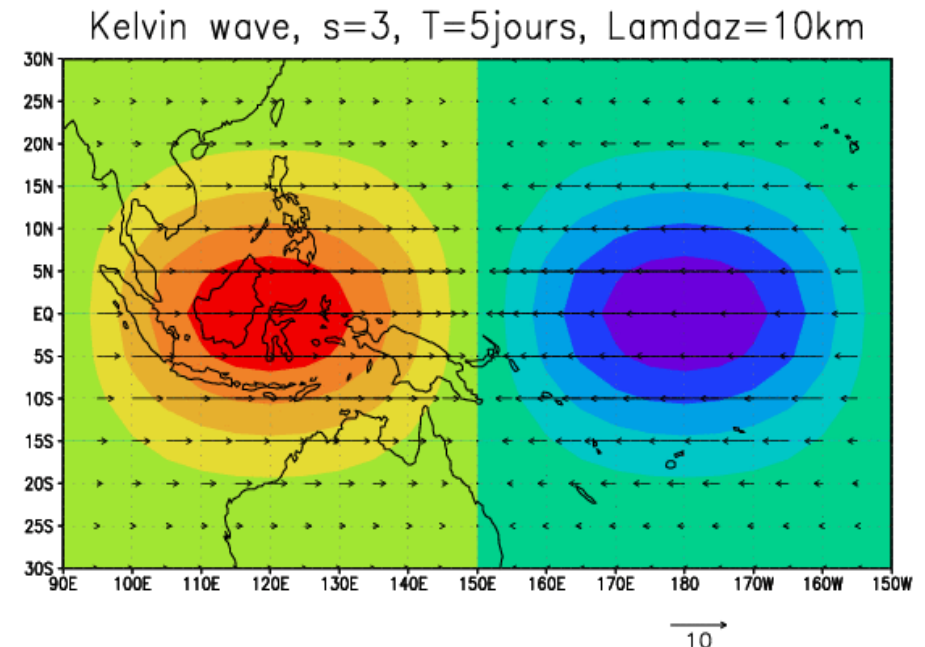
$$\gamma = 4a^2\Omega^2/(gh), \quad m^2 = N^2/(gh) - 1/(4H^2). \\ m^2 = \gamma N^2/(4a^2\Omega^2) - 1/(4H^2)$$

Propagation vers l'Est uniquement!

Vitesse de phase $c = 2\Omega a \sigma / s = (gh)^{1/2}$

Structure spatiale d'une onde de gravité piégée dans la bande équatoriale

Le confinement augmente avec γ (ou lorsque h diminue)



a) Théorie dans le plan β équatorial

Décomposition en modes propres dans l'horizontale

Solution générale:

On injecte les relations de polarization dans le bilan de quantité de mouvement selon ϕ , il vient:

$$\tilde{v}_{\phi\phi} + \left(\gamma \sigma^2 - s^2 - \frac{s}{\sigma} - \gamma \phi^2 \right) \tilde{v} = 0$$

On cherche des solutions de la forme:

$$\tilde{v}(\phi) = e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2} V(\gamma^{1/4}\phi)$$

Equation pour V , ($x = \gamma^{1/4}\phi$):

$$\ddot{V} - 2x\dot{V} + \left(\gamma^{1/2}\sigma^2 - \frac{s^2}{\gamma^{1/2}} - \frac{s}{\gamma^{1/2}\sigma} - 1 \right) V = 0$$

Les polynômes de Hermite, $H_\nu(x)$:

Equation différentielle:

$$H_\nu'' - 2xH_\nu' + 2\nu H_\nu = 0$$

Réurrences:

$$H_\nu' = 2\nu H_{\nu-1}, \quad H_{\nu+1} = 2xH_\nu - 2\nu H_{\nu-1}.$$

Quelques exemples:

$$H_0 = 1, \quad H_1 = 2x, \quad H_2 = 4x^2 - 2, \quad \dots$$

Ils forment une base orthogonale des fonctions réelles et pour le produit scalaire:

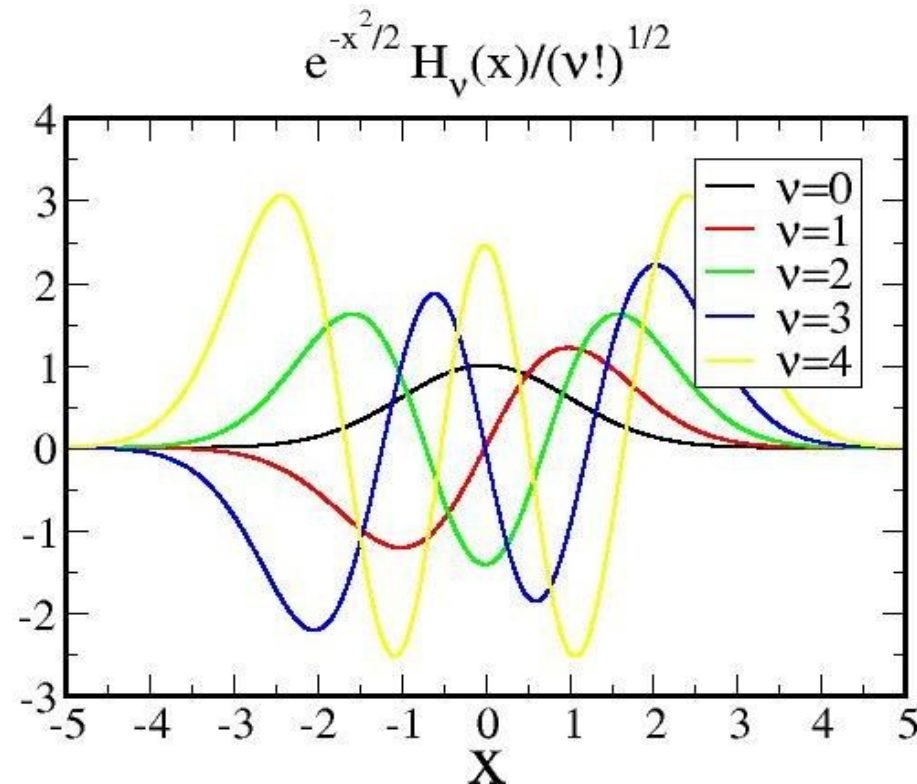
$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)e^{-x^2/2}dx$$

$$\gamma = 4a^2\Omega^2/(gh), \quad m^2 = N^2/(gh) - 1/(4H^2). \\ m^2 = \gamma N^2/(4a^2\Omega^2) - 1/(4H^2)$$

a) Théorie dans le plan β équatorial

Décomposition en modes propres dans l'horizontale

Quelques polynômes de Hermite



Relation de dispersion et structure horizontale des ondes

Relation de dispersion pour ν donné:

