PSL UNIVERSITÉ PARIS

THÈSE DE DOCTORAT
DE L'UNIVERSITÉ PSL

Préparée à l'École Normale Supérieure de Paris

Couche limite atmosphérique et ondes orographiques : impact sur le climat et la propagation des infrasons

Soutenue par
Lucile Pauget
Le 18 décembre 2024

École doctorale n°129
Ecole doctorale des Science de l'environnement d'Ile de France

Spécialité
Sciences du climat, de l'atmosphère et des océans, terrestres et planétaires.

Composition du jury :

Lapeyre Guillaume LMD/ENS, Sorbonne Université	*Président du Jury*
Le Dizès Stéphane IRPHE, Aix-Marseille Université	*Rapporteur*
Ricard Didier CNRM, Météo-France	*Rapporteur*
Müller Caroline ISTA, Klosterneuburg, Autriche	*Examinatrice*
Staquet Chantal LEGI, Université Grenoble-Alpes	*Examinatrice*
Vignon Étienne LMD/Paris 6, Sorbonne Université	*Examinateur*
Lott François LMD/ENS, Sorbonne Université	*Directeur de thèse*
Millet Christophe CEA/DAM Ile–de-France	*Co-directeur de thèse*

ENS | PSL

Résumé

L'objectif de cette thèse est d'introduire dans les phénomènes de piégeage des ondes dans l'atmosphère, des phénomènes pouvant affecter considérablement leur propagation dans la direction horizontale. Nous nous intéressons dans un premier temps aux ondes de montagne piégées et analysons leur amortissement lorsqu'on prend en compte l'effet d'une couche limite. Nous nous limitons à un cadre théorique linéaire incluant une couche limite basée sur la théorie de la longueur de mélange. Dans un premier temps, l'absorption par la couche limite d'une onde stationnaire se propageant vers la surface fait l'objet d'une étude approfondie car on pense que prendre en compte cette absorption modifie considérablement les théories classiques des ondes piégées. On montre en particulier que cette absorption, que l'on mesure par un coefficient de réflexion est contrôlée par un nombre de Richardson, J, mesuré dans la couche de limite au dessus de la couche de surface, la réflexion diminuant lorsque la stabilité (J) augmente. Le deuxième paramètre, z_a mesure la distance en dessous du sol à laquelle se trouve le niveau critique des ondes stationnaire non dissipées. Si on prolonge linéairement en dessous du sol le vent incident sans tenir compte de la couche de surface, cette prolongation linéaire atteint une valeur nulle en z_a. Ce paramètre dépend directement de la valeur asymptotique de la longueur de mélange losrque l'altitude $z \to \infty$ et de la longueur de rugosité z_0 : lorsque la profondeur du niveau critique augmente, la réflexion des ondes est plus forte. Dans un second temps, l'ajout du forçage par une montagne a permis d'étudier le développement d'ondes piégées à l'aval d'un relief au regard des résultats obtenus sur la réflexion des ondes à la surface. Les modes préférentiels et le taux de décroissance des ondes ont été étudiés, mettant en évidence une forte atténuation des ondes en corrélation avec le coefficient de réflexion. Lorsque l'absorption des ondes est importante mais que la hauteur de la couche limite est assez grande, des modes piégés interagissant peu avec la surface apparaissent.

