

# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## Sommaire

- I. La circulation générale de l'atmosphère
- II. La modélisation du climat
- III. La variabilité du climat
- IV. Tropiques: l'oscillation intra-saisonnière de Madden et Julian
- V. Tropiques (II): l'oscillation australe El-Nino (ENSO)
- VI. Tropiques (III): l'oscillation quasi-biennale dans la basse stratosphère
- VII. La variabilité du climat aux moyennes latitudes



# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## I. La circulation générale de l'atmosphère

I.1) Climatologies moyenne

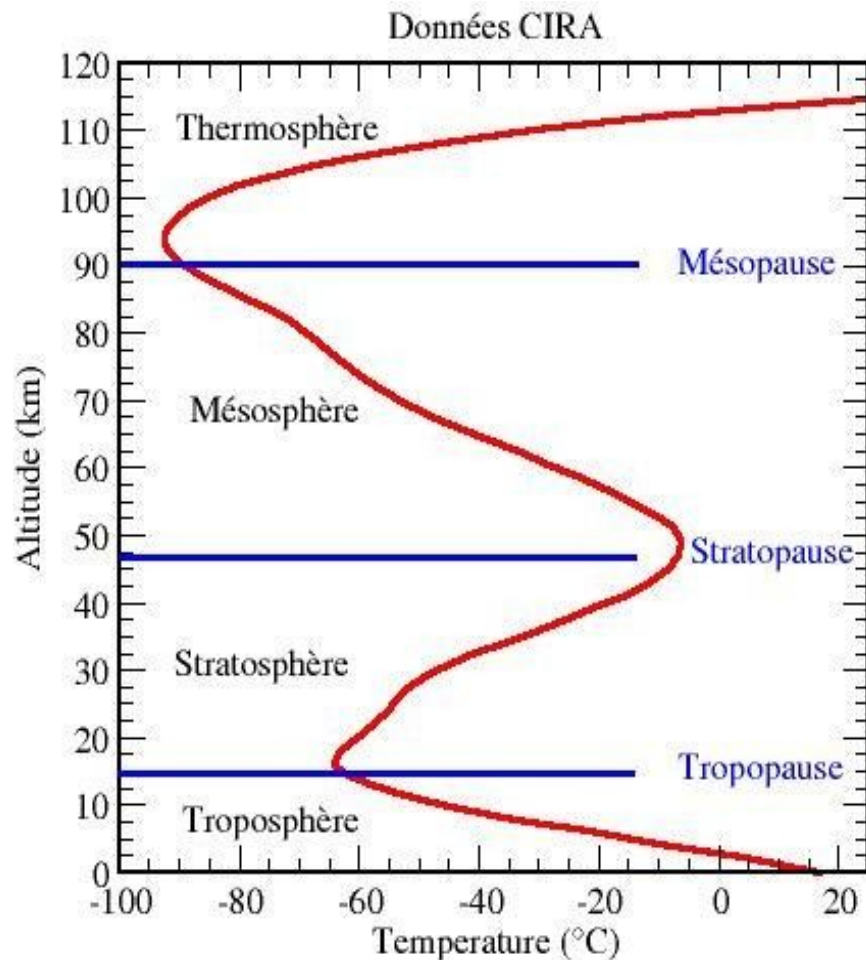
I.2) Interprétations avec un modèle de Saint-Venant

I.3) Utiliser le modèle de Saint-Venant

(voir [http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/Presentation.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/Presentation.html))

# I.1) Climatologies Moyennes

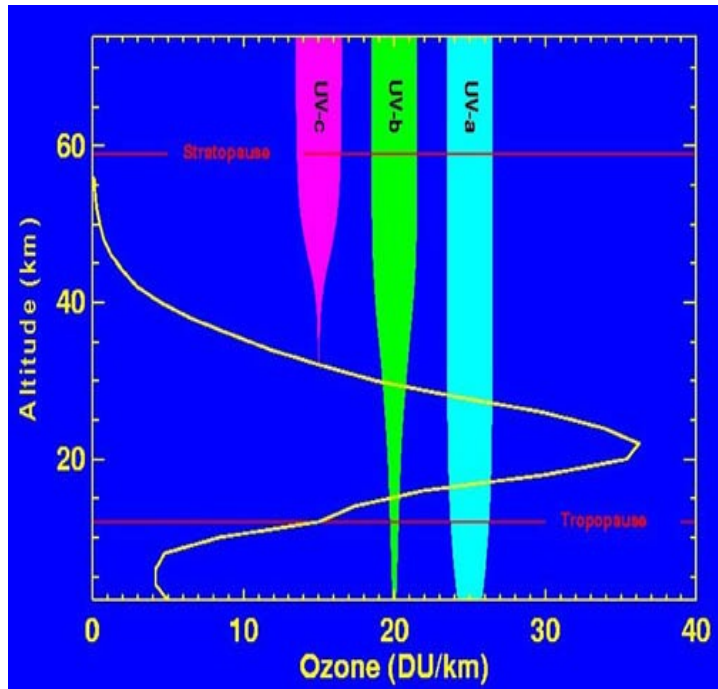
Les trois couches de l'Atmosphère neutre ( $z < 100\text{km}$ )  
Température en fonction de l'altitude



- Données CIRA (1988): Roquettes et radiosondage s, satellites au dessus de 110km.
- **Troposphère: T décroît avec z, chauffage par le sol tandis que H<sub>2</sub>O et nuages refroidissent le haut (IR).**
- **La moyenne atmosphère:**
  - contient 2 des 3 couches de l'atmosphère neutre: la stratosphère et la mésosphère
  - Les composants majoritaires y sont bien mélangés.
  - Pic de T à 50km, du à l'O<sub>3</sub>. Définie la stratopause séparant la mésosphère et la stratosphère.
- **Au dessus, la thermosphère. C'est la couche la plus exposé au soleil et aux rayons X qui ionisent les particules: elle contient la ionosphère (80-500km) où se produisent les aurores boréales.**
- **Très peu dense T varie de 600K à 1800K en une journée.**
- **On n'est plus neutre, la composition varie du fait de la grande distance entre les atomes**

# I.1) Climatologies Moyennes

## Absorption du rayonnement solaire direct (Chauffage par l'Ozone)



Profil d'Ozone aux moyennes latitude et  
Altitude de pénétration des UV-a, UV-b,  
UV-c

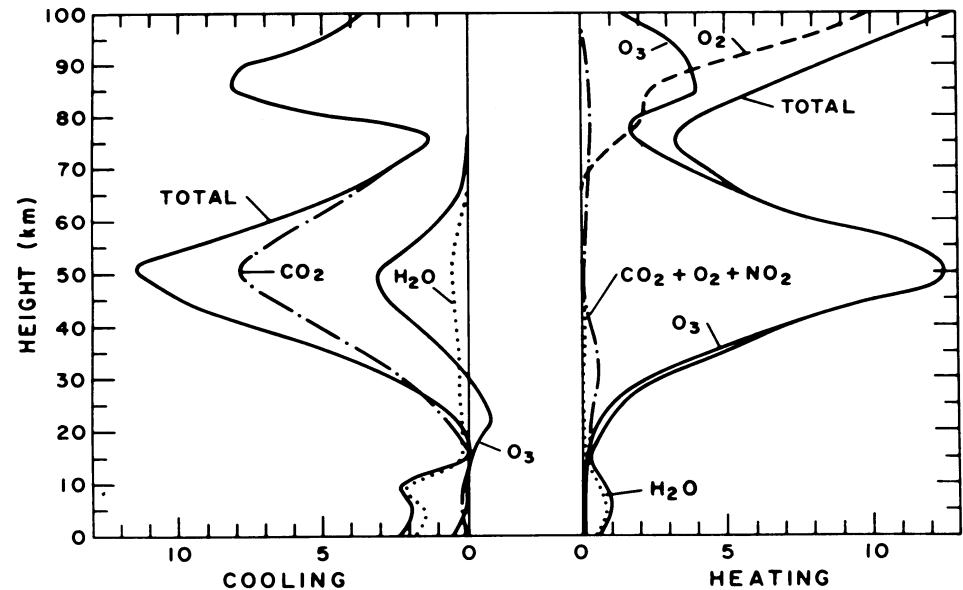
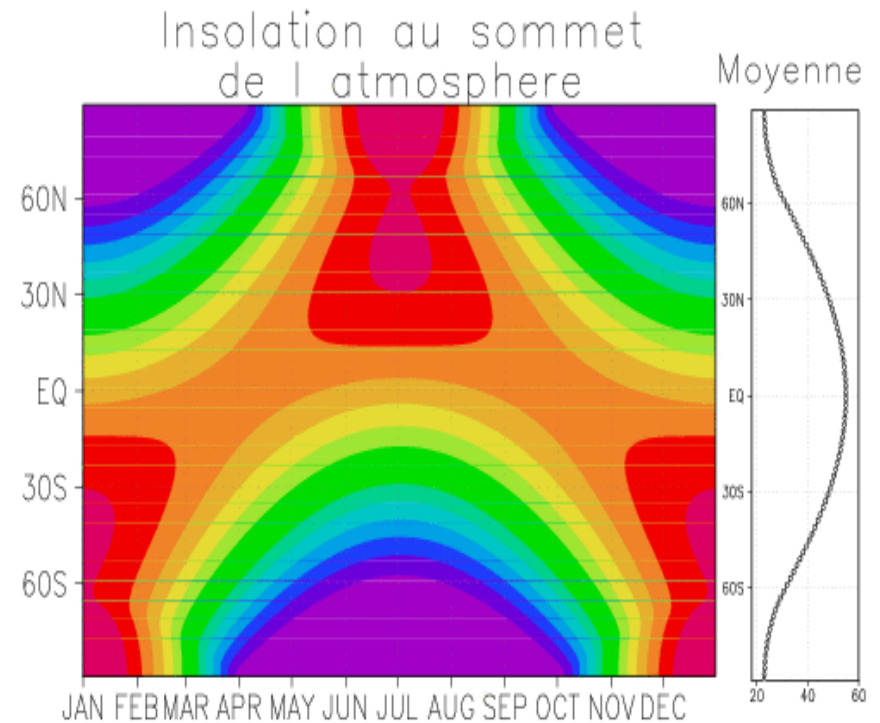
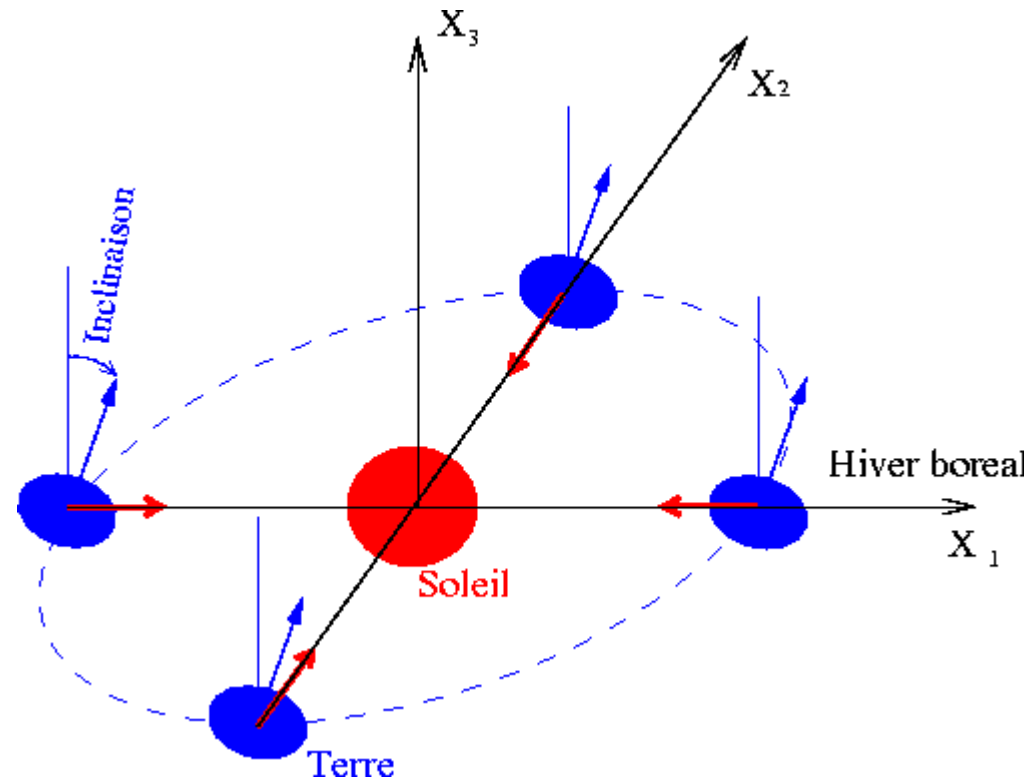


Fig. 2.1. Vertical distribution of heating due to absorption of solar radiation (right) and cooling due to emission of infrared radiation (left). [From London (1980), with permission.]

Distribution verticale du chauffage du à  
l'absorption des rayons solaires et du  
refroidissement du au rayonnement  
infrarouge

# I.1) Climatologies Moyennes

## Cycle saisonnier de l'ensoleillement



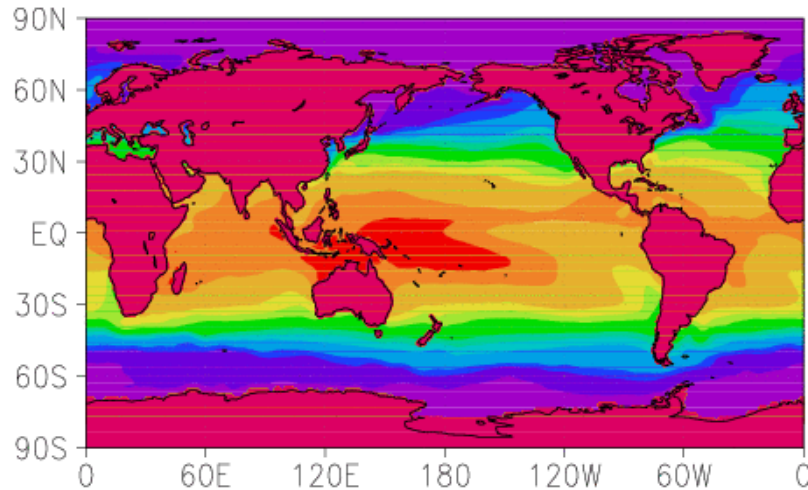
- L'Ozone réémet quasi-instantanément, et sous forme de chaleur, le rayonnement UV qu'elle absorbe
- L'ensoleillement moyen journalier est maximum aux pôles en été en partie car la journée y dure presque 24h
- En moyenne et au cours du temps l'insolation reste maximale à l'équateur

# I.1) Climatologies Moyennes

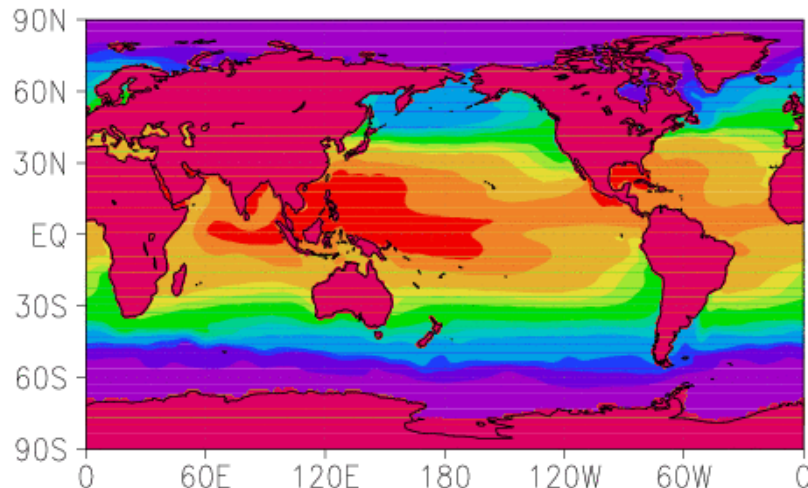
## Chauffage par le sol (Infrarouge):

l'océan est un intégrateur temporel que la moyenne atmosphère ne voit pas

Temperature Surface de la mer  
Janvier (ECMWF 1993–1997)



Juillet (ECMWF 1993–1997)



- La SST est toujours plus chaude dans la zone tropicale
- Elle maintient aussi un taux d'humidité important dans la troposphère équatoriale, et donc un effet de serre important
- La troposphère est en premier lieu forcée par le bas, et donc présentera un cycle annuel moins marqué que l'atmosphère moyenne

# I.1) Climatologies Moyennes

Flux Infrarouges (IR) à la surface et au sommet de l'atmosphère

Le flux vers l'atmosphère à la surface suit les profils de la Température du sol

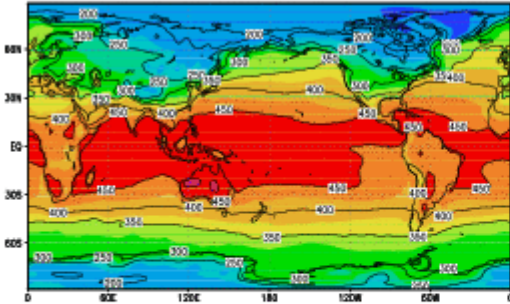
Les flux au sommet de l'atmosphère et vers l'espace sont beaucoup plus faibles que les flux au sol.

Ils proviennent essentiellement du sommet de la troposphère, cette dernière est quasiment opaques au flux IR

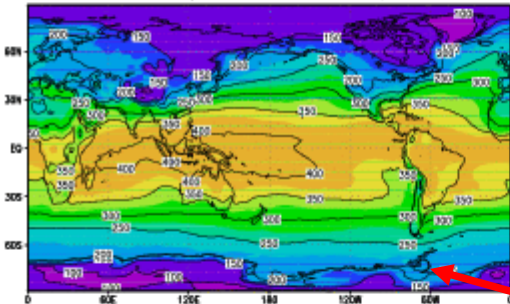
**C'est l'effet de Serre**

Noter que l'atmosphère réemet une bonne partie du Chauffage IR qu'elle reçoit (équilibre radiatif)

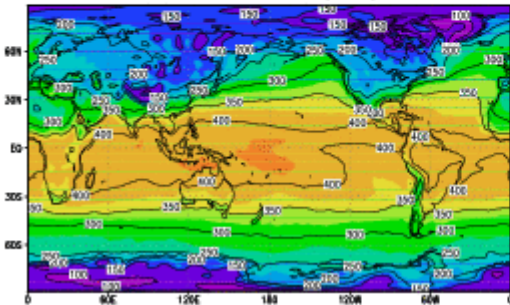
Upward Rad. Flux (Surf)



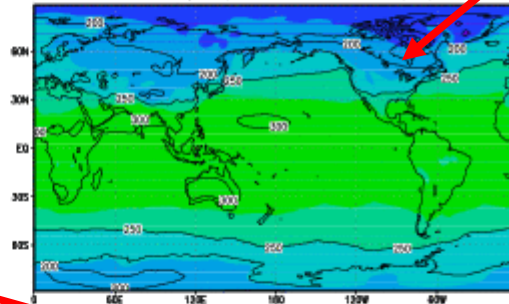
Clear Sky Downward Flux (Surf)



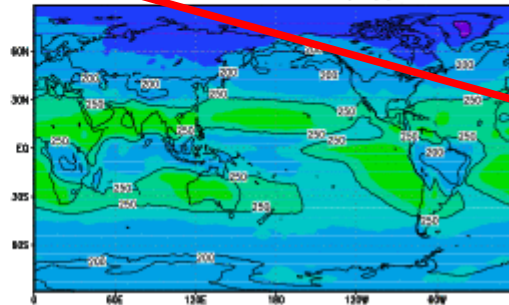
Downward Flux (Surf)



Clear Sky Upward Rad Flux (Top)



Upward Rad Flux (Top)

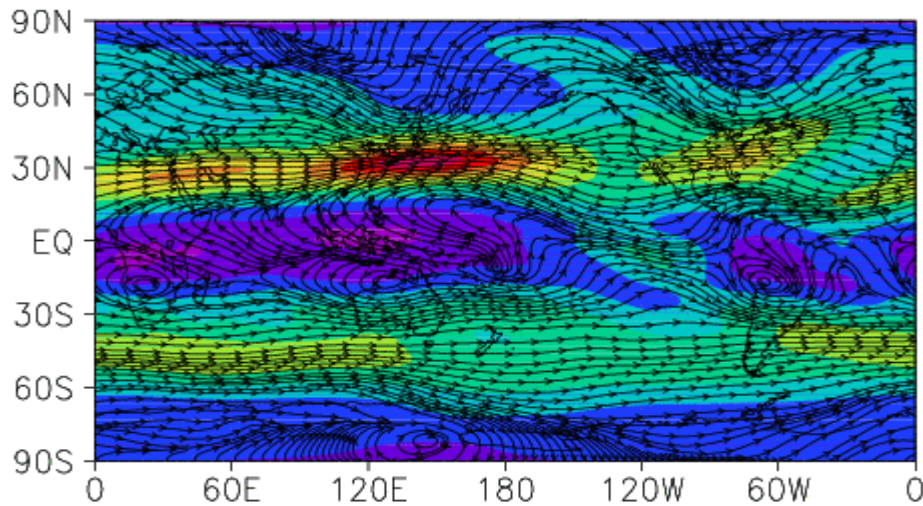




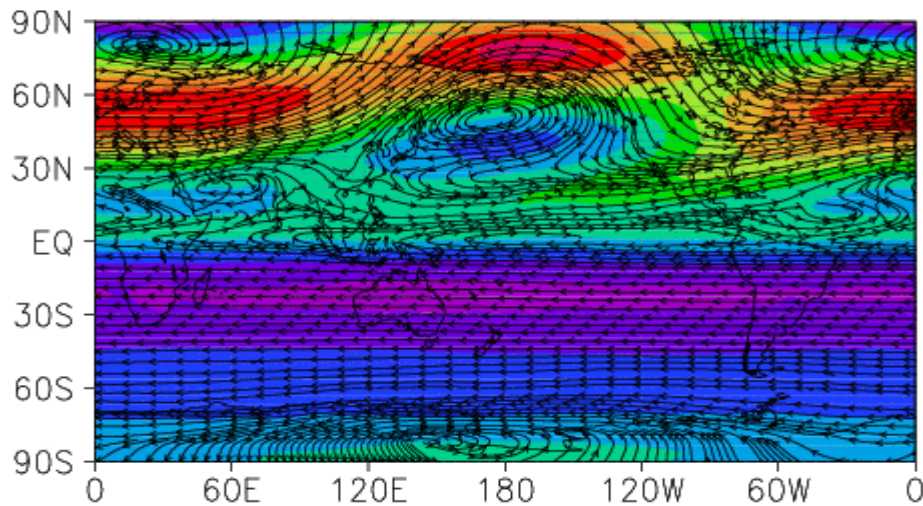
# I.1) Climatologies Moyennes

Un exemple flagrant de la différence entre les circulations générales dans la troposphère et la stratosphère

ECMWF (93–97) Vents d'hiver  
Tropopause (12km)



Stratosphere (40km)



- En moyenne temporelle et en hiver:
- Les vents dans la troposphère sont vers l'Est dans les 2 hémisphères et aux moyennes latitudes
- Les vents dans la stratosphère sont vers l'Est dans l'hémisphère d'hiver, vers l'Ouest dans l'hémisphère d'été

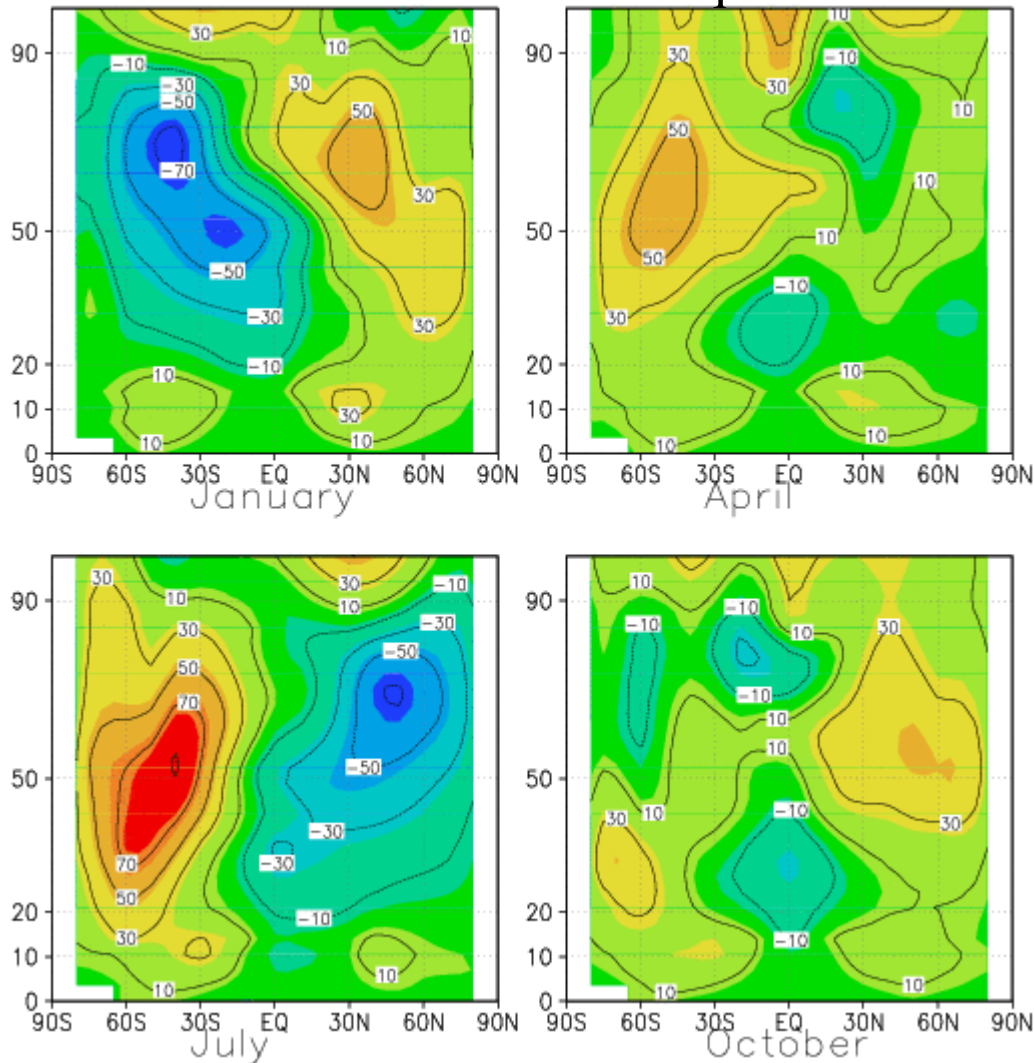
# I.1) Climatologies Moyennes

Les moyennes zonales du vent zonal dans l'atmosphère neutre (données CIRA)

U (m/s)

Solstices

Equinoxes



- Dans la moyenne atmosphère (20-90km), on observe des jets vers l'Est dans l'hémisphère d'hiver, vers l'Ouest dans l'hémisphère d'été.
- Au printemps et à l'Automne, les jets sont essentiellement vers l'Est dans toute la moyenne atmosphère.
- A toute saison, il y a 2 jets vers l'Est et aux moyennes latitudes dans la troposphère.

# I.2) Interprétations avec un modèle de Saint Venant

*Modèle de Saint Venant sur la sphère, version axisymétrique*

Equations de base:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) u - \left(2\Omega + \frac{u}{a \cos \phi}\right) v \sin \phi = 0$$

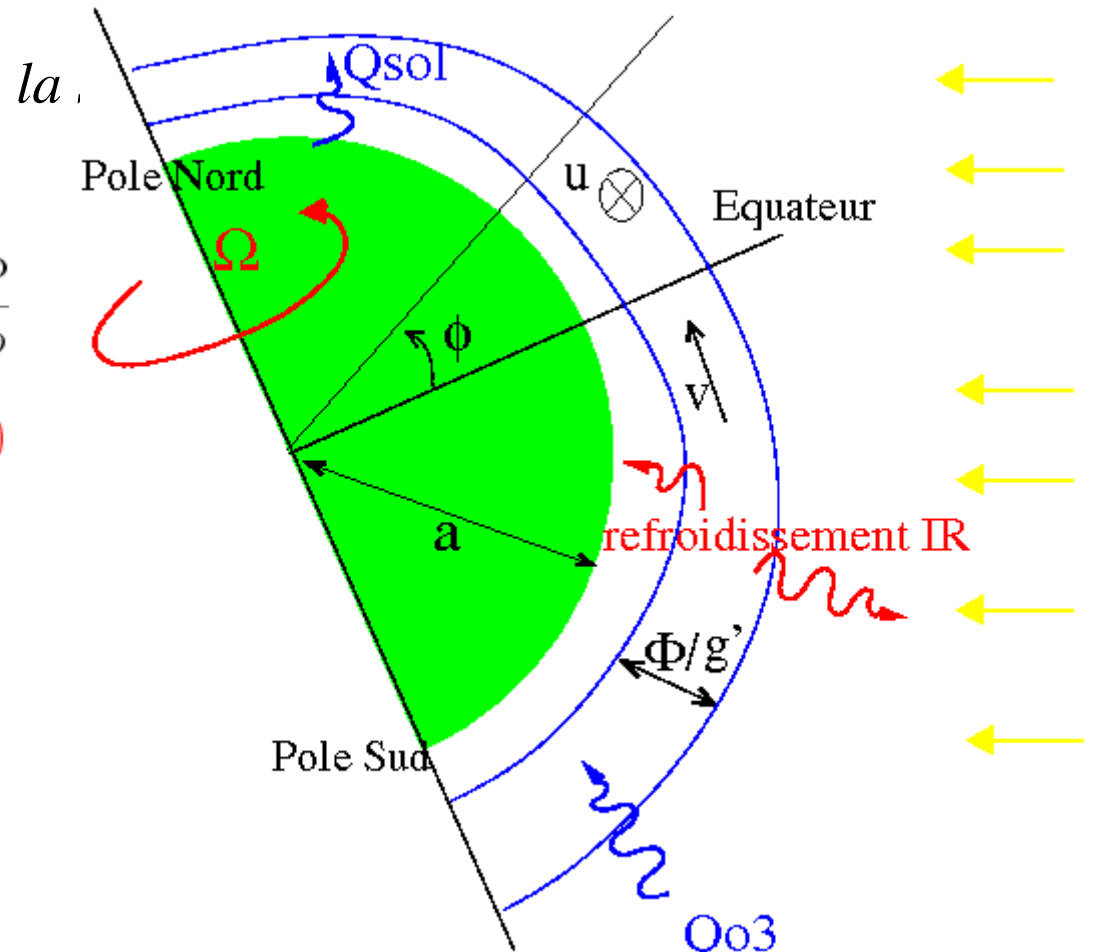
$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) v + \left(2\Omega + \frac{u}{a \cos \phi}\right) u \sin \phi = -\frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \phi} \frac{\partial \Phi v \cos \phi}{\partial \phi} = Q - \overline{Q}^\phi - \alpha (\Phi - \Phi_0)$$

Conservation du moment angulaire et force de Coriolis:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi}\right) (u \cos \phi + a\Omega \cos^2 \phi) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u \approx 2\Omega \sin \phi v$$



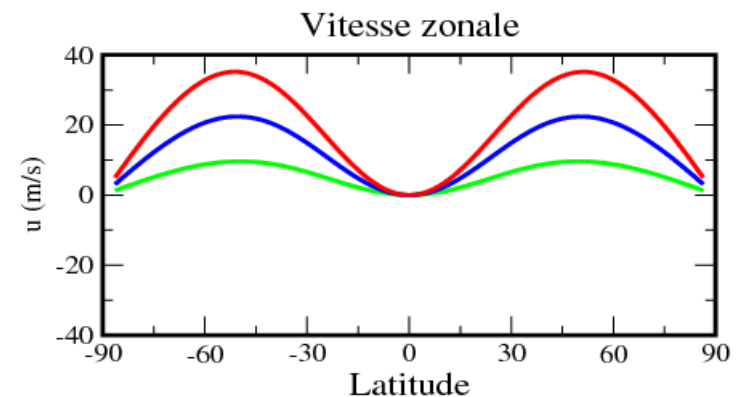
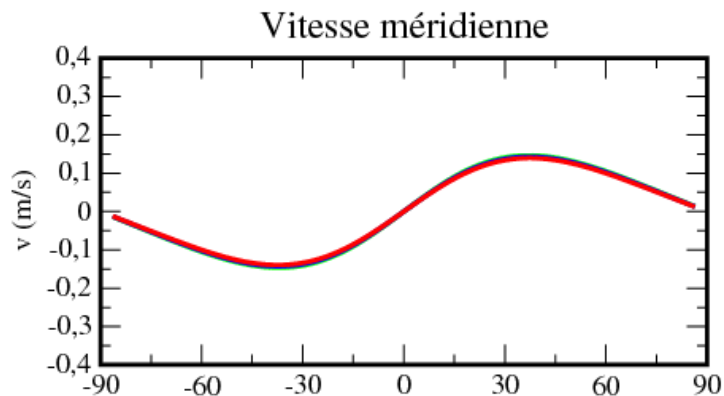
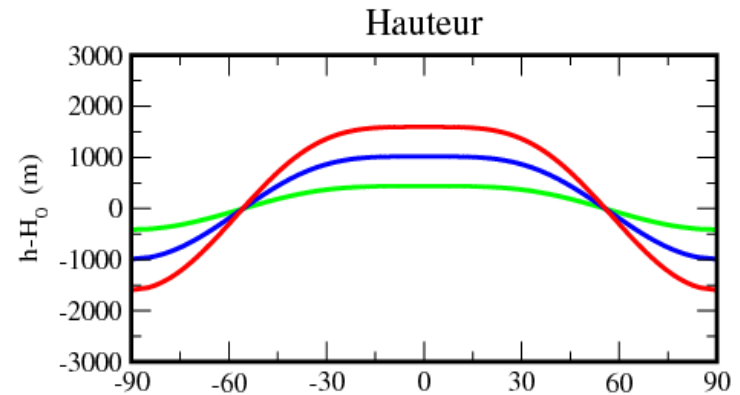
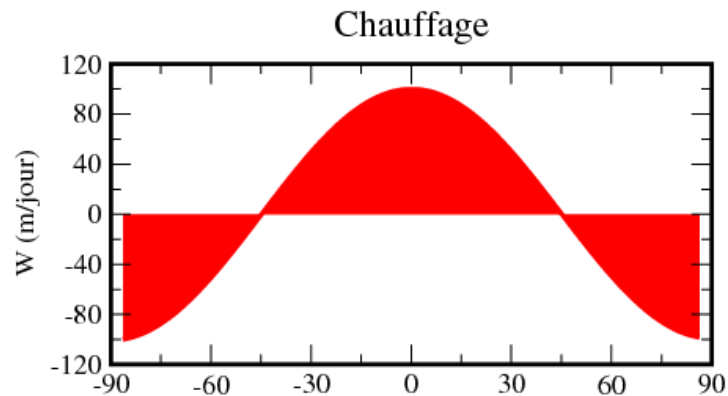
$\Phi$  est à la fois le potentiel et l'épaisseur de la couche via  $\Phi/g'$ , sa valeur au repos est  $\Phi_0/g' \sim 60\text{km}$ ;  $g' \sim g$  est une gravité réduite, le temps caractéristique de refroidissement IR  $\alpha \sim (1/5 \text{ jours})$ .