$$\gamma^{1/2}(2\nu + 1) = \gamma\sigma^2 - s^2 - \frac{s}{\sigma}$$

Forme de la solution:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(\phi) &= \tilde{v}_0 e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2} H_\nu(\gamma^{1/4}\phi) \\ \tilde{u}(\phi) &= i\tilde{v}_0 \gamma^{1/4} e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2} \times \\ &\quad \left[\frac{H_{\nu+1}(\gamma^{1/4}\phi)}{2(\gamma^{1/2}\sigma - s)} + \frac{\nu H_{\nu-1}(\gamma^{1/4}\phi)}{\gamma^{1/2}\sigma + s} \right] \\ \tilde{\Phi}(\phi) &= 2ia\Omega \tilde{v}_0 \gamma^{-1/4} e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2} \times \\ &\quad \left[\frac{H_{\nu+1}(\gamma^{1/4}\phi)}{2(\gamma^{1/2}\sigma - s)} - \frac{\nu H_{\nu-1}(\gamma^{1/4}\phi)}{\gamma^{1/2}\sigma + s} \right] \end{aligned}$$

a) Théorie dans le plan β équatorial

Ondes de Rossby-gravité, Ondes de Rossby, et ondes de gravité

Les ondes de Rossby-Gravité ($\nu = 0$)

Relation de dispersion:

$$\gamma^{1/2} = \gamma \sigma^2 - s^2 - \frac{s}{\sigma}$$

Factorisation:

$$\sigma^2 (\gamma^{1/2} + s/\sigma) (\gamma^{1/2} - s/\sigma) = (\gamma^{1/2} + s/\sigma)$$

Solution $\gamma^{1/2} + s/\sigma = 0$ impossible (voir ondes de Kelvin),

$$\gamma^{1/2} = \frac{1 + s\sigma}{\sigma^2}$$

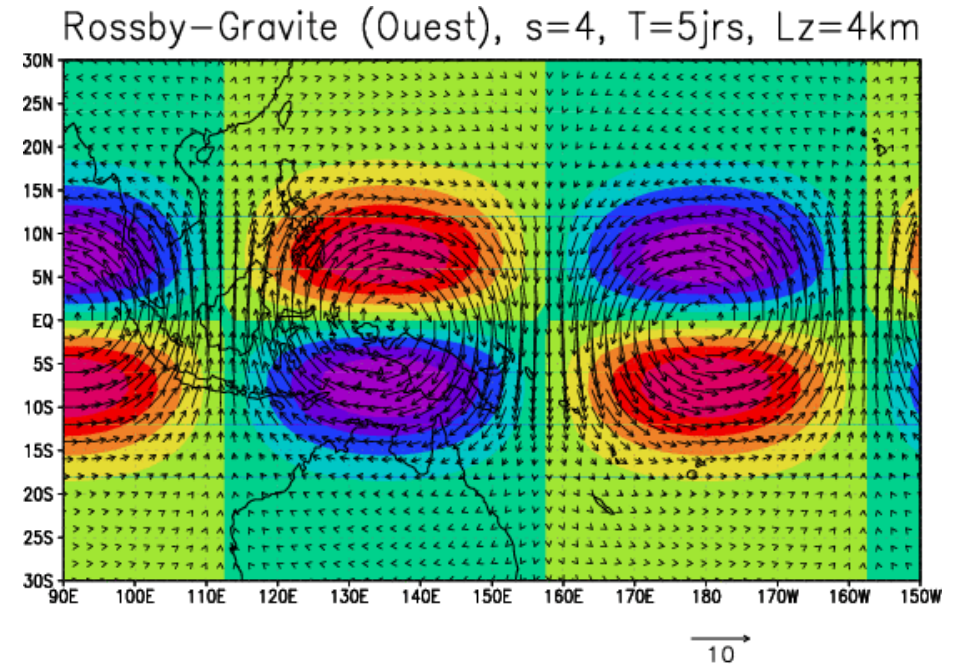
Forme de la solution:

$$(\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{\Phi}) = \tilde{v}_0 (i\sigma\gamma^{1/2}\phi, 1, 2ia\Omega\sigma\phi) e^{-\gamma^{1/2}\phi^2/2}$$

$$\gamma = 4a^2\Omega^2/(gh), \quad m^2 = N^2/(gh) - 1/(4H^2).$$

$$m^2 = \gamma N^2/(4a^2\Omega^2) - 1/(4H^2)$$

Propagation vers l'Est où vers l'Ouest, les plus fréquentes vont vers l'Ouest et ont pour nombre d'ondes $s=4, 5$.



a) Théorie dans le plan β équatorial

Ondes de Rossby-gravité, Ondes de Rossby, et ondes de gravité

Les ondes de Rossby, ($\nu = 1, 2, \dots$)

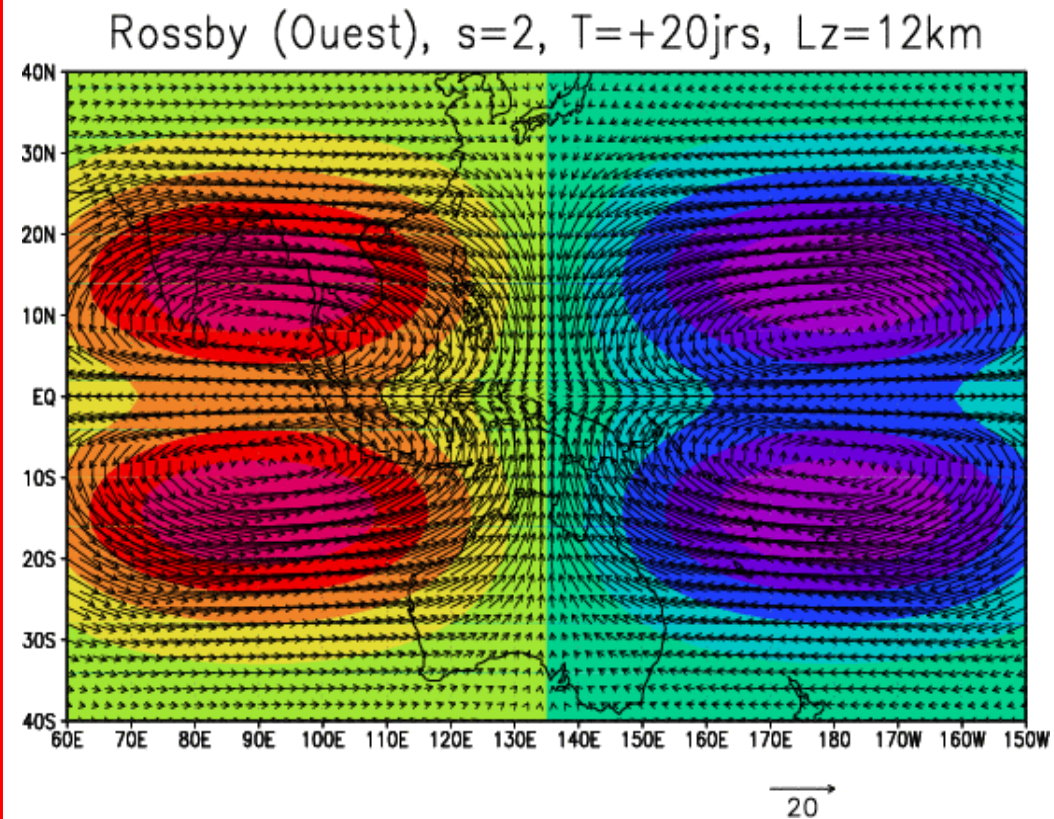
Lentes et vers l'Ouest.

$$\gamma^{1/2} = \frac{2\nu + 1 - \sqrt{(2\nu + 1)^2 + 4(\sigma^2 s^2 + \sigma s)}}{2\sigma^2}$$

Il faut $-1 < \sigma s < 0$ pour avoir $\gamma^{1/2} > 0$!