Dans un second temps nous nous sommes intéressés à la propagation horizontale des infrasons, piégés dans un guide d'onde s'étendant sur toute l'atmosphère moyenne, et avons analysé comment celui-ci était modifié par la présence d'ondes de gravité. Initialement, nous souhaitions considérer la propagation à travers des ondes de montagne, en cohérence avec la première étude, mais cela c'est avéré compliqué techniquement. Pour palier ce problème nous avons plutôt utilisé des champs d'ondes de gravité prédits par une paramétrisation des ondes produites par la convection et par les fronts, paramétrisation opérationnelle dans le modèle de climat de l'IPSL. A partir de flux d'Eliassen-Palm ayant des valeurs proches de celles imposées dans le modèle de climat pour que celui ci prédise une circulation raisonnable dans l'atmosphère moyenne, nous avons reconstruit des champs d'ondes pour 106 cas réels issus d'explosions à Hukkakero en Finlande et enregistrés à la station d'infrasons de I37NO située à 321 km de la source. La sensibilité aux différents paramètres sur les amplitudes de perturbation a d'abord été étudiée et montre l'impact de 3 paramètres contrôlant le déferlement des ondes, leur vitesse de phase caractéristique, et leur amplitude à la source. Une étude de l'impact de ces champs avec des paramètres fixés a ensuite été faite. Nous avons montré que les ondes de gravité impactent particulièrement l'amplitude des signaux stratosphériques reçus dans des cas défavorables (guides d'ondes peu fermés) et ajoutent des petites structures dans les signaux. En comparaison avec les signaux réels, les longueurs d'ondes présentes dans les signaux simulés sont encore trop grandes même dans une configuration où la vitesse de phase caractéristique des ondes est faible par rapport aux valeurs opérationnelles ($10m/s$). On montre aussi que les ondes de gravité peuvent avoir un impact sur les temps d'arrivées de la phase stratosphérique en modifiant l'altitude à laquelle les profils de célérité du son dépassent la valeur au niveau de la surface, c_0.

Ces études ont plusieurs applications potentielles. En ce qui concerne les paramétrisations des montagnes d'échelles sous maille dans les modèles de prévision climatique et météorologique, les études combinant couche limite et ondes de gravité devraient permettre de réconcilier deux méthodes distinctes de paramétrer les montagnes d'échelle sous maille : les paramétrisations prenant en compte ce qu'on appelle la traînée orographique turbulente, et les paramétrisations traitant la dynamique contrôlée par les ondes de gravité. En ce qui concerne les infrasons, améliorer la prévision de leur propagation devrait permettre de mieux ajuster les paramètres de réglage des paramétrisations des ondes de gravité dans les modèles

de climat. Il y a en effet peu d'observations directes et globales de ces ondes. Enfin, améliorer le calcul des trajectoires des infrasons a une application directe dans le cadre de la surveillance du traité de non-prolifération des armes nucléaires.

Abstract

The aim of this thesis is to introduce phenomena into the trapping of waves in the atmosphere that can considerably affect their propagation in the horizontal direction. We first look at trapped mountain waves and analyse their damping when the effect of a boundary layer is taken into account. We restrict ourselves to a linear theoretical framework including a boundary layer based on mixing length theory. First, the absorption by the boundary layer of a standing wave propagating towards the surface is studied in depth, as it is thought that taking this absorption into account considerably modifies the classical theories of trapped waves. In particular, it has been shown that this absorption, which is measured by a reflection coefficient, is controlled by a Richardson number, J, measured in the boundary layer above the surface layer, with the reflection decreasing as the stability (J) increases. The second is a parameter z_a measuring the distance below the ground at which the critical level of undissipated standing waves is found. If we linearly extend the incident wind below the ground without taking the surface layer into account, this linear extension reaches a zero value at z_a. This parameter depends directly on the asymptotic value of the mixing length at altitude $z \to \infty$ and the roughness length z_0 : as the depth of the critical level increases, the reflection of the waves is stronger. In a second step, the addition of a mountain forcing made it possible to study the development of trapped waves downstream of a relief with regard to the results obtained on the reflection of waves at the surface. The preferential modes and decay rate of the waves were studied, revealing strong attenuation of the waves in correlation with the reflection coefficient. When wave absorption is high but the height of the boundary layer is high enough, trapped modes that interact little with the surface appear.