# I.2) Interprétations avec un modèle de Saint Venant

## Interprétation avec un modèle simple

*Modèle de Saint Venant sur la sphère, version axisymétrique*

Forçage troposphérique (ou Equinoxe tropo et strato) pas de refroidissement IR

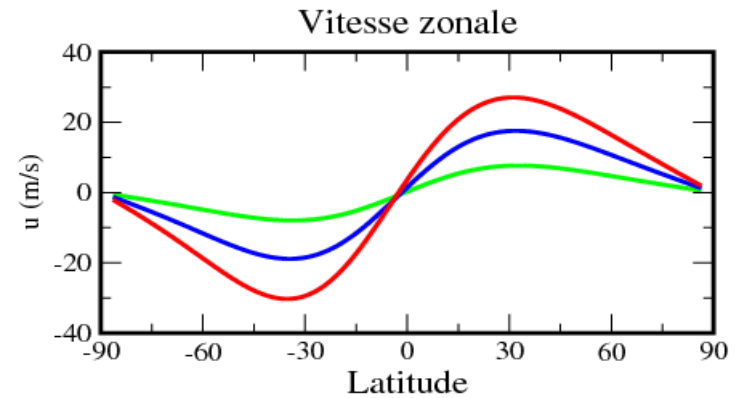
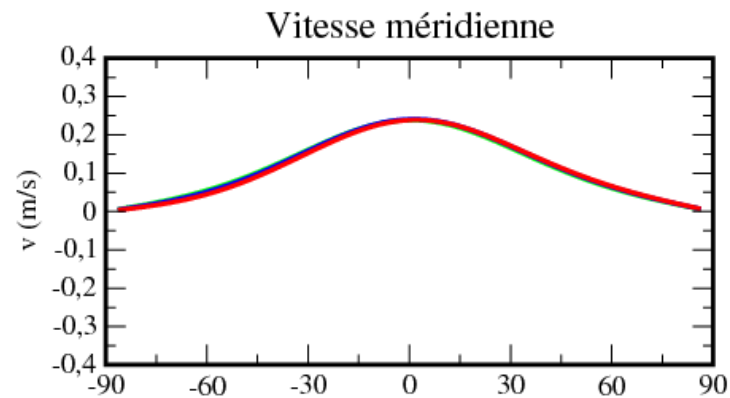
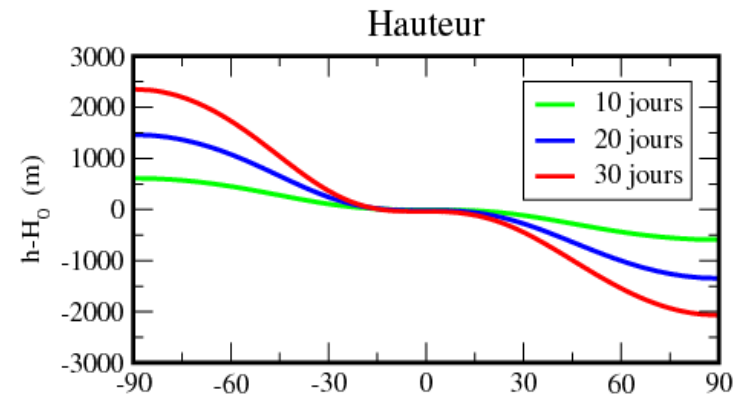
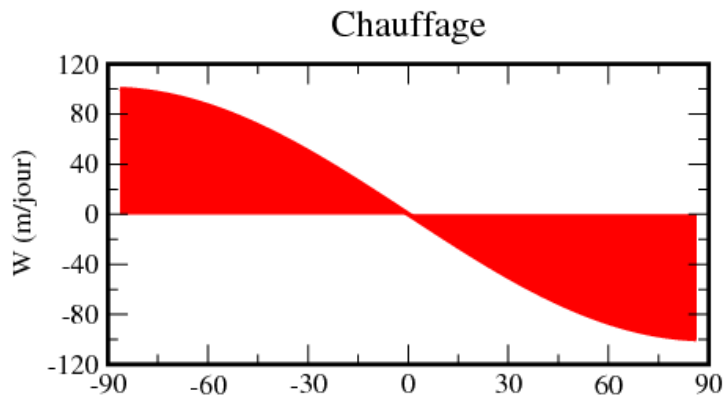


# I.2) Interprétations avec un modèle de Saint Venant

## Interprétation avec un modèle simple

*Modèle de Saint Venant sur la sphère, version axisymétrique*

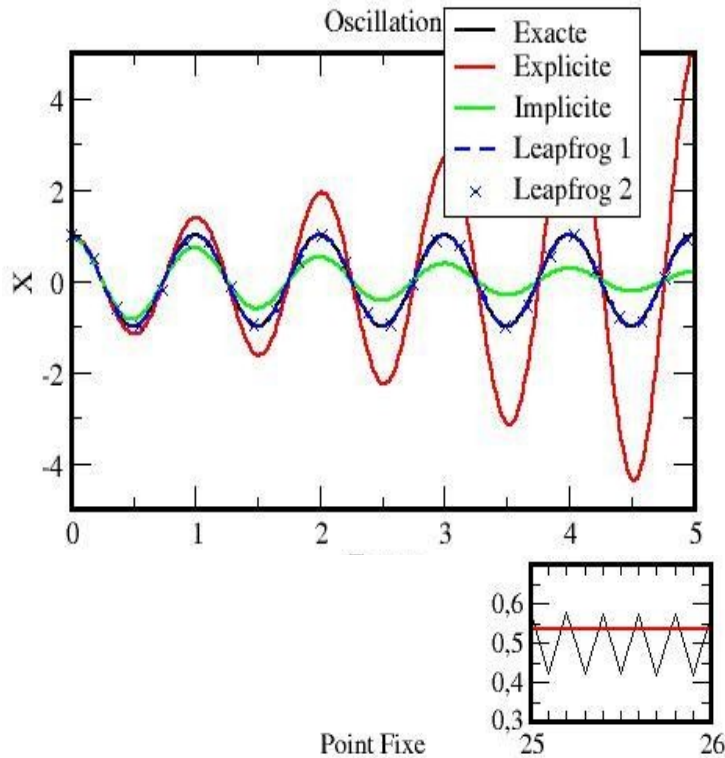
Forçage Stratosphérique, Hiver de l'Hémisphère Nord.



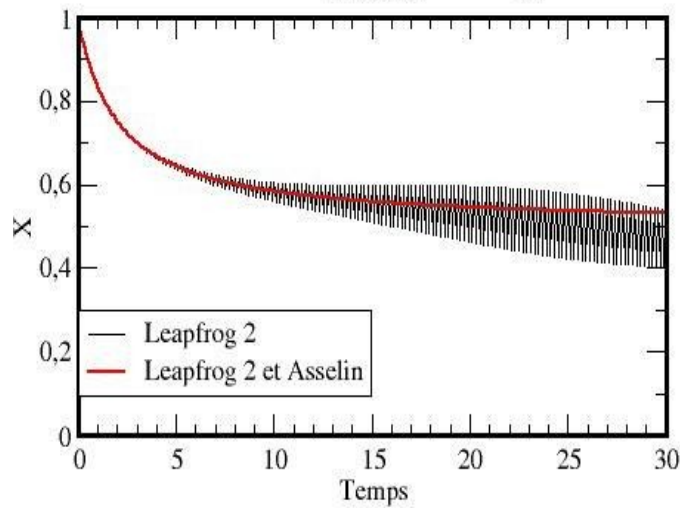
# I.2) Interprétations avec un modèle de Saint Venant

## Intégration temporelle

Schéma explicites, implicites, leapfrog, et filtre de Asselin



$$\frac{\partial}{\partial t} X = i\omega X$$



$$\frac{\partial}{\partial t} X = -(X - X_0)^2$$

# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## II. La modélisation du climat

II.1) Exemple de la mise en route de l'atmosphère

II.2) Equations de la dynamique de l'atmosphère

II.3) Principes de base d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

II.4) Utiliser le MCGA du Laboratoire de Météorologie Dynamique LMDz

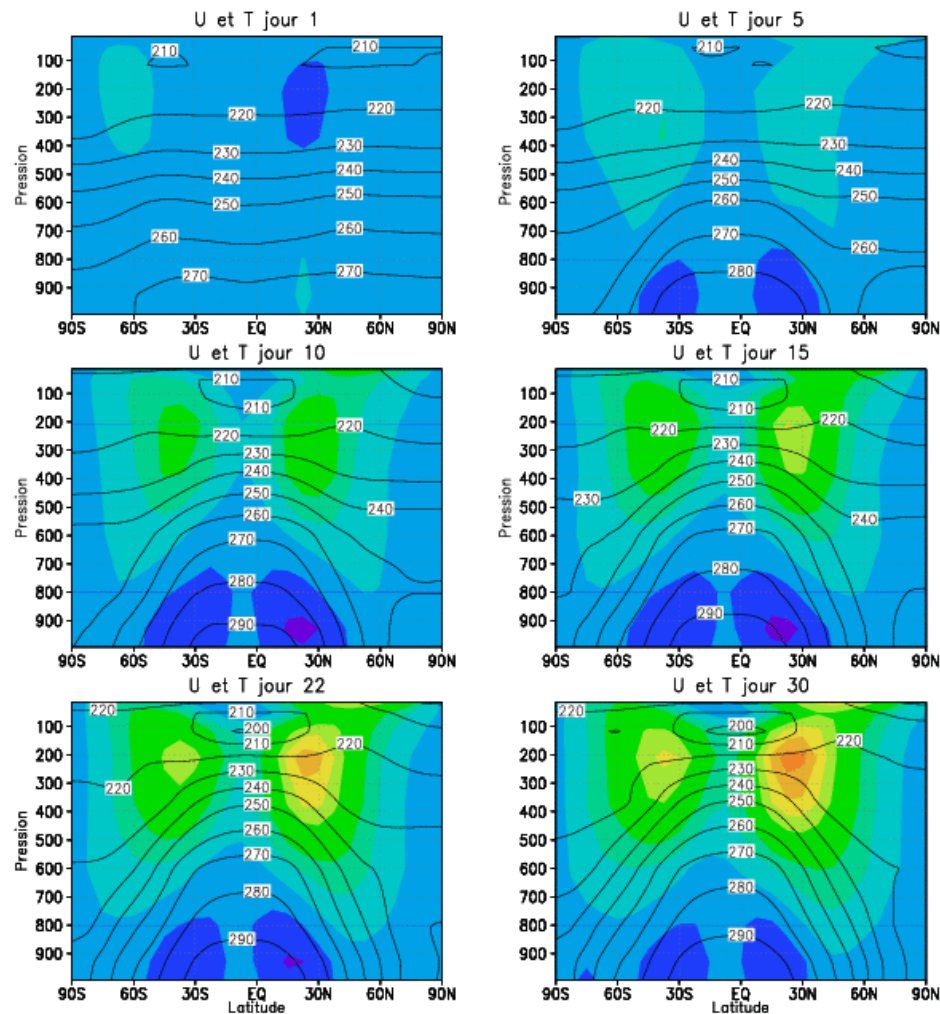
(voir [http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/Presentation.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/Presentation.html))

## II.1) Exemple de la mise en route de l'atmosphère

voir aussi l'animation sur la page:

[http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/movie.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/movie.html)

Moy. Zonale de U et T (Cl pour U: 5m/s)



Un exemple de simulation de la mise en route de l'atmosphère à l'aide de la version simplifiée du modèle de circulation générale de l'atmosphère lmdz (Mois d'été).

Au départ ( $t=0$ ), l'atmosphère est au repos et la Température de l'air ne varie pas avec la latitude.

A partir de  $t=0$ , le chauffage par le soleil et par le sol est mis en route.



## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

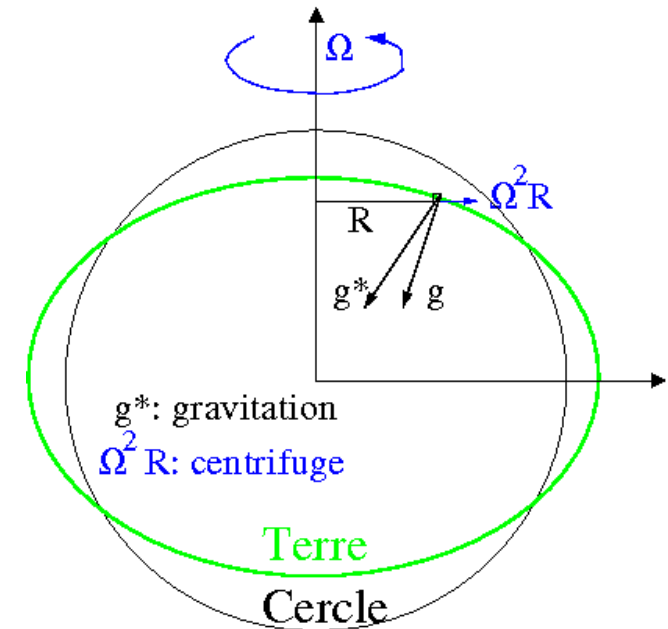
Loi de Newton dans un référentiel tournant:

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \vec{g} + \vec{D}$$

$\vec{D}$ : Forces de Friction

$p$ : Pression

$\vec{g}$ : vecteur incluant la gravitation et la force centrifuge



Accélération en coordonnées sphériques:

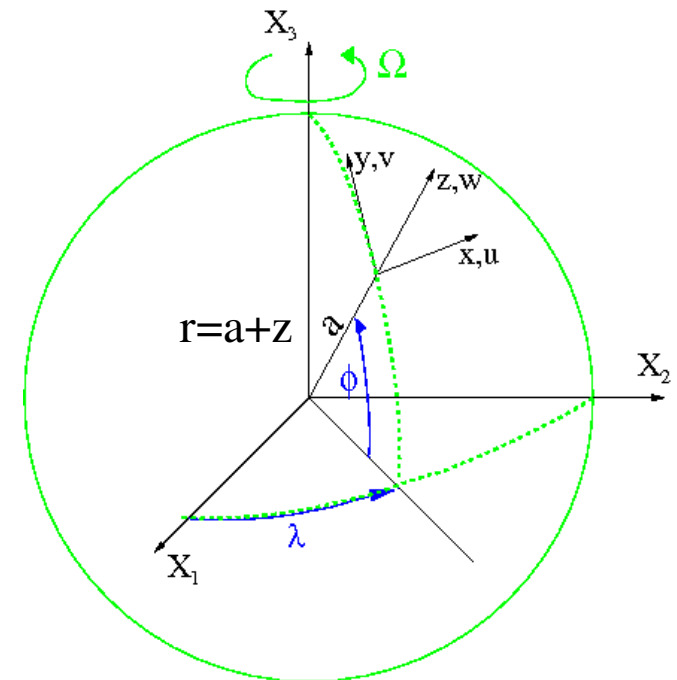
$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} = \begin{cases} \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{r} + \frac{uw}{r} \\ \quad - 2\Omega \sin \phi v + 2\Omega \cos \phi w \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{u^2 \tan \phi}{r} + \frac{vw}{r} \\ \quad + 2\Omega \sin \phi u \\ \frac{Dw}{Dt} - \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega \cos \phi u \end{cases}$$

Avec:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r}$$

et:

$$u = r \cos \phi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v = r \frac{D\phi}{Dt}, \quad w = \frac{Dr}{Dt}$$



## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

Approximation pour une atmosphère mince ( $z^* \ll a$ ,  $w \ll u, v$ )

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{U} \approx \begin{cases} \frac{Du}{Dt} - \frac{uv \tan \phi}{a} - 2\Omega \sin \phi v \\ \frac{Dv}{Dt} + \frac{uv \tan \phi}{a} + 2\Omega \sin \phi u \\ 0 \end{cases}$$

Avec:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

et:

$$u = a \cos \phi \frac{D\lambda}{Dt}, \quad v = a \frac{D\phi}{Dt}, \quad w = \frac{Dz}{Dt}.$$

Dans ce cadre la composante verticale de la loi de Newton se réduit à l'Approximation hydrostatique:

(les forces de frictions doivent aussi être faibles dans cette direction)

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

Introduction d'une coordonnée verticale

décroissante uniformément avec l'altitude (z):

$$\eta(p, p_s) \text{ telle que } \begin{cases} \eta(0, p_s) = 0 \\ \eta(p_s, p_s) = 1 \end{cases}$$

Dérivée particulaire: 
$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta}$$

Force de pression en utilisant cette nouvelle coordonnée:

Sur une surface  $\eta = \text{cte}$ :

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{z\phi} \delta \lambda + \left( \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_{z\lambda} \delta \phi + \underbrace{\left( \frac{\partial p}{\partial z} \right)_{\lambda\phi}}_{-\rho g} \delta z$$

mais aussi:

$$\delta p = \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} \delta \lambda + \left( \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} \delta \phi$$

En introduisant le geopotentiel  $\Phi = gz$ ,  
et en écrivant:

$$\delta \Phi = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} \delta \lambda + \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} \delta \phi$$

$$-\frac{1}{\rho} \vec{\nabla}_h p = - \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho a \cos \phi} \left( \frac{\partial p}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} & + \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right)_{\eta\phi} \\ \frac{1}{\rho a} \left( \frac{\partial p}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} & + \frac{1}{a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right)_{\eta\lambda} \end{pmatrix}$$

## II.2) Equations de la Dynamique de l'Atmosphère

$$\delta M = \rho a^2 \cos \phi \delta \lambda \delta \phi \delta z = -ga^2 \cos \phi \frac{\partial p}{\partial \eta} \delta \lambda \delta \phi \delta \eta$$

Conservation de la masse:

$$\frac{1}{\delta M} \frac{D\delta M}{Dt} = \frac{1}{\frac{\partial p}{\partial \eta}} \frac{D\frac{\partial p}{\partial \eta}}{Dt} + \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cos \phi v}{\partial \phi} \right) + \frac{\partial \dot{\eta}}{\partial \eta}$$

En écrivant la conservation de la masse sous la forme:

$$\lim_{\delta M \rightarrow 0} \frac{1}{\delta M} \frac{D\delta M}{Dt} = 0$$

On obtient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial p}{\partial \eta} + \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{\partial p}{\partial \eta} u + \frac{\partial}{\partial \phi} \frac{\partial p}{\partial \eta} \cos \phi v \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial p}{\partial \eta} \dot{\eta} = 0$$

$$\frac{D\theta}{DT} = Q \quad \text{où} \quad \theta = T \left( \frac{p_r}{p} \right)^\kappa$$

$p_r$  pression de référence constante et  $\kappa = R/C_p$

Bilan de chaleur:

$$\frac{DT}{Dt} + \frac{\kappa T \omega}{p} = P_T$$

où  $\omega = \frac{Dp}{Dt}$  est la vitesse verticale "pression",  
et  $P_T$  représente les forçages diabatiques.

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

Un Modèle de Circulation Générale de l'Atmosphère calcule l'évolution temporelle de diverses variables, essentiellement le vent, la Température et l'humidité, en différents points d'un **"maillage" 3D** qui couvre l'ensemble de l'atmosphère.

A partir d'un état initial, le modèle calcule l'évolution de ces variables, pas de temps après pas de temps

1) A un instant  $t$  on connaît la variable,  $X_t$ , en tout point de l'atmosphère ( $X$  peut-être  $u, v, T$ , ou  $p_s$ )

2a) On calcule alors son évolution due à l'advection ( $u, v, T$ ), les forces de pression et la force de Coriolis ( $u, v$ ) ou la conservation de la masse ( $p_s$ ). C'est à dire tout les termes explicitement représentés par les équations de la dynamique du fluide. On appelle cette évolution, la tendance dynamique de  $X$ :  $(\partial_t X)_{\text{dyn}}$

2b) On calcule aussi son évolution due aux échanges turbulents avec le sol ( $u, v, T$ ) et dont les mouvements sont de trop petites échelles pour être représentés par la dynamique résolue par la grille du modèle. On calcule aussi l'évolution de la Température liée aux forçages radiatifs Infrarouge venant du sol, et visible venant du soleil et de la réflexion par le Sol. On appelle cette évolution la tendance physique de  $X$ :  $(\partial_t X)_{\text{phys}}$

3) Au pas de temps suivant,  $t+dt$ , on calcule  $X_{t+dt}$  en fonction de  $X_t$  et des tendances, c'est l'intégration des variables dans le temps. Exemple du pas dit d'"Euler":

$$X_{t+\delta t} = X_t + (\partial_t X)_{\text{dyn}} \delta t + (\partial_t X)_{\text{phys}} \delta t$$

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Discretisation verticale:

Pour représenter la dépendance verticale des variables

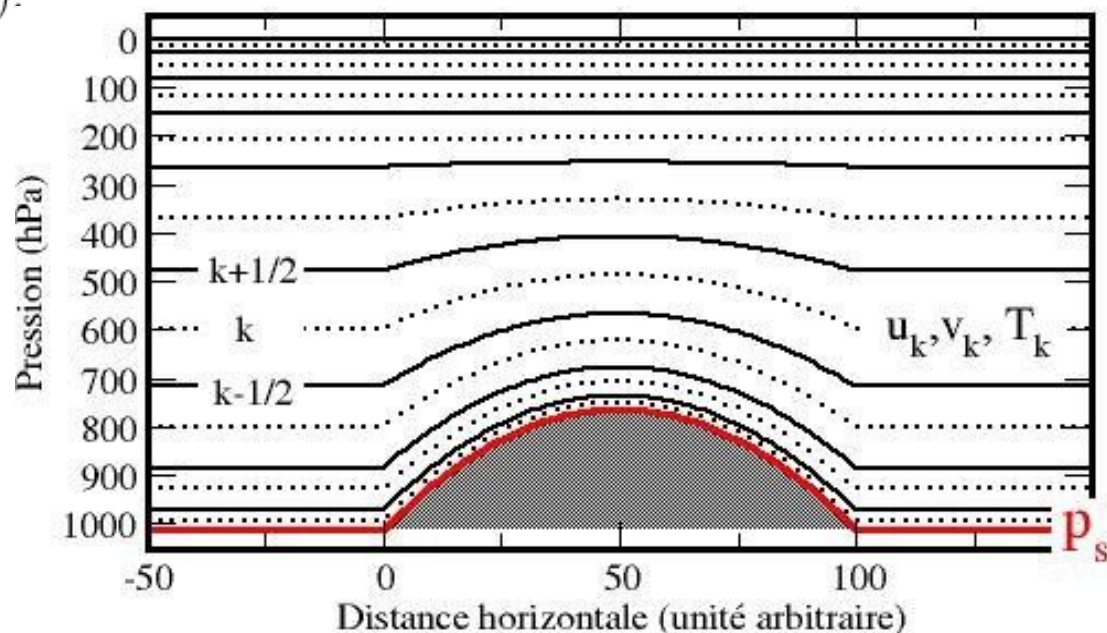
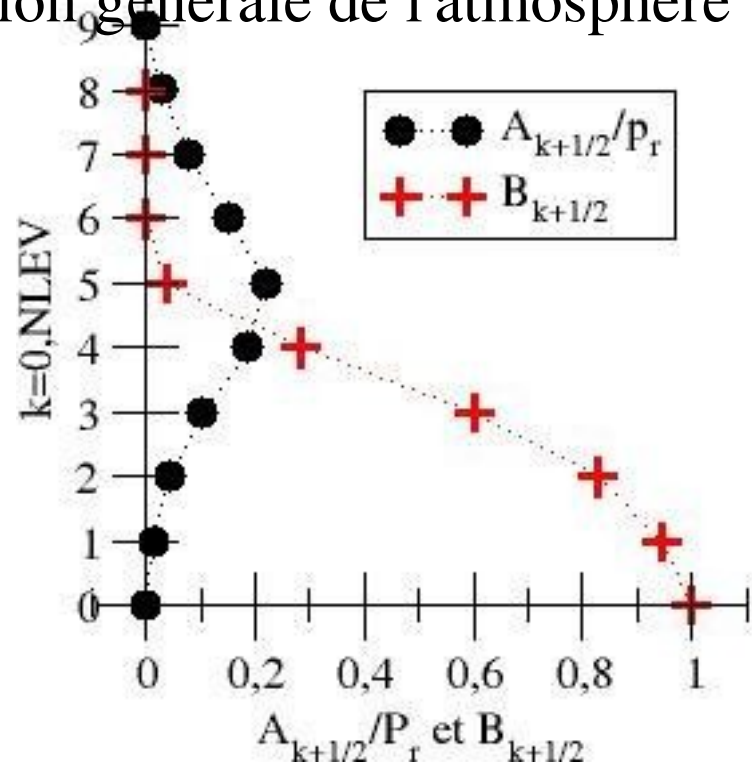
$$u, v, T,$$

on divise l'atmosphère en  $NLEV$  couches, A l'interface de chaque couche la pression est définie par:

$$p_{k+1/2} = A_{k+1/2} + B_{k+1/2}p_s, \text{ pour } k = 0, NLEV.$$

Les  $A_{k+1/2}$  et les  $B_{k+1/2}$  sont des constantes définissant la coornonnée verticale, elles sont fixées une fois pour toute. La pression dans chaque couche est donnée par:

$$p_k = 0.5 * (p_{k-1/2} + p_{k+1/2}).$$



## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Discretisation verticale:

Evaluation de la pression de Surface et de la vitesse verticale “pression”:

On intègre de  $\eta = 0$  à  $\eta = 1$  la conservation de la masse:

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} = -\vec{\nabla}_h \cdot \sum_1^{\text{NLEV}} \Delta p_k \vec{u}_k$$

où:  $\Delta p_k = p_{k-1/2} - p_{k+1/2}$

Pour  $\omega$  on détermine  $\partial_t p$  en intégrant la continuité de  $\eta = 0$  à  $\eta$ :

$$\omega_k = \vec{u}_k \cdot \vec{\nabla}_h p_k - \vec{\nabla}_h \cdot \sum_k^{\text{NLEV}} \Delta p_k \vec{u}_k$$

Pour un scalaire  $S$  et un vecteur de vent  $\vec{u}$  les conventions suivantes ont été utilisées:

$$\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_h S = \left( \frac{u}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) S$$

$$\vec{\nabla}_h \cdot \vec{u} S = \frac{1}{a \cos \phi} \left( \frac{\partial u S}{\partial \lambda} + \frac{\partial \cos \phi v S}{\partial \phi} \right)$$

Exercices:

**1** Donner la forme discrète permettant d'évaluer le géopotentiel

$\Phi$  (sa valeur au sol est le relief  $\Phi_s$ )

**2** Donner la forme discrète permettant d'évaluer l'advection verticale d'un scalaire  $S$ :

$$\dot{\eta} \frac{\partial S}{\partial \eta}$$

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

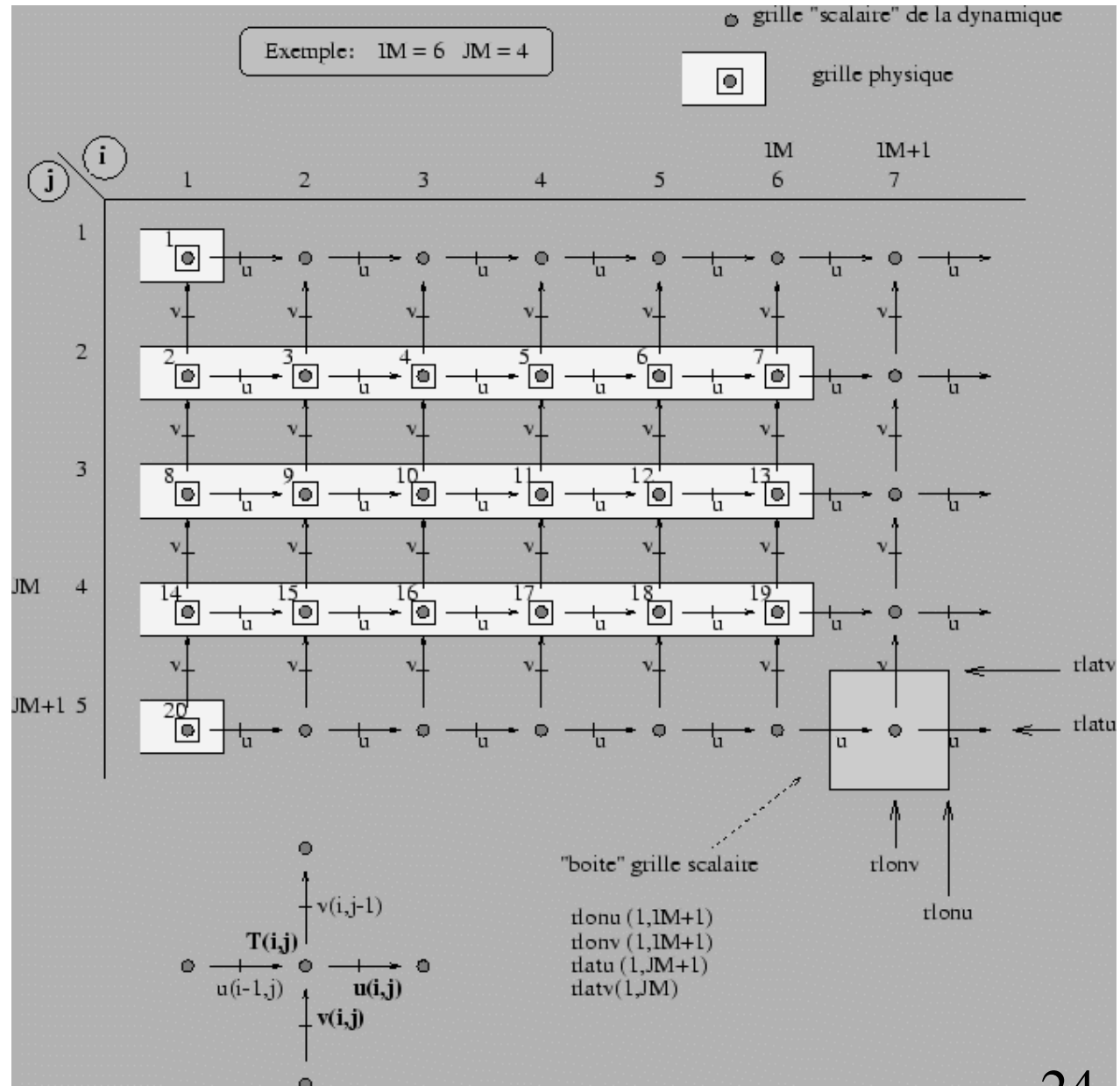
### Discretisation horizontale:

Pour la dynamique on utilise des grilles décalées pour chaque variables. Cela permet d'avoir une précision du second ordre pour l'estimation des différentielles horizontales.

Exemple de la tendance dynamique due au gradient de pression:

$$(\partial_t u)_{i,j} = \frac{1}{a \cos \phi_j} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\lambda_{i+1} - \lambda_i}$$

Pour la physique toutes les variables sont sur les mêmes points

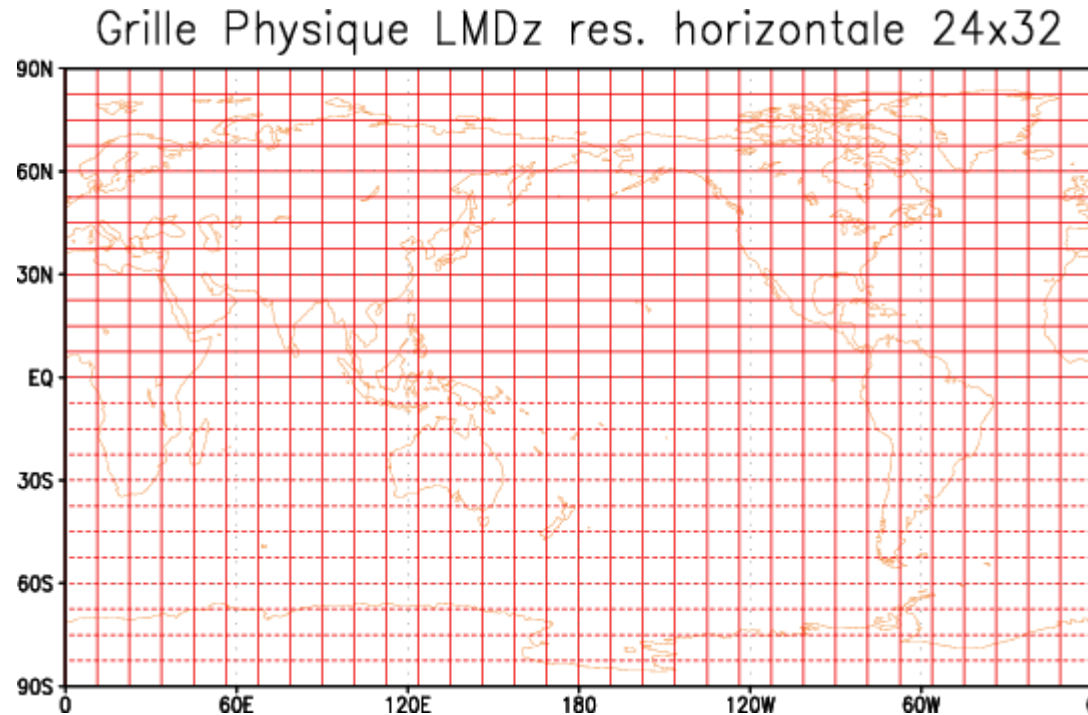




## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Discretisation horizontale:

Exemple de la grille horizontale « physique » utilisée dans ce cours



Le passage de la grille physique à la grille dynamique se fait par des interpolations linéaires

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

Représentation de la physique.

Chaque point de la grille physique est associé à une colonne verticale

**Sur la grille physique, sont évaluées les tendances sur T dues:**

Au forçage radiatif (solaire et infrarouge)

Au dépôt de chaleur latente lié à la condensation

Aux échanges (chaleur latente et chaleur sensible) avec le sol dus à la turbulence dans la couche limite

Aux ajustements statiques (sec et humides)

**Sur la grille physique, sont évaluées les tendances sur u et v dues:**

Aux échanges avec le sol dus à la turbulence dans la couche limite

au déferlement des ondes de gravité

aux ajustements statiques (sec et humide)

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Représentation de la physique:

#### Un exemple, la turbulence dans la couche limite (forme continue)

Le transfert turbulent d'une quantité  $X$  depuis la surface vers le haut est représenté sous la forme conservative:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)_{CL} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial J_X}{\partial z}$$

où  $J_X$  est le flux turbulent. Ce flux a pour valeur 0 au sommet et pour valeur

$$\rho C_X |\vec{u}(z)| (X(z) - X_s)$$

lorsque  $z$  est proche du sol. Si  $z$  est suffisamment petit, on peut considérer qu'il est dans une couche dite "de surface", où le flux turbulent est constant. La théorie de la similarité permet alors d'exprimer  $C_X$  en fonction de la rugosité du sol, de la stabilité du fluide, et de  $z$ .

Dans le fluide, le flux  $J_X$  est écrit sous la forme

$$J_X = \rho K_X \frac{\partial X}{\partial z}$$

où  $K_X$  est un coefficient d'échange dépendant lui aussi de la stabilité du fluide.

## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Représentation de la physique.