Propagation vers l'Ouest.

Exemple pour $\nu=1$



a) Théorie dans le plan β équatorial

Ondes de Rossby-gravité, Ondes de Rossby, et ondes de gravité

Les ondes de **Gravité**, ($\nu = 1, 2, \dots$)

Rapides vers l'Est et vers l'Ouest.

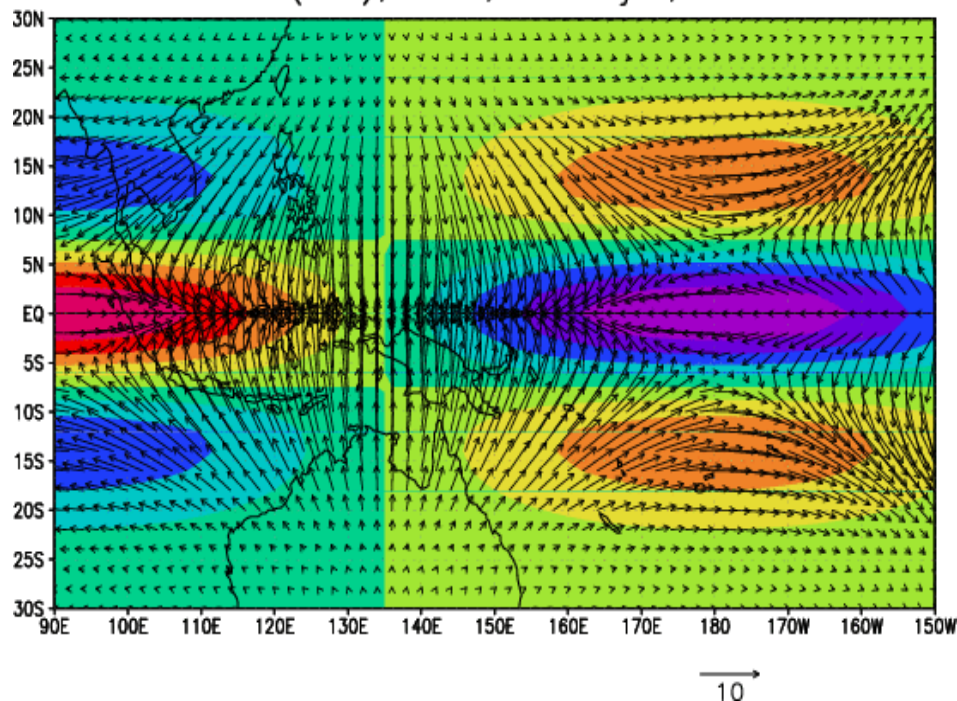
$$\gamma^{1/2} = \frac{2\nu + 1 + \sqrt{(2\nu + 1)^2 + 4(\sigma^2 s^2 + \sigma s)}}{2\sigma^2}$$