Secondly, we looked at the horizontal propagation of infrasound, trapped in a waveguide extending across the middle atmosphere, and analysed how this was modified by the presence of gravity waves. Initially, we wanted to consider propagation through mountain waves, in line with the first study, but this proved technically complicated. To overcome this problem, we instead used gravity wave fields predicted by a parametrisation of the waves produced by convection and by fronts, a parametrisation that is operational in the IPSL climate model. Using Eliassen-Palm fluxes with values close to those imposed in the climate model to predict a reasonable circulation in the middle atmosphere, we reconstructed wave fields for 106 real cases from explosions at Hukkakero in Finland and recorded at the I37NO infrasound station located 321 km from the source. The sensitivity of the various parameters on the amplitudes of disturbance was first studied and shows the impact of 3 parameters controlling the breaking of the waves, their characteristic phase speed and their amplitude at the source. A study of the impact of these fields with fixed parameters was then carried out. We have shown that gravity waves have a particular impact on the amplitude of stratospheric signals received in unfavourable cases (waveguides that are not very closed) and add small structures to the signals. Compared with the real signals, the wavelengths present in the simulated signals are still too long even in a configuration where the characteristic phase velocity of the waves is low compared with the operational values $(10m/s)$. We also show that gravity waves can also have an impact on the arrival times of the stratospheric phase by modifying the altitude at which the sound celerity pro files exceed the value at surface level, c_0.

These studies have several potential applications. With regard to the parameterisations of subgrid scale mountains in climate and weather forecasting models, studies combining boundary layers and gravity waves should make it possible to reconcile two distinct methods of parameterising subgrid sca le mountains : parameterisations taking into account what is known as turbulent orographic drag, and parameterisations dealing with the inviscid dynamics controlled by gravity waves. As far as infrasound is concerned, improved prediction of its propagation should make it possible to better adjust the parameters used to parameterise gravity waves in climate models. There are few direct global observations of these waves. Finally, improving the calculation of infrasound trajectories has a direct application to the monitoring of the Nuclear Non-Proliferation Treaty.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

L'essentiel du travail présenté dans cette thèse porte sur le piégeage d'ondes de courtes longueurs d'onde (infrasons et ondes internes de gravité) dans l'atmosphère. Ce piégeage dans la direction verticale induit des guides pour les ondes, soit en les forçant à retourner vers la surface dans la troposphère, soit en les confinant entre deux altitudes dans l'atmosphère moyenne (stratosphère et mésosphère). Ces guides permettent aux ondes de se propager dans la direction horizontale sur de grandes distances si les processus les dissipant ne sont pas trop forts. Dans cette thèse nous étudierons à la fois les infrasons, des ondes sonores suffisamment longues (et de fréquence basse) pour que les processus dissipatifs ne soient pas trop forts, et les ondes de gravité de montagne pour lesquelles nous étudierons en détail comment la dissipation dans la couche limite affecte leur propagation horizontale. Pour toutes les ondes étudiées dans cette thèse, ce piégeage résulte des variations verticales de la température (stratification) et du vent horizontal. Nous analyserons aussi en détail comment les ondes de gravité peuvent modifier ces guides d'ondes et affecter la propagation des infrasons.

Dans l'atmosphère neutre, il existe trois types d'ondes liés à trois mécanismes de rappel (force s'opposant aux mouvements pour rétablir l'équilibre) différents, qui correspondent souvent à des échelles de temps et d'espace bien distincts. Le premier est lié à la compressibilité du milieu où une perturbation du champ de pression induit un champ de vitesse transportant de la masse. Cela modifie localement la pression ; ce sont **les ondes sonores**. Le second est lié à la flottabilité : toute parcelle d'air déplacée verticalement dans un milieu stratifié est rappelée vers sa position d'équilibre, ce qui génère **les ondes de gravité**. Le troisième est lié à la rotation terrestre. En effet, comme la rotation terrestre planétaire varie dans la direction méridienne (le paramètre de Coriolis varie aussi), des **ondes de Rossby** sont créées. Plus précisément, pour que la vorticité absolue (rotation totale d'une parcelle d'air) soit conservée, tout déplacement méridien induit une vorticité relative (rotation d'une parcelle d'air par rapport à la surface terrestre) qui produit en réponse un autre déplacement méridien. Suivant leur type, ces ondes sont d'échelles synoptiques ou planétaires, mais nous n'étudierons pas les ondes de Rossby dans cette thèse.