#### Un exemple, la turbulence dans la couche limite (forme Discrète)

A l'aide de la valeur de  $X$  au premier niveau du modèle on évalue le flux turbulent au sol sous la forme:

$$J_{X_s} = \rho C_X |\vec{u}_1| (X_1 - X_s)$$

Remarques: le sol  $s$  est aussi le demi niveau 1/2; la valeur au sol  $X_s$  est évaluée à partir d'un modèle de sol, et/ou de climatologies. A chaque demi niveau entre le sol et le sommet, on évalue le flux

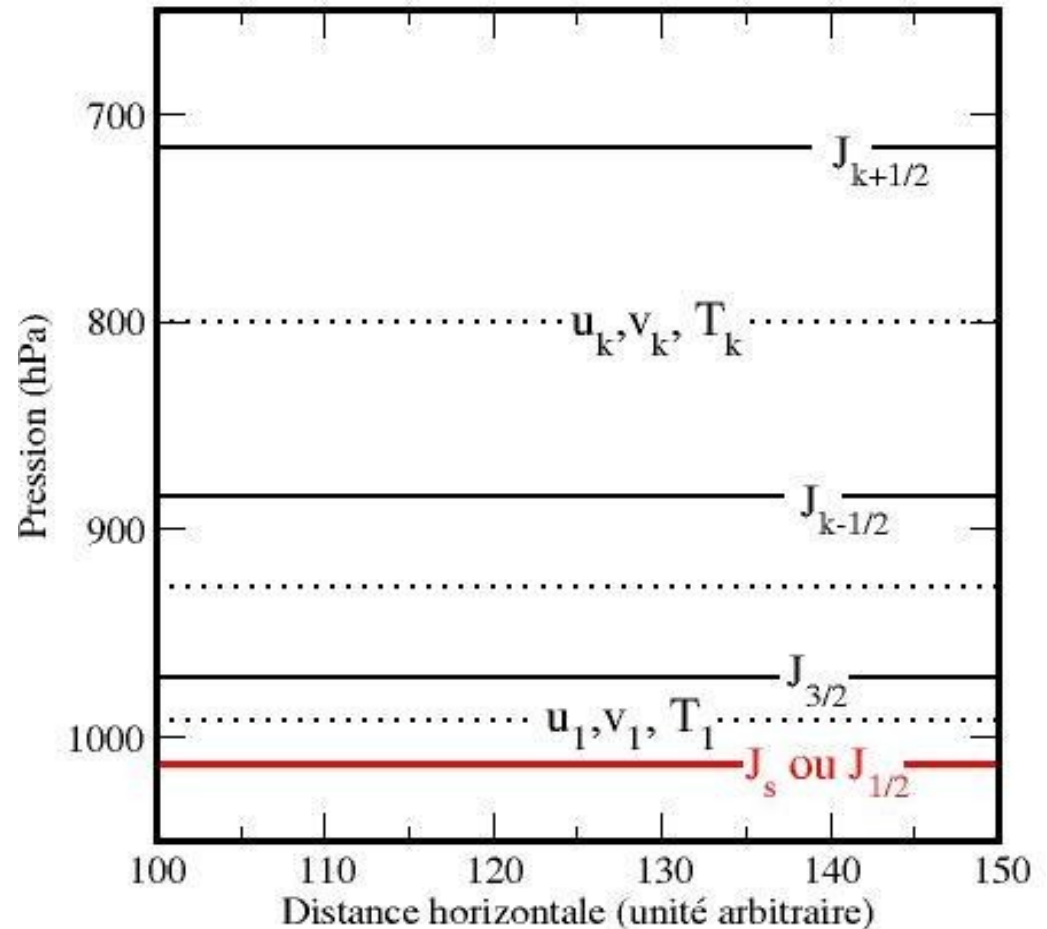
$$J_{X_{k+1/2}} = \rho^2 K_X g \frac{X_{k+1} - X_k}{\Delta p_{k+1/2}}$$

où

$$\Delta p_{k+1/2} = p_{k+1} - p_k.$$

A chaque niveau on évalue alors la tendance "physique":

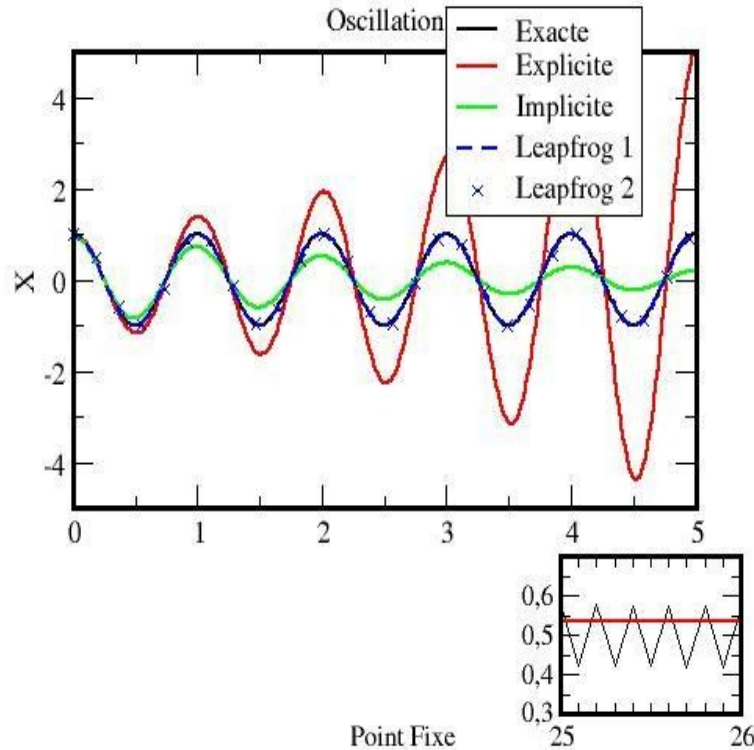
$$\left( \frac{\partial X}{\partial t} \right)_k = g \frac{J_{k+1/2} - J_{k-1/2}}{\Delta p_k}$$



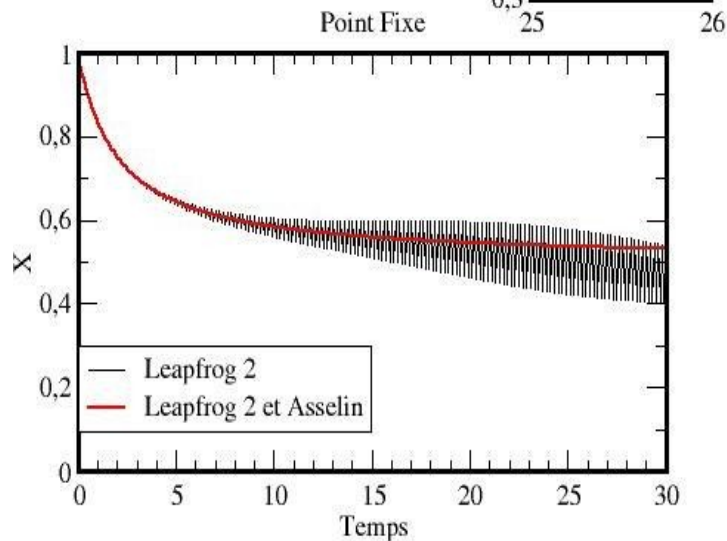
## II.3) Principes de bases d'un modèle de circulation générale de l'atmosphère

### Intégration temporelle

Schéma explicites, implicites, leapfrog, et filtre de Asselin



$$\frac{\partial}{\partial t}X = i\omega X$$



$$\frac{\partial}{\partial t}X = -(X - X_0)^2$$



# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## III. La variabilité du climat

III.1) Analyse spectrale des variations du moment angulaire atmosphérique (MAA)

III.2) Faire l'analyse spectrale de quelques index climatiques (NAO, QBO, EL-Nino, MAA, ....)

(voir [http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/Presentation.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/Presentation.html))

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

## Motivation Générale

Les analyses statistiques occupent une place centrale en climatologie.

Pour des séries de données elles permettent d'établir si celles-ci sont imprévisibles (type bruit blanc), faiblement prévisibles grâce à un effet de mémoire (type bruit rouge), ou si elles contiennent des oscillations et deviennent en partie prévisibles avec quelques périodes d'avance.

La mise en évidence de ces oscillations indiqueraient que le climat est en partie prévisible, au delà de ce que prévoient les modèles opérationnels de la Météorologie.

Nous proposons ici de préciser ces concepts sur le cas d'une donnée univariée, le « Moment Angulaire de l'Atmosphère ».

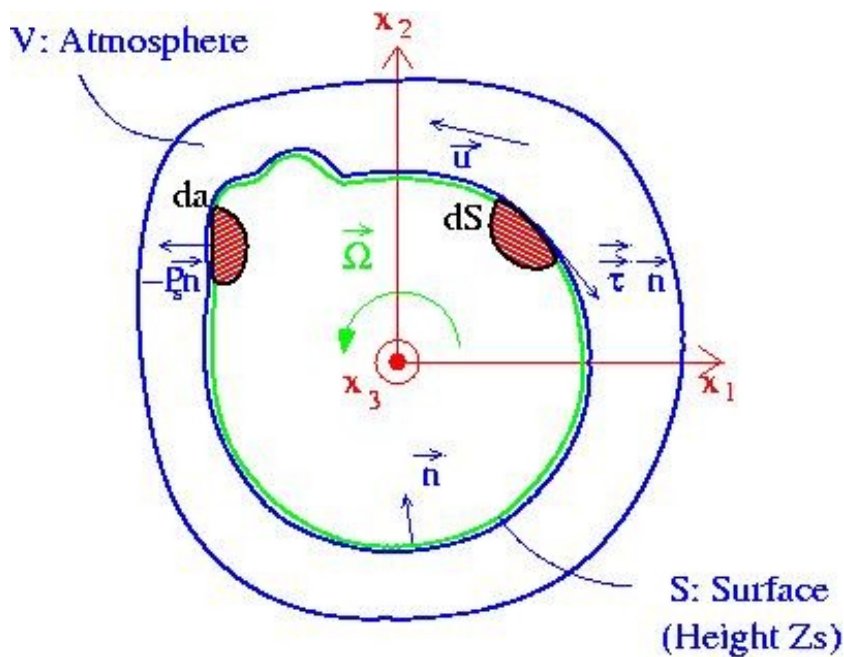
Quelques régressions de champs météorologiques sur ce type de variable sont aussi faites. Elles sont un premier exemple des analyses de données multivariées présentées dans le chapitre VII



# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique (MAA, ou M)

La composante axiale du moment angulaire de l'Atmosphère,  $M=M_R+M_O$ :

$$\frac{d}{dt}(M_R+M_O)=T_M+T_B$$



**MAA de vent:**  $M_R = \int_V \rho r \cos \theta u dV$

**MAA de masse:**  $M_O = \int_V \rho \Omega r^2 \cos^2 \theta dV$

**Couple du à la friction de couche limite:**  $T_B = \int_S r \cos \theta \tau dS$

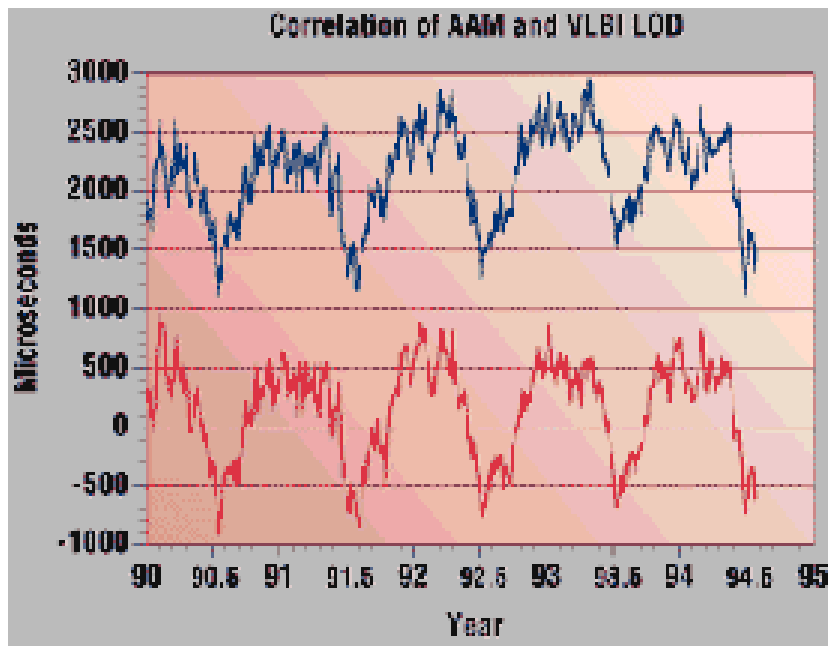
**Couple des montagnes:**  $T_M = - \int_S P_s \frac{\partial Z_s}{\partial \lambda} dS$

Budget bien fermé avec les réanalyses du NCEP (1958-2003):  $r(dM/dt, T)=0.87$

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

Lien avec la longueur du jour

## Longueur du jour et MAA (NASA dataset)

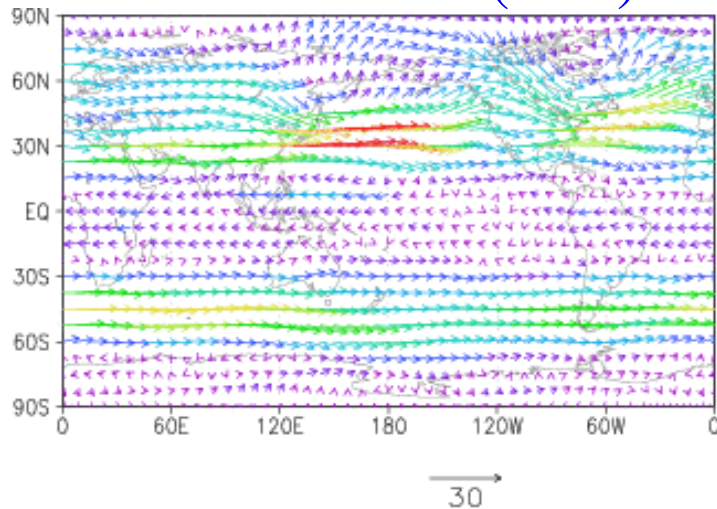


- M est une quantité dynamique globale, dont les variations sont directement liés à la longueur du jour (mesurée par satellites, ou par méthodes astronomiques)
- Aux périodes inférieures à quelques années, les variations de M sont liés aux grandes oscillations du système climatique.

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

## MAA de vent et vent barotrope

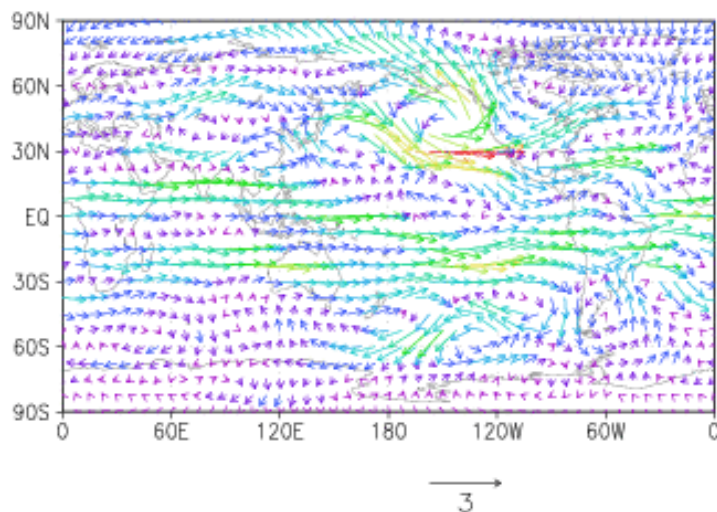
Données NCEP,  
mois d'Hiver (DJF)



$$M_R = \int_V \rho r \cos \theta u dV$$

Moyenne d'hiver du vent barotrope ( $\vec{u}_b$ )

$$\vec{u}_b = \int_h^\infty \rho \vec{u} dz$$



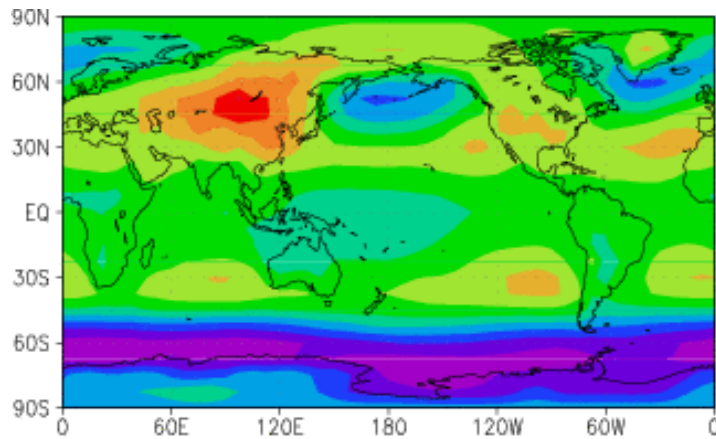
Regression du vent barotrope ( $\vec{u}_b$ )  
sur les variations du MAA de vent  
( $M_R$ )

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

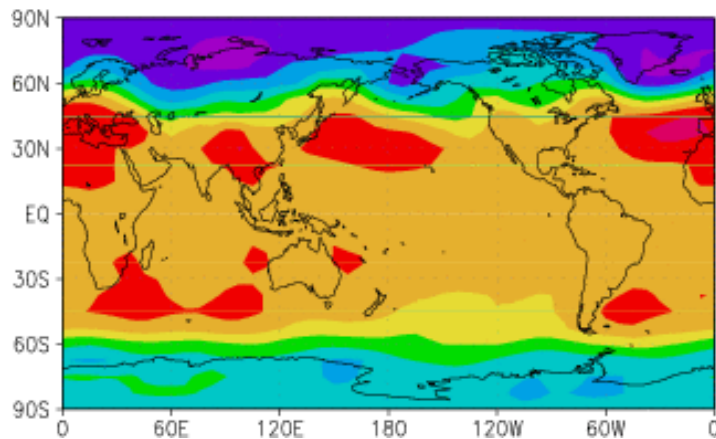
MAA de masse et Pression au sol (masse de la colonne d'atmosphère)

Données NCEP,  
mois d'Hiver (DJF)

$$M_o = \int_V \rho \Omega r^2 \cos^2 \theta dV$$



**Moyenne de la pression au niveau de la mer ( $P_M$ )**



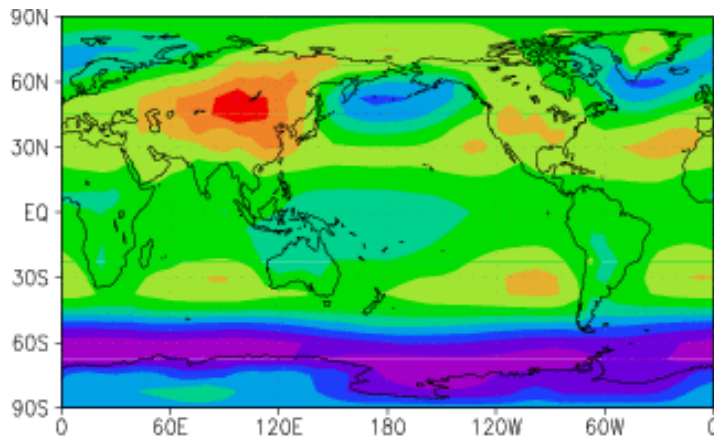
**Regression des variations de  $P_M$  sur les variations du moment angulaire de masss ( $M_o$ )**

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

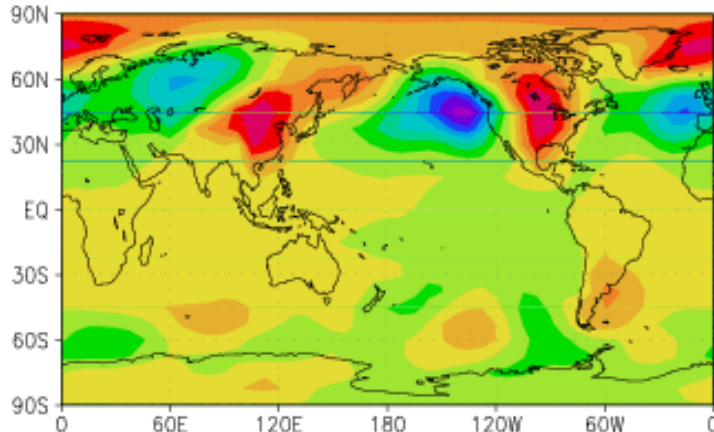
## Couple des montagnes et pression au sol

Données NCEP,  
mois d'Hiver (DJF)

$$T_M = - \int_S P_S \frac{\partial Z_S}{\partial \lambda} dS$$



**Moyenne de la pression au niveau de la mer ( $P_M$ )**

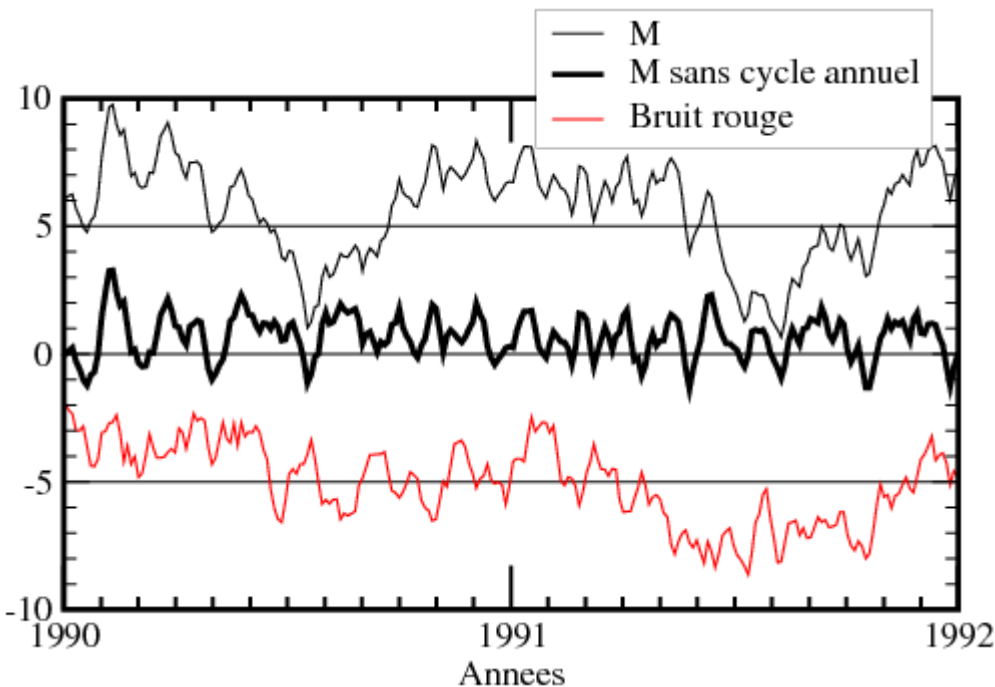


**Regression des variations de  $P_M$  sur les variations du couple des montagnes ( $T_M$ )**

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

Evidence qu'il existe des oscillations intrasaisonnères de  $M$

Données NCEP,  
moyennées sur trois jours



Hypothèse nulle (**Bruit rouge**):  $M$  est un processus stochastique:

$$M_s^{t+3} = \underbrace{aM_s^t}_{\text{Mémoire}} + \underbrace{Z^t}_{\text{Bruit blanc}}$$

Il s'agit d'estimer si l'évolution de  $M$  diffère de celle d'un processus auto-régressif d'ordre 1 (Chaîne de Markov)  $M_s$ :

$$M_s^{t+3} = aM_s^t + Z^t$$

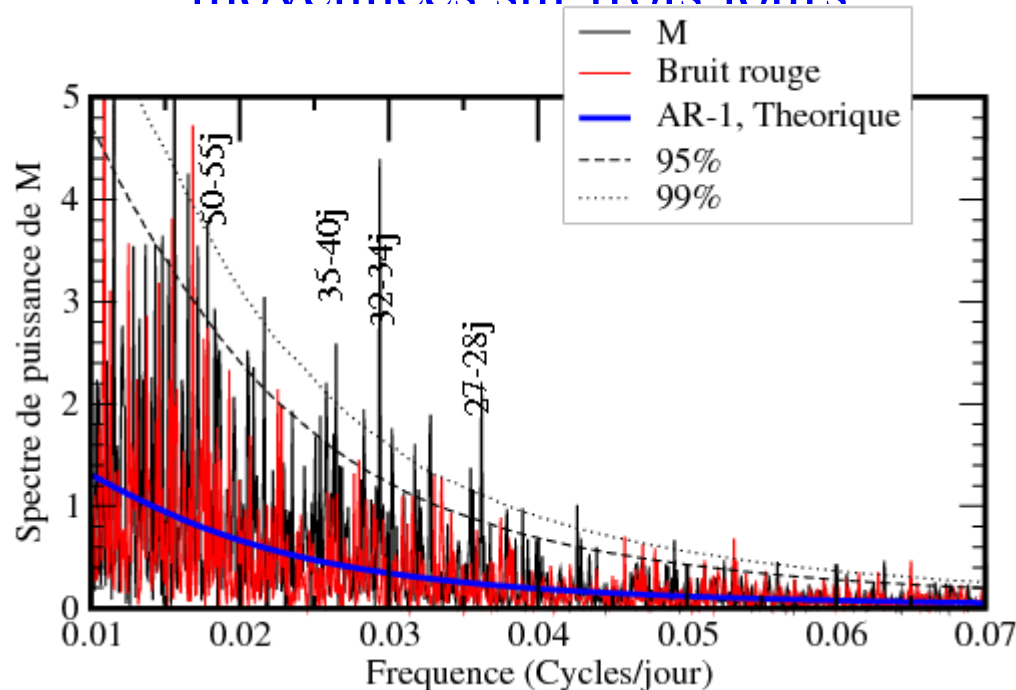
1.  $a$  est évaluée à partir de la covariance croisée de  $M$  à 0 jour et 3 jours: la covariance de  $M_s$  est égale à celle de  $M$ .
2. L'amplitude du bruit blanc,  $Z^t$  est évaluée de façon à ce que  $M_s$  et  $M$  aient la même variance.

UN TEL PROCESSUS STOCHASTIQUE  
NE CONTIENT PAS D'OSCILLATIONS  
(contrairement à un processus d'ordre plus  
élevé).

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

## Le Périodogramme de M

Données NCEP,  
moyennées sur trois jours



Périodogramme de M:  $\hat{M}\hat{M}^*$   
 $\hat{M}$ : Coefficient de Fourier de M:

$$\hat{M}^k = \sum_{n=1}^{n=N} M^n e^{i2\pi \frac{k-1}{N}n}$$

Les périodogrammes sont très bruités.

En particulier, le périodogramme du bruit rouge présente une très forte variabilité autour du spectre du bruit rouge (qui s'évalue très simplement).

Les défauts du périodogramme appliqué à une série réelle:

- 1) Le niveau de bruit du périodogramme est tel, que celui-ci donne une très mauvaise approximation du spectre de la série étudiée.
- 2) Chaque pic contient très peu d'énergie (Th. de Shannon), et donc très peu d'information climatique.

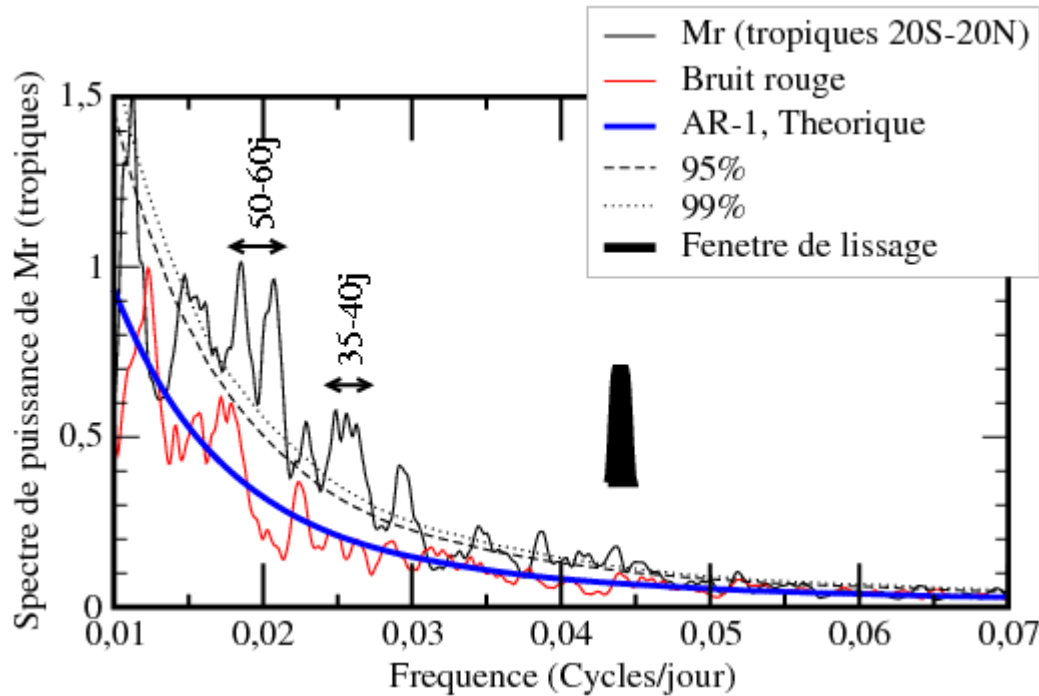
Les niveaux de significativité sont faits par une méthode de Monte-Carlo:

500 Bruits rouges ressemblant à notre série sont générés et leurs Périodogrammes sont évalués. Pour chaque fréquence, on détermine alors le niveau que ne dépasse les bruits rouges que dans 1% (5%) des cas.

Si le Périodogramme de M dépasse ce seuil, alors il est différent d'un bruit rouge, et le niveau de confiance que l'on peut donner à cette affirmation est de 99% (95%)

# III.1) Analyses spectrales du Moment Angulaire Atmosphérique

Le filtrage du Périodogramme pour obtenir une meilleure estimation du Spectre de M



Pour des périodes comprises entre 30 et 60 jours le spectre des données présente des valeurs significatives à plusieurs périodes.

Ces périodes correspondent à celles de l'Oscillation Tropicale de Madden-Julian (cf. Chapitre IV)

Pour obtenir une meilleure estimation du Spectre des données on lisse sur quelques périodes le Périodogramme

Cela revient à moyenner les valeurs de quelques pics spectraux adjacents et donc de réduire la variance de l'estimateur du Spectre (cf. théorème de la limite centrale)

Avantage: élargit la largeur des pics  
Inconvénient: diminue la résolution spectrale

Les intervalles de confiance se font pas méthode de Monte Carlo, en appliquant aux périodogrammes des 500 bruits rouges le même lissage qu'aux données



# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## Sommaire

### IV. Tropiques (I): l'oscillation intra-saisonnière de Madden et Julian

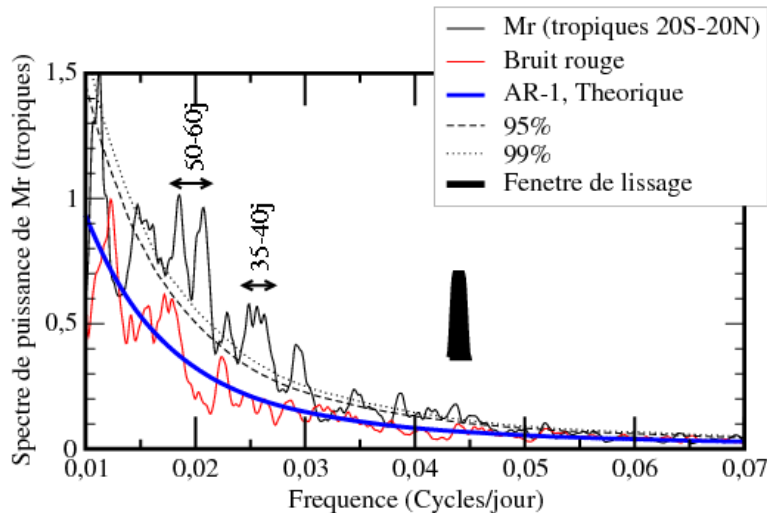
IV.1) Filtrage dans la bande intra-saisonnière, application au MAA et aux précipitations

IV.2) Description de l'oscillation de Madden et Julian

IV.3) Extraire le signal de l'OMJ dans le rayonnement infrarouge mesuré par satellites depuis 1979 (OLR)

(voir [http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/Presentation.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/Presentation.html))

# IV.1) Filtrage dans la bande intrasaisonnière application au MAA



Pour extraire les signaux à 30-60 jours identifiés dans le Spectre de M, on « filtre » M en le convoluant par une fonction F, dont le spectre Contient les fréquences qui nous intéressent.

Il est important que la bande passante du filtre soit assez large, pour que le signal filtré soit substantiel en amplitude (on fait de la climatologie, pas de la radio!)

$M$  filtré à l'instant  $n$ :

$$\tilde{M}^n = F \otimes M = \sum_{j=-J}^{j=J} F^j M^{n-j}$$

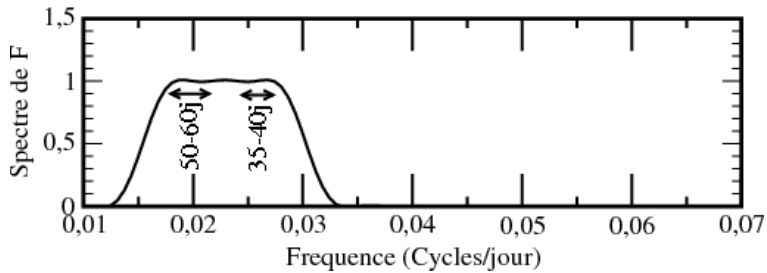
Il s'agit d'une convolution.

Dans l'espace spectral:

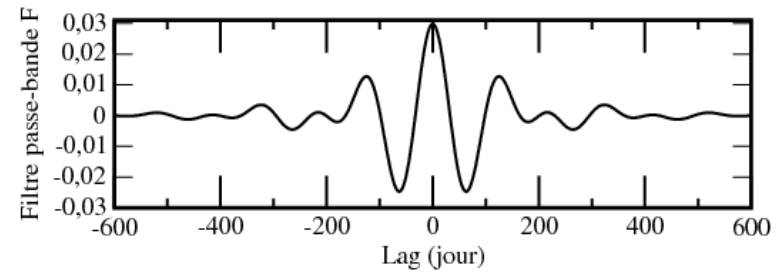
$$\hat{\tilde{M}} = \hat{F} \hat{M}$$

# IV.1) Filtrage dans la bande intrasaisonnière application au MAA

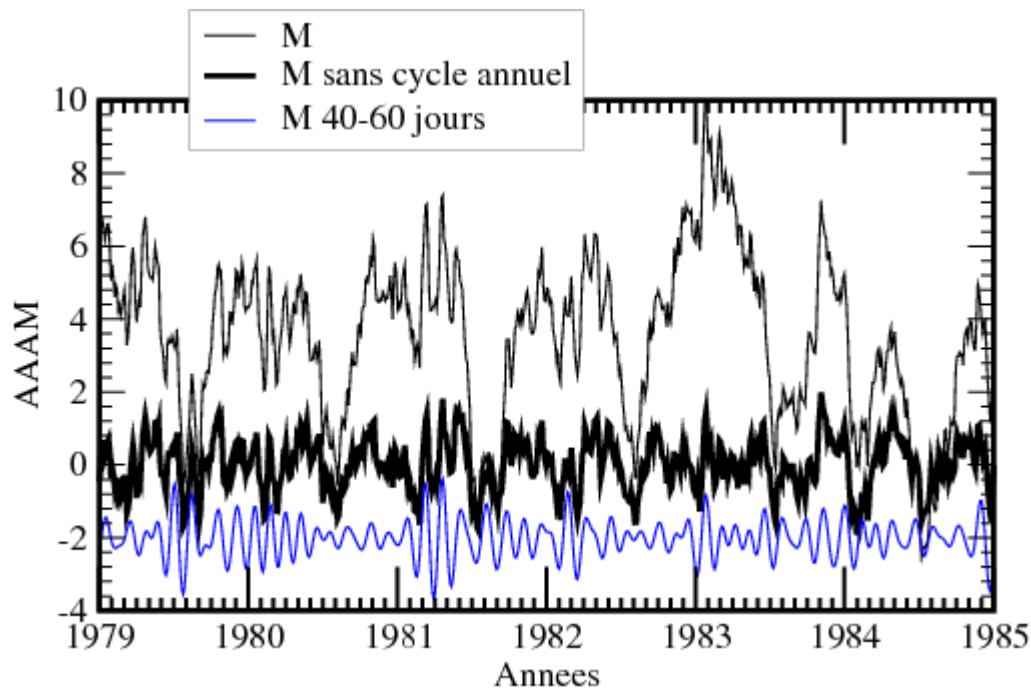
**Exemple de Filtre pour extraire les signaux de M à 30-60 jours:**



**Spectre de F:  $\hat{F}\hat{F}^*$**



**Filtre passe bande F**



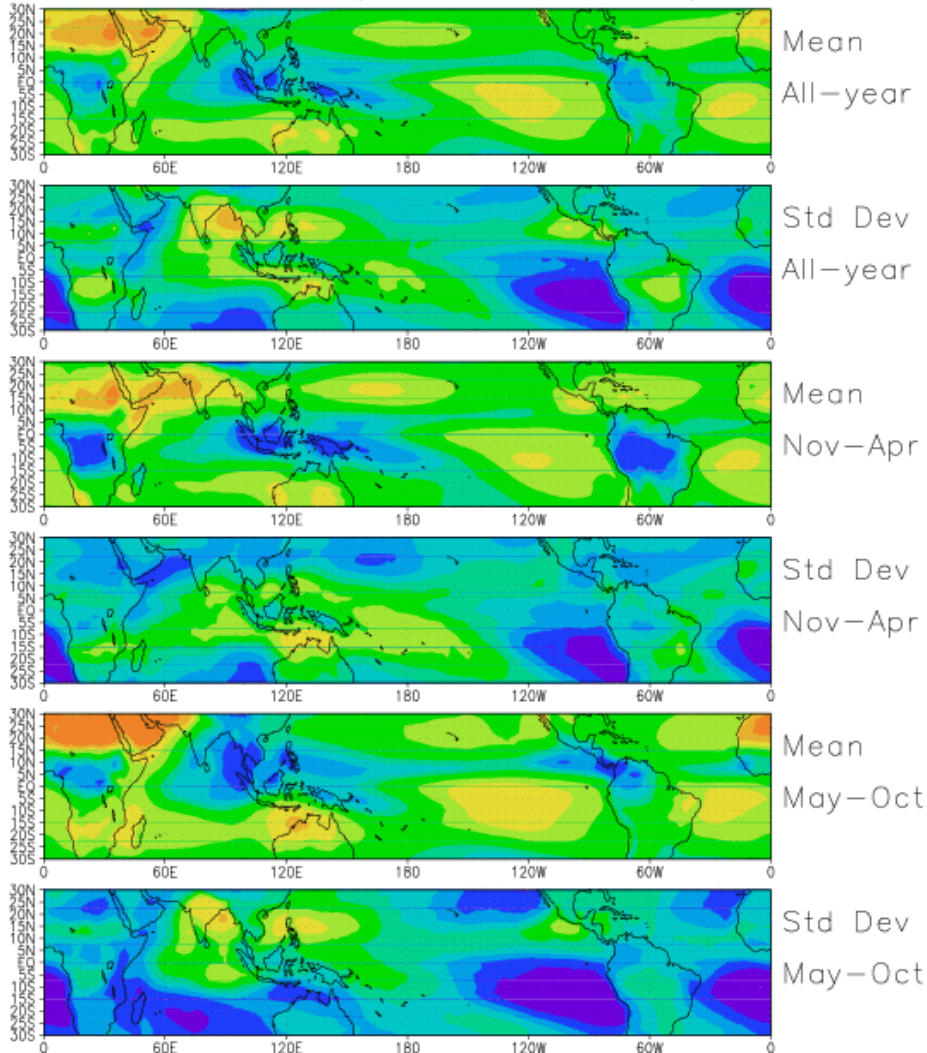
Le signal filtré récupère une bonne part de la variabilité intrasaisonnière du signal sans cycle annuel.