Propagation vers l'Est ou vers l'Ouest

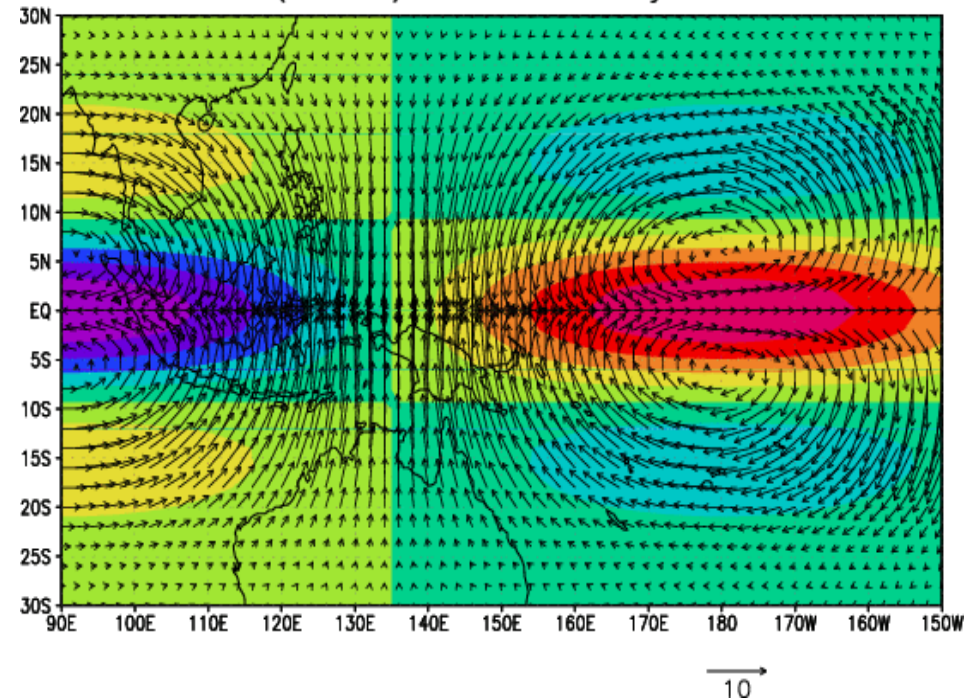
Exemple pour $\nu=1$

C'est la structure dynamique des modes de marées

Gravite (Est), $s=2$, $T=+2$ jrs, $Lz=6$ km

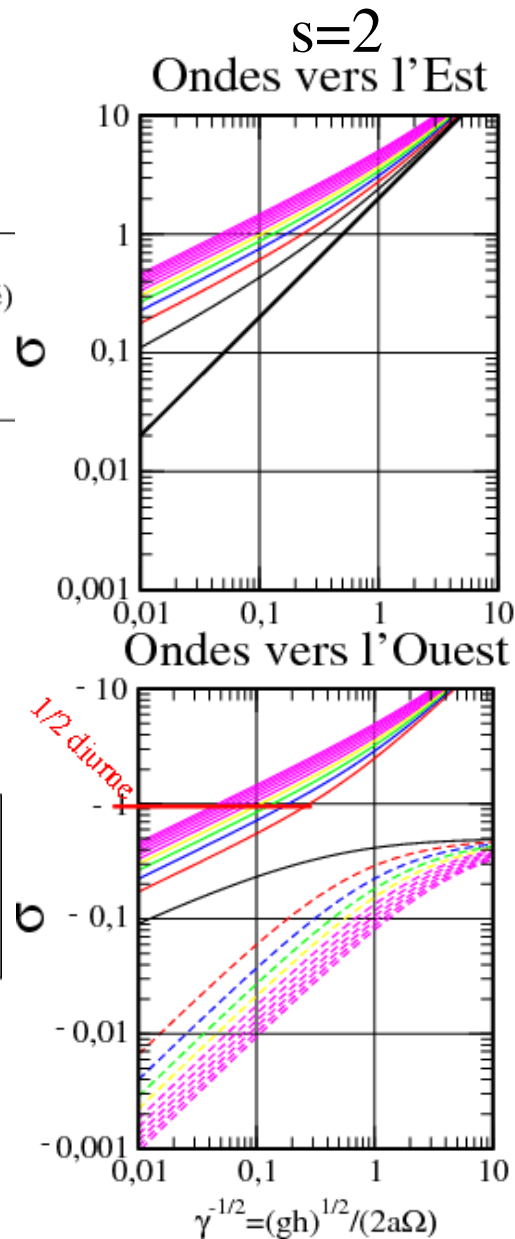
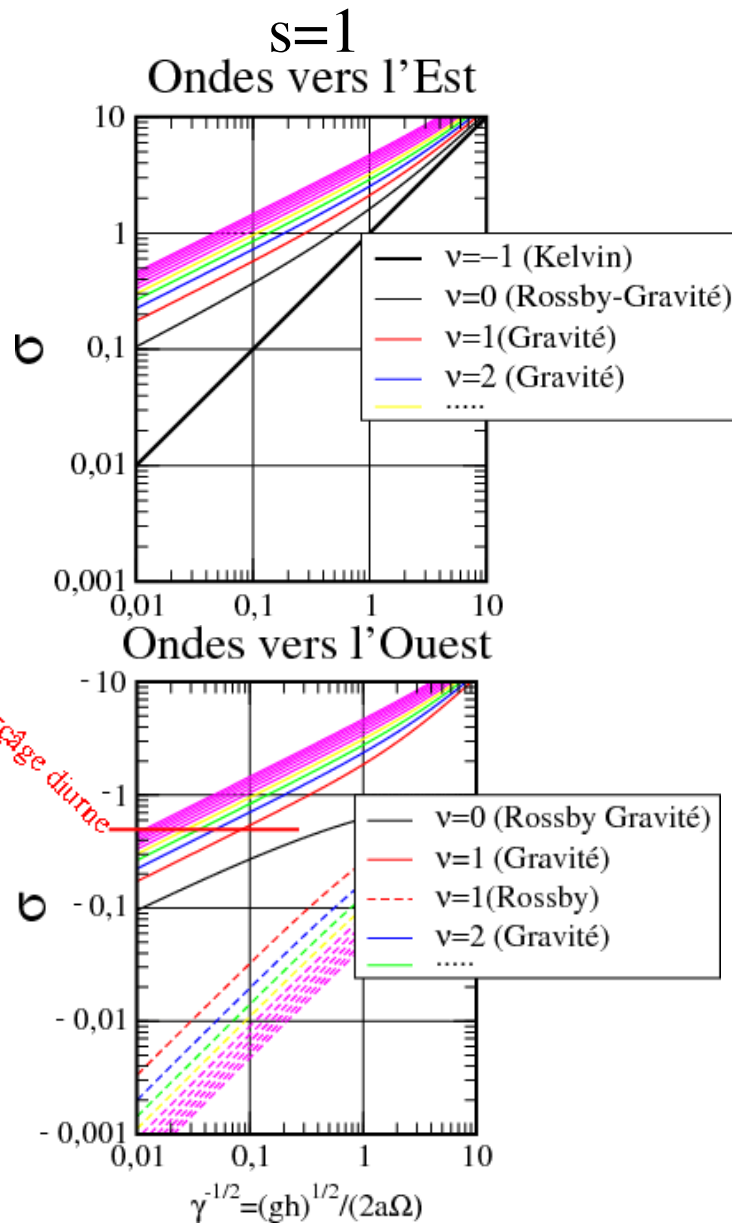


Gravite (Ouest), $s=2$, $T=+2$ jrs, $Lz=6$ km



a) Théorie dans le plan β équatorial

Récapitulatifs des relations de dispersion pour 2 nombres d'ondes ($s=1, 2$)



Rappel:

Le paramètre v représente le nombre de noeux pour la vitesse méridienne entre les pôles

g est lié à la structure verticale, c'est à dire m :

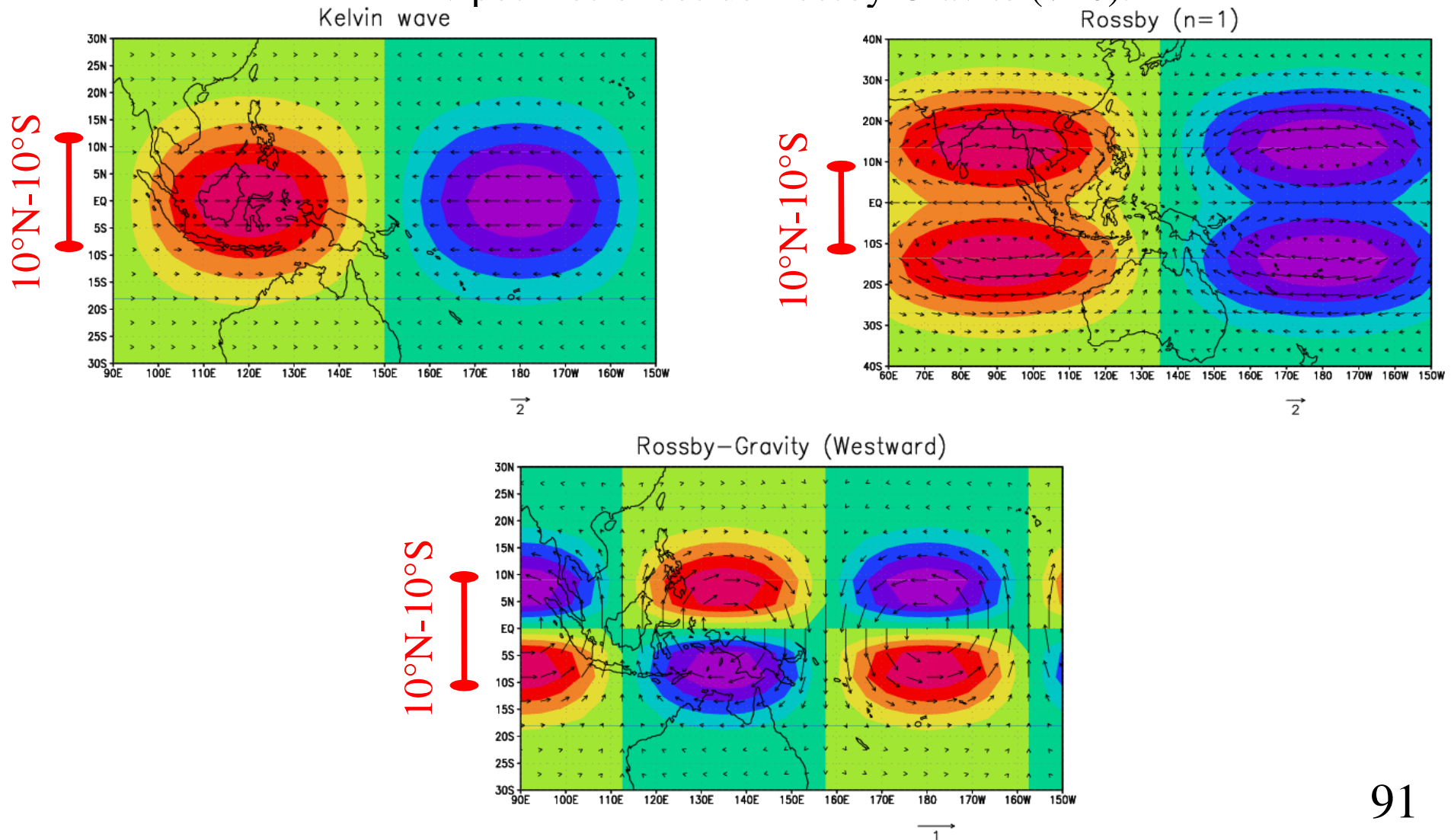
$$\gamma = 4a^2\Omega^2/(gh), \quad m^2 = N^2/(gh) - 1/(4H^2).$$