1.1 Infrasons

Les infrasons sont des ondes acoustiques de basse fréquence (inférieure à 20 Hz) qui ont des origines naturelles ou liées aux activités humaines. Parmi les sources naturelles, on trouve les éruptions volcaniques, la houle océanique, les orages ou les tsunamis. Parmi les sources liées aux activités humaines, on peut citer les explosions, les tirs de carrière, les éoliennes ou les fusées. L'enregistrement et l'étude de ces ondes sont faits systématiquement dans le cadre du respect du Traité d'Interdiction Complète des Essais nucléaires (TICE) signé le 24 septembre 1996. Les enregistrements infrasonores enregistrés par les stations de surveillance du Système de Surveillance Internationale (SSI) ont pour but de permettre la reconnaissance des sources à l'origine des signaux obtenus. C'est pour cela que, la modélisation de la propagation des ondes infrasonores dans l'atmosphère est un axe de recherche développé au Commissariat à l'énergie Atomique (CEA). Une incertitude majeure pour localiser les sources vient de l'impact des fluctuations de l'atmosphère sur les conditions de propagation des infrasons sur de longues distances.

Afin de donner une première idée des régions permettant de guider les ondes sonores dans l'atmosphère (c'est à dire des zones où les ondes sont confinées), il est conventionnel de considérer que les échelles de temps et d'extension horizontales sont suffisamment courtes pour que l'on puisse décrire nos ondes sous la forme de perturbations monochromatiques :

$$p' = \mathbf{p}(z)e^{i(kx-\omega t)}, \tag{1.1}$$

avec p' la perturbation du champ de pression, $\mathbf{p}$ son amplitude, k le nombre d'onde dans la direction horizontale x, t le temps, et ω la fréquence absolue des ondes. En ne considérant que les grandes fréquences $\hat{\omega} >> 1$ ($\hat{\omega}$, la fréquence intrinsèque telle que $\hat{\omega} = \omega - ku$ avec u le vent horizontal) pour pouvoir négliger les termes faisant intervenir la pesanteur, les équations linéarisées peuvent être combinées en une seule équation pour les perturbations de pression :

$$\frac{d^2\mathbf{p}}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_{eff}^2(z)} - k^2\right)\mathbf{p} = 0 \tag{1.2}$$

où $C_{eff} = \sqrt{\gamma r T} + u(z)$ est la célérité effective avec T la température, γ le coefficient adiabatique, et $r = R/M$. $R = 8.314$ (J.mol^{-1}.K^{-1}) est la constante des gaz parfaits et M la masse molaire moyenne qui vaut 29 (g.mol^{-1}) pour des altitudes inférieures à 90 km. L'approximation de la célérité effective permet d'inclure l'impact du vent sur la vitesse de propagation du son. Le terme entre parenthèse dans l'équation (1.2) caractérise la structure verticale de la perturbation. Lorsqu'il est supérieur à 0, celle-ci peut se propager vers le haut, tandis que lorsqu'il est négatif, la solution s'atténue exponentiellement avec la distance à son point source. Les altitudes où ce terme change de signe modifient la nature de la solution qui passe de propagative à évanescente et sont appelées des points tournants. Les guides d'ondes sont alors des zones où l'onde est propagative dans la direction verticale mais est piégée de part et d'autre, soit par deux points tournants (guide d'onde dans l'atmosphère moyenne), soit par le sol et un point tournant (guide d'onde troposphérique). Une manière classique de représenter ces guides d'ondes est d'utiliser la méthode du tracé de rayon. Chaque solution monochromatique est un paquet d'ondes ponctuel qui se propage à la vitesse de groupe le long de rayons. Pour reconstruire un champ d'onde on considère alors un ensemble de paquets émis depuis une source située au sol avec des angles correspondant à des vecteurs d'ondes de directions différentes. Lorsqu'un rayon est réfracté vers la surface, par exemple parce qu'il rencontre un point tournant où la célérité effective est supérieure à sa valeur au sol, il revient vers le sol (Pierce, 1989). Un exemple est montré figure 1.1 où des rayons sont émis depuis la source, située à 0 km, et réfractés à deux altitudes notables, 60 km et 120 km. Une conséquence de ces effets géométriques de propagation des ondes est qu'ils peuvent créer des endroits où les rayons adjacents se rejoignent (zones de caustiques) et des zones où aucun rayon ne passe (des zones d'ombres). Dans ces dernières, l'énergie pénètre quand même par diffraction sur une profondeur qui dépend du spectre de l'onde incidente. L'absorption atmosphérique, due à la viscosité de l'air, joue également un rôle sur la propagation des infrasons. Elle est faible dans l'atmosphère moyenne pour les basses fréquences mais peut être forte dans la couche limite lorsque la turbulence disperse les paquets d'ondes. La dissipation moléculaire atténue toutes les ondes sonores au au-delà de 140km.