# IV.1) Filtrage dans la bande intrasaisonnière

Lien avec la convection dans les tropiques

## Statistiques moyennes de l'OLR

Variabilité OLR (NOA 1979–2002, 3D)



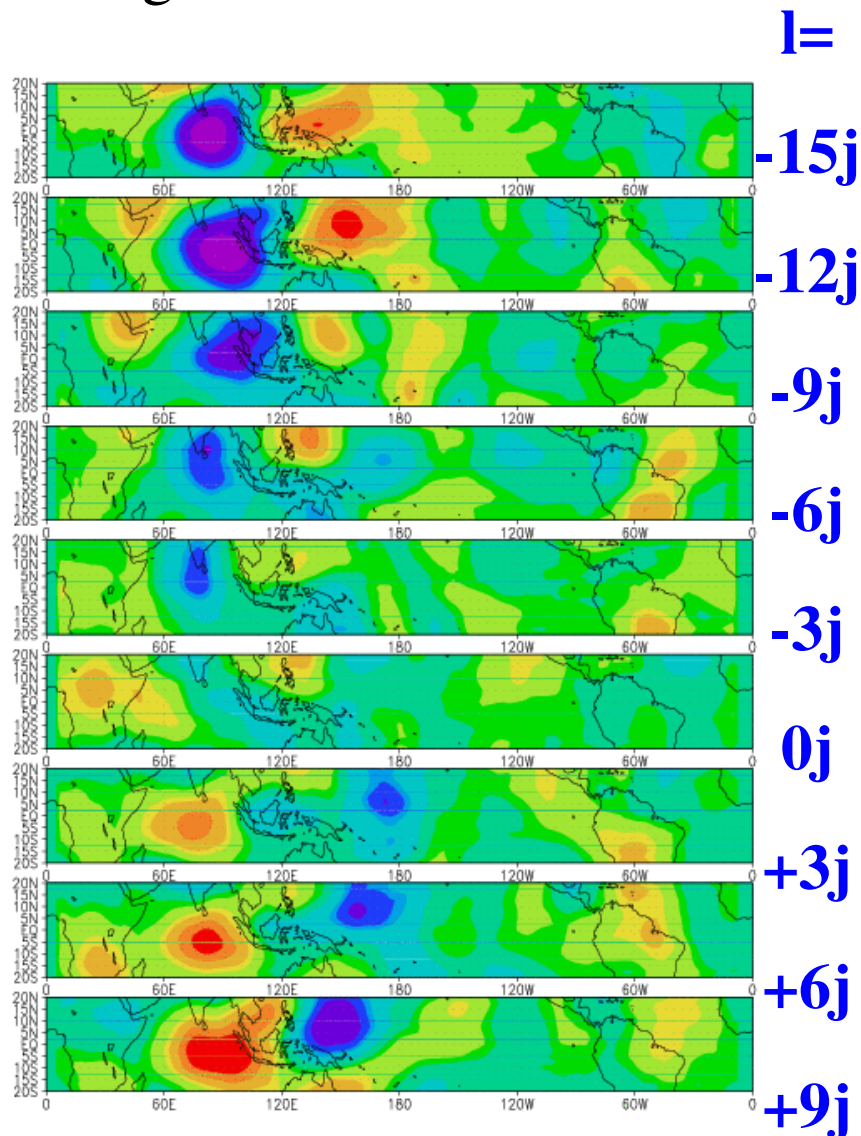
Pour caractériser les précipitations et leur variabilité, on utilise les données satellites du rayonnement infrarouge sortant au sommet de l'atmosphère (OLR, pour Outgoing Longwave Radiation)

Plus il y a de convection profonde, plus les nuages associés sont hauts, plus l'émission de corps noir viens d'une haute altitude (elle est produite par les nuages dans ce cas) et correspond donc à des Températures plus froides.

## IV.1) Filtrage dans la bande intrasaisonnière

Oscillations intrasaisonnières de l'OLR associés aux variations de  $M$

Régression de l'OLR sur  $M$ :



Pour caractériser les variations de la précipitation associées aux variations de  $M$ , on applique aux données OLR le filtre passe bande  $F$ , et on forme les cartes de régressions:

On note  $L(n, \lambda, \phi)$  le rayonnement infrarouge sortant au jour  $n$ , et on définit sa régression sur  $M$  dans la bande 30 – 60jours par:

$$\tilde{L}^{\mathcal{R}}(l, \lambda, \phi) = \frac{\sum_{n=1}^{n=N} \tilde{M}(l+n) * \tilde{L}(n, \lambda, \phi)}{N \sigma_{\tilde{M}}}$$

Où  $\phi$  et  $\lambda$  sont la latitude et la longitude, et  $l$  est le délai.  $N$  est le nombre total de jours disponibles dans nos données, et  $\sigma_{\tilde{M}}$  est la déviation standard de  $\tilde{M}$ .

La structure de propagation vers l'Est est caractéristique de l'Oscillation de Madden Julian (voir VI.2)

## IV.2) Description de l'Oscillation de Madden Julian (MJO)

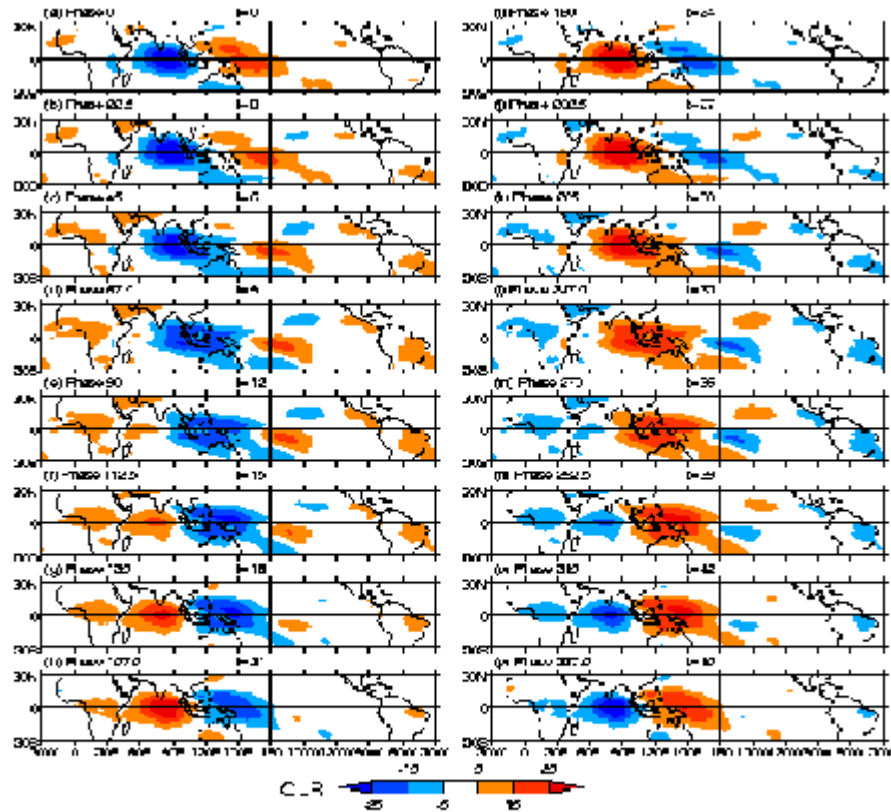


Fig. 2: MJO life cycle static display: OLR anomalies (legend is in  $W m^{-2}$ ). The images are spaced approximately 3 days apart and one whole cycle lasts approximately 48 days. From Matthews (2000).

Cartes de régression de l'OLR, filtré sur la bande 40-60 jours

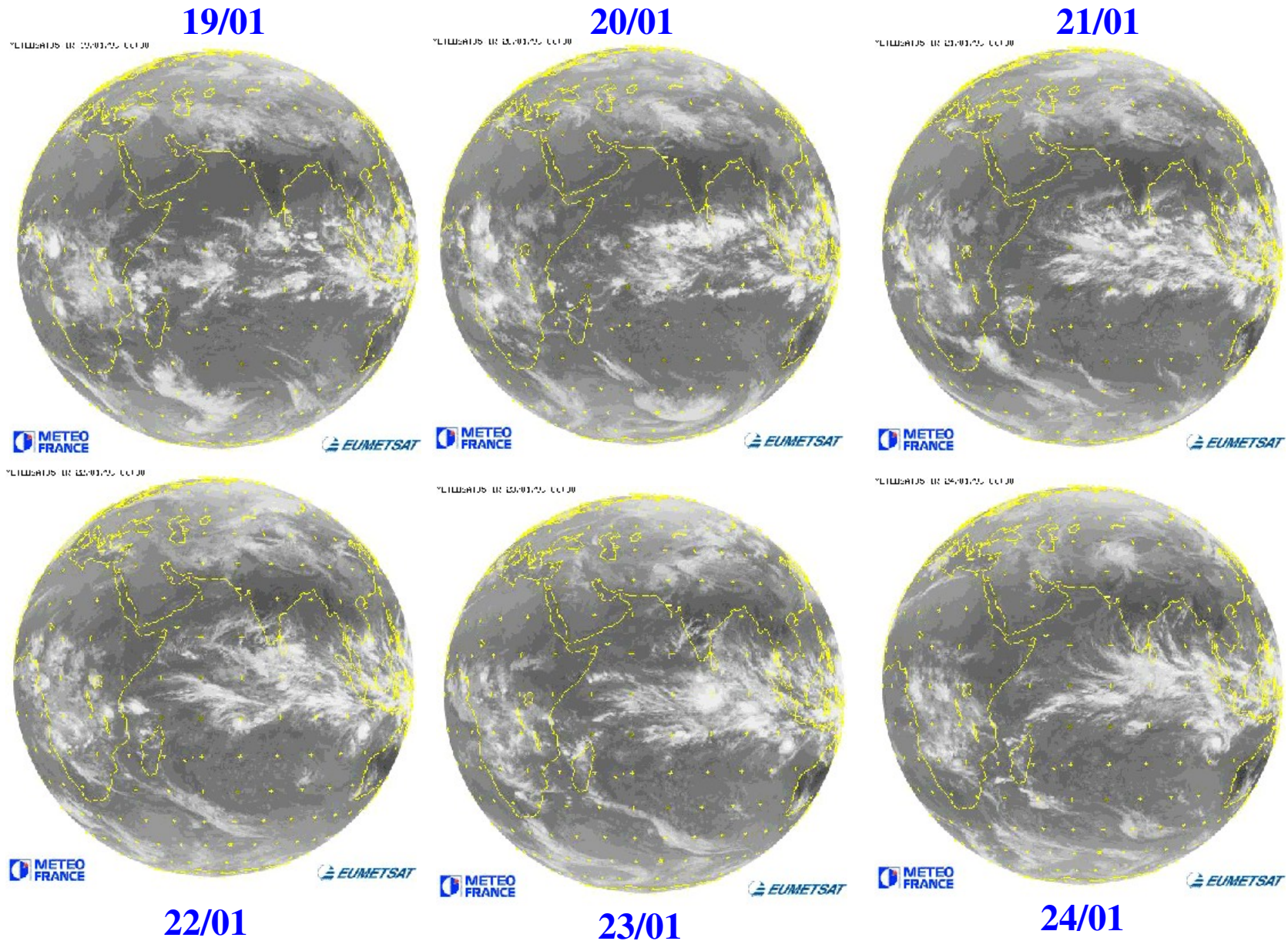
Les régressions sont ici évaluées en utilisant les composantes principales de la variabilité intrasaisonnière de l'OLR

Pour l'analyse en composantes principales, voir VII

Images composites issues de la Web-Page:  
[envam1.env.uea.uk](http://envam1.env.uea.uk)

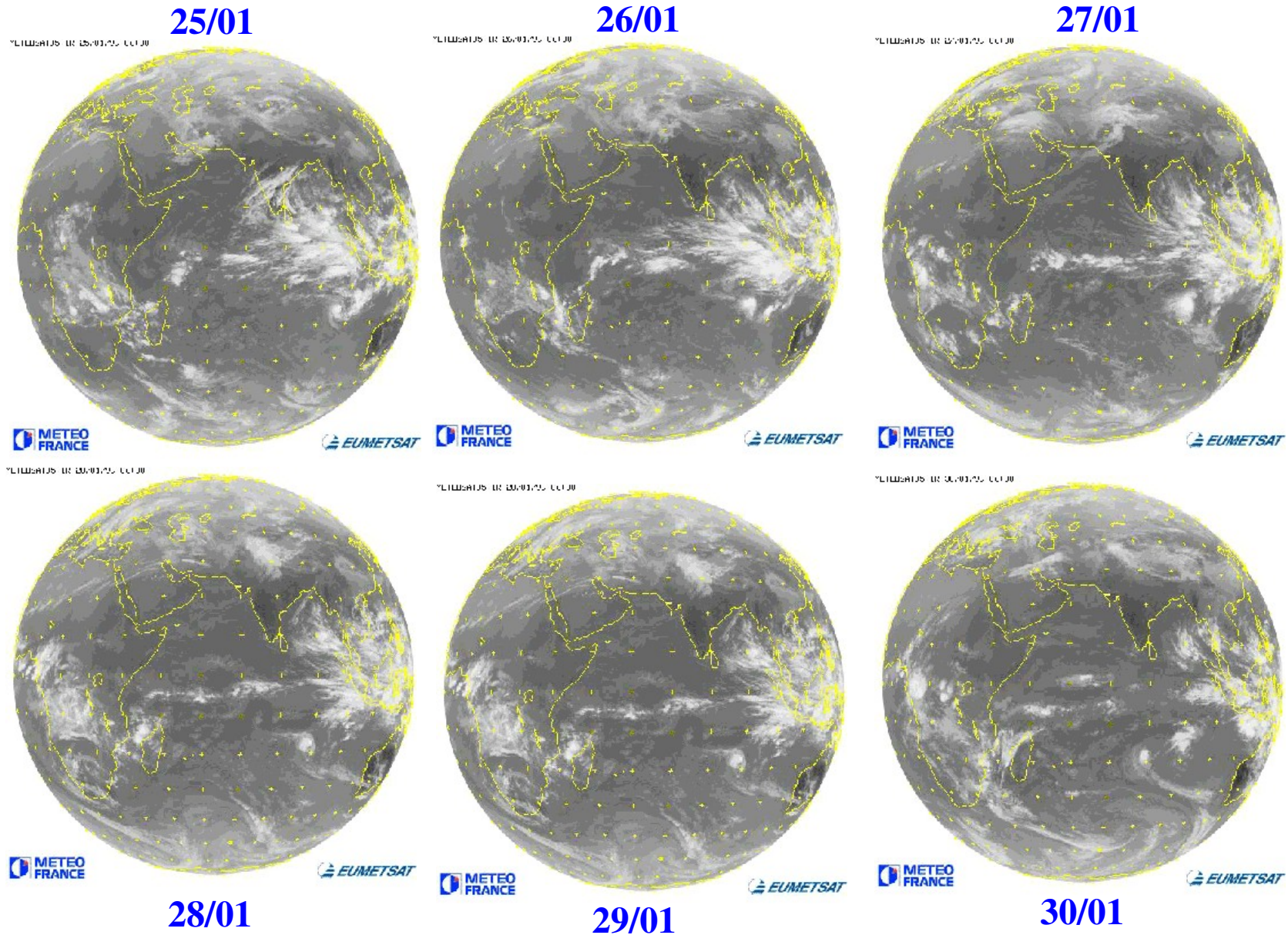
# VI.2) Description de l'Oscillation de Madden Julian (MJO)

Illustration sur un évènement dans le canal visible (Janv-Fev. 1999)



# IV.2) Description de l'Oscillation de Madden Julian (MJO)

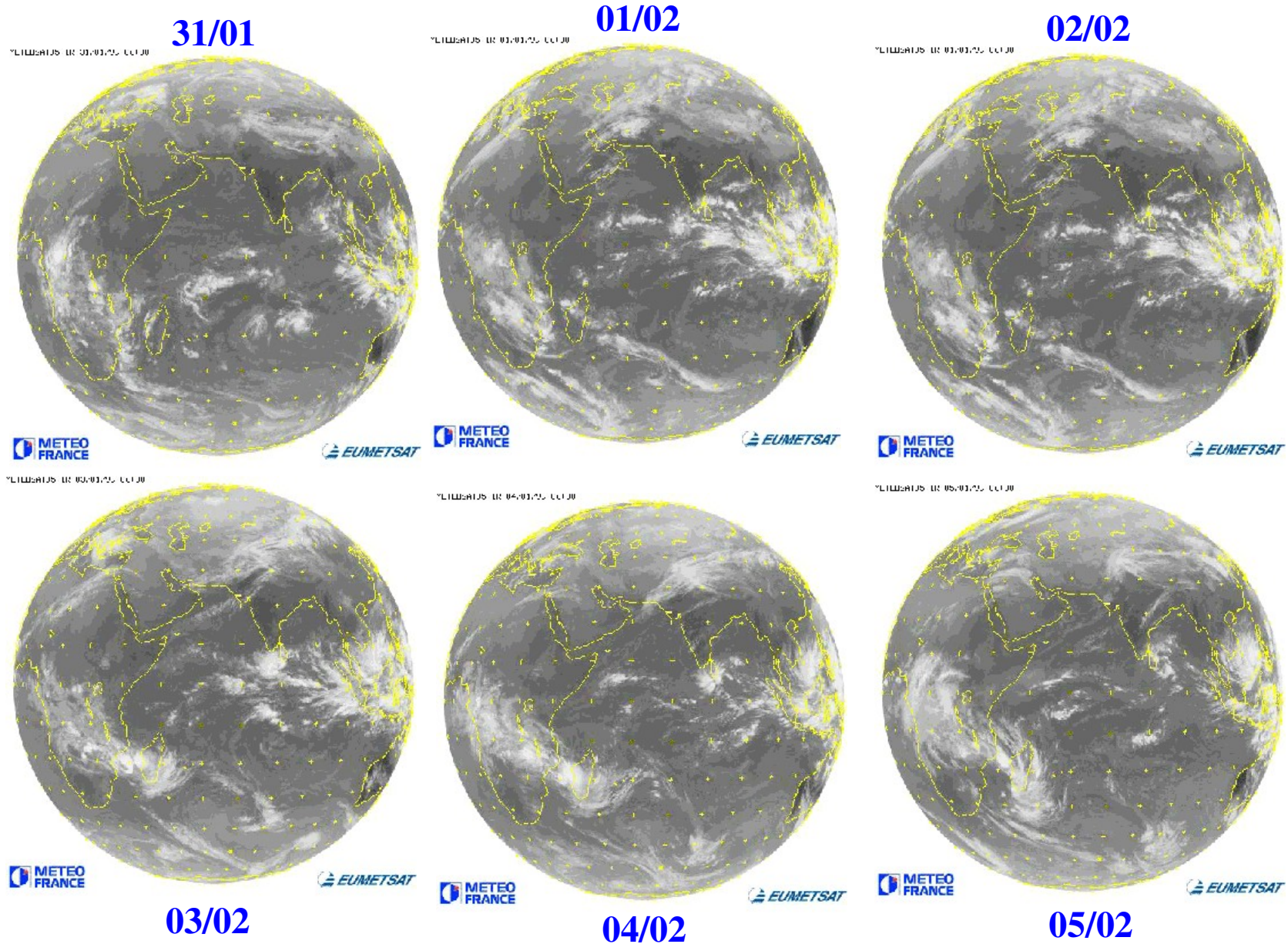
Illustration sur un évènement dans le canal visible (Janv-Fev. 1999)





# IV.2) Description de l'Oscillation de Madden Julian (MJO)

Illustration sur un évènement dans le canal visible (Janv-Fev. 1999)



# IV.2) Description de l'Oscillation de Madden Julian (MJO)

## Schéma d'évolution de la MJO et Retour au lieu avec M

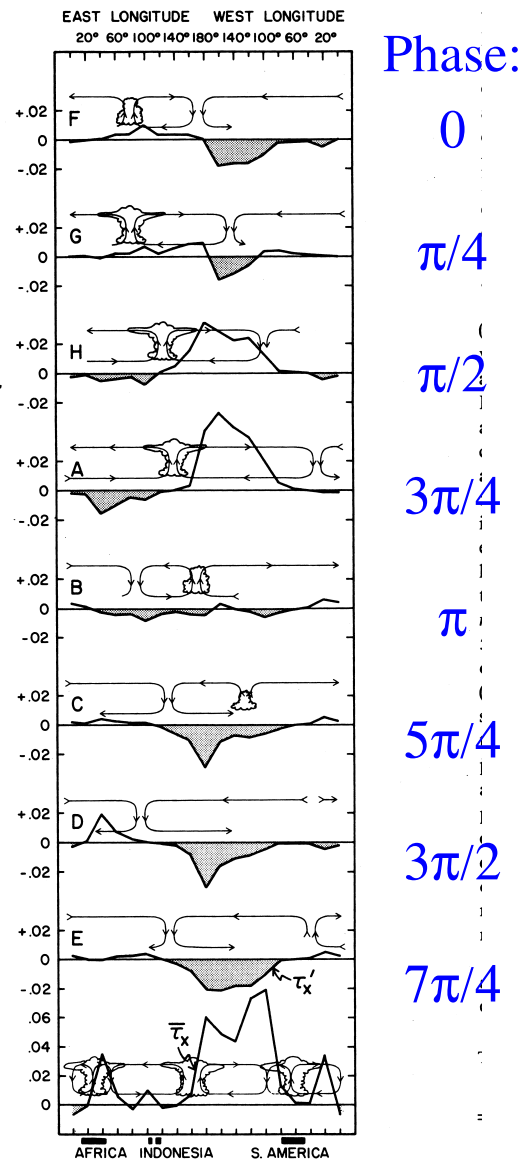


Fig. 6. Estimated  $\bar{\tau}_x$  bottom. Time-mean circulation cells are taken from *Streten and Zillman* [1984, p. 356]. Regions of large scale convection are indicated schematically over Africa, the Indonesian region, and South America. The upper eight panels show  $\tau_x'$  for phases of Figure 1. Anomalies in the mean circulation associated with the 40-50 day oscillation are taken from Figure 1. Units are  $N m^{-2}$ .

Le moment angulaire est modifié par le couple du à la friction, car la modification des vents zonaux à l'équateur affecte de façon non linéaire la tension à la surface:

$$\tau_\lambda = -\rho C_d u |\vec{u}|$$

## IV.2) Description de l'Oscillation de Madden Julian (MJO)

Trajectoires caractéristiques des systèmes précipitants associés à la MJO

Madden (MWR 1987)

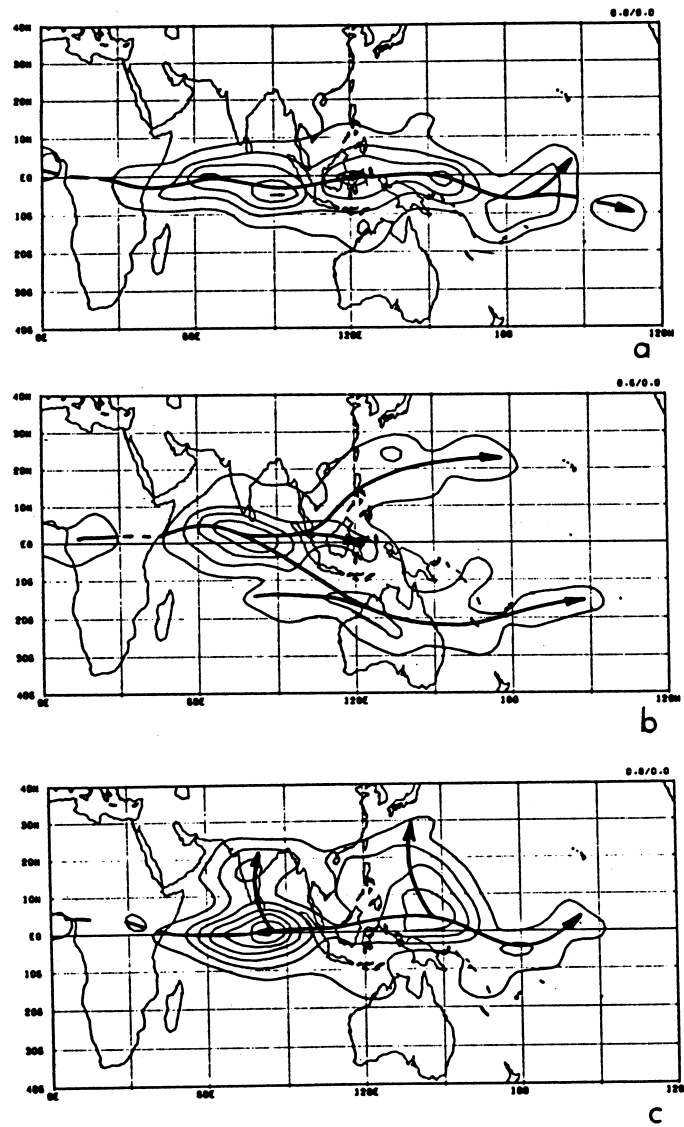


FIG. 8. Contour plot of the total number of occurrences of strictly eastward-moving cloud complexes (a); eastward complexes that split either to the north or to the south over the eastern Indian Ocean (b); and eastward-moving complexes that are connected with cloud systems that move northward into southern Asia (c); in each  $2^\circ \times 2^\circ$  box for a 10-yr period (1975–85, 1978 missing). The contour interval is 0.8 in (a) and (c), and 0.6 in (b). The heavy lines indicate the central paths (from Wang and Rui 1990).



# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## V. Tropiques (II): l'oscillation australe El-Nino (ENSO)

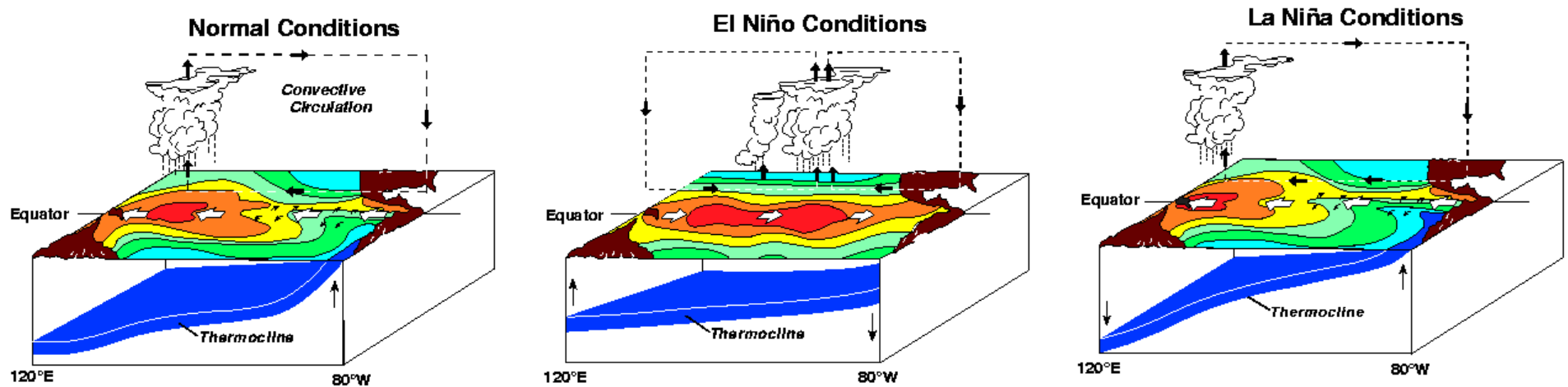
V.1) Identification spectrale de l'ENSO dans l'indice Tahiti-Darwin et description générale

V.2) Interprétation avec le modèle de l'oscillateur retardé

V.3) Développer une modèle simple d'El-Nino

(voir [http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/Presentation.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/Presentation.html))

# V.1) Identification spectrale de l'ENSO dans l'indice Tahiti-Darwin et description générale



Situations normales:  
La convection est centrée au dessus de la « Piscine Chaude » à l'Ouest du Pacifique

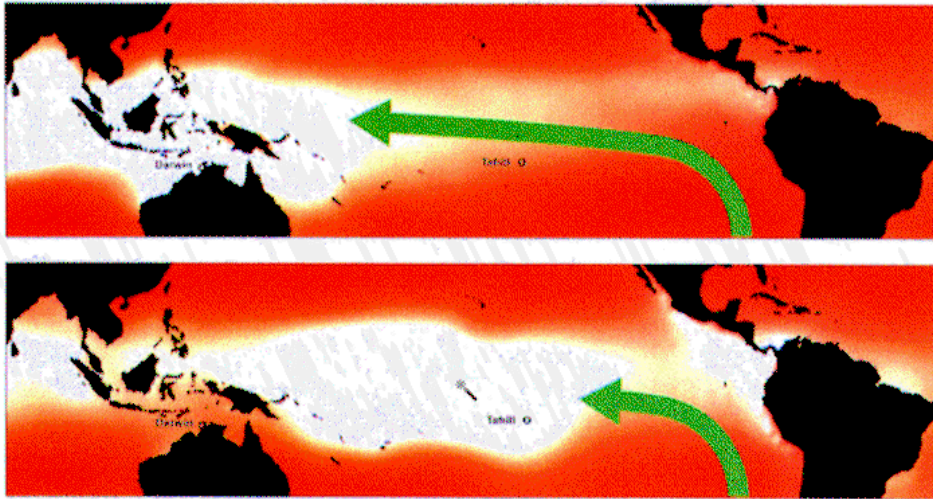
La « Piscine Chaude » est alimentée par les eaux poussées par les Alizées

Situations El-Nino:  
La « Piscine Froide » est déplacée au centre du Pacifique

Les vents dans les basses couches sont inversés à l'Ouest du Pacifique

Situations La Nina:  
La « Piscine Froide » est plus confinée à l'Ouest du Pacifique.

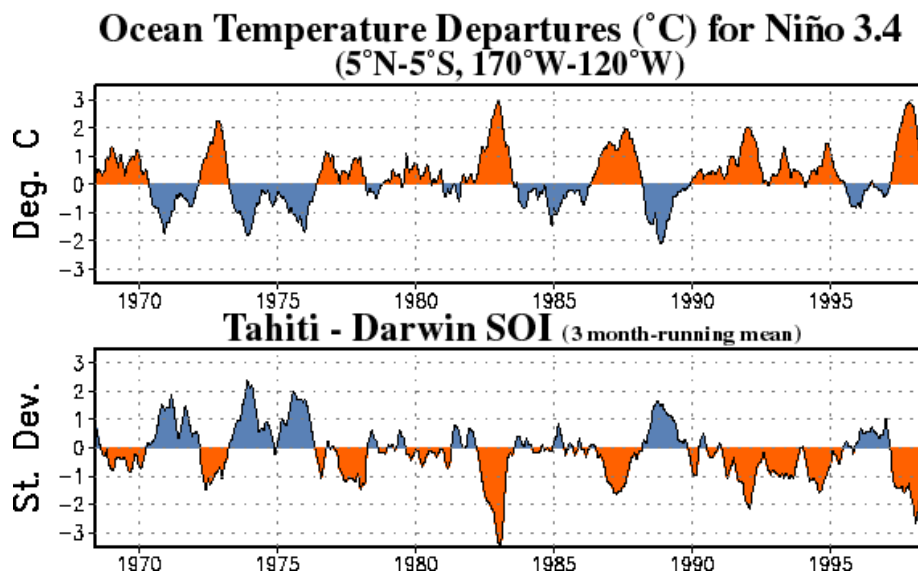
# V.1) Identification spectrale de l'ENSO dans l'indice Tahiti-Darwin et description générale



A l'équateur, les vents vont des hautes vers les basses pressions, une situation El Nino se traduit par des vents inversés dans les basses couches à l'Ouest du Pacifique. Donc un différentiel de Pression inversé entre Tahiti et Darwin.

La validité de cet indice est vérifié sur les années récentes: il varie presque exactement comme la T de l'Océan au centre du Pacifique.

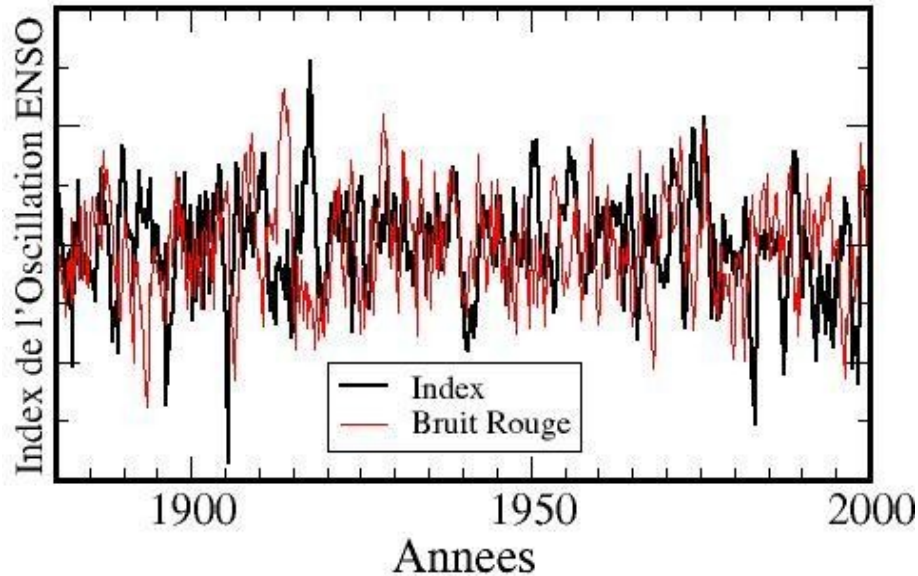
Comme les variations de la pression à Tahiti et Darwin sont connues depuis longtemps (contrairement à la T de l'eau au centre du Pacifique), elles permettent de remonter dans le temps, jusqu'à la fin du 19ème Siècle.



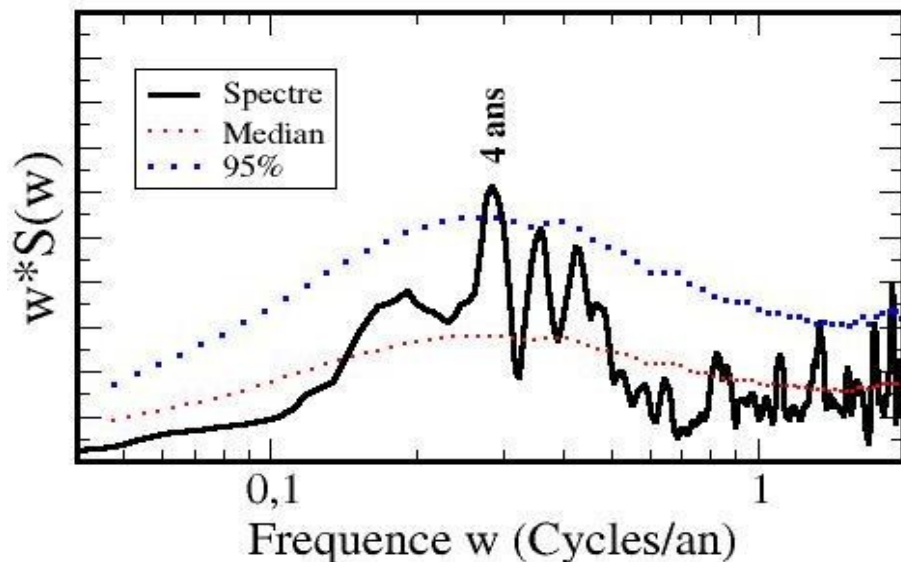
# V.1) Identification spectrale de l'ENSO dans l'indice Tahiti-Darwin et description générale

## Evidence qu'il existe des Oscillations inter-annuelles de l'indice ENSO

Donnees tous les 3 mois



Fenetre de lissage a 6 points



Le comportement de l'indice ENSO n'est pas très différent de celui d'un bruit rouge!

Après lissage, le spectre présente des pics à 4 ans et 2 ans, qui sont marginalement significatifs

Cela ne remet pas forcément en cause notre compréhension physique du phénomène (basée sur des concepts d'interaction entre l'atmosphère et l'océan) mais plutôt notre perception comme un phénomène prévisible dans le long terme.

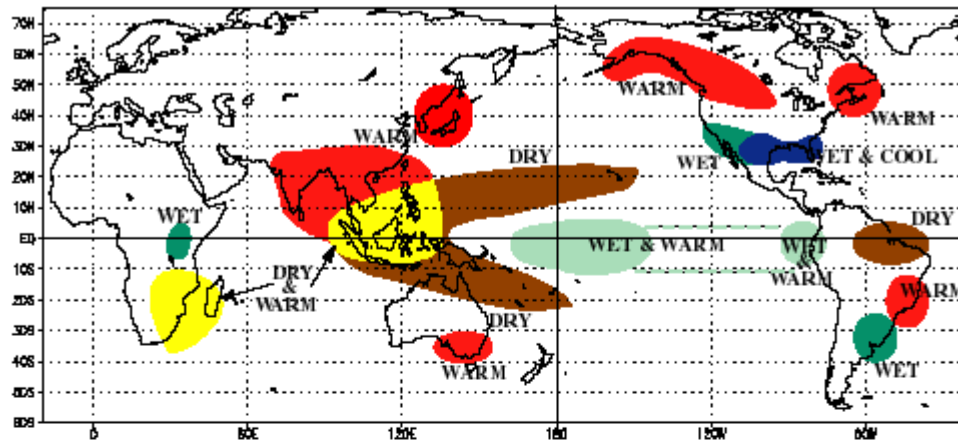
Vous pouvez faire ces manipulations statistiques, en utilisant les outils d'analyse spectrale données en III.2, et aussi en analysant la variabilité de l'OLR (programmes et données en IV.3).



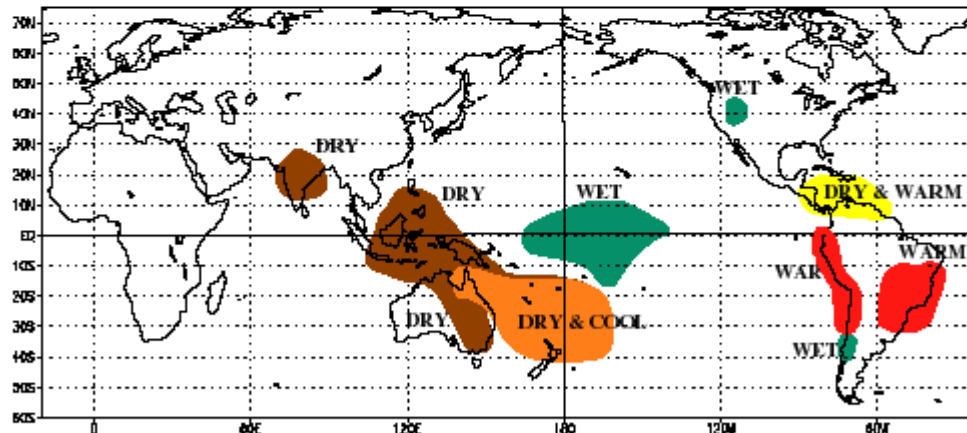
# V.1) Identification spectrale de l'ENSO dans l'indice Tahiti-Darwin et description générale

## Impacts Climatiques, Episodes El-Nino

WARM EPISODE RELATIONSHIPS DECEMBER - FEBRUARY



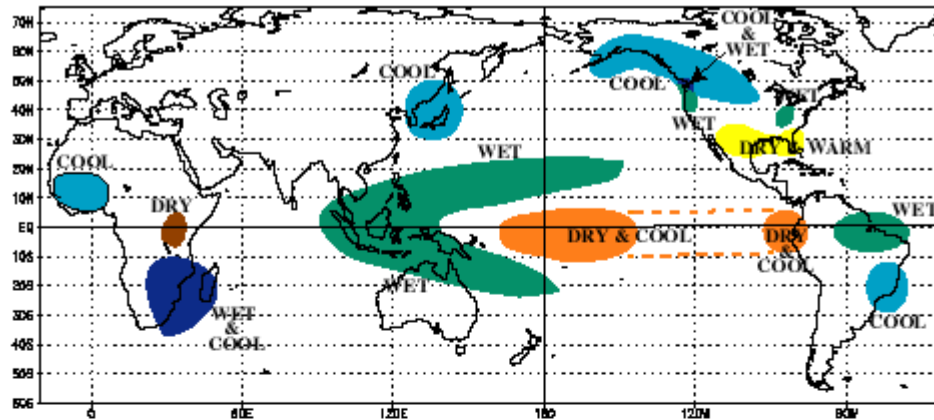
WARM EPISODE RELATIONSHIPS JUNE - AUGUST



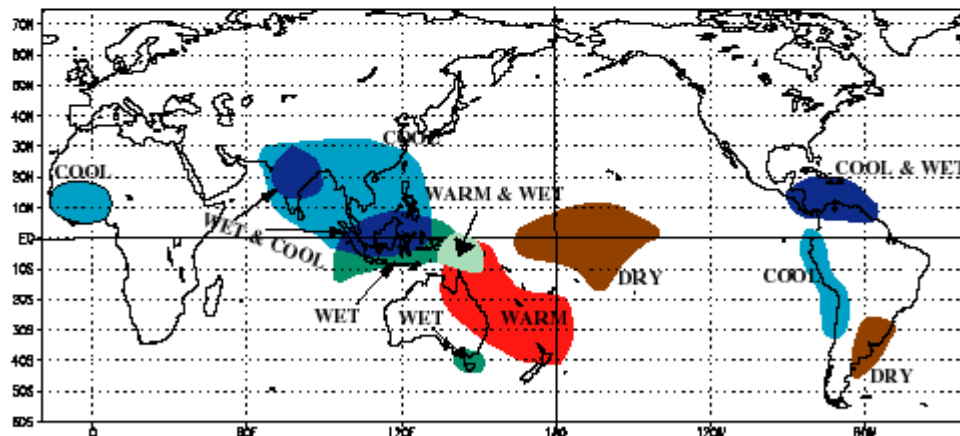
# V.1) Identification spectrale de l'ENSO dans l'indice Tahiti-Darwin et description générale

## Impacts Climatiques, Episodes La Nina

COLD EPISODE RELATIONSHIPS DECEMBER - FEBRUARY



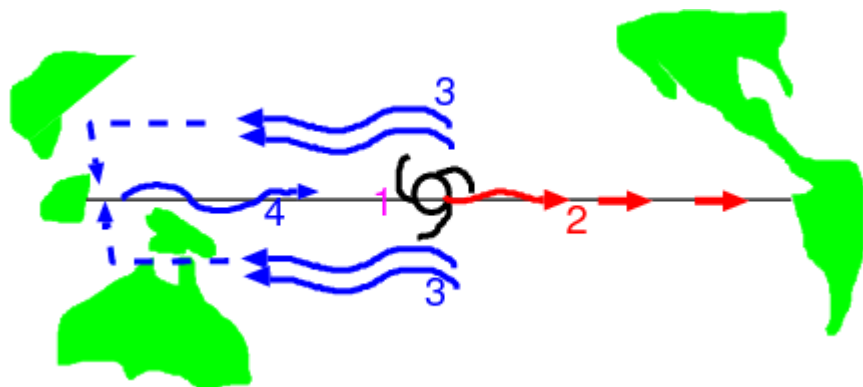
COLD EPISODE RELATIONSHIPS JUNE - AUGUST



## V.2) Interprétation avec le modèle simple dit de l'oscillateur retardé

Importance des ondes océaniques baroclines équatoriales:

Une anomalie de température  $T(t)$  positive sur le Pacifique Est induit:



**1) Une anomalie de vent négative au centre du Pacifique**

**2) Des ondes de Kelvin équatoriales océaniques**

**3) Des ondes de Rossby équatoriales décalées par rapport à l'équateur**

**4) Des ondes de Kelvin équatoriales réfléchies sur le bord Ouest**

Lorsque les ondes de Kelvin arrivent sur sur le bord Est, elles annulent l'anomalie de Température  $T(t)$  initiale, ce qui induit une modification des vents dans le Pacifique central.....

## V.2) Interprétation avec le modèle simple dit de l'oscillateur retardé

Principe du modèle simple:

$$\frac{dT(t)}{dt} = aT\left(t - \frac{1}{2}\tau_K\right) - bT\left(t - \left(\frac{1}{2}\tau_R + \tau_K\right)\right) - cT(t)^3$$

$\tau_K$ : Temps mis par les ondes de Kelvin pour traverser le bassin

$\tau_R$ : Temps mis par les ondes de Rossby pour traverser le bassin

$cT(t)^3$ : amortissement non linéaire

$a, b$  et  $c$  sont des constantes positives

Exemple de réponse pour  $\tau_K=0$  et différentes valeurs de  $a, b$  et  $c$

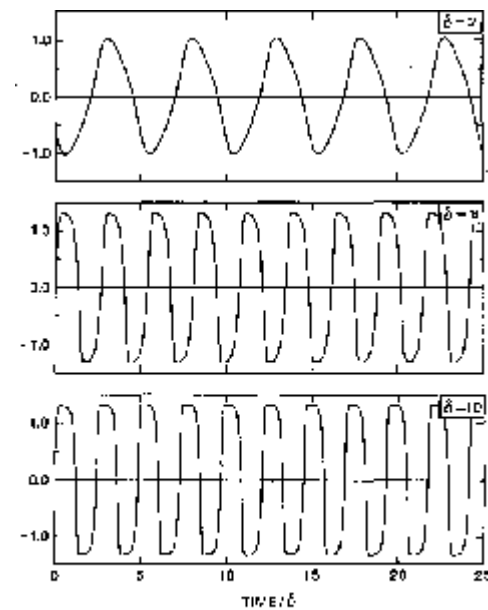


FIG. 4. Balance of the nonlinear oscillator. (a)  $\alpha = 0.75, \delta = 2$ , (b)  $\alpha = 0.75, \delta = 6$ , and (c)  $\alpha = 0.75, \delta = 10$ . The time axis is scaled in units of the delay.

# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## VI. Tropiques (III): l'oscillation quasi-biennale dans la basse stratosphère

VI.1) Description de la QBO

VI.2) Le modèle simple basé sur les interactions d'ondes avec l'écoulement moyen

VI.3) Utiliser le modèle simple de la QBO

(voir [http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/Presentation.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/Presentation.html))

# VI.1) Description de la QBO

Observation du vent zonal en moyenne zonale à l'équateur

Données UARS (Swinbak et Orland)

Z(km)=

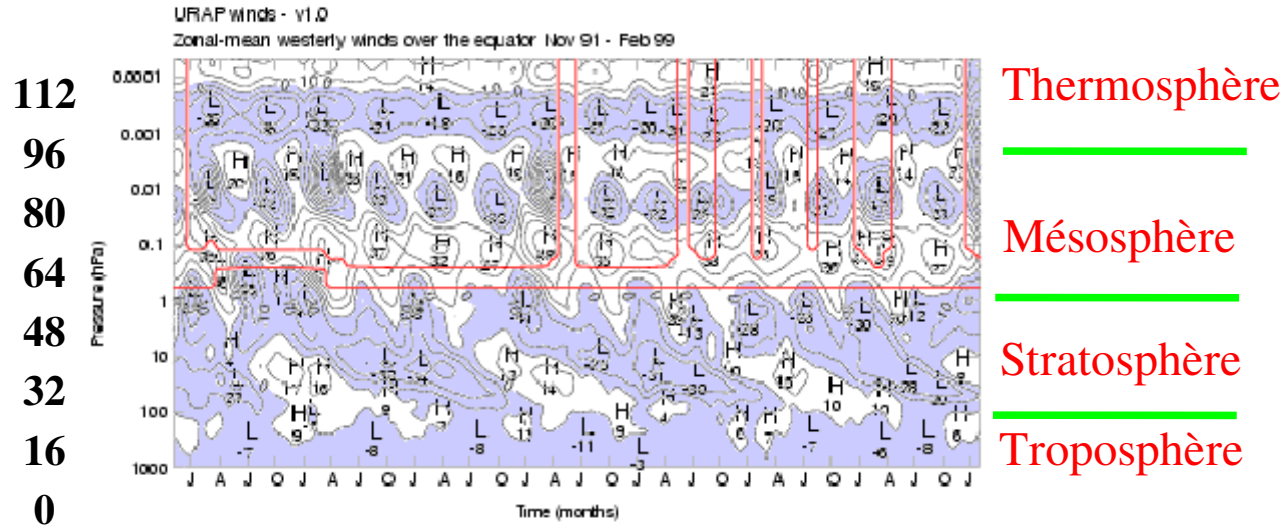


Figure 6. Time series of zonal-mean westerly winds over the equator, from November 1991 to February 1999. The tick marks along the x-axis mark each January, April, July and October. The additional lines show where the values are mainly derived from interpolated or climatological data.

Dans la mésosphère et au dessus le vent présente des oscillations de période semi-annuelle, liées (en partie) au cycle annuel du chauffage par l'Ozone.

c'est l'Oscillation Semi-Annuelle (SAO)

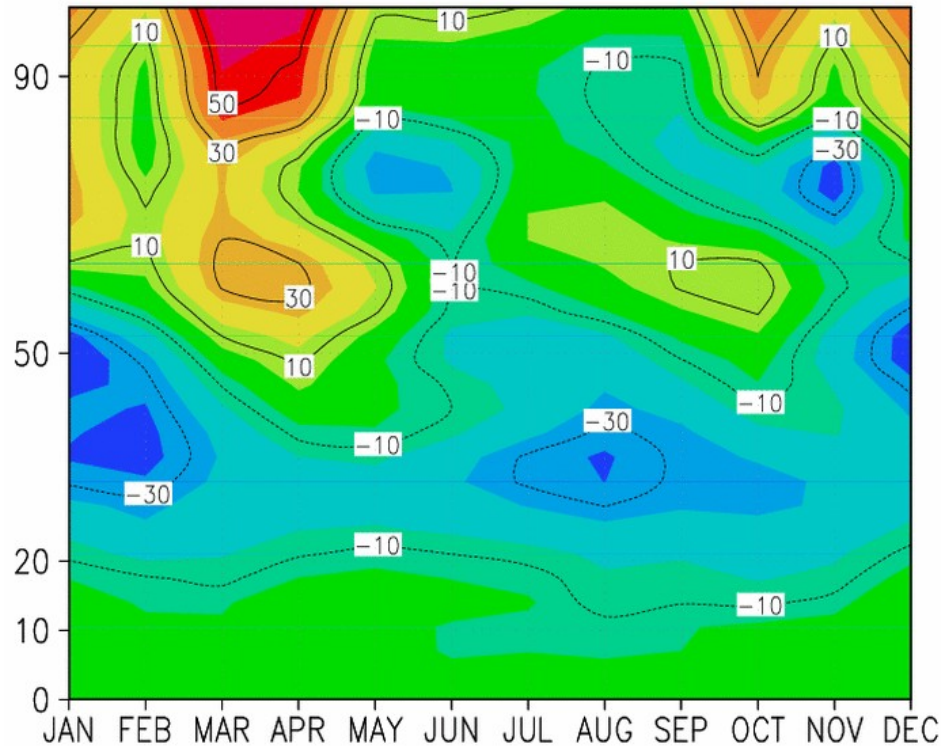
(pour le cycle du chauffage et la circulation dans l'atmosphère moyenne voir cours I)

Dans la stratosphère, les vents oscillent à une période légèrement supérieure à deux ans, ce qui ne peut pas s'expliquer en terme de cycle annuel, c'est l'Oscillation Quasi-Biennale (QBO).

## VI.1) Description de la QBO

### L'Oscillation Semi Annuelle dans la haute stratosphère tropicale et dans la mésosphère

Données CIRA, cycle annuel du vent zonal en moyenne zonale à l'Equateur



**Pour les climatologies de la circulation atmosphérique, et les arguments liés à la conservation du moment angulaire voir le chapitre I.**

Le max de Chauffage dans l'Hem. Nord en été induit un déplacement d'air vers l'Hemisphere Sud. Cet air ayant un déficit en moment angulaire il en résulte un minimum de vent à l'Equateur.

En été le même processus se produit mais de l'Hémisphère sud vers l'Hémisphère Nord. Cela explique le cycle semi-annuel pour les valeurs négatives du vent, légèrement après les solstices (haute stratosphère).

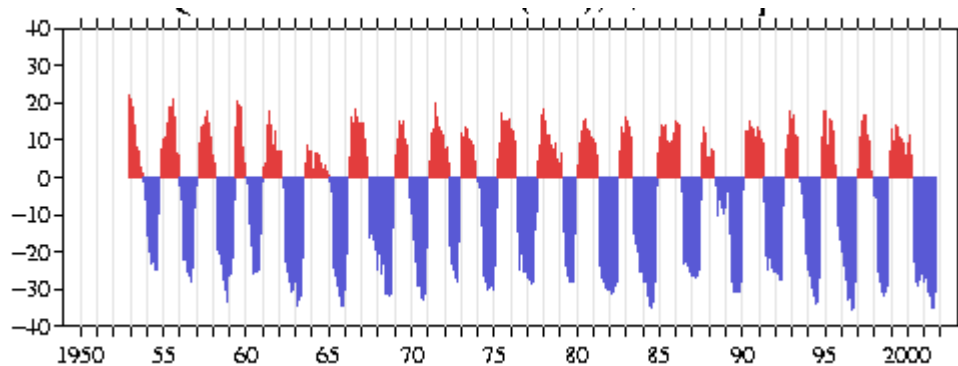
Pour les valeurs positives (super rotation dans la mésosphère), le transport de quantité de mouvement par les ondes joue aussi un rôle prépondérant.

Ce dernier mécanisme est détaillé pour la QBO

## VI.1) Description de la QBO

Index de la QBO, basé sur la moyenne zonale du vent zonal à 30hPa (z~25km).

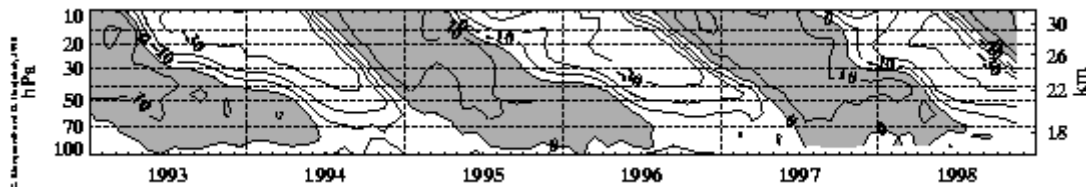
Extrait du site: [tao.atmos.washington.edu](http://tao.atmos.washington.edu)



Notez la période proche de 26 mois

On peut faire l'analyse spectrale de ce signal avec les données et les programmes en III.2

Moyenne zonale du vent zonal entre 16 et 32km  
(données issues de radiosondages)



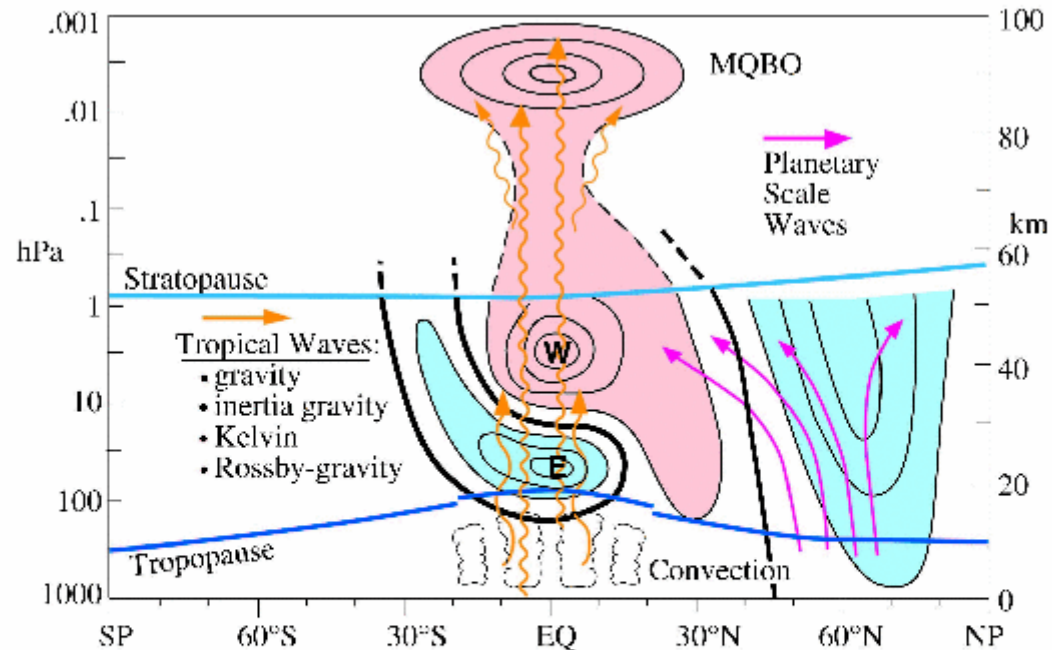
Notez la descente vers le bas du signal dans la basse stratosphère



# VI.1) Description de la QBO

## Vision schématique de la QBO et de son forçage par les ondes dues à la convection dans les tropiques

Extrait de Baldwin et al. (Rev. Geophys. 2001)



**Plate 2.** Dynamical overview of the QBO during northern winter. The propagation of various tropical waves is depicted by orange arrows, with the QBO driven by upward propagating gravity, inertia-gravity, Kelvin, and Rossby-gravity waves. The propagation of planetary-scale waves (purple arrows) is shown at middle to high latitudes. Black contours indicate the difference in zonal-mean zonal winds between easterly and westerly phases of the QBO, where the QBO phase is defined by the 40-hPa equatorial wind. Easterly anomalies are light blue, and westerly anomalies are pink. In the tropics the contours are similar to the observed wind values when the QBO is easterly. The mesospheric QBO (MQBO) is shown above ~80 km, while wind contours between ~50 and 80 km are dashed due to observational uncertainty.

## VI.1) Description de la QBO

### Exemple de simulation numérique de la convection tropicale

Extrait de Alexander et Holton (JAS 1997)

On voit au dessus du système convectif des « vagues » se propageant vers le haut, vers l'Est et vers l'Ouest.

Il s'agit d'ondes internes de gravité.

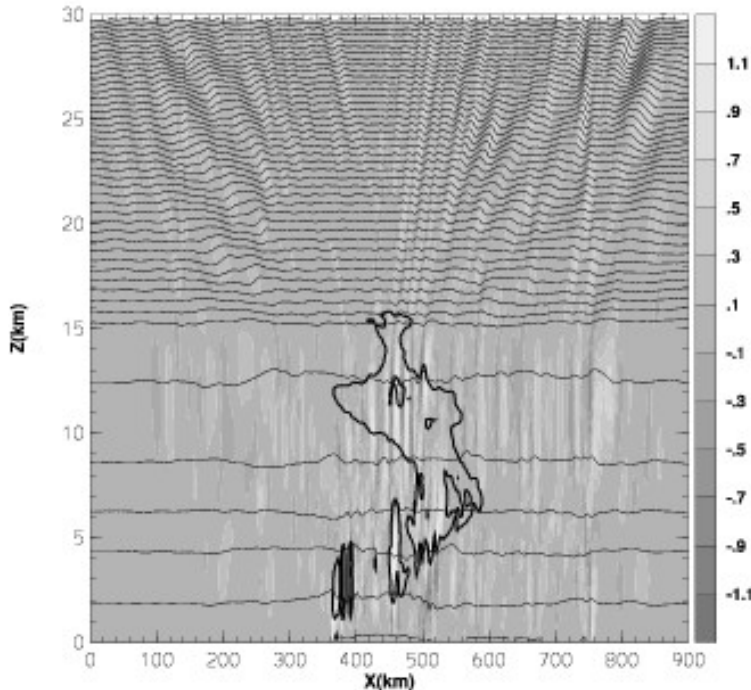
Ces ondes, lorsqu'elles déferlent à haute altitude: accélèrent l'écoulement zonal moyen (ondes vers l'Est)

ou

freinent l'écoulement zonal moyen (ondes vers l'ouest)

Ces ondes internes participent au forçage de la QBO, c'est la base du modèle présenté en VI.2.

Des ondes de grande échelle vers l'Est (Kelvin) et vers l'Ouest (Rossby-gravité) jouent un rôle tout aussi important que les ondes de gravité (voir plus important).

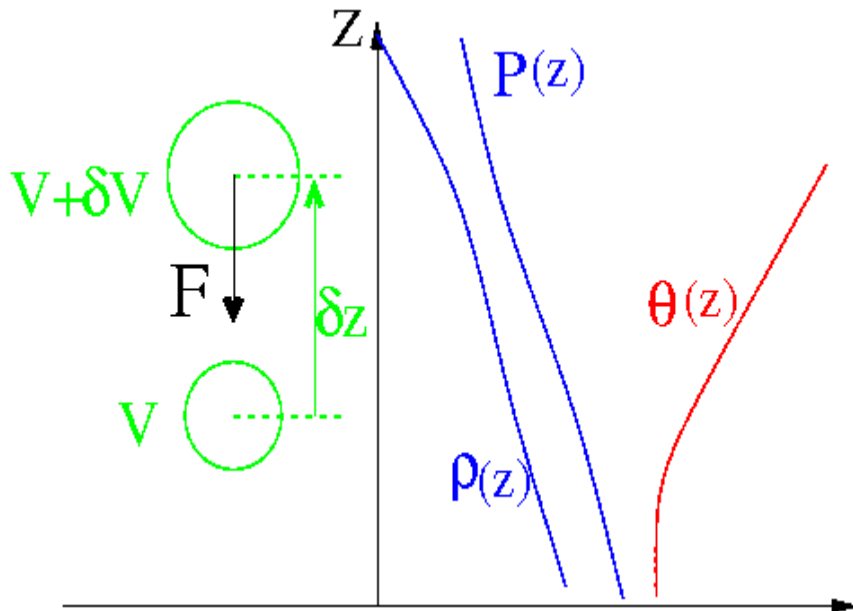


# VI.2) Le modèle simple basé sur l'interaction d'ondes avec l'écoulement moyen

## Modèle adapté de Plumb (JAS 1977)

La force de rappel donnant naissance aux ondes internes de gravité

**Méthode de la parcelle:** on déplace une parcelle d'air dans un fluide stratifié verticalement, on fait l'hypothèse que le champ de pression n'est pas affecté par ce déplacement (le principe d'Archimède s'applique).



Masse de la parcelle d'air:  $m = \rho(z)V$

Volume d'air déplacé en  $z + \delta z$ ,  $V_d$ :

$$V_d \approx V \left( 1 - \frac{\gamma dp}{p dz} \delta z \right) \quad (\text{on applique } pV^\gamma = \text{cte})$$

Masse d'air déplacé:  $m_d = \rho(z + \delta z)V_d$

$$m_d \approx V \left( \rho(z) + \frac{d\rho}{dz} \delta z - \frac{\rho \gamma dp}{p dz} \delta z \right)$$

Poussée d'Archimède:

$$F = g (m_d - m)$$

Accélération verticale:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{d^2 \delta z}{dt^2} = \frac{F}{m} = g \left( \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} - \frac{\gamma}{p} \frac{dp}{dz} \right) \delta z$$

En utilisant,  $\frac{p}{\rho} = RT$  et  $\theta = T \left( \frac{p}{p_r} \right)^{\gamma-1}$  on obtient:

$$\frac{d^2}{dt^2} \delta z + \frac{g d\theta}{\theta dz} \delta z = 0$$

On appelle fréquence de Brunt Vaisala:

$$N^2(z) = \frac{g d\theta}{\theta dz}$$

# VI.2) Le modèle simple basé sur l'interaction d'ondes avec l'écoulement moyen

Modèle adapté de Plumb (JAS 1977)

Equations pour le vent zonal moyen:

Système d'équations anélastiques, séparation ondes écoulement moyen:

$$\bar{u} = \bar{u}(z, t) + u'(x, z, t)$$

Evolution du vent moyen:

$$\rho_0(z) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(z, t) = - \sum_{j=1}^M \frac{\partial}{\partial z} \tau_j + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} \bar{u}(z, t)$$

M: Nombre d'ondes de gravité prises en compte

Stress dû à l'onde de gravité 'j':  $\tau_j = \Re(\rho_0 \hat{w}_j \hat{u}_j^*)$

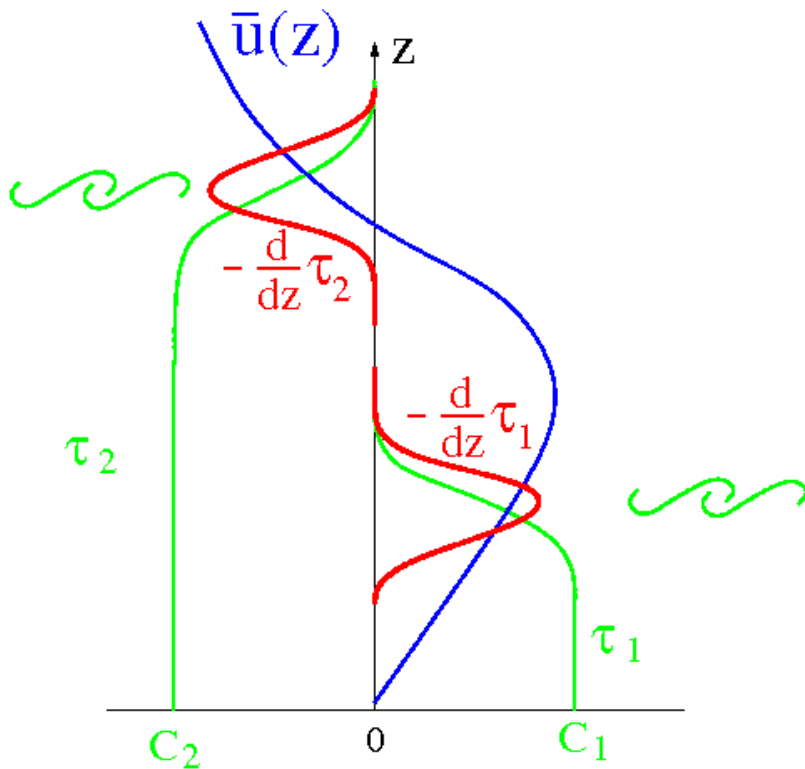
avec:  $u'_j = \Re(\hat{u}_j(z) e^{i(\omega_j t - k_j x)})$ ,  $k_j > 0$  par convention. (Ondes monochromatiques stationnaires).

Théorème de Eliassen et Palm:

$$\tau_i = c_i e$$

Sans déferlement, sans dissipation et pour une onde linéaire.

De plus,  $\text{sign}(\tau_i) = \text{sign}(c_j) = \frac{\omega_j}{k_j}$ : les ondes se propageant vers l'Est ( $c_j > 0$ ) accélèrent l'écoulement lorsqu'elles déferlent; les ondes se propageant vers l'Ouest ( $c_j < 0$ ) freinent l'écoulement lorsqu'elles déferlent.

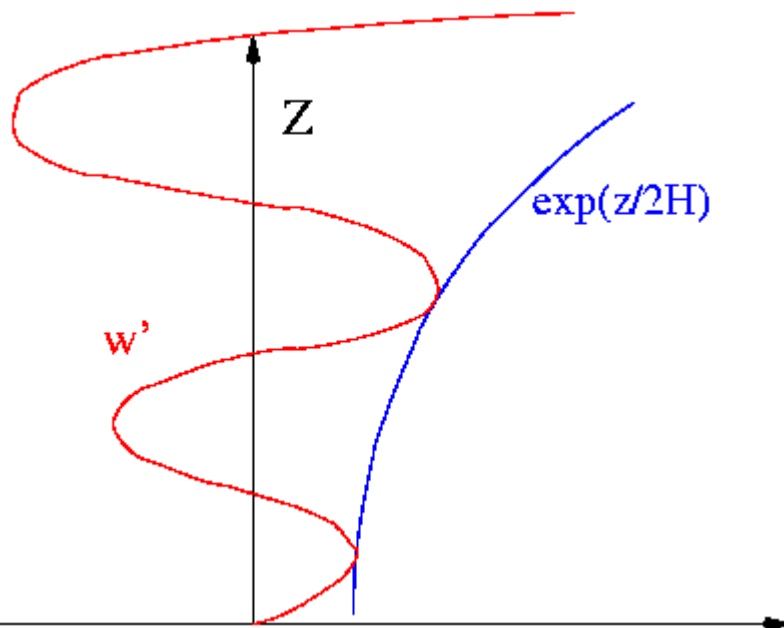


# VI.2) Le modèle simple basé sur l'interaction d'ondes avec l'écoulement moyen

## Modèle adapté de Plumb (JAS 1977)

### Structure verticale d'une onde de gravité monochromatique:

Exemple de la vitesse verticale induite par une onde monochromatique lorsque  $\bar{u}=0$ ,  $N^2 \neq 0$ , et  $w \neq 0$



Evaluer  $\tau$  à partir de la fonction  $\hat{\varphi} = \rho_0(z)^{-1/2} \hat{\psi}$  où  $\hat{\psi}$  est la fonction de courant:

$$\hat{u} = \frac{1}{\rho_0(z)} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial z} \quad \hat{w} = \frac{ik}{\rho_0(z)} \hat{\psi}$$

Equation pour la structure verticale de  $\hat{\varphi}(z)$ :

$$\hat{\varphi}_{zz} + \underbrace{\left( \frac{k^2 N^2}{\Omega^2} - k^2 + \frac{k \bar{u}_{zz}}{\Omega_j} - \frac{k \bar{u}_z \rho_{0z}}{\Omega \rho_0} + \frac{\rho_{0zz}}{2\rho_0} - \frac{3\rho_{0z}^2}{4\rho^2} \right)}_{S(z) - m^2(z): \text{ nombre d'onde vertical local}} \hat{\varphi} = 0$$

$\Omega(z) = \omega - k\bar{u}(z)$  est la fréquence Doppler (relative) de l'onde dans le référentiel se déplaçant à la vitesse  $\bar{u}$

**Solution WKB (lentement variable):**

$$\hat{\varphi}(z) = \hat{\varphi}_\tau \left( \frac{m_\tau}{m(z)} \right)^{1/2} \exp \left( -i \int_0^z m(z') dz' \right)$$

où:  $m(z) = -\text{sign}(\Omega(z)) \sqrt{S(z)}$ , le signe choisi pour  $m$  assurant que la vitesse de groupe verticale est orientée vers le haut:  $C_{gz} = \partial_m \Omega > 0$ .

**Remarque:**  $m_\tau$  et  $m(z)$  ont le même signe. Lorsque  $m$  change de signe,  $\Omega$  s'annule et  $S(z) \rightarrow \infty$  l'onde déferle forcément. Il s'agit d'un niveau critique au delà duquel  $\hat{\varphi}(z) = 0 = \tau$

# VI.2) Le modèle simple basé sur l'interaction d'ondes avec l'écoulement moyen

## Modèle adapté de Plumb (JAS 1977)

Déferlement et décroissance du stress associé:

Détection du déferlement (d'un niveau vertical du modèle,  $z - dz$ , à celui immédiatement au dessus,  $z$ )

- 1 On lie  $\tau(z - dz)$  et l'anomalie de température potentielle  $\hat{\theta}(z)$

$$\tau(z - dz) = \tau(z) = -\frac{\rho(z)m(z)\Omega^2(z)}{k\theta_{0z}^2(z)} \|\hat{\theta}(z)\|^2$$

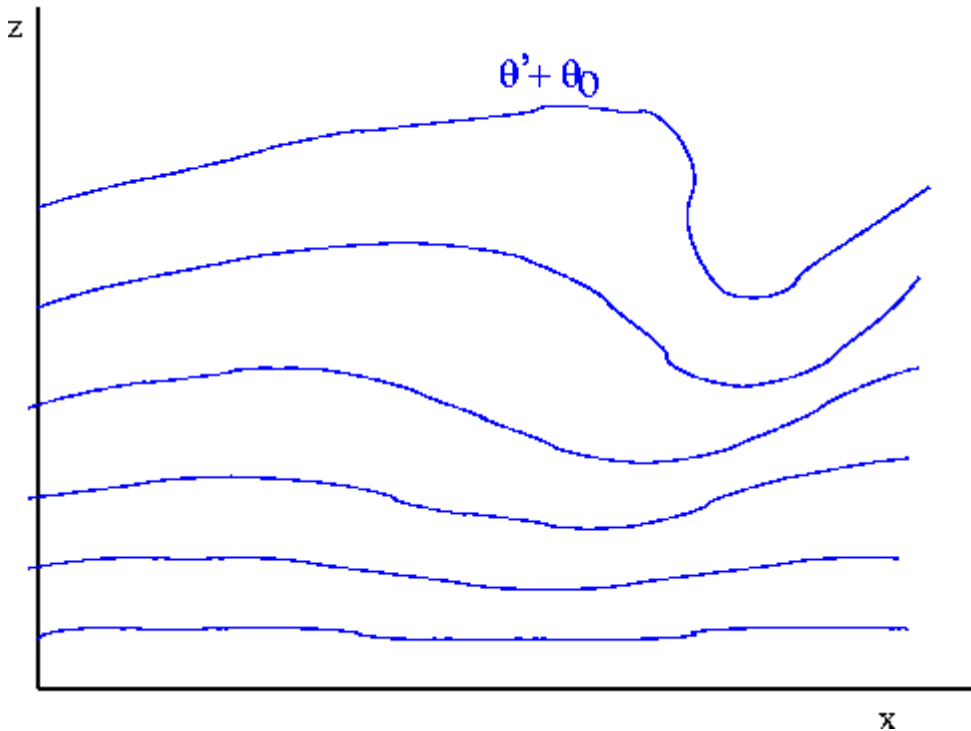
- 2 Déferlement si:

$$\underline{\text{Min}}_{0 < x < L} \theta'_z(z) < -\theta_{0z}(z)$$

$$\text{soit: } \|m(z)\hat{\theta}(z)\| > \theta_{0z}(z)$$

- 3 Si il y a déferlement, il faut diminuer  $\tau(z)$  jusqu'à:

$$\tau_c(z) = -\frac{\rho_0(z)\Omega^2(z)}{k m(z)}$$



# VI.2) Le modèle simple basé sur l'interaction d'ondes avec l'écoulement moyen

## Principe du modèle

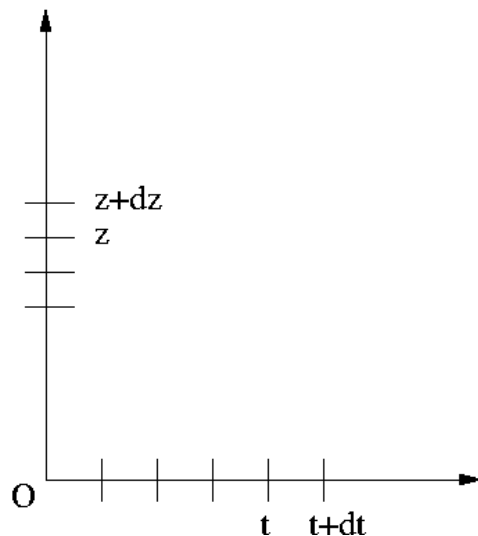
L'équation du vent moyen est intégrée par différences finies en  $t$  et en  $z$ .

On considère seulement 2 ondes de gravité:

$$\rho_0(z) \frac{\partial}{\partial t} \bar{u}(z, t) = - \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial z} \tau_j + \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial}{\partial z} \bar{u}(z, t)$$

Evolution de  $\bar{u}(z, t)$ :

- 1 Schéma Leapfrog centré avec filtre de Asselin pour l'effet des ondes ( $\tau$ )
- 2 Méthode implicite pour la diffusion verticale ( $\nu$ )
- 3 Condition à la limite:  $\bar{u}(0, t) = 0$



Evaluation de  $\tau_i(z)$ :

- 1 On impose  $\tau_i(0)$ , c'est à dire l'amplitude des ondes de gravité se propageant à travers la moyenne atmosphère
- 2 Passage de  $z - dz$  à  $z$ :
  - i On applique le théorème de Eliassen et Palm:  $\tau_i(z) = \tau_i(z - dz)$
  - ii On teste le déferlement:

$$\text{si } \|\tau_i(z)\| < \|\tau_{ci}(z)\|, \quad \tau_i(z) = \tau_i(z - dz)$$

Pas d'action des ondes entre  $z - dz$  et  $z$

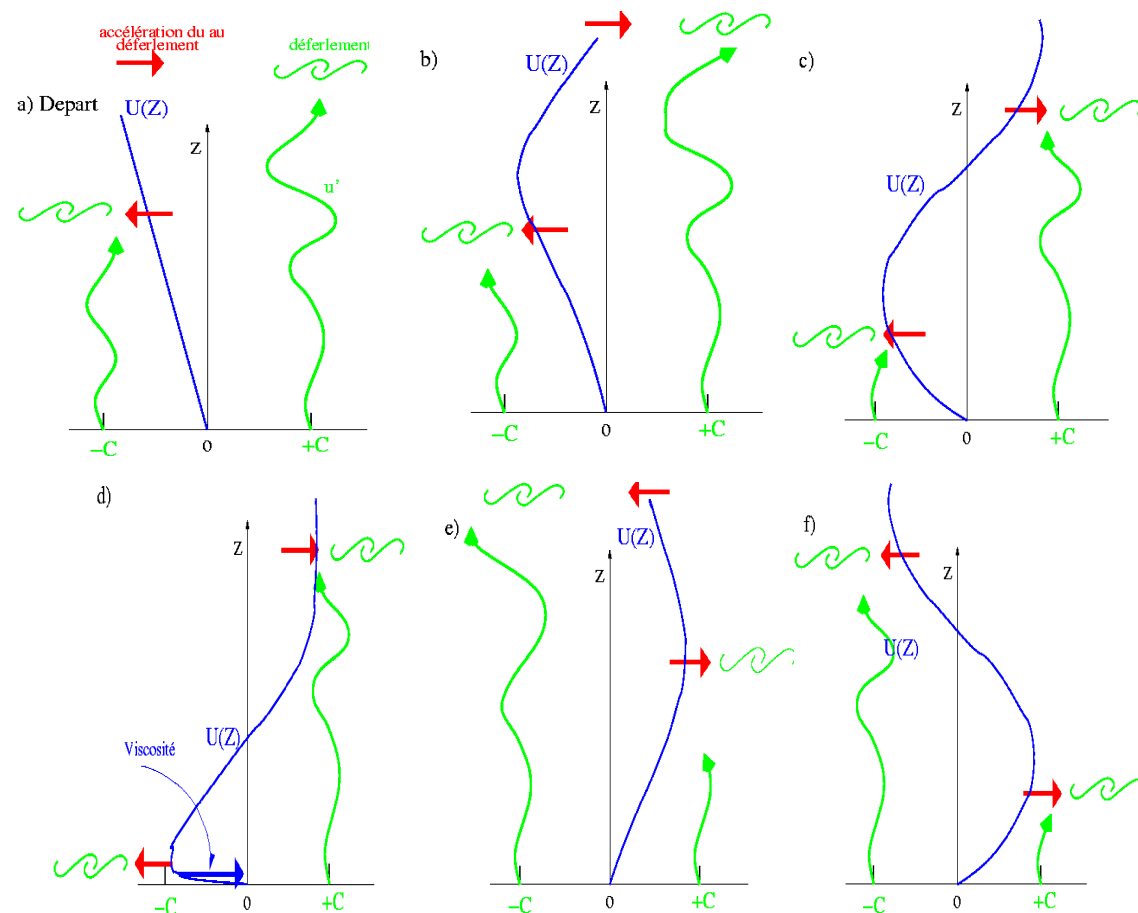
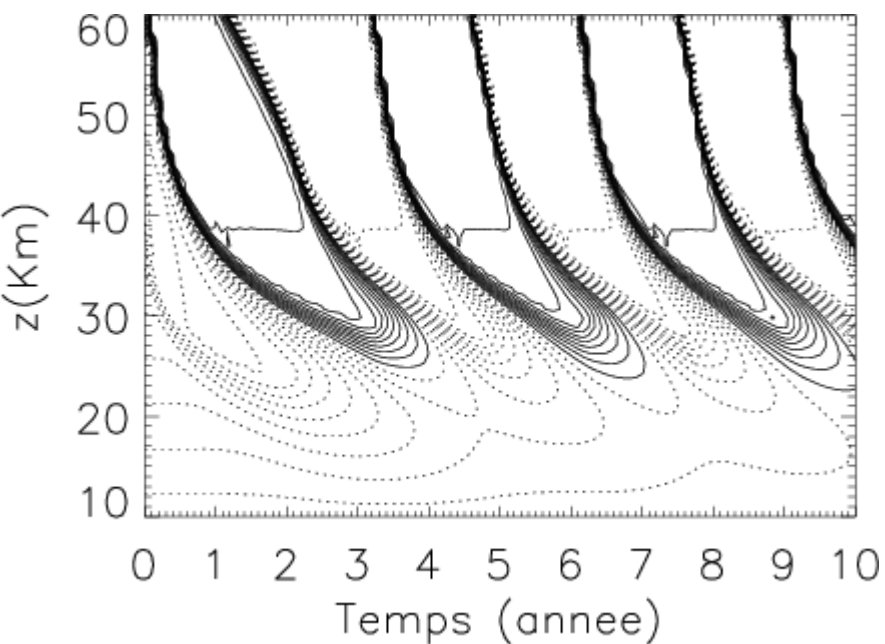
$$\text{si } \|\tau_i(z)\| > \|\tau_{ci}(z)\|, \quad \tau_i(z) = \tau_{ci}(z)$$

Les ondes affectent  $U$  entre  $z - dz$  et  $z$

# VI.2) Le modèle simple basé sur l'interaction d'ondes avec l'écoulement moyen

Interprétation:

Résultat du modèle, vent zonal en fonction de l'altitude et du temps





# Modèles Simples du Climat

MEC 583, François Lott, flott@lmd.ens.fr

## VII. La variabilité du climat aux moyennes latitudes

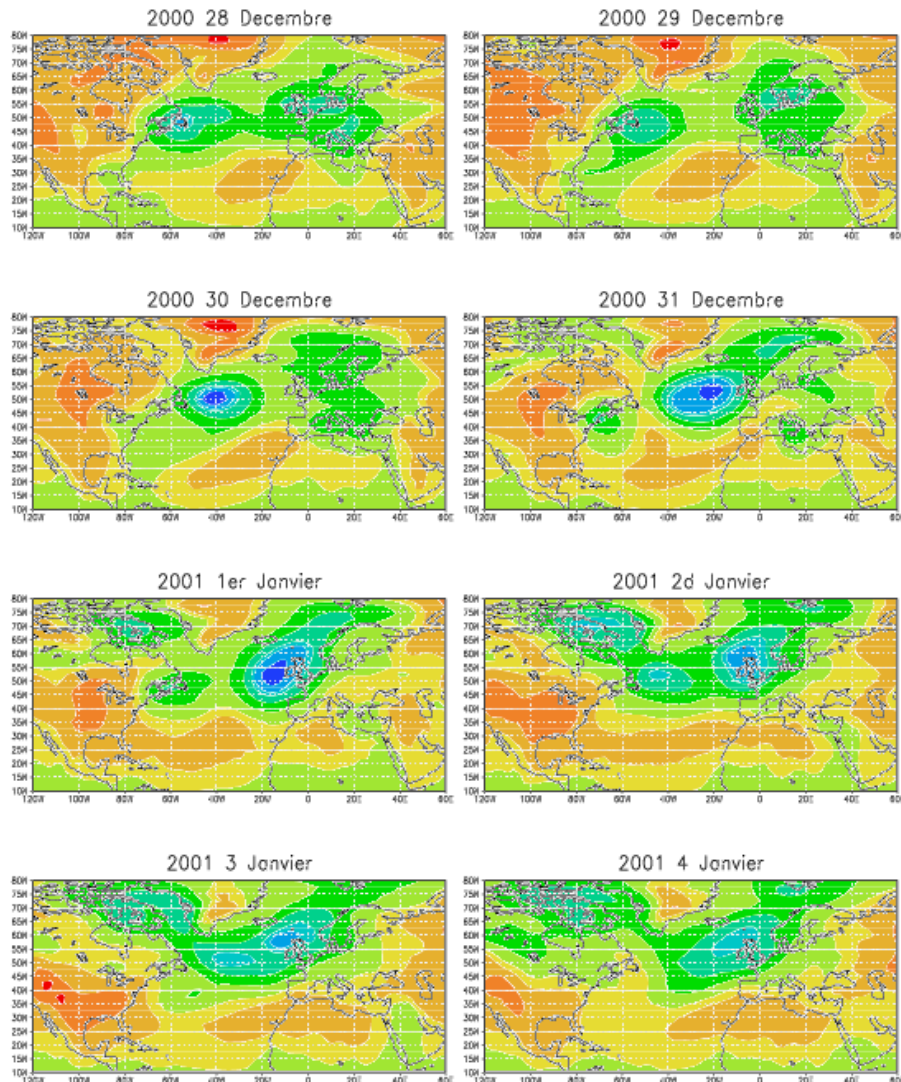
- VII.1) Trajectoires normales et déviées des dépressions sur l'Atlantique Nord
- VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes variance et composites avec test de Student.
- VII.3) Analyses statistiques de cartes météorologiques (II): cartes d'anticorrélations et EOFs.
- VII.4) Les grandes structures de la variabilité sur l'Atlantique Nord (la NAO) et le Pacifique Nord (PNA)
- VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes
- VII.6) Utiliser le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

(voir [http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583\\_08/Presentation.html](http://web.lmd.jussieu.fr/~flott/polytechnique/mec583_08/Presentation.html))

# VII.1) Trajectoires "normales" et déviées des dépressions sur l'Atlantique Nord

## Trajectoire caractéristique d'une dépression sur l'Atlantique Nord

Données ECMWF (ERA40)



### Cartes de pression au niveau de la mer:

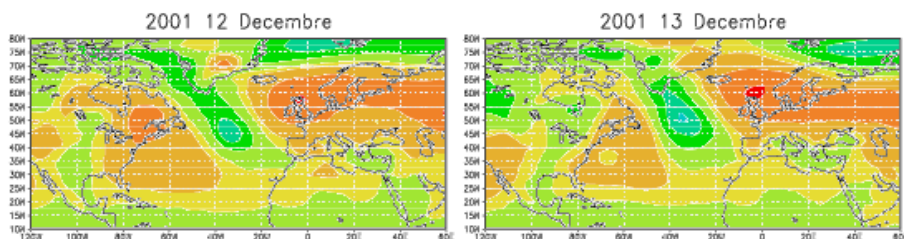
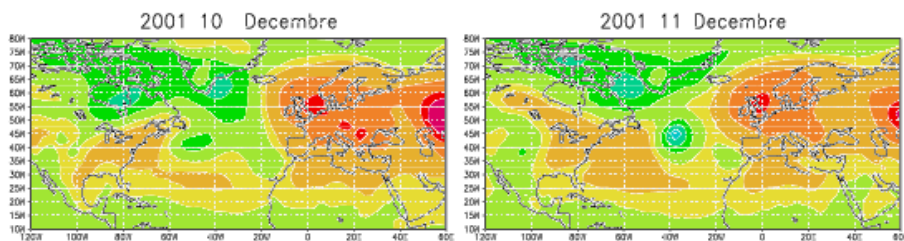
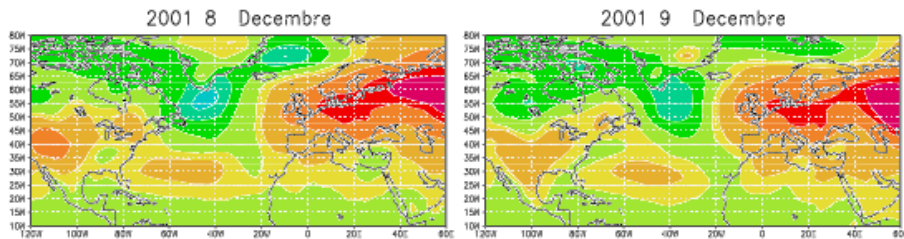
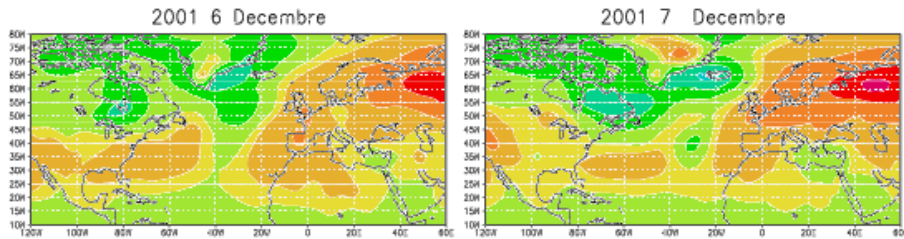
Les dépressions se forment sur l'Atlantique Nord-Est, au voisinage de Terre Neuve.

Elles se creusent en traversant l'Atlantique et mettent 4-5 jours à atteindre l'Europe

# VII.1) Trajectoires "normales" et déviées des dépressions sur l'Atlantique Nord

Exemple de la modification de la trajectoire des dépressions sur l'Atlantique Nord

Données ECMWF (ERA40)



## Cartes de pression au niveau de la mer:

Les dépressions se forment sur l'Atlantique Nord-Est, au voisinage de Terre Neuve.

Elles se creusent mais restent « bloquées » sur le centre de l'Atlantique par un anticyclone de développant sur l'Europe.

Les dépressions passent éventuellement au Nord ou au Sud de l'Anticyclone.

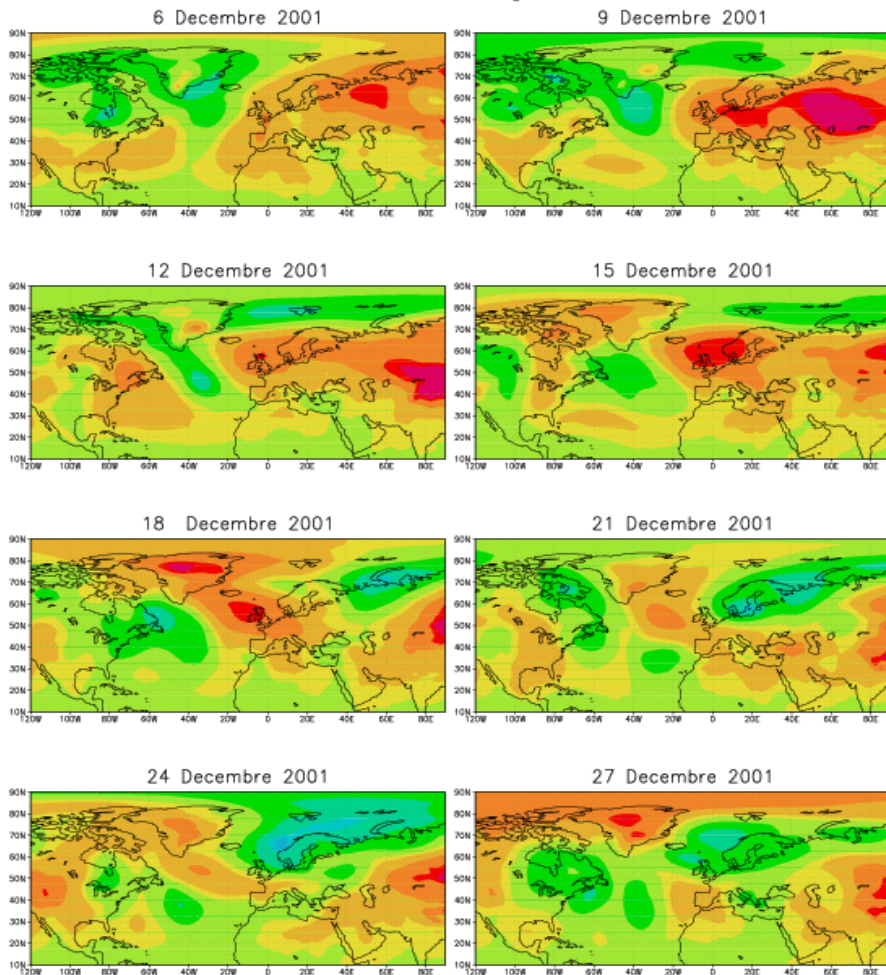
L'Anticyclone s'étale vers l'Ouest au cours du temps.

# VII.1) Trajectoires "normales" et déviées des dépressions sur l'Atlantique Nord

## Extension de l'anticyclone de Sibérie sur l'Europe de l'Ouest et le Nord de l'Atlantique

Données ECMWF (ERA40)

Pression au niveau de la mer  
Cartes tout les 3 jours



### Cartes de pression au niveau de la mer (1 carte tout les 3 jours):

Pour illustrer que l'Anticyclone se développe lentement et sur de grandes échelles, on montre ici une carte tout les 3 jours sur un domaine couvrant l'ensemble de l'Europe et de l'Atlantique.

Noter le lent développement vers l'Ouest de l'anticyclone ainsi que sa persistance

Ce comportement est caractéristique d'une situation « bloquée » d'Hiver

Dans ce cas, les dépressions passent au Nord et au Sud de l'Europe (elles évitent l'Angleterre et la France)

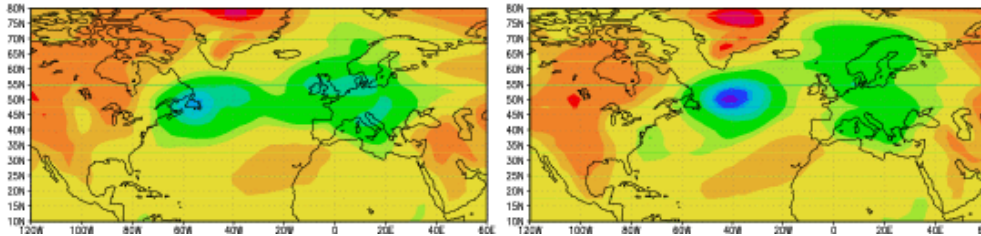
# VII.1) Trajectoires "normales" et déviées des dépressions sur l'Atlantique Nord

## Cartes de hauteur du géopotiel à un niveau de Pression donné

Pression au niveau de la mer (5hpa)

2000 28 Decembre

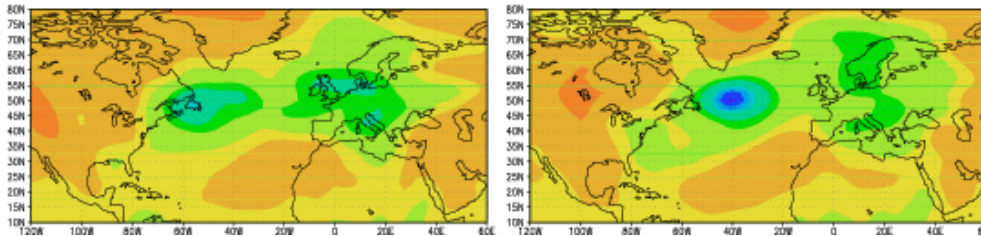
2000 30 Decembre



Hauteur du Geopotiel a 1000hPa (50m)

2000 28 Decembre

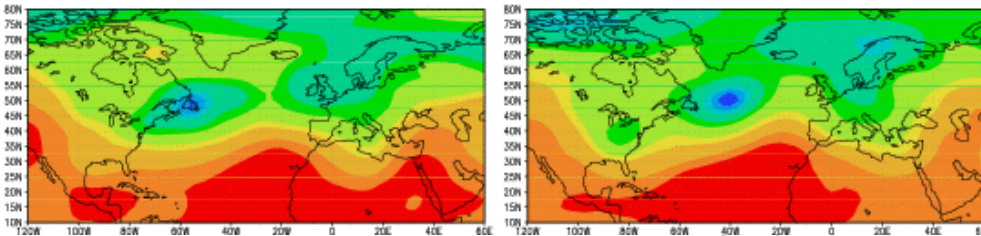
2000 30 Decembre



Hauteur du Geopotiel a 700hPa (50m)

2000 28 Decembre

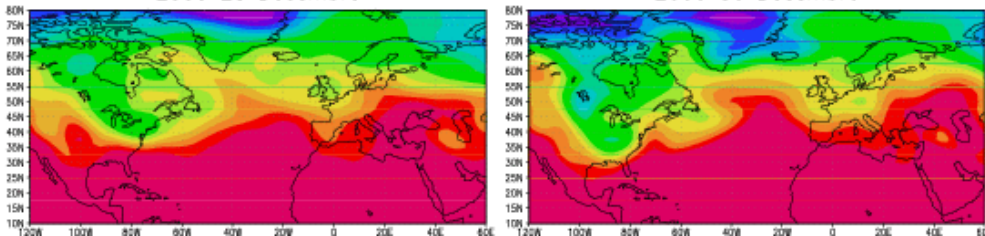
2000 30 Decembre



Temperature de l air a 850hPa (3k)

2000 28 Decembre

2000 30 Decembre



**La pression au niveau de la mer est une donnée interpolée et qui a peu de sens au dessus des terres (à cause des montagnes).**

On lui préfère des cartes de géopotiel à un niveau de pression donné.

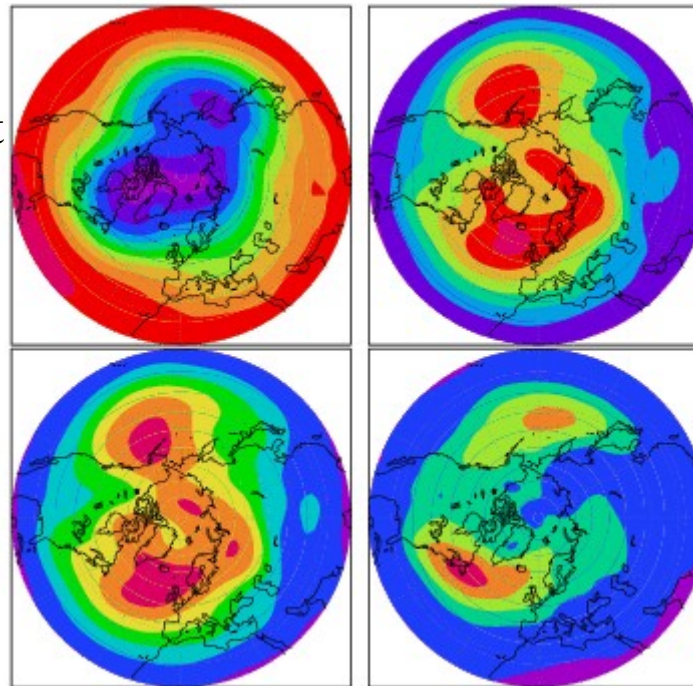
On vérifie ici en comparant les Figures qu'elles contiennent sensiblement la même information.

Le champ de T montre que devant une dépression est advecté de l'air chaud (et donc humide) ce qui amène des précipitations. (1 carte tout les 3 jours):

# VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student Statistiques du Géopotential à 700hPa, Mois d'Hiver (DJF) 1958-1997, Données NCEP

## Moyenne:

Noter l'intensification du jet d'Ouest  
à l'Est des continents, et son  
élargissement à l'Est des Océans.



## Déviatiion Standard Basse Fréquence:

Elle décrit l'essentiel de la  
déviatiion standard totale

## Déviatiion Standard:

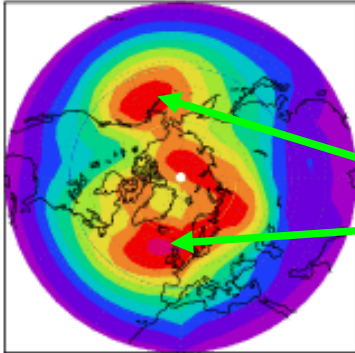
Les maxima de variabilité sont à  
l'Est des Océans, ils sont plus dus  
à la variabilité de la trajectoire des  
dépressions qu'au dépressions  
elles-mêmes

## Déviatiion Standard Haute Fréquence:

Elle décrit la variabilité  
associée directement au  
développement  
des dépressions et à leur  
traversé de l'Atlantique Ouest  
(on parle du couloir  
dépressionnaire)

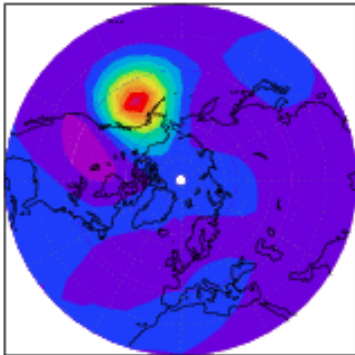
Remarques: Ici la basse fréquence est définie en utilisant un filtre passe-bas  
très simple, la moyenne des cartes sur 3 jours consécutifs.

## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student Statistiques du Géopotential à 700hPa, Mois d'Hiver (DJF) 1958-1997, Données NCEP



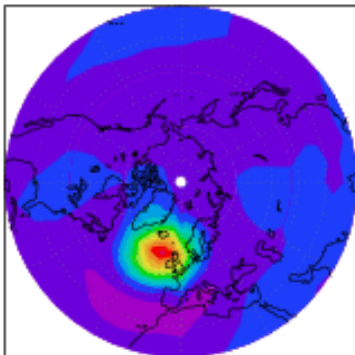
### Déviatiun Standard Basse Fréquence:

Elle décrit l'essentiel de la déviatiun standard totale.  
Elle indique deux centres de variabilité très forte  
(centres d'actions), sur le Pacifique et l'Atlantique  
Nord-Est



### Corrélation Basse Fréquence avec le centre du Pacifique:

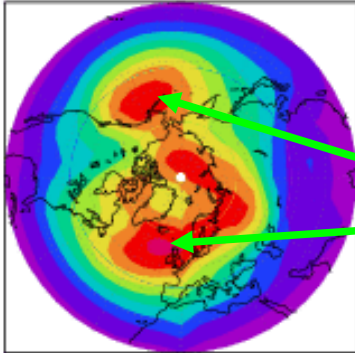
Noter l'étendue, et l'anticorrelation sur le continent  
Américain



### Corrélation Basse Fréquence avec le centre de l'Atlantique:

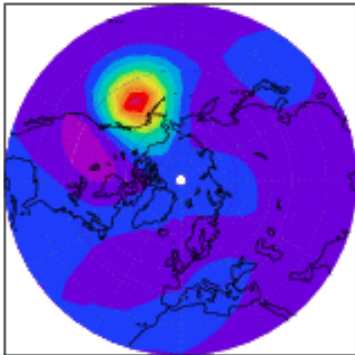
Noter l'étendue, et l'anticorrelation sur l'Atlantique  
subtropical

## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques(I): moyennes, variances et composites avec test de Student Statistiques du Géopotential à 700hPa, Mois d'Hiver (DJF) 1958-1997, Données NCEP



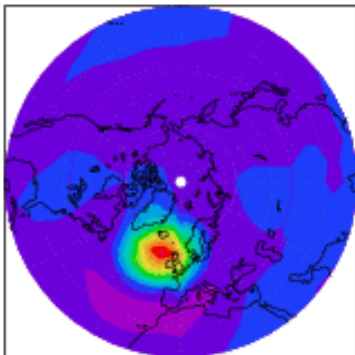
### Déviatiun Standard Basse Fréquence:

Elle décrit l'essentiel de la déviatiun standard totale.  
Elle indique deux centres de variabilité très forte  
(centres d'actions), sur le Pacifique et l'Atlantique  
Nord-Est



### Corrélation Basse Fréquence avec le centre du Pacifique:

Noter l'étendue, et l'anticorrelation sur le continent  
Américain



### Corrélation Basse Fréquence avec le centre de l'Atlantique:

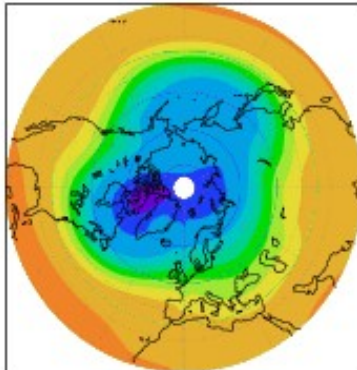
Noter l'étendue, et l'anticorrelation sur l'Atlantique  
subtropical



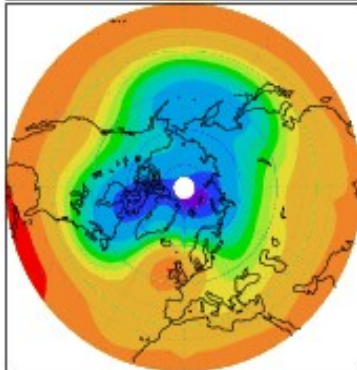
## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student

Moyennes et composites suivant la hauteur du Géopotentiel sur l'Atlantique  
Nord-Est (15°W, 58°N)

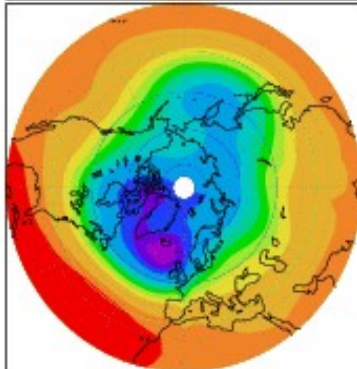
Mois d'Hiver (DJF) 1958-1997, Données NCEP



Moyenne d'Hiver



Composite sur les anomalies positives:  
Situations de blocage

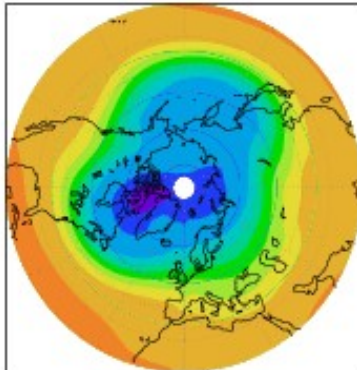


Composite sur les anomalies négatives:  
Situations zonales

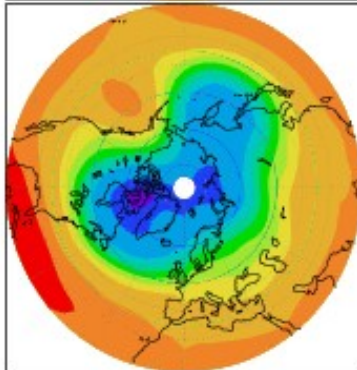
# VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student

## Moyennes et composites suivant la hauteur du Géopotential sur le Pacifique Nord-Est (150°W, 50°N)

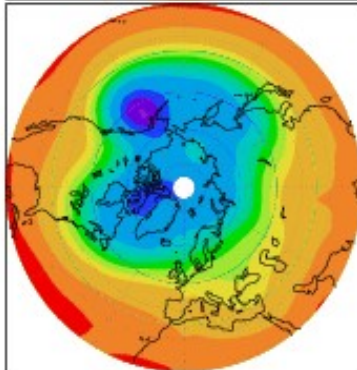
Mois d'Hiver (DJF) 1958-1997, Données NCEP



Moyenne d'Hiver



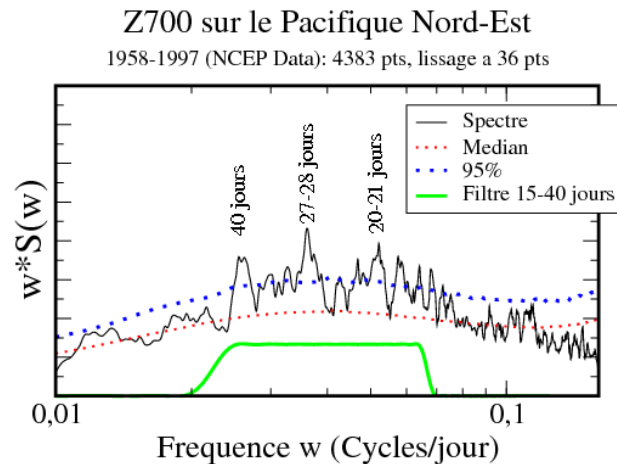
Composite sur les anomalies positives:  
Situations de blocage



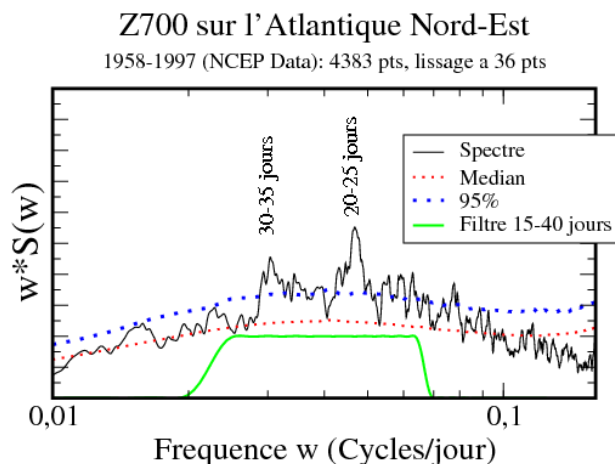
Composite sur les anomalies négatives:  
Situations zonales

# VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student Analyses spectrales du Géopotential sur les centres d'action Pacifique et Atlantique (Evidences d'Oscillations à 15-40 jours?)

Données NCEP sans cycle annuel 1958-1997



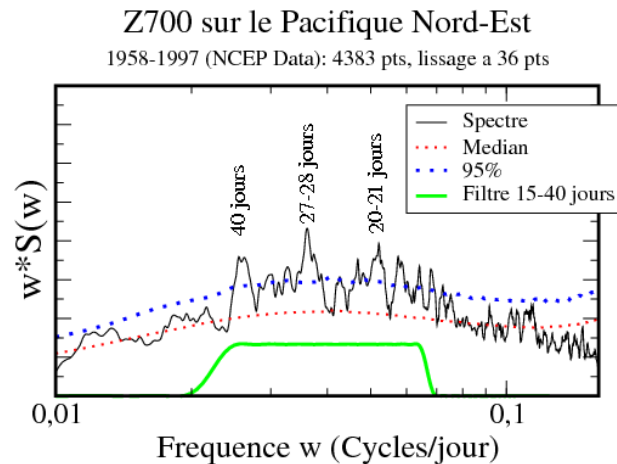
On note un accroissement de la variance dans la bande 15-40 jours. Quelques pics sont significatifs à 95% (faible) dans cette bande.



On filtre les signaux pour retenir cette bande de fréquence, et isoler les phénomènes produisant cette variabilité.

# VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student Analyses spectrales du Géopotential sur les centres d'action Pacifique et Atlantique (Evidences d'Oscillations à 15-40 jours?)

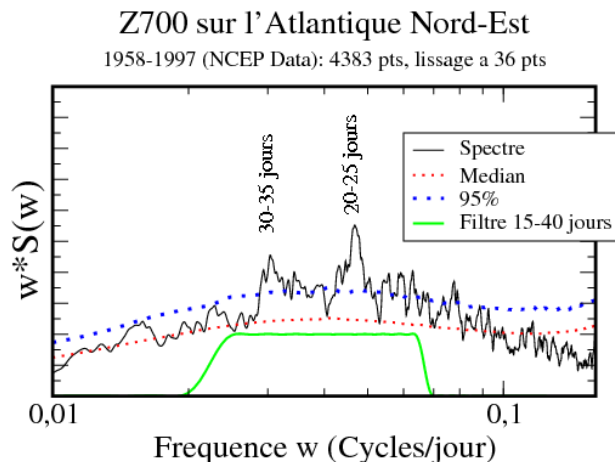
Données NCEP sans cycle annuel 1958-1997



On note un accroissement de la variance dans la bande 15-40 jours. Quelques pics sont significatifs à 95% (faible) dans cette bande.

On filtre les signaux pour retenir cette bande de fréquence, et isoler les phénomènes produisant cette variabilité.

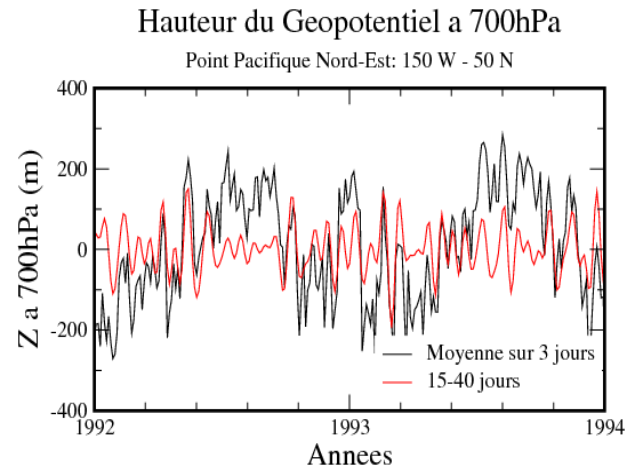
Voir Chapitre VI.1)



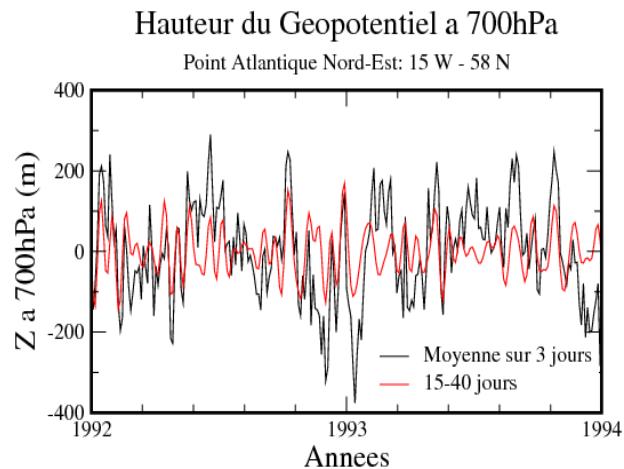
## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student

Reconstruction des séries du Géopotential sur les centres d'action Pacifique et Atlantique, et dans la bande 15-40 jours

Données NCEP sans cycle annuel 1958-1997



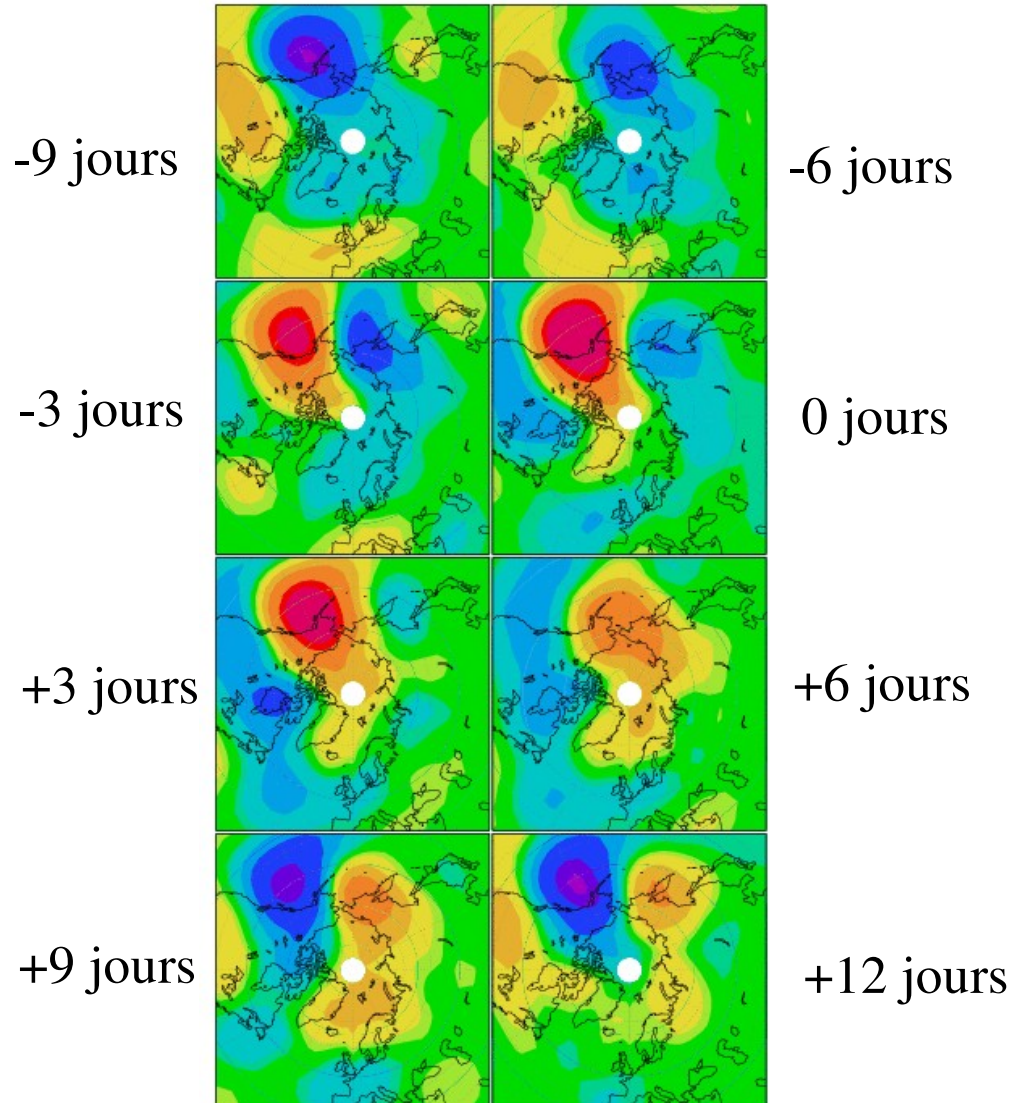
On note que les signaux filtrés reproduisent une bonne partie du signal original (c'est important!)



## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student

Composites des cartes de Géopotentiel à 700hPa indexées sur le centre d'action du Pacifique. Toutes les données sont filtrés dans la bande 15-40j

Données NCEP sans cycle annuel 1958-1997

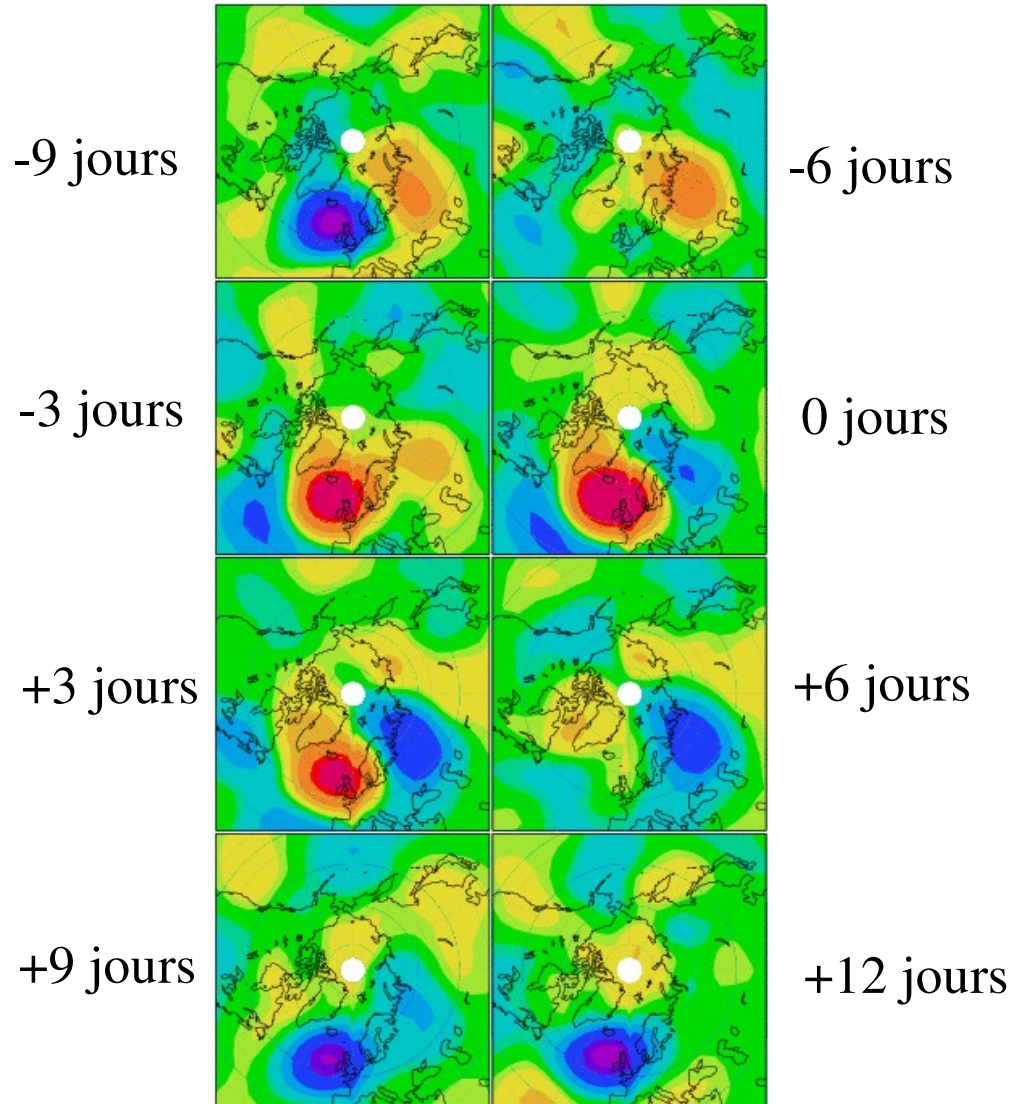


On note la propagation vers l'Ouest du signal basse fréquence, depuis les Grandes Plaines d'Amérique du Nord vers le Pacifique.

## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student

Composites des cartes de Géopotentiel à 700hPa indexées sur le centre d'action de l'Atlantique. Toutes les données sont filtrés dans la bande 15-40j

Données NCEP sans cycle annuel 1958-1997



On note la propagation vers l'Ouest du signal basse fréquence, depuis le Nord de la Russie vers l'Atlantique.

## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student

Composites du moment angulaire et du couple des montagnes, indexés sur le centres d'actions du Pacifique et de l'Atlantique. Toutes les données sont filtrés dans la bande 15-40j

Données NCEP sans cycle annuel 1958-1997

Motivation:

Les structures de grande échelle affecte la pression au sol près de grand massifs montagneux (Rocheuse, Groenland et Himalaya).

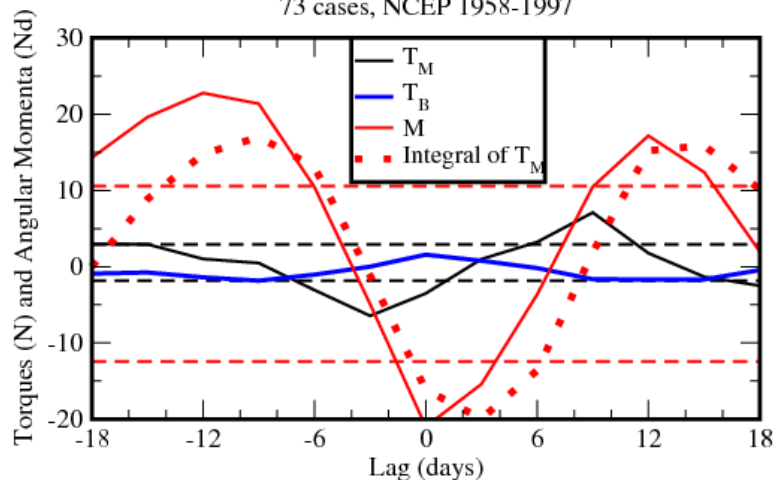
Cela donne lieu à un couple des montagnes  $T_M$ , elles sont donc peut-être détectable dans le moment angulaire de l'Atmosphère,  $M$ .

Le modèle simple en VII.4), est basé sur des interactions entre l'atmosphère et les massifs montagneux.

Les lignes pointillées sont des niveaux de confiance à 1% pour  $T_M$  et  $M$  basés sur un test de Student

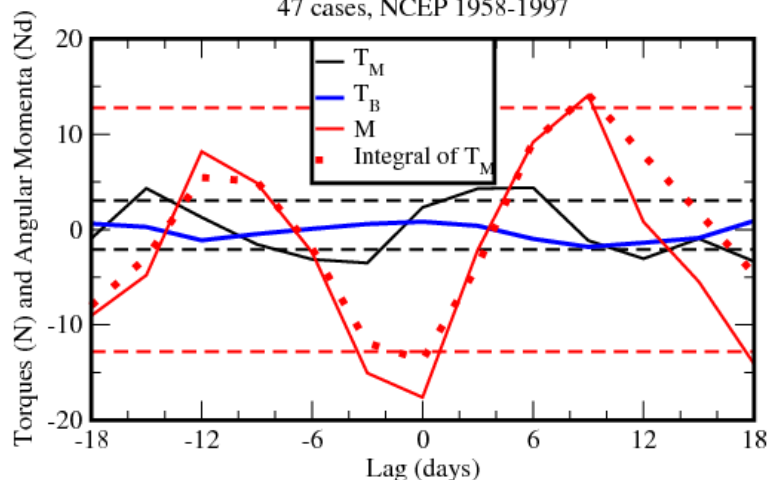
M and T cycle during 15-40 days Pacific oscillations

73 cases, NCEP 1958-1997



M and T cycle during 15-40 days Atlantic oscillations

47 cases, NCEP 1958-1997





## VII.2) Analyses statistiques de cartes météorologiques (I): moyennes, variances et composites avec test de Student

### Principes du test de Student appliqué aux composites de $T_M$ selon les variations de $Z$ sur le Pacifique ( $Z_{PAC}$ )

On sélectionne  $n_X$  jours où  $Z_{PAC} > V_1$  et  $n_Y$  jours où  $Z_{PAC} < V_2$

On définit:  $X = \{x_1, \dots, x_{n_X}\}$  les  $n_X$  réalisations de  $T_M$  et  $Y = \{y_1, \dots, y_{n_Y}\}$  les  $n_Y$  réalisations de  $T_M$

Hypothèses:

Chaque réalisation de  $X$  et de  $Y$  sont indépendantes les unes des autres: en pratique les prendre assez éloignées les unes des autres et dans le temps pour qu'elles soient décorrélées.

Les distributions qui génèrent  $X$  et  $Y$  sont normales, et ont la même variance  $\sigma$

Distribution normale pour  $X$ :

$$P(a < X < b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma^2}} dx$$

On forme les estimateurs pour les moyennes

$$\hat{\mu}_X = \frac{1}{n_X} \sum_1^{n_X} x_i, \quad \hat{\mu}_Y = \frac{1}{n_Y} \sum_1^{n_Y} y_i$$

Et l'estimateur de la déviation standard:

$$S_p^2 = \frac{\sum_1^{n_X} (x_i - \hat{\mu}_X)^2 + \sum_1^{n_Y} (y_i - \hat{\mu}_Y)^2}{n_X + n_Y - 2}$$

Et on définit le composite:  $\hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y$

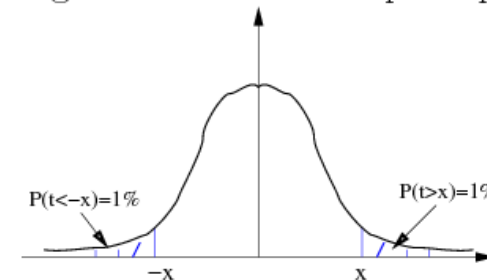
Hypothèse nulle:  $\mu_X - \mu_Y = 0$

Si l'hypothèse nulle est vraie, la variable

$$t = \frac{\hat{\mu}_X - \hat{\mu}_Y}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_X} + \frac{1}{n_Y}}}$$

suit une distribution de Student à  $n_X + n_Y - 2$  degrés de liberté.

Schéma grossier illustrant le principe du test:



On trouve des tables pour les valeurs de  $x$  en fonction du nombre de degré de liberté et du pourcentage de confiance désiré un peu partout.

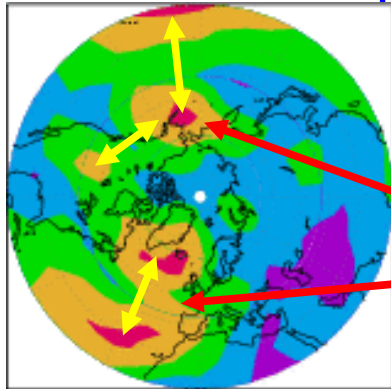
Noter que pour  $n_X$  et  $n_Y$  grands  $x \approx 2.45$  pour un niveau de confiance à 1%.

## VII.3) Analyses statistiques de cartes météorologiques (II): cartes d'anticorrelation et EOFs

Teleconnections: maxima d'anticorrelation entre des points distants

Géopotential à 700hPa, Mois d'Hiver (DJF) 1958-1997,

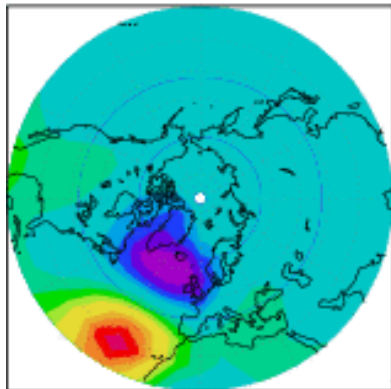
Données NCEP



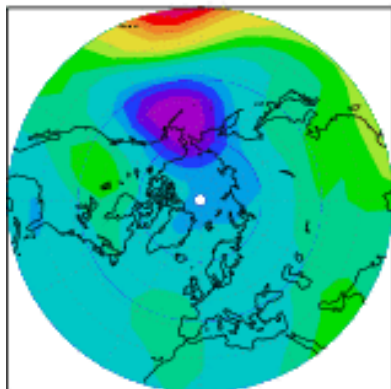
Maxima d'anticorrelations:

Pacifique Nord Est, Continent Américain et Pacifique Subtropical: PNA

Atlantique Nord et Atlantique Subtropicale: NAO



Corrélation avec la NAO (North Atlantic Oscillation):



Corrélation avec la PNA (Pacific North-American Pattern):

# VII.3) Analyses statistiques de cartes météorologiques (II): cartes d'anticorrelation et EOFs

## L'analyse en Composante Principales (EOFs)

Objectifs:

Lier les cartes de variance en un point et les cartes d'autocorrélation.

Mettre en évidence les structures dominant la variabilité de l'atmosphère

On décrit les champs météorologiques par un vecteur  $\vec{Z}(t)$  dont les composantes  $Z_i(t)$  représentent la hauteur du géopotential en  $M$  points couvrant un secteur donné.

$$\vec{Z}(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) \\ Z_2(t) \\ \vdots \\ Z_M(t) \end{pmatrix}$$

On forme la matrice d'Autocorrélation:

$$\vec{C} = \langle \vec{Z} \cdot {}^t\vec{Z} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \vec{Z}(t) {}^t\vec{Z}(t)$$

Il s'agit d'une matrice symétrique définie positive.

La variance totale est donnée par:  $tr \vec{C}$

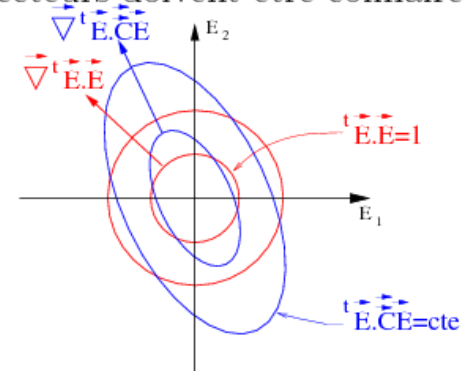
La variance selon une structure spatiale  $\vec{E}$  est donnée par

$$\langle {}^t\vec{E} \vec{Z} \cdot {}^t\vec{E} \vec{Z} \rangle = {}^t\vec{E} \vec{C} \vec{E}.$$

On cherche les vecteurs de norme 1 ( ${}^t\vec{E}\vec{E} = 1$ ) maximisant la variance. On applique pour cela la méthode des multiplicateurs de Lagrange:

$$\vec{\nabla} ({}^t\vec{E} \vec{C} \vec{E}) = \lambda \vec{\nabla} ({}^t\vec{E} \vec{E})$$

Les deux vecteurs doivent être colinéaires:



Cela revient à résoudre:

$$\vec{C} \vec{E} = \lambda \vec{E}$$

**EOFs:** les vecteurs  $\vec{E}$  sont orthonormaux et forment une base complète. Ce sont les Fonctions Empiriques Orthogonales.

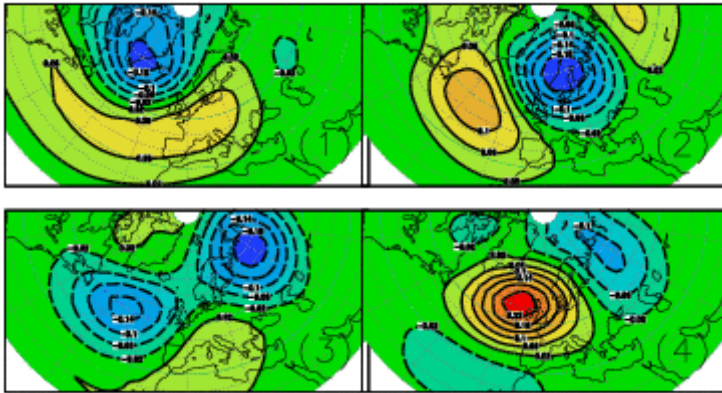
$\lambda$ : Les valeurs propres donnent le pourcentage de la variance totale que représente  $\vec{E}$ .

**PCs:** Les champs peuvent s'écrire sous la forme,  $\vec{Z}(t) = \sum_{j=1}^M a_j(t) \vec{E}_j$ . Les  $a_j(t)$  sont les Composantes Principales.

## VII.3) Analyses statistiques de cartes météorologiques (II): cartes d'anticorrelation et EOFs

EOFs sur l'Atlantique (DJF 1958-2001, données NCEP)

Secteur: 90°W-90°E, 30°N-90°N



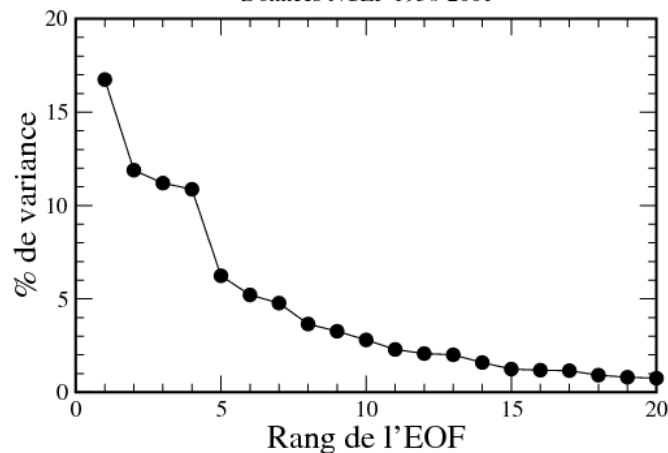
La 1ère EOF décrit des fluctuations en intensité et en position du jet aux moyennes latitudes.

Elle ressemble à l'Oscillation Arctique et représente 17% de la variance.

Ses fluctuations affectent le climat moyen sur l'Europe de l'Ouest

EOFs Hiver (DJF) Secteur Atlantique

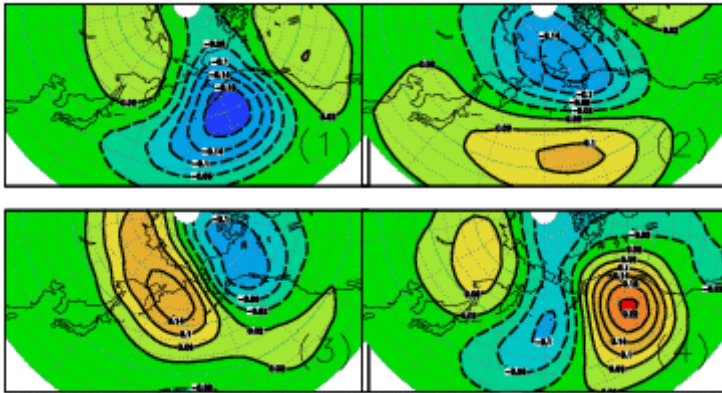
Données NCEP 1958-2001



## VII.3) Analyses statistiques de cartes météorologiques (II): cartes d'anticorrelation et EOFs

EOFs sur le Pacifique (DJF 1958-2001, données NCEP)

Secteur: 90°E-90°W, 30°N-90°N

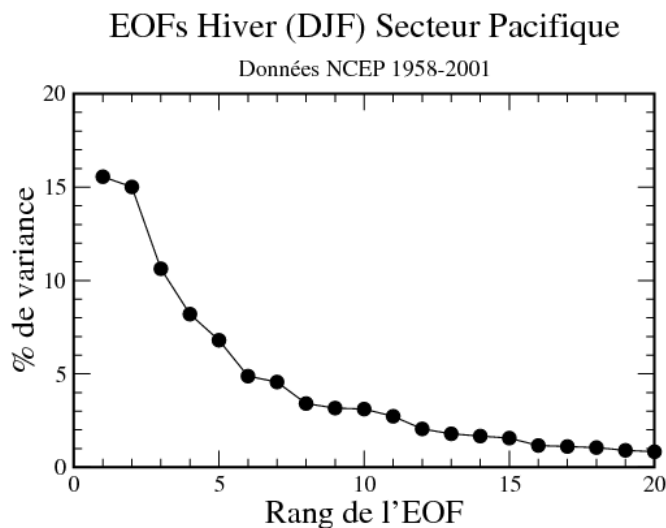


La 1ère EOF décrit des fluctuations en intensité et en position du jet d'Hawai

Elle gère les blocages sur le Pacifique Nord-Est

La seconde ressemble à la PNA

Les fluctuations de ces deux structures affectent le climat moyen sur l'Ouest du continent Américain, elles représentent 30% de la variabilité

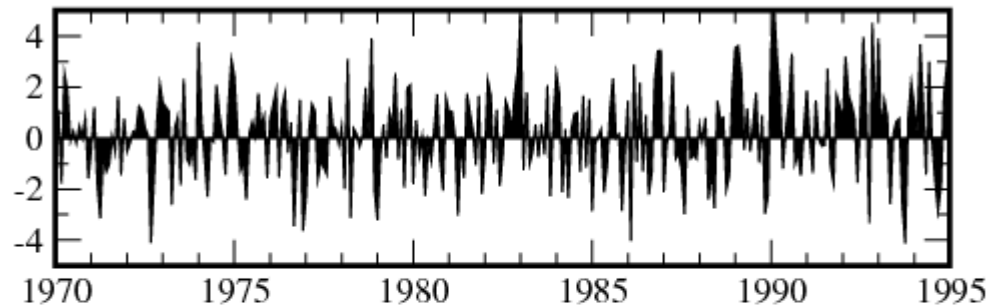


# VII.4) Les grandes structures de la variabilité sur l'Atlantique Nord (la NAO) et le Pacifique Nord (la PNA)

## Echelles de temps caractéristiques des variations de l'Oscillation Nord Atlantique

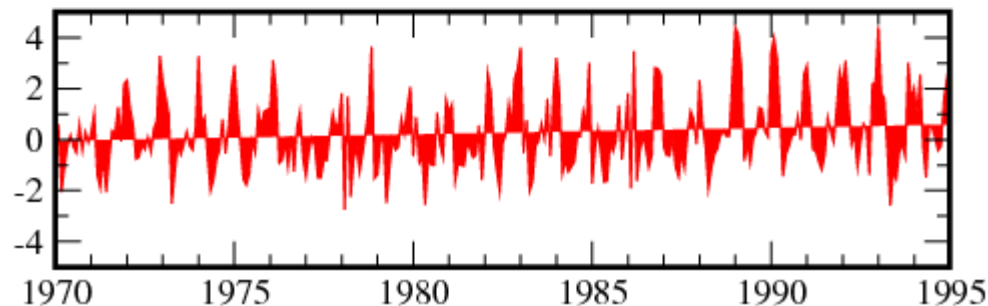
1958-1997, Données NCEP

NAO Index, Différence de Pression Lisbonne-Islande  
Données disponibles depuis 1825



On voit sur ces données que les variations de pression entre le Portugal et l'Islande suivent bien la PC1 associées à la NAO.

Projection sur l'EOF 1 d'Hiver  
 $Z_{700 \text{ hPa}}$  (Données NCEP, disponibles depuis 1950)

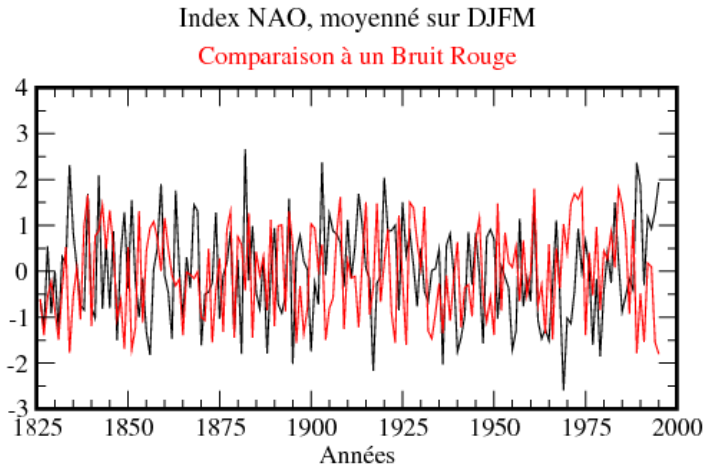


On peut donc remonter jusqu'en 1925 pour connaître les échelles de temps de la variabilité climatique associée à la NAO

# VII.4) Les grandes structures de la variabilité sur l'Atlantique Nord (la NAO) et le Pacifique Nord (la PNA)

## Echelles de temps caractéristiques des variations de l'Oscillation

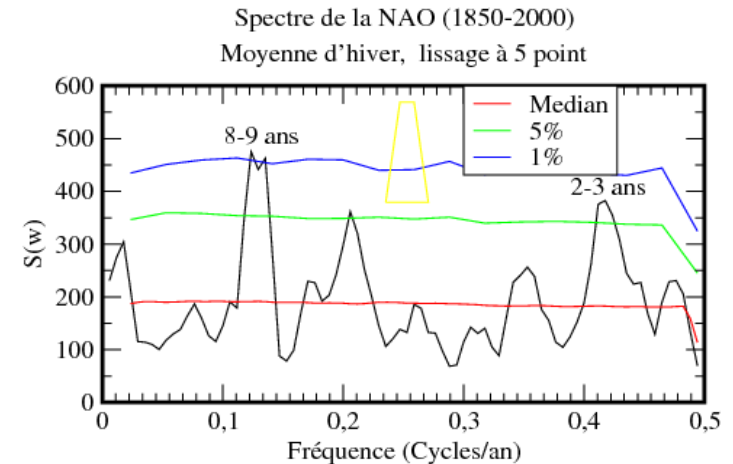
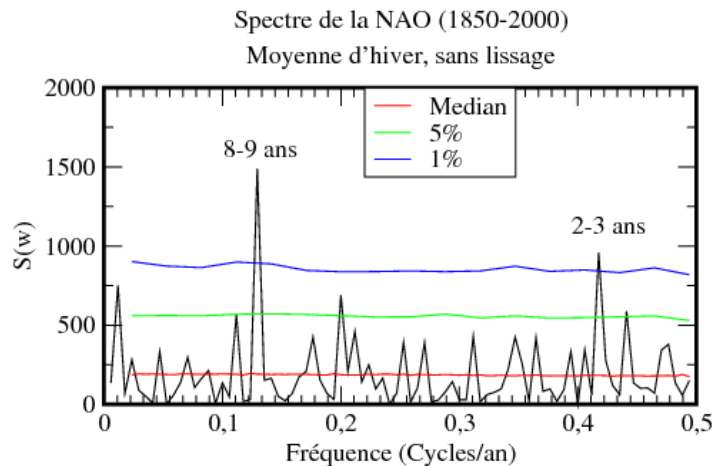
Nord Atlantique. 1958-1997, Données NCEP



C'est très peu différent d'un bruit rouge!  
Peut-on parler d'une oscillation?

Un pic peu énergétique est présent autour de 10 ans suggérant une oscillation à cette période.

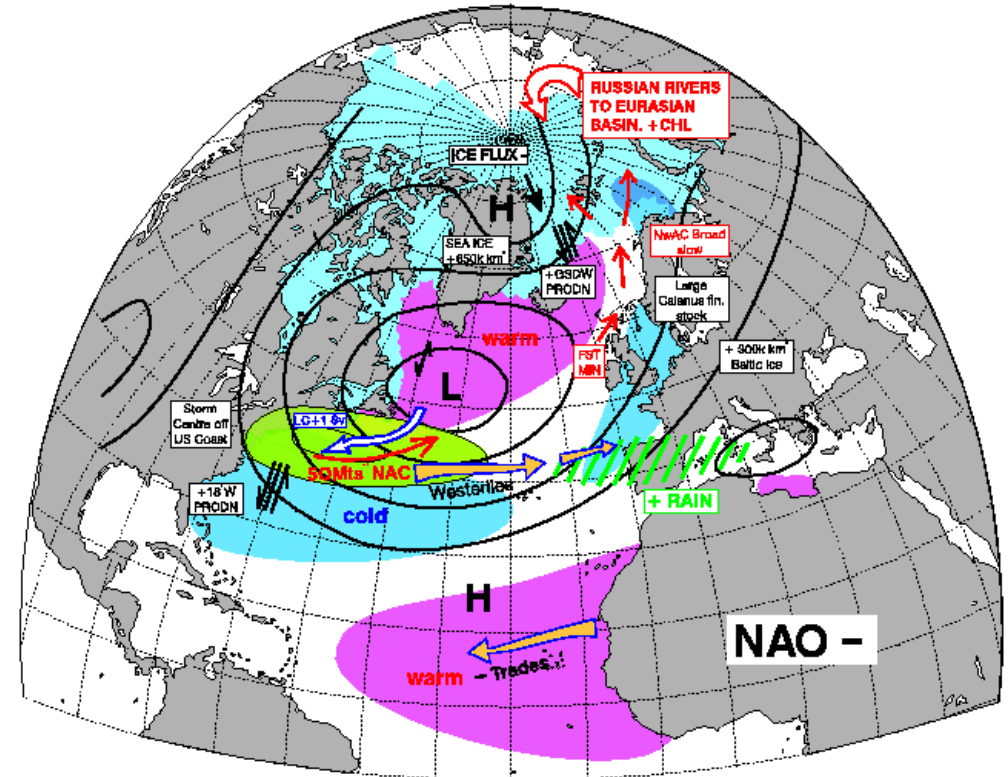
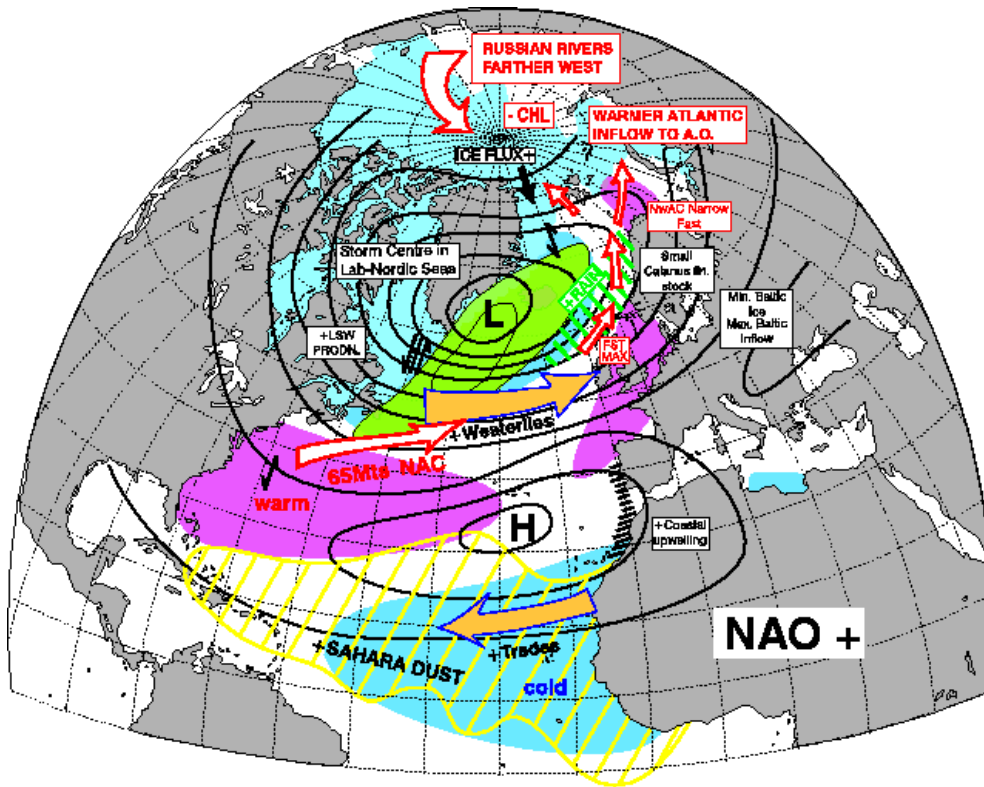
Le lissage élargie le pic, mais il n'est plus significatif qu'à 95% (c'est peu).



# VII.4) Les grandes structures de la variabilité sur l'Atlantique Nord (la NAO) et le Pacifique Nord (la PNA)

## L'Oscillation Nord Atlantique

(issues du site de D. B. Stephenson: [www.met.rdg.ac.uk](http://www.met.rdg.ac.uk))





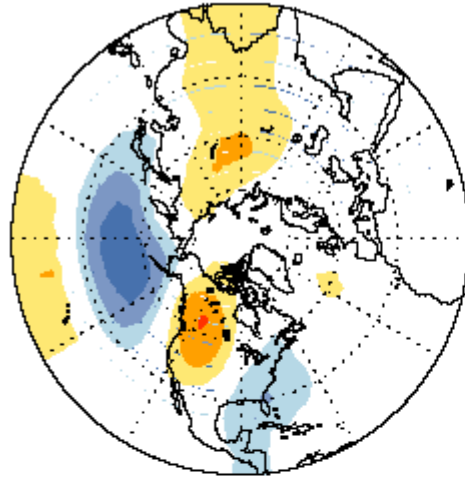
# VII.4) Les grandes structures de la variabilité sur l'Atlantique Nord (la NAO) et le Pacifique Nord (la PNA)

## La structure Pacifique Amérique du Nord

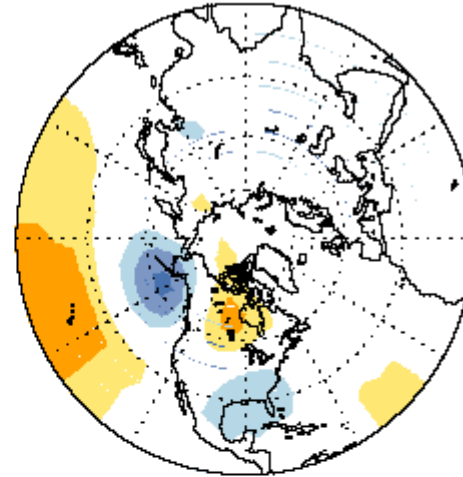
(issues du site du [Climate Prediction Center: www.cpc.ncep.noa.gov](http://www.cpc.ncep.noa.gov))

PACIFIC/NORTH AMERICAN PATTERN (PNA)

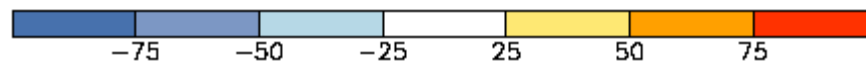
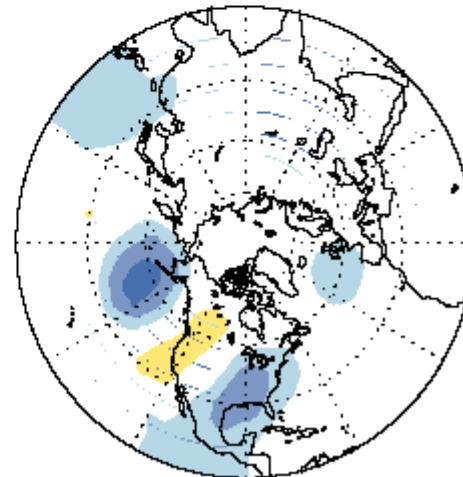
January



April



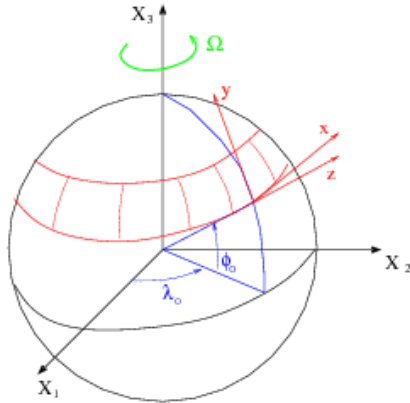
October



# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

Charney et DeVore (1979)

Approximation du plan  $\beta$



Dérivée particulière:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u\lambda}{a \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{u\phi}{a} \frac{\partial}{\partial \phi} + w \frac{\partial}{\partial r}$$

$$\approx \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

Avec:  $x = a \cos \phi_0 (\lambda - \lambda_0)$ ,  $y = a (\phi - \phi_0)$ , et  $z = r - a$ .

Terme de Coriolis:

$$2\Omega \sin \phi \approx 2\Omega \sin \phi_0 + 2\Omega \cos \phi_0 (\phi - \phi_0)$$

$$\approx f_0 + \beta y$$

Continuité:  $(\text{div} \vec{u} = 0) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$

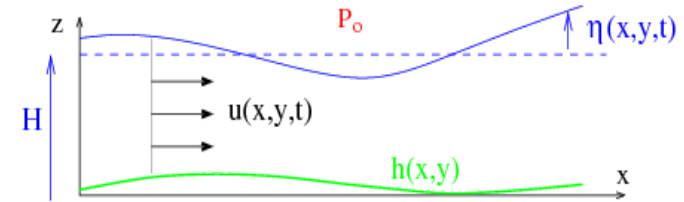
Equations de la quantité de mouvement horizontale:

$$\frac{Du}{Dt} - (f_0 + \beta y) v = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial x} + F_u$$

$$\frac{Dv}{Dt} + (f_0 + \beta y) u = -\frac{1}{\rho_r} \frac{\partial p}{\partial y} + F_v$$

Les termes de sphéricité  $\tan \phi \frac{uv}{a}$  et  $\tan \phi \frac{w^2}{a}$  sont aussi négligés.

Modèle de Saint Venant



Equilibre Hydrostatique:  $p = P_0 + \rho_r g (\eta - z)$

Conditions aux limites cinématiques:

$$w = \frac{D\eta}{Dt} \text{ en } z = H + \eta ; w = \frac{Dh}{Dt} \text{ en } z = h$$

Dérivée particulière:

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

Continuité:

$$\int_h^{H+\eta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dz = (H + \eta - h) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{D}{Dt} (H + \eta - h) = 0$$

Récapitulatif:

Continuité:

$$(H + \eta - h) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{D}{Dt} (H + \eta - h) = 0$$

Quantité de mouvement:

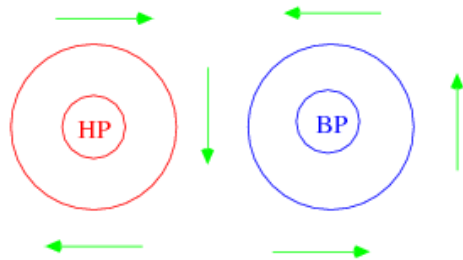
$$\frac{Du}{Dt} - (f_0 + \beta y) v = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_u$$

$$\frac{Dv}{Dt} + (f_0 + \beta y) u = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_v$$

# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

## Charney et DeVore (1979)

Approximation Quasi-Géostrophique:



Equilibre géostrophique:

$$f_0 u \approx -g \frac{\partial \eta}{\partial y} = f_0 u_g ; \quad f_0 v \approx g \frac{\partial \eta}{\partial x} = f_0 v_g$$

la vitesse géostrophique  $(u_g, v_g)$  est non divergente

Equations quasi-géostrophique:

$$D_g u_g - f_0 v - \beta y v_g = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + F_u$$

$$D_g v_g + f_0 u + \beta y u_g = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + F_v$$

$$(H + \eta - h) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + D_g (H + \eta - h) = 0$$

Avec:

$$D_g = \frac{\partial}{\partial t} + u_g \frac{\partial}{\partial x} + v_g \frac{\partial}{\partial y}$$

Vorticité Potentielle:

$$D_g \frac{\Delta \psi + f}{H + h - \eta} = \frac{\partial_x F_v - \partial_y F_u}{H + h - \eta}$$

$\psi = \frac{g}{f_0} \eta$  est le fonction de courant de la vitesse géostrophique;

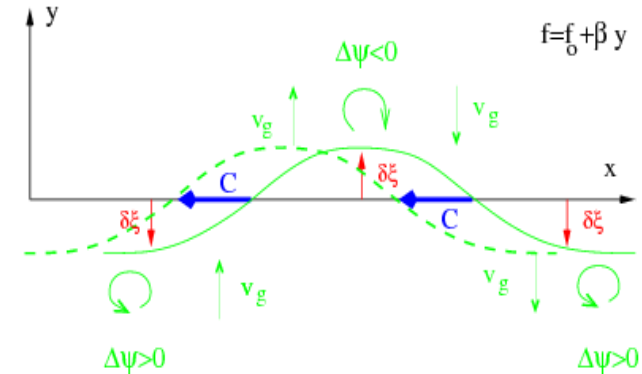
$$f = f_0 + \beta y$$

Vorticité Potentielle Quasi-Géostrophique:

Linéarisation pour  $\eta$  et  $h$  petits:

$$D_g \left( \underbrace{\Delta \psi + f - \frac{f_0^2}{gH} \psi + \frac{f_0}{H} h}_{VPQG} \right) = \partial_x F_v - \partial_y F_u$$

Ondes de Rossby:



Sans forçage ( $h = F_u = F_v = 0$ ) dans un écoulement moyen au repos et pour de petites perturbations, la conservation de la VPQG devient:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta \psi - \frac{f_0^2}{gH} \psi \right) + \frac{\partial \psi}{\partial x} \beta = 0$$

Ce qui donne, pour une onde monochromatique,

$$\psi(x, y, t) = \Re \left( \hat{\psi} e^{i(\omega t - kx)} \right),$$

la relation de dispersion des ondes de Rossby:

$$\omega = -\frac{\beta k}{k^2 + \frac{f_0^2}{gH}}$$

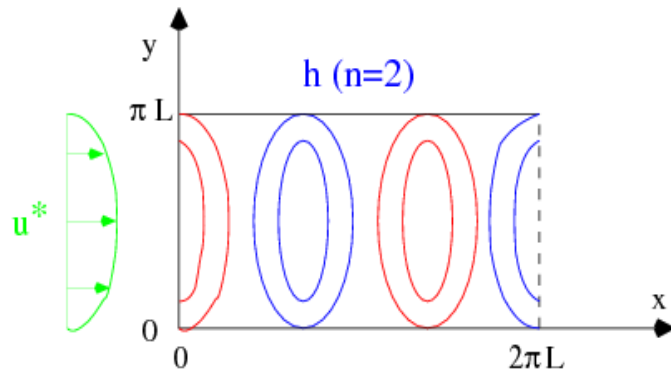
Vitesse de phase vers l'Ouest:

$$C = \frac{\omega}{k} = -\frac{\beta}{k^2 + \frac{f_0^2}{gH}}$$

# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

## Charney et DeVore (1979)

Modèle de Charney et DeVore (1979)



Canal périodique de longueur  $2\pi a \cos \phi_0 = 2\pi L$  et de largeur  $\pi L$

Rappel de l'écoulement vers une "climatologie":

$$F_u = -\gamma(u_g - u^*) ; F_v = -\gamma v_g$$

Vorticité Potentielle quasi géostrophique:

$$D_g \left( \underbrace{\Delta\psi + f - \frac{f_0^2}{gH}\psi + \frac{f_0}{H}h}_{VPQG} \right) = -\gamma\Delta(\psi - \psi^*)$$

Conditions aux limites:

$$v_g = \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0 \text{ en } y = 0, \pi L$$

Il s'agit d'un modèle forcé et dissipatif

Ecriture sous forme non-dimensionnelle:

$$\bar{t} = f_0 t, \quad \bar{x}, \bar{y} = \frac{x, y}{L}, \quad \bar{\psi} = \frac{\psi}{L^2 f_0}, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta L}{f_0}, \quad \bar{\gamma} = \frac{\gamma}{f_0}, \quad \bar{h} = \frac{h}{H}$$

Vorticité Potentielle quasi géostrophique:

$$\bar{D}_g \left( \Delta\bar{\psi} + \bar{\beta}\bar{y} - \frac{\bar{\psi}}{\bar{\lambda}^2} + \bar{h} \right) = -\bar{\gamma}\Delta(\bar{\psi} - \bar{\psi}^*)$$

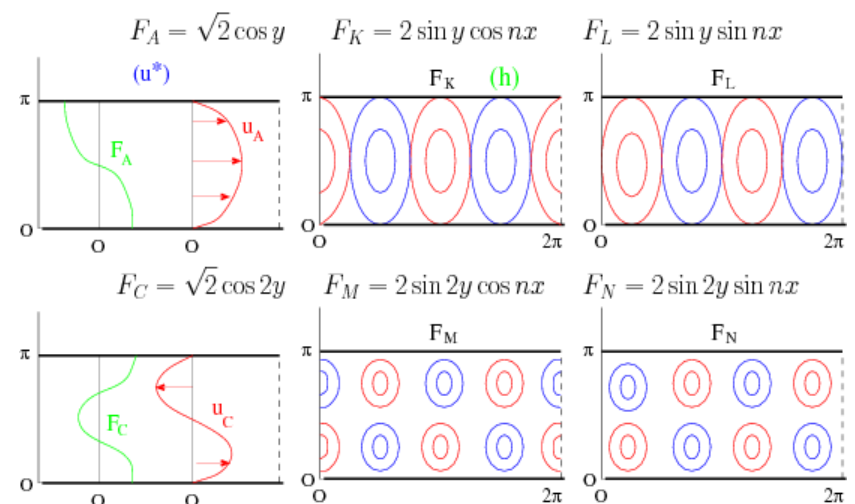
Rayon de déformation de Rossby normalisé:  $\bar{\lambda}^2 = \frac{gH}{f_0^2 L^2}$ . On omet les  $\bar{\quad}$  par la suite.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \Delta\psi - \frac{\psi}{\lambda^2} \right) = -J \left( \psi, \Delta\psi - \frac{\psi}{\lambda^2} + h + \beta y \right) - \gamma\Delta(\psi - \psi^*)$$

Décomposition en série de six fonctions propres de l'opérateur  $\Delta$ :

$$\Delta F_i = -a_i^2 F_i, \quad \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_i F_j dy dx = 2\pi^2 \delta_{i,j}, \quad \frac{\partial F_i}{\partial x} = 0 \text{ en } y = 0, \pi$$

$$\psi = \psi_A(t)F_A + \psi_K(t)F_K + \psi_L(t)F_L + \psi_C(t)F_C + \psi_M(t)F_M + \psi_N(t)F_N$$



# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

Charney et DeVore (1979)

Modèle de Charney et DeVore (1979) de l'instabilité topographique

Forçage:

Topography:  $h = h_0 F_K$ . Climatology:  $\psi^* = \psi_A^* F_A$ .

On se limite dans un premier temps à 3 degrés de liberté

Evol.	Rappel	Rossby-Advection	Forçages
			Montagnes
$\dot{\psi}_A = -k_{01}(\psi_A - \psi_A^*)$			$+h_{01}\psi_L$
$\dot{\psi}_K = -k_{n1}\psi_K$	$+(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)\psi_L$		
$\dot{\psi}_L = -k_{n1}\psi_L$	$-(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)\psi_K$	$-h_{n1}\psi_A$	

Ondes de Rossby, libres:

$$h_0 = 0, \text{ et } k_{01} = k_{n1} = 0$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_A &= 0 \\ \dot{\psi}_K &= (\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)\psi_L \\ \dot{\psi}_L &= -(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)\psi_K \end{aligned}$$

Solution pour un vent sous-critique:  $\omega = \beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A > 0$ .

$$\psi_K = \psi_{K0} \cos \omega t, \quad \psi_L = -\psi_{K0} \sin \omega t$$

Propagation vers l'Ouest

Solution pour un vent sur-critique:  $\omega = \alpha_{n1}\psi_A - \beta_{n1} > 0$ .

$$\psi_K = \psi_{K0} \cos \omega t, \quad \psi_L = \psi_{K0} \sin \omega t$$

Propagation vers l'Est (l'advection l'emporte)

Remarque: le système peut répondre de façon raisonnable au forçage des montagnes lorsque  $\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A \approx 0$

Solutions stationnaires

$$\dot{\psi}_A = \dot{\psi}_K = \dot{\psi}_L = 0$$

$$\psi_A = \psi_A^* + \frac{h_{01}\psi_L}{k_{01}}$$

$$\psi_L = -\frac{h_{n1}k_{n1}}{(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)^2 + k_{n1}^2}\psi_A$$

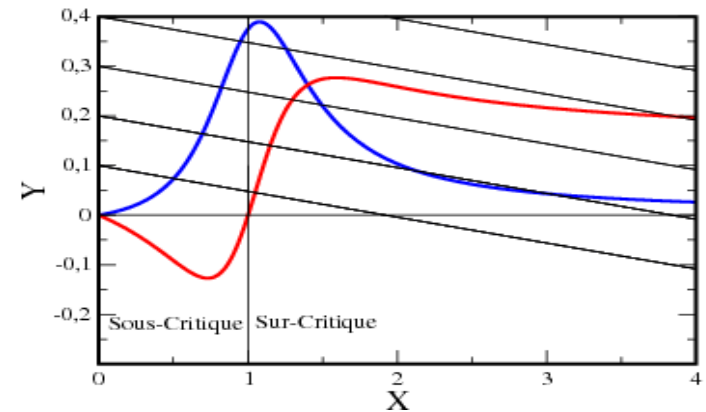
$$\psi_K = -\frac{h_{n1}(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)}{(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)^2 + k_{n1}^2}\psi_A$$

Résolution graphique:

$$Y = -\frac{h_{01}\psi_L}{k_{01}} = \psi_A^* - \psi_A, \quad X = \frac{\alpha_{n1}\psi_A}{\beta_{n1}}$$

$$Y = -\frac{h_{01}\psi_L}{k_{01}} = \frac{h_{01}}{k_{01}} \frac{h_{n1}k_{n1}}{(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)^2 + k_{n1}^2}\psi_A$$

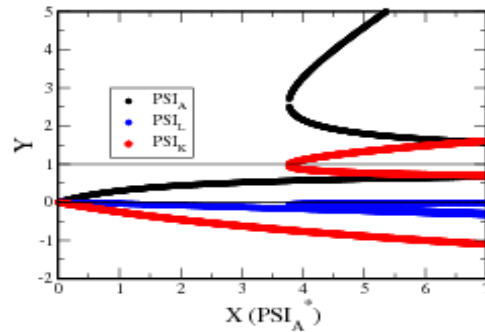
$$Y = \frac{h_{01}\psi_K}{k_{01}}$$



# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

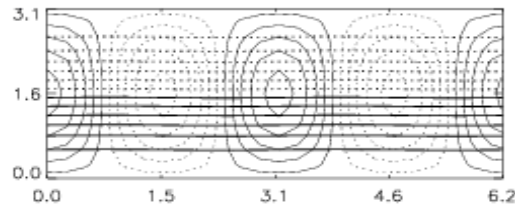
## Charney et DeVore (1979)

Solutions stationnaires

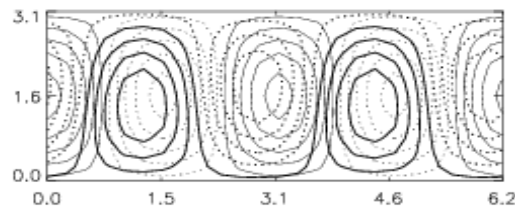


Fonctions de courant pour  $\psi_A^* = 0.45$

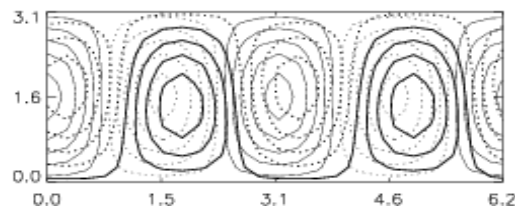
Zonal  
Stable



Bloqué  
Instable Fourche



Bloqué  
Instable Hopf



Calcul de la stabilité des solutions stationnaires

$$\psi_A^S, \psi_L^S, \psi_K^S$$

on note les perturbations:

$$\psi'_A = \psi_A - \psi_A^S, \psi'_L = \psi_L - \psi_L^S, \text{ et } \psi'_K = \psi_K - \psi_K^S$$

$$\begin{aligned} \dot{\psi}'_A &= -k_{01}\psi'_A && + h_{01}\psi'_L \\ \dot{\psi}'_K &= -k_{n1}\psi'_K + (\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A^S)\psi'_L && - \alpha_{n1}\psi_L^S\psi'_A \\ \dot{\psi}'_L &= -k_{n1}\psi'_L - (\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A^S)\psi'_K && + \alpha_{n1}\psi_K^S\psi'_A - h_{n1}\psi'_A \end{aligned}$$

$$\text{Notation synthétique: } \dot{\vec{\psi}} = L(\vec{\psi}^S)\vec{\psi}$$

En fonction des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $L(\vec{\psi}^S)$  on distingue trois cas:

1. **Stable:** Pour tous les  $\lambda_i$ ,  $\Re(\lambda_i) < 0$
2. **Instable fourche** Pour certains  $\lambda_i$ ,  $\Re(\lambda_i) > 0$  mais  $\Im(\lambda_i) = 0$
3. **Instable Hopf** Pour certains  $\lambda_i$ ,  $\Re(\lambda_i) > 0$  et  $\Im(\lambda_i) \neq 0$

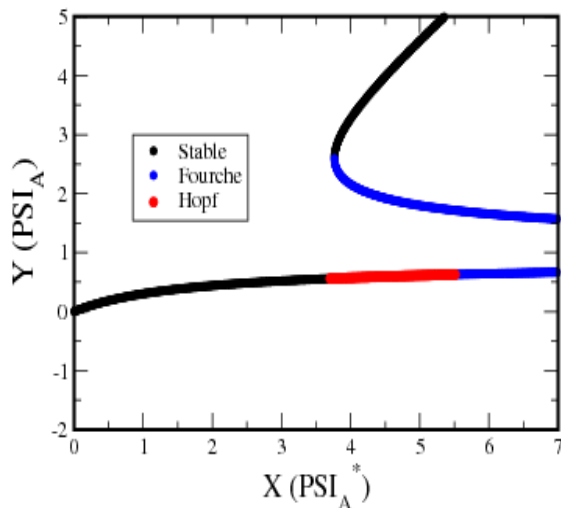
# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

## Charney et DeVore (1979)

### L'instabilité topographique

Dans le modèle de Charney et de Vore limité à 3 degrés de liberté seules 1 et 2 se produisent: la branche sous critique et la branche sur-critique pour laquelle  $\vec{\psi}_A \approx \vec{\psi}_A^*$  sont stables. L'autre branche sur critique est instable (fourche).

Dans le modèle de Charney et de Vore à 6 degrés de liberté La branche sous-critique devient aussi instable (Hopf puis fourche) au delà de la première bifurcation:



### Exemples d'évolution

#### Modèle complet:

Evol.	Rappel	Rosby-Advection	Forçages Montagnes	Ondes-ondes
$\dot{\psi}_A =$	$-k_{01}(\psi_A - \psi_A^*)$		$+h_{01}\psi_L$	
$\dot{\psi}_K =$	$-k_{n1}\psi_K$	$+(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)\psi_L$		$-\delta_{n1}\psi_C\psi_N$
$\dot{\psi}_L =$	$-k_{n1}\psi_L$	$-(\beta_{n1} - \alpha_{n1}\psi_A)\psi_K$	$-h_{n1}\psi_A$	$+\delta_{n1}\psi_C\psi_M$
$\dot{\psi}_C =$	$-k_{02}\psi_C$		$+h_{02}\psi_N$	$+\epsilon_n(\psi_K\psi_N - \psi_L\psi_M)$
$\dot{\psi}_M =$	$-k_{n2}\psi_M$	$+(\beta_{n2} - \alpha_{n2}\psi_A)\psi_N$		$-\delta_{n2}\psi_C\psi_L$
$\dot{\psi}_N =$	$-k_{n2}\psi_N$	$-(\beta_{n2} - \alpha_{n2}\psi_A)\psi_M$	$-h_{n2}\psi_C$	$+\delta_{n2}\psi_C\psi_K$

#### Paramètres et constantes:

$$\frac{\gamma_{n1}}{5} = \frac{\gamma_{n2}}{4} = \frac{\gamma_{n3}}{8} = \frac{8\sqrt{2}}{15\pi}n,$$

$$\alpha_{nm} = \frac{n^2 + m^2 - 1}{n^2 + m^2 + \lambda^{-2}\gamma_{nm}}, \quad \delta_{nm} = \frac{n^2 - m^2 + 1}{n^2 + m^2 + \lambda^{-2}\gamma_{n3}}, \quad \epsilon_n = \frac{3\gamma_{n3}}{4 + \lambda^{-2}},$$

$$k_{nm} = \frac{n^2 + m^2}{n^2 + m^2 + \lambda^{-2}\gamma}, \quad \beta_{nm} = \frac{n}{n^2 + m^2 + \lambda^{-2}a} \cot \phi_0,$$

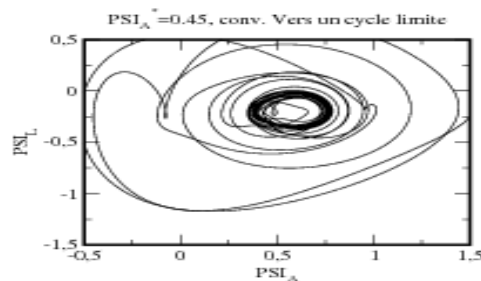
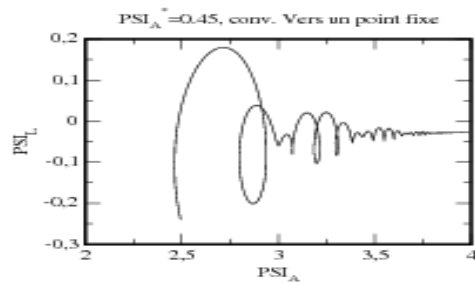
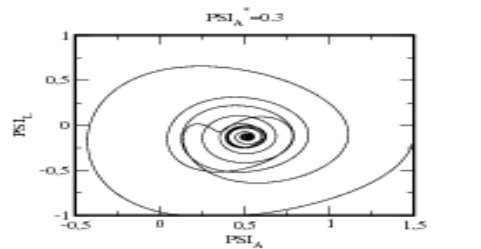
$$h_{01} = \frac{\gamma_{n1}}{1 + \lambda^{-2}2H} \frac{h_0}{a}, \quad h_{02} = \frac{\gamma_{n3}}{4 + \lambda^{-2}2H} \frac{h_0}{a},$$

$$h_{n1} = \frac{\gamma_{n1}}{n^2 + 1 + \lambda^{-2}2H} \frac{h_0}{a}, \quad h_{n2} = \frac{\gamma_{n3}}{n^2 + 4 + \lambda^{-2}2H} \frac{h_0}{a}.$$

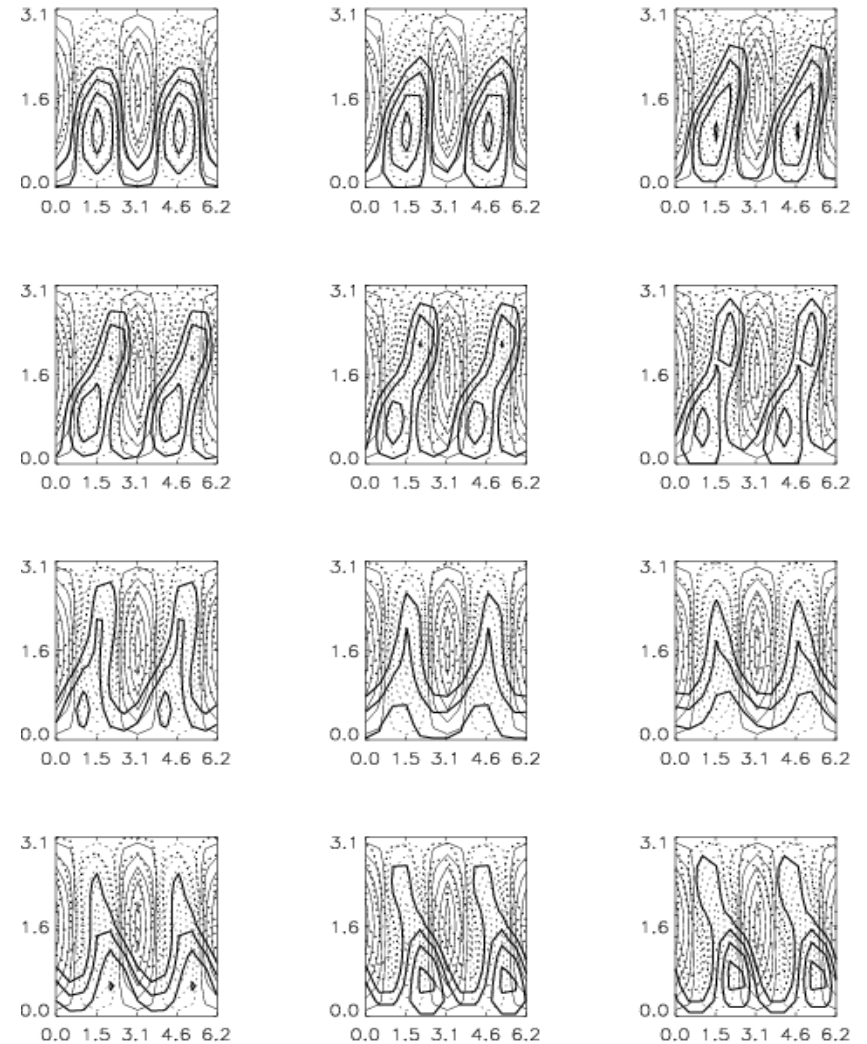
# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

## Charney et DeVore (1979)

Evolutions dans le diagramme des phases  $\psi_A, \psi_L$



Fonction de courant tous les jours





# VII.5) Le modèle simple de la variabilité basse fréquence aux moyennes latitudes

## Charney et DeVore (1979)

Fonction de courant tous les jours, modes  $\psi_C$   $\psi_M$   $\psi_N$  seulement