$$m^2 = \gamma N^2/(4a^2\Omega^2) - 1/(4H^2)$$

b) Observation dans la basse stratosphère

Méthodologie

Les ondes équatoriales les plus grandes sont caractérisés par le fait qu'au moins un champ dynamique est de signe uniforme sur la bande équatoriale à une longitude donnée: u, T, and Z pour les onde de Kelvin ($v=-1$) et pour les ondes de Rossby (avec $v=1$), v pour les ondes de Rossby Gravité ($v=0$).



b) Observation dans la basse stratosphère

Méthodologie

Spectres en fréquence (σ) et en nombre d'onde (s) des champs de u , v , T , et Φ moyennés sur [10°S,10°N]

Evaluation de spectres σ , s .

1) Evaluer la moyenne équatoriale de chaque quantité:

$$\underline{u}(\lambda, z, d, y) = \sum_{\phi=-10^{\circ}}^{+10^{\circ}} u(\lambda, \phi, z, d, y)$$

d : jour, y : année.

2) Faire la transformée de Fourier chaque année y :

$$\underline{u}(\lambda, z, d, y) = \sum_{s=0}^{nl\phi/2} \sum_{n=1}^{365} \hat{\underline{u}}(s, z, \sigma_n, y) e^{i(s\lambda - 2\Omega\sigma_n t)}.$$

3) Construire le Périodogramme:

$$P_{\underline{u}}(s, z, \sigma_n, y) = \hat{\underline{u}} \hat{\underline{u}}^*$$

4) Moyenner les périodogrammes sur les années et les altitudes pour estimer le spectre.

$$S_{\underline{u}}(s, \sigma_n) \approx \sum_{z=16km}^{32km} \sum_{y=1980}^{2004} P_{\underline{u}}(s, z, \sigma_n, y)$$

b) Observation dans la basse stratosphère

Méthodologie

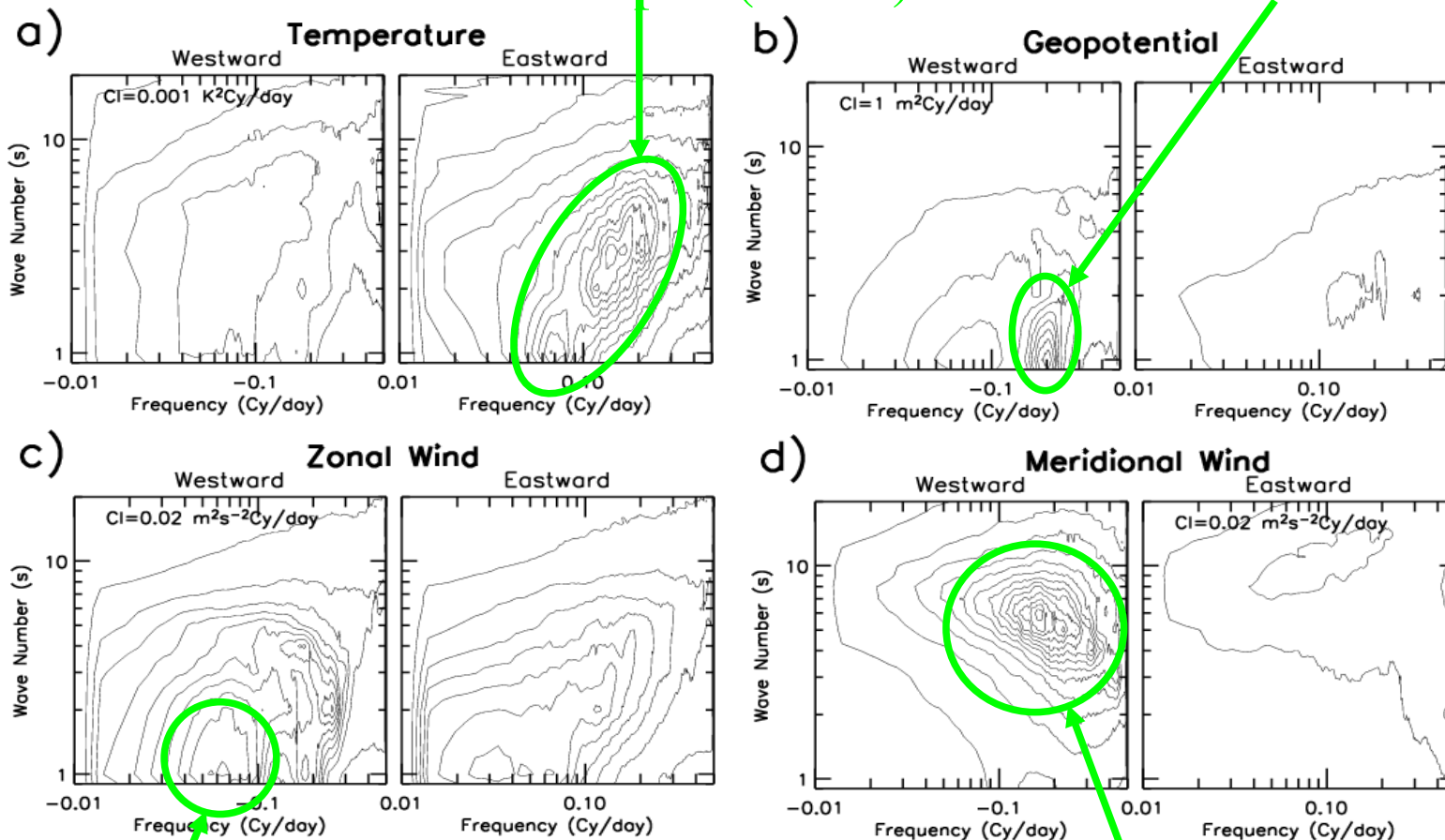
Spectres en fréquence (σ) et en nombre d'onde (s) des champs de