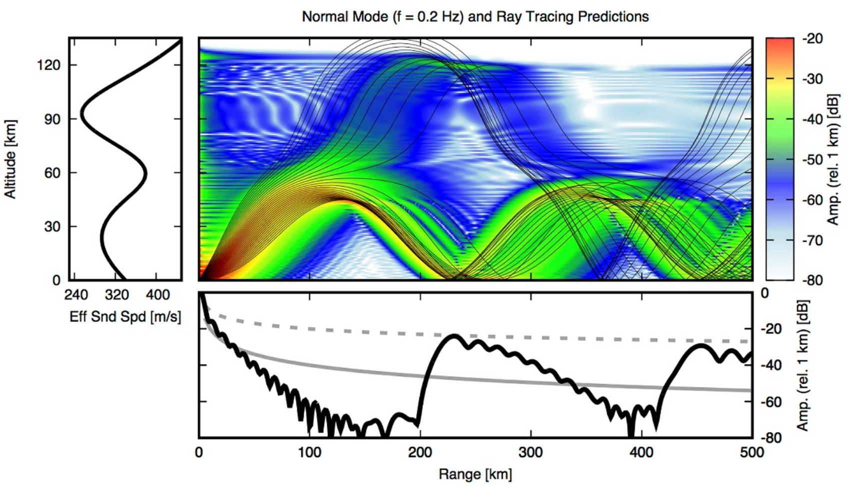


FIGURE 1.1 – Propagation des infrasons par méthode de tracé de rayon

1.2 Ondes de gravité

On désigne par "ondes de gravité" les oscillations produites par le déplacement de parcelles d'air ramenées à leur position d'équilibre par la force de gravité et la flottabilité. Ces ondes se propagent verticalement et horizontalement à travers l'atmosphère, influençant des régions parfois très éloignées de leur source. Leur propagation est cependant limitée par des phénomènes comme le déferlement, qui survient lorsque l'amplitude de l'onde devient suffisamment grande pour que celle-ci se brise, dissipant ainsi son énergie. Leurs sources, multiples, sont représentées sur la figure 1.2 et détaillées plus loin dans cette section.

La première source majeure d'ondes de gravité est le relief (montagnes, canyons... désignés sous le nom d'*orographie*) : lorsqu'un écoulement stratifié essaie de le franchir, des déplacements verticaux sont induits et produisent des anomalies de flottabilité. Ces ondes de montagne sont presque stationnaires, se propagent verticalement, et ont une longueur d'onde horizontale allant du kilomètre à quelques dizaines de km. En-dessous de ces échelles, l'effet de la stratification ne se fait pas beaucoup sentir, et au-delà, la force de Coriolis n'est plus négligeable. Ces ondes seront détaillées dans la section 2.3.

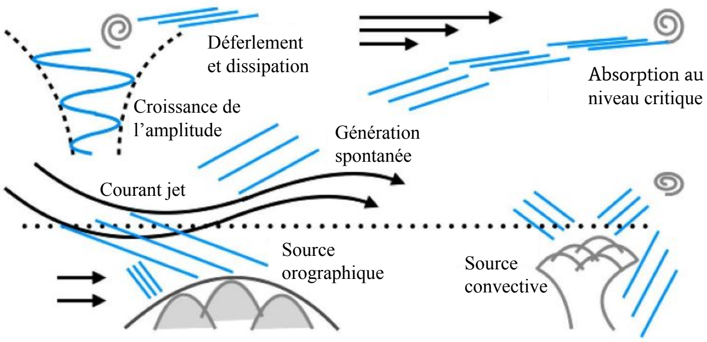


FIGURE 1.2 – Schéma représentant les sources des ondes de gravité et leur propagation (en bleu), modifié depuis (Sutherland et al., 2019). Le trait en pointillé désigne la tropopause et les flèches en noir représentent le vent.

La convection est également source d'ondes de gravité avec un spectre spatial proche de celui des ondes de montagne mais avec une structure temporelle bien plus riche (ce ne sont pas des ondes stationnaires) (Kruse et al., 2023; Alexander and Holton, 2004). Trois mécanismes identifiés sont à l'origine des ondes de gravité dans les situations convectives : les oscillations mécaniques des parcelles d'air autour de leur niveau de flottabilité neutre (Bretherton, 1988), le forçage adiabatique pour lequel les variations spatiales et temporelles de chauffage convectif produisent des perturbations du champ de densité (Nicholls and Pielke, 2000; Clark et al., 1986), et l'effet d'obstacle (Clark et al., 1986). Ce dernier est causé par l'élément convectif qui agit comme une barrière au flux moyen et produit des ondes de manière similaire à une source orographique. L'une des difficultés pour bien représenter la source convective de ces ondes est son intermittence qui s'ajoute au caractère non déterministe des caractéristiques des ondes émises. En effet, les ondes générées par la convection ont des caractéristiques appartenant à un large spectre de valeurs de vitesse de phase, longueurs d'onde horizontales et verticales. Elles jouent un rôle important dans les tropiques et influencent fortement la stratosphère et les modes de variabilité atmosphériques dans cette région.

Les fronts et jets sont aussi une source importante d'ondes de gravité associées au flux de grande échelle à l'équilibre. Observées (Zhang and Yi, 2005; Plougonven and Teitelbaum, 2003) et simulées (Kaplan et al., 1997) depuis un certain temps, les ondes ainsi générées sont des ondes basse fréquence, aussi appelées ondes internes de gravité pour lesquelles la rotation de la Terre joue un rôle important et dont la fréquence est proche du paramètre de Coriolis ($\omega \sim f$). Leur longueur d'onde horizontale est de quelques dizaines de km contre une longueur d'onde verticale de quelques km. Les perturbations de vitesse de vent qu'elles induisent sont typiquement de 5 à 8 m.s^{-1}. Les mécanismes permettant de générer des ondes de gravité à partir des fronts et jets ne sont pas encore totalement compris mais trois processus peuvent être identifiés comme étant les plus importants et font l'objet d'une revue de Plougonven and Zhang (2014). Le premier est lié à l'évolution non linéaire d'un fluide à l'équilibre qui donne lieu à des régions localisées hors équilibre créant les ondes de gravité. Ce phénomène est une généralisation de l'"ajustement géostrophique". Le deuxième mécanisme est lié à la génération spontanée d'ondes par un fluide à l'équilibre durant son évolution (Lott et al., 2012b). Dans le troisième mécanisme, des instabilités de cisaillement mènent à la génération spontanée d'ondes de gravité de petites échelles (Lott and Teitelbaum, 1992).

Comme pour les ondes sonores, mais cette fois en négligeant l'effet de la compressibilité et en incluant la stratification, la structure verticale des ondes de gravité peut être décrite par une équation d'onde, cette fois-ci sur les harmoniques de la vitesse verticale, w,

$$w' = \mathbf{w}(z)e^{i(kx-\omega t)}, \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2\mathbf{w}}{dz^2} + \left(\frac{N^2}{(U-\omega/k)^2} - \frac{U_{zz}}{U-\omega/k} - k^2\right)\mathbf{w} = 0. \tag{1.4}$$

Ici N, la fréquence de Brunt Väisälä, mesure la stratification thermique (voir section 2.1) et U est le vent horizontal dont la dérivée seconde sur la verticale est écrite U_{zz}. k est le nombre d'onde horizontal et ω la fréquence absolue. L'équation (1.4), dite de Taylor-Goldstein, est donnée ici dans le cadre d'une onde unidirectionnelle dans l'approximation de Boussinesq. Comme pour les ondes sonores, on voit que le terme entre parenthèse peut changer de signe avec l'altitude. Les altitudes où ce terme change de signe sont à nouveau des points tournants où les perturbations changent de nature en ce qui concerne leur propagation verticale. Nous reviendrons en détail sur les ondes de montagnes piégées, mais pour celles-ci, le fait que le vent soit faible près du sol et plus grand en altitude délimite une zone où les perturbations peuvent se propager verticalement à bas niveau mais ne peuvent pas atteindre la haute atmosphère.

Une autre caractéristique des ondes internes de gravité est que leur vitesse de phase ω/k est assez faible et n'est jamais très éloignée de la vitesse U de l'écoulement à l'endroit où elles sont émises. On trouve régulièrement des altitudes z_c où la vitesse de phase est égale au vent moyen, $\omega/k = U(z_c)$. Le terme entre parenthèse de l'équation (1.4) devient alors infini et les ondes y sont généralement fortement absorbées. On parle de niveaux critiques, qui se distinguent des niveaux tournants où les ondes sont totalement réfléchies sans être absorbées. Nous verrons que pour les ondes de montagne, une dynamique de type niveau critique se produit près du sol et nous expliquerons à partir de ce concept une partie des propriétés absorbantes de la couche limite.

1.3 Structure de l'atmosphère

Comme nous le voyons dans les équations (1.2)-(1.4), les variations verticales de température et de vent conditionnent la propagation verticale et les piégeages des ondes que nous étudions (nous verrons plus loin comment la fréquence de Brunt-Väisälä est liée à la température). L'atmosphère, en moyenne globale, est divisée en couches dont les altitudes limites sont déterminées par des changements de signe du gradient vertical du profil de température (Figure 1.3). Celui-ci est contrôlé par l'absorption du rayonnement terrestre et solaire.

La *troposphère* est la couche la plus basse de l'atmosphère, contenant environ 80% de sa masse. La température y décroît du sol à la *tropopause* située à une altitude d'environ 10km aux pôles et 18 km à l'équateur. Cette décroissance verticale de la température provient en partie du fait que l'air y est chauffé par le bas, par l'absorption du rayonnement infrarouge venant du sol. En effet, les rayons solaires incident ne chauffent presque pas l'atmosphère qui est transparente aux rayons dans le spectre du visible, mais elle n'est pas transparente aux infrarouges, renvoyés pas la Terre.

Au-dessus de la tropopause se trouve la *stratosphère*. Le gradient de température y est positif, résultant du dégagement de chaleur lié à l'absorption des rayons ultraviolets par l'ozone. Cela rend la stratosphère très stable : la convection est inhibée.

Située entre 55km et 90km, la *mésosphère* est la couche la plus froide. Sa température diminue avec l'altitude jusqu'à atteindre -100°C. Au delà se situe la *thermosphère* dont le très fort gradient de température positif lui permet d'atteindre plus de 1000°C au-dessus de 300 km. Ce gradient est cependant lié à un cycle de marée très marqué à ces altitudes. Plus haut, la notion de température devient discutable localement car on trouve des régions où l'air est si ténu que l'atmosphère n'est plus à l'équilibre thermodynamique local.

En réalité, ce profil de température n'est pas uniforme en latitude, par exemple en raison de la différence d'énergie reçue par la Terre entre l'équateur et les pôles ; le profil varie aussi en fonction des saisons. Pour mieux caractériser ces effets climatiques, il est conventionnel de représenter la température

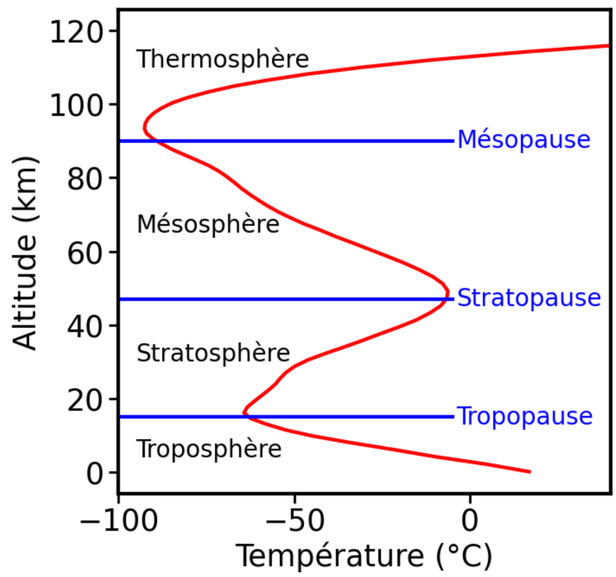


FIGURE 1.3 – Structure thermique de l'atmosphère (Données CIRA)

moyennée sur la longitude (λ) en fonction de la latitude (ϕ) et de l'altitude (z) :

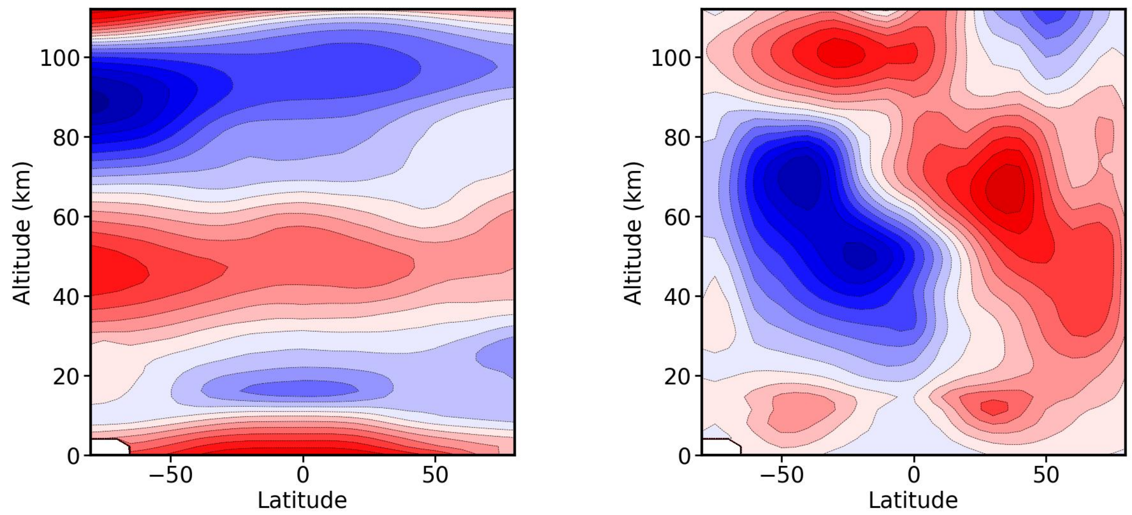
$$\bar{T}(\phi, z) = \int_0^{2\pi} T(\lambda, \phi, z) d\lambda. \tag{1.5}$$

La figure 1.4a montre ce champ en moyenne climatologique pour le mois de janvier. Dans la troposphère ($z < 16$km), la température décroît de l'équateur vers les pôles car cette couche est forcée par la surface, via entre autres l'absorption du rayonnement infrarouge émis par la Terre. En fonction des latitudes, on peut voir que la température présente un minimum au niveau de la tropopause tropicale (autour de $z = 16$km), et qu'elle décroît de manière monotone du pôle d'été au pôle d'hiver dans la stratosphère et basse mésosphère (24km$< z <$ 64km). On trouve même un maximum de température à la stratopause ($\approx$ 50km) de l'hémisphère d'été, c'est-à-dire à l'endroit où l'ensoleillement journalier est maximum en Janvier : ce maximum résulte essentiellement de l'absorption des ultraviolets solaires par l'ozone. De manière plus surprenante, autour de la mésopause ($z \approx 80$km), on trouve un minimum de température près du pôle d'été, la température croissant vers le pôle d'hiver. Si on fait exception de sa structure à la mésopause, on pourrait déduire que la climatologie de la température résulte essentiellement des chauffages infrarouges dans la troposphère et par absorption des UV dans la stratosphère. Le minimum à la tropopause équatoriale est expliqué par l'excès de vapeur d'eau dans la troposphère à ces latitudes qui atténue particulièrement les infrarouges dans cette région.

Aux grandes échelles spatiales, il est intéressