

Météorologie Dynamique contrôle 2025-2026

François Lott et Aymeric Spiga

Contrôle continu, à rendre le 4 Décembre 2025

Problème: Autour de l'article de Eliassen et Palm (1961)

Dans le cadre non forcé et non dissipatif les équations de Boussinesq dans le cadre hydrostatique et en faisant l'approximation du plan $f = \text{cte}$ s'écrivent

$$\frac{Du}{Dt} - fv = -\frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1a)$$

$$\frac{Dv}{Dt} + fu = -\frac{\partial p}{\partial y}, \quad (1b)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \theta, \quad (1c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (1d)$$

$$\frac{D\theta}{Dt} = 0. \quad (1e)$$

où pour simplifier la pression p a été divisée par une densité de référence ρ_s constante ($\frac{p}{\rho_s} \rightarrow p$) et la température potentiel multiplié par g/θ_s où θ_s est une température potentielle de référence et g la constante de gravité. En d'autre terme, et dans toute la suite on ré-écrit la poussée $g\frac{\theta}{\theta_s} \rightarrow \theta$.

1) Rappeler les définitions de f et de $\frac{D}{Dt}$.

2) On considère un écoulement zonal moyen $U(y, z)$, donner les équations que doivent satisfaire les profils moyen de pression $P(y, z)$ et de température potentielle $\Theta(y, z)$ qui lui sont associés.

On considère à présent des petites perturbations par rapport à l'état moyen, $u = U + u'$, $\theta = \Theta + \theta'$,

3) Montrer que celles-ci satisfont les équations

$$\partial_t u' + U \partial_x u' - (f - U_y) v' + U_z w' = -\partial_x p', \quad (2a)$$

$$\partial_t v' + U \partial_x v' + f u' = -\partial_y p', \quad (2b)$$

$$0 = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \theta', \quad (2c)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0, \quad (2d)$$

$$\partial_t \theta' + U \partial_x \theta' + \Theta_y v' + \Theta_z w' = 0 \quad (2e)$$

Dans leur article, Eliassen et Palm (1961) essaient de caractériser la propagation des ondes dans un milieu variable et commencent par former une équation de bilan pour la densité d'énergie mécanique des perturbations.

4) En multipliant (2a), (2b), (2c) et (2e) par u' , v' , w' et θ'/Θ_z respectivement, montrer que

$$\partial_t e' = -\frac{\partial}{\partial x} (Ue' + p'u') - \partial_y(p'v') - \partial_z(p'w') - \underbrace{U_y u'v' - U_z u'w' - \frac{\Theta_y}{\Theta_z} v'\theta'}_{\text{Sources}} \quad (3)$$

où la densité d'énergie de la perturbation

$$e' = \frac{u'^2}{2} + \frac{v'^2}{2} + \frac{\theta'^2}{2\Theta_z} \quad (4)$$

Pour mieux analyser l'interaction entre les flux d'énergie et les sources et les conséquences sur l'amplitude des perturbations Eliassen et Palm (1961) analysent le cas où la direction x est la longitude, et où la perturbation est périodique en x sur un plan de longueur L . Dans ce cadre, on considère les moyennes zonales,

$$\bar{u} = \frac{1}{L} \int_0^L u \, dx, \quad (5)$$

$\bar{e}'$ devient la densité moyenne d'énergie de la perturbation.

5) Montrer que

$$\partial_t \bar{e}' = \underbrace{-\partial_y \bar{p}'v' - \partial_z \bar{p}'w'}_{\text{Convergence du flux d'énergie}} - \underbrace{U_y \bar{u}'v' - U_z \bar{u}'w' - \frac{\Theta_y}{\Theta_z} \bar{v}'\theta'}_{\text{Sources}} \quad (6)$$

Ici, on appelle le flux d'énergie du aux ondes, le flux lié au travail des forces de pression en présence d'une perturbation, et les termes sources sont liées aux échanges d'énergie de l'écoulement moyen vers la perturbation en présence de cisaillements moyen. Pour une onde d'amplitude stationnaire on doit s'attendre à ce que la convergence des flux d'énergie équilibre les termes sources (il n'y a pas de dissipations ni d'effets diabatiques), pour permettre que $\partial_t \bar{e}' = 0$, ce qui est vérifié pour une onde d'amplitude stationnaire. Le résultat majeur d'Eliassen et Palm (1961) est de montrer que cela est bien le cas dans le cas des ondes stationnaires que nous analysons à présent (le cas des perturbations d'amplitude stationnaire est analysé dans Andrews et McIntyre 1976).

6) Pour une perturbation stationnaire, et en éliminant w' entre (2a) et (2e) montrer que

$$\partial_x \left(Uu' + p' - \frac{UU_z}{\Theta_z} \theta' \right) = \frac{\Theta_y U_z}{\Theta_z} v' \quad (7)$$

7) En multipliant par $Uu' + p' - \frac{UU_z}{\Theta_z} \theta'$ et en intégrant en déduire que

$$\overline{p'v'} = -U \left(\overline{u'v'} - \frac{U_z}{\Theta_z} \overline{v'\theta'} \right) \quad (8)$$

Dans le même cadre stationnaire, on montre de la même façon que

$$\overline{p'w'} = -U \left(\overline{u'w'} - \frac{f - U_y}{\Theta_z} \overline{v'\theta'} \right) \quad (9)$$

8) Si on ré-écrit les flux d'énergies

$$\overline{p'v'} = U\overline{F^y}, \quad \overline{p'w'} = U\overline{F^z}, \quad (10)$$

à quel flux vu dans le cours se rapporte $(\overline{F^y}, \overline{F^z})$.

9) Montrer que

$$\partial_y \overline{F^y} + \partial_z \overline{F^z} = 0. \quad (11)$$

L'analyse de Eliassen et Palm (1961) s'arrête à ce résultat à cette formulation des flux d'énergies. L'impact de ce résultat n'est apparu que plus tard et de manière particulièrement évidente dans un article de Andrews et McIntyre (1976) au travers de leur reformulation des équations d'interaction entre les ondes et écoulement moyen.

10) A partir des équations (1a)-(1e) montrer qu'en moyenne zonale:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - (f - U_y)\bar{v} + U_z\bar{w} = -(\overline{v'u'})_y - (\overline{w'u'})_z, \quad (12a)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + f\bar{u} = -(\overline{v'v'})_y - (\overline{w'v'})_z - \frac{\partial \bar{p}}{\partial y}, \quad (12b)$$

$$0 = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\theta}, \quad (12c)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0, \quad (12d)$$

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \Theta_y \bar{v} + \Theta_z \bar{w} = -(\overline{v'\theta'})_y - (\overline{w'\theta'})_z \quad (12e)$$

Pour établir les théorèmes de non-interaction à partir de ces équations il est essentiel d'introduire les circulations méridiennes:

$$\bar{w}^* = \bar{w} + \left(\frac{\overline{v'\theta'}}{\Theta_z} \right)_y, \quad \bar{v}^* = \bar{v} - \left(\frac{\overline{v'\theta'}}{\Theta_z} \right)_z \quad (13)$$

11) De quelle circulation s'agit-il?

12) Vérifier que

$$\frac{\partial \bar{v}^*}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}^*}{\partial z} = 0, \quad (14)$$

13) Dédire de (12a) que

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} - (f - U_y)\bar{v}^* + U_z\bar{w}^* = \partial_y \overline{F^y} + \partial_z \overline{F^z}, \quad (15)$$

14) En déduire qu'une perturbation linéaire stationnaire non-dissipée n'accélère pas l'écoulement moyen dans la direction zonale.

15) En utilisant les expressions (13) déduire de (12e) que

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial t} + \Theta_y \bar{v}^* + \Theta_z \bar{w}^* = - \left(\frac{\Theta_y \overline{v'\theta'} + \Theta_z \overline{w'\theta'}}{\Theta_z} \right)_z, \quad (16)$$

16) Justifier que le terme au numérateur dans la fraction de droite est proportionnel au flux de chaleur dans la direction normale aux surfaces isentropes moyennes.

17) En multipliant (2e) par θ' et en moyennant, déduire de (16) qu'une perturbation linéaire stationnaire adiabatique et non dissipée n'augmente pas la Température potentielle en moyenne zonale.

18) En utilisant la relation hydrostatique, justifier qu'une perturbation linéaire stationnaire adiabatique et non dissipée ne modifie pas la pression en moyenne zonale.

Il reste alors à analyser les termes de forçages dans la direction méridiennes mais comme ni $\bar{u}$ ni $\bar{\theta}$ (et donc $\bar{p}$ par la relation hydrostatique) ne varient au cours du temps, il suffit de dériver (1b) et d'écrire:

$$\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2} = -f \partial_t \bar{u} - (\overline{v'v'})_{yt} - (\overline{w'v'})_{zt} - \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial y \partial t}, \quad (17)$$

19) Justifier qu'une perturbation linéaire non dissipée d'amplitude stationnaire ne produit pas de modification du vent méridien en moyenne zonale $\bar{v}$.

20) En reprenant l'ensemble de ces résultats formuler le théorème de non-interaction d'Eliassen et Palm.

Aspects Lagrangiens

Dans le cours, on utilise les vitesses résiduelles $\bar{v}^*$ et $\bar{w}^*$ pour décrire la circulation de Brewer Dobson, assumant que celles ci sont plus adaptées pour décrire le transport des traceurs que les moyennes Eulériennes. On admet ainsi qu'elles contiennent en partie une dimension Lagrangienne, liée au concept de la dérive de Stokes, que les moyennes Eulériennes négligent. Cette relation est mise en évidence dans Dunkerton (1978) où est utilisé le concept de vitesse en moyenne Lagrangienne en présence d'une onde sous la forme

$$\underline{u}^l(\underline{x}, t) = \underline{u}(\underline{x} + \underline{\xi}(\underline{x}, t), t) \quad (18)$$

où on note le vecteur position $\underline{x} = (x, y, z)$ et où le déplacement du à l'onde $\underline{\xi} = (\xi, \zeta, \eta)$ satisfait les équations:

$$\frac{D\underline{\xi}}{Dt} = \underline{u}^l(\underline{x}, t) \quad (19)$$

21) Montrer qu'à l'ordre dominant et pour une onde stationnaire

$$U \partial_x \xi = u' + U_y \zeta + U_z \eta, \quad U \partial_x \zeta = v', \quad U \partial_x \eta = w'. \quad (20)$$

22) déduire de l'équation de continuité que

$$U \partial_x (\xi_x + \zeta_y + \eta_z) = 0 \quad (21)$$

et donc que

$$\xi_x + \zeta_y + \eta_z = 0 \quad (22)$$

23) Montrer qu'à l'ordre dominant la moyenne en x de w^l ,

$$\overline{w^l} = \bar{w} + \partial_y \overline{w' \zeta} \quad (23)$$

24) En multipliant l'équation pour la perturbation de température (2e) par ζ et en moyennant, montrer que

$$\overline{w' \zeta} = \frac{\overline{\theta' v'}}{\Theta_z} \quad (24)$$

25) faire le lien entre $\bar{w}^*$ et $\bar{w}^l$ pour une onde stationnaire non dissipée et à l'ordre dominant.

Références:

Eliassen, A. and Palm, E., 1961: On the Transfer of Energy in Stationary Mountain Waves, Geophys. Publ., 22, 2, pp. 1-23.

D. G. Andrews and M. E. McIntyre, 1976: Planetary Waves in Horizontal and Vertical Shear: The Generalized Eliassen-Palm Relation and the Mean Zonal Acceleration, Journal of Atmospheric Sciences, 33, 11, pp. 2031 - 2048.

T. Dunkerton, 1978: On the Mean Meridional Mass Motions of the Stratosphere and Mesosphere, Journal of Atmospheric Sciences, 35, 12, pp. 2325 - 2333

Questions de cours

Figures annotées à rendre avec la copie

Figure 1:

- 26) Indiquez les régions qui sont en relation.
- 27) Quels sont les modes de variabilité associés.
- 28) Quels impacts ont ces modes sur la météorologie.

Figure 2:

- 29) Pourquoi le rayonnement infrarouge mesuré par satellite indique-t'il les zones de convection profonde?
- 30) Quelles régions lient les maxima d'anticorrelation?
- 31) A quel phénomènes attribuez-vous les extréma de variabilité et d'anticorrelation.

Figure 3:

- 32) Quel phénomène météorologique caractérise les cartes de la Figure 4?
- 33) Quels jours s'attend-on à avoir de fortes précipitations sur l'Angleterre et pourquoi?
- 34) Quelle altitude correspond à 250hPa?
- 35) Pourquoi compare-t'on le géopotentiel à cette altitude avec les cartes de géopotentiel au sol?
- 36) Entre le 29/12 et le 30/12, la dépression près de la surface s'intensifie fortement, tandis qu'entre le 30/12 et le 31/12 elle ne s'intensifie pas. Comment expliquez vous cela?

Figure 4:

- 37) Rappeler la définition de la fonction de courant de la circulation méridienne en moyenne Eulérienne.
- 38) Localiser l'extrémité des cellules de Hadley à la tropopause.
- 39) Le fait que le vent zonal présente des maxima locaux près de ces extrémités vous surprend-il?
- 40) A partir de cette carte, pourquoi dit-on que le jet présent dans les moyennes latitudes de l'hémisphère sud est piloté par les transitoires.

Figure 1:

Carte des extrêmes d'anti corrélation des anomalies basse fréquence du géopotentiel à 700hPa, (anomalies notées $\tilde{Z}$):

$$- \underbrace{\text{Min}}_{0 < \lambda' < 360, 20 < \phi' < 90} \left(\frac{< \tilde{Z}(\lambda', \phi', t) \tilde{Z}(\lambda, \phi, t) >}{\sqrt{< \tilde{Z}(\lambda', \phi', t)^2 > < \tilde{Z}(\lambda, \phi, t)^2 >}} \right)$$

les anomalies sont par rapport au cycle annuel, et les moyennes temporelles sur les mois d'hiver (DJF) pendant la période 1958 – 2010. Les zones en rouges sont pour des maxima.

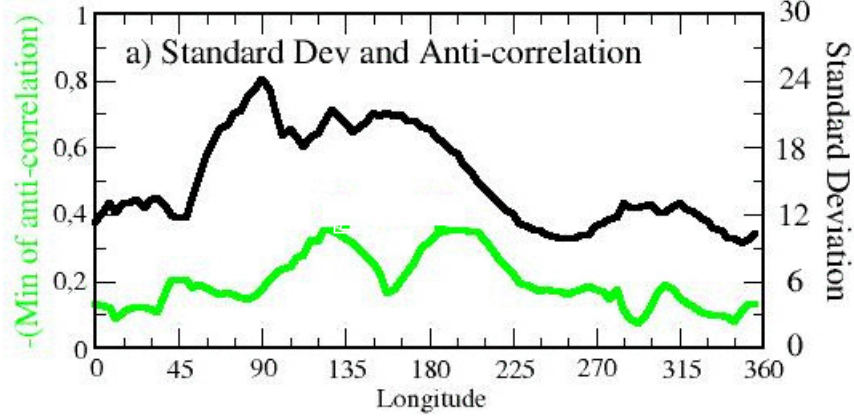


Figure 2: Anomalies par rapport au cycle saisonnier du rayonnement infrarouge émis et moyenné sur la bande équatoriale. Données NOAA 1979 – 2008. Courbe noire: déviation standard, Courbe verte: Minima d'anticorrélation (même principe que pour la Figure 1).

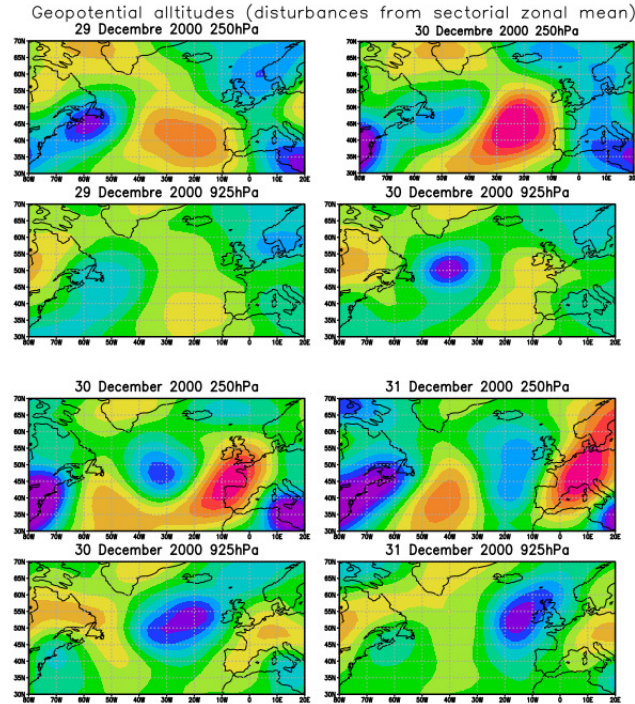


Figure 3: Cartes de géopotentiel à 925hPa, et à 250hPa et pour 4 jours consécutifs en Décembre 2020. Les zones de bas géopotentiel sont en couleurs froides, les intervalles entre les contours sont arbitraires.

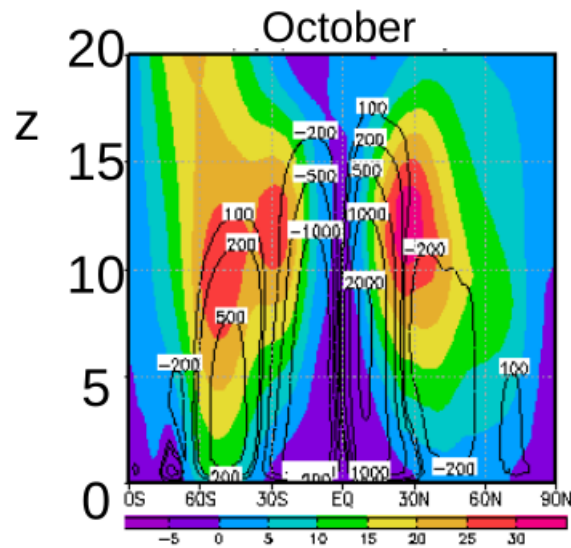


Figure 4: Vent zonal en moyenne zonal en Octobre (couleur, les couleurs les plus chaudes représente des valeurs positives) et fonction de courant (lignes noires).