u , v , T , et Φ moyennés sur $[10^\circ\text{S}, 10^\circ\text{N}]$

NCEP-Reanalysis 1980-2004, $16\text{km} < z < 32\text{km}$

Kelvin $s=1$ et plus ($s=2-6$)

Rossby ($s=1$)



Rossby $s=1$

Rossby-Gravity
 $s=4-8$

b) Observation dans la basse stratosphère

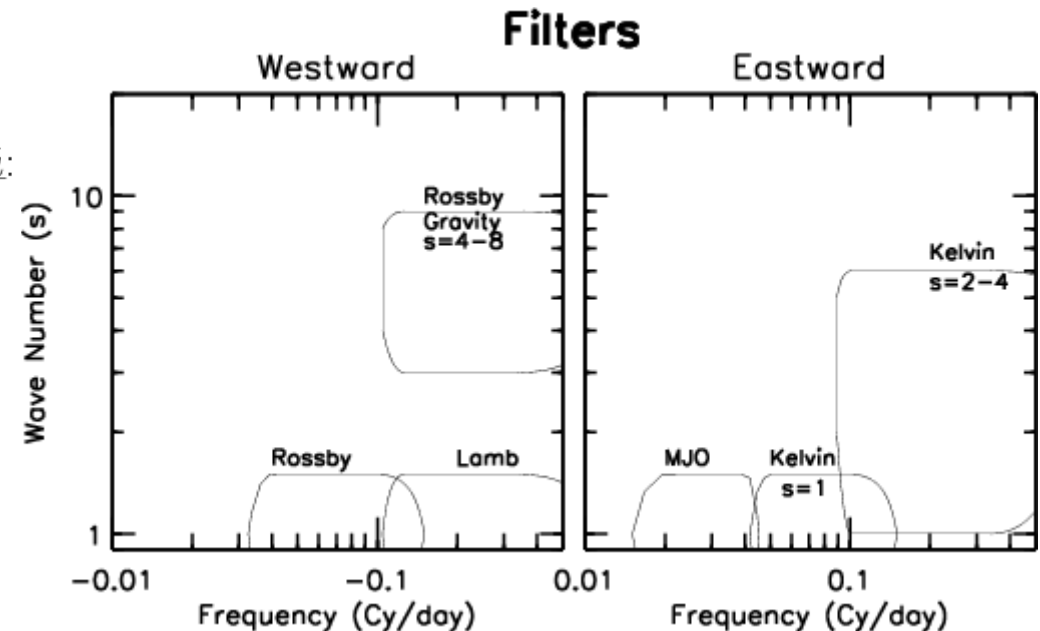
Méthodologie

Tout les champs dans la basse stratosphère sont filtrées par des filtre passe-bande qui contiennent largement les maxima identifiés dans les spectres. NCEP-Reanalysis 1980-2004, $16\text{km} < z < 32\text{km}$

Pour le vent zonal moyenné en latitude la valeur filtrée \tilde{u} :

$$\tilde{u}(\lambda, \phi, z, t) = \sum_{s=0}^{nlo/2} \sum_{n=-N/2+1}^{N/2-1} \hat{f}(\sigma_n) \hat{g}(s) \hat{u}(s, \phi, z, \sigma_n) e^{i(s\lambda - \sigma_n t)}.$$

Structure spectral du filtre $\hat{f}(\sigma)\hat{g}(s)$:
(half-power point)



b) Observation dans la basse stratosphère

Analyse composite

Index d'entrée d'une onde de RG dans la basse stratosphère

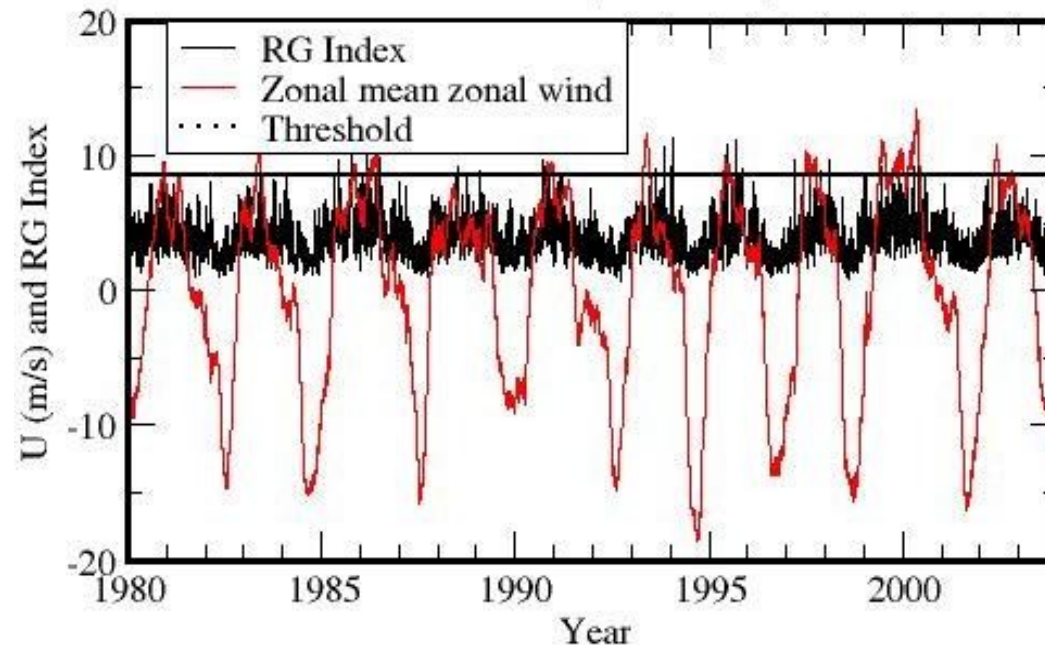
Pour les ondes de Rossby gravité ($s \approx 4-8$), le signal le plus fort est sur v , l'index est:

$$RG(d, y) = \underset{\lambda}{\text{Max}} (\tilde{v}(\lambda, \phi, z = 21\text{km}, d, y)).$$

On identifie les jours où RG dépasse un certain seuil, en tout 25 jours sont sélectionnés pour construire le composite. (les cartes entrant dans les composites sont aussi décalées pour tenir compte de la longitude où le maximum est détecté).

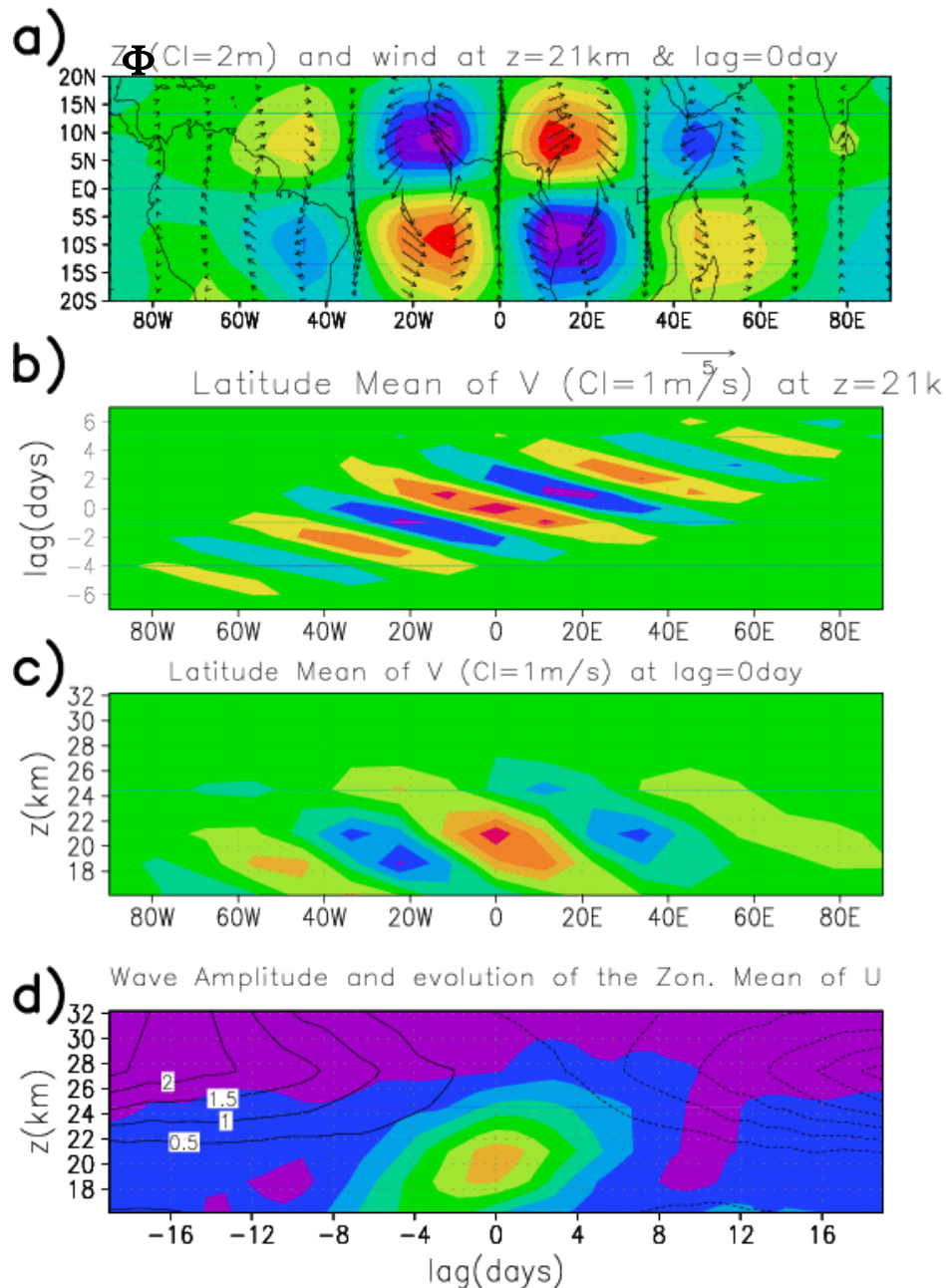
Rossby Gravity Wave Index and QBO at Z=21km

NCEP data (1980-2004)



b) Observation dans la basse stratosphère

Analyse composite des ondes de Rossby-Gravité



Structure caractéristique d'une onde de Rossby gravité

L'amplitude est substantielle (comparable a la déviation standart du champ non-filtré)

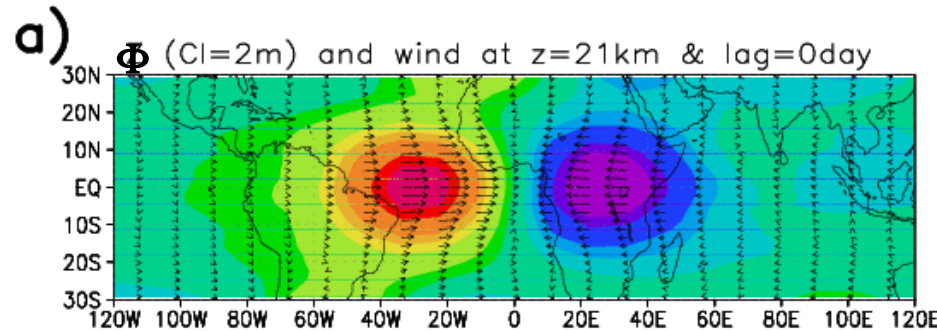
Propagation vers l'Ouest mais vitesse de groupe vers l'Est!

Lignes de phases inclinées vers l'Ouest indiquant une propagation vers le haut

Attenuation du signal avec l'altitude (interaction avec la QBO?)

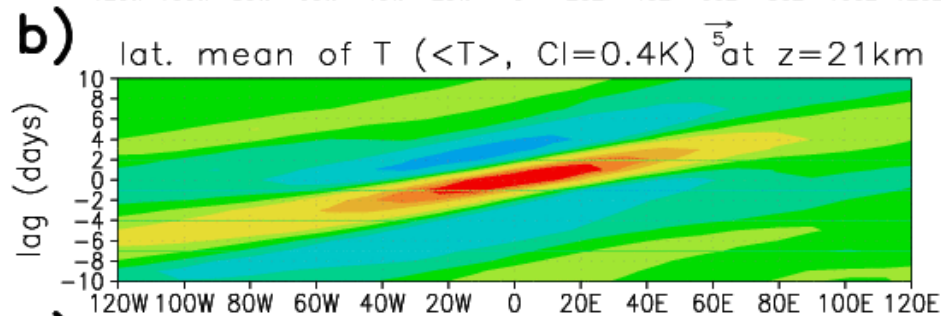
b) Observation dans la basse stratosphère

Analyse composite des ondes de Kelvin



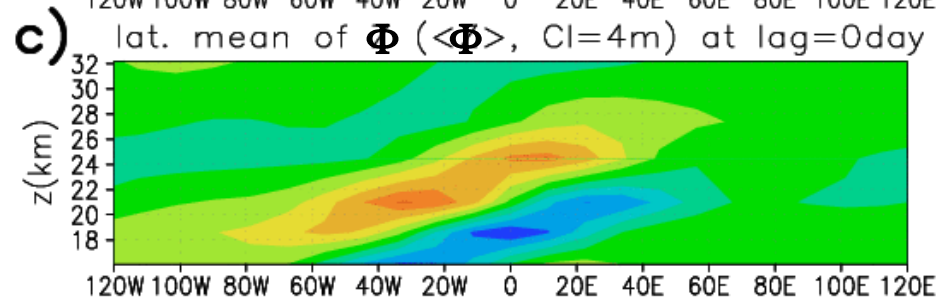
ndex pour l'entrée dans la stratosphère, T à 21km
filtrée dans la bande $s=2-6$, période 1-10jours.

tructure caractéristique d'une onde de
Kelvin

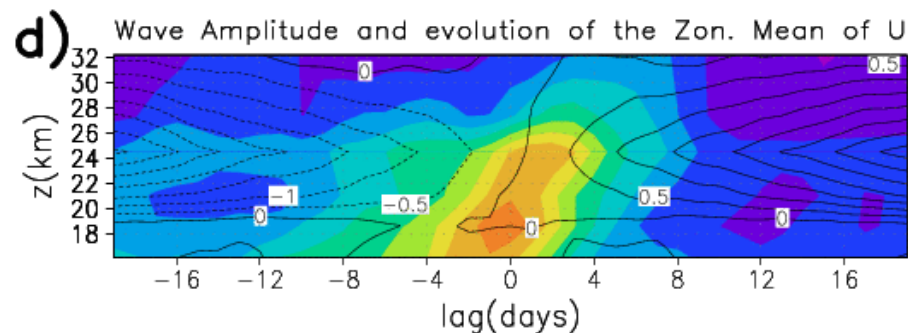


l'amplitude est substantielle (comparable a la
éviatation standart du champ non-filtré)

ropagation vers l'est et vitesse de groupe
ers l'est!



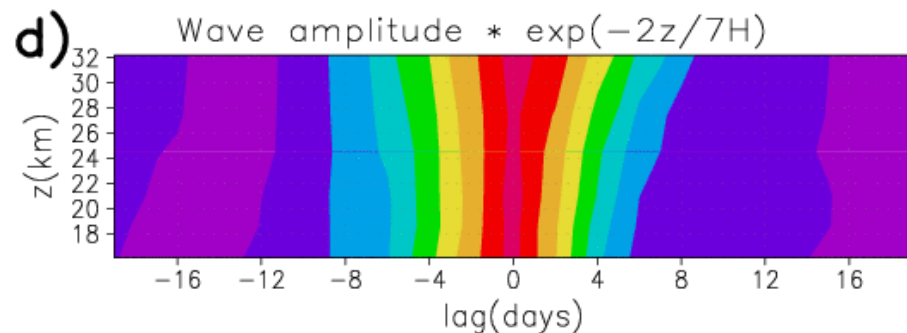
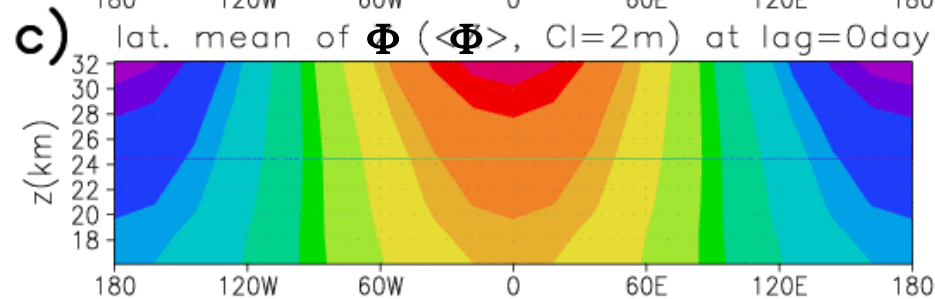
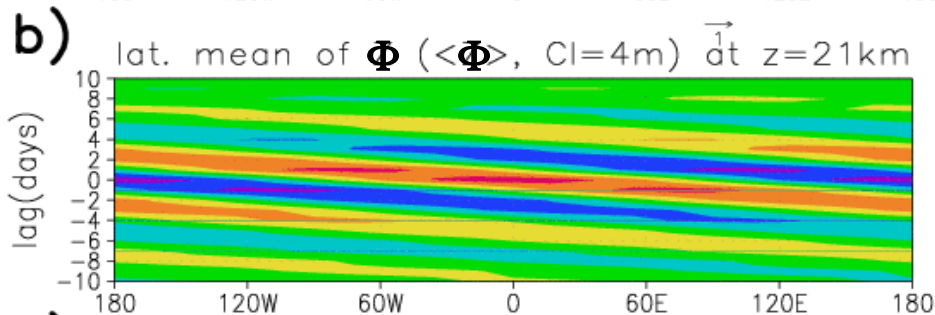
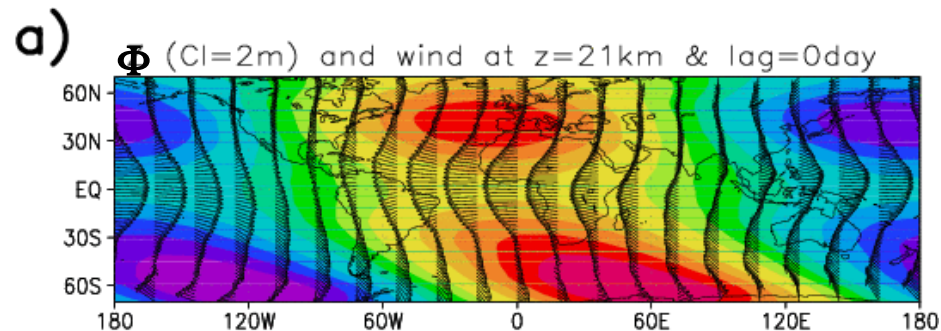
ignes de phases inclinées vers l'est indiquant
ne propagation vers le haut



attenuation du signal avec l'altitude
interaction avec la QBO?)

b) Observation dans la basse stratosphère

Analyse composite de l'onde de Rossby, $S=1$ $T=5j$



**Index pour l'entrée dans la stratosphère, Φ à 21km
filtrée dans la bande 1-10jours, $s=1$.**

Structure caractéristique d'une onde de Rossby, c'est une onde planétaire pour laquelle la théorie du plan équatorial n'est pas très adapté

Vitesse de phase vers l'Ouest

Signal augmentant avec l'altitude et quasi barotrope

Signal peut affecté avec l'altitude et structure d'une onde planétaire libre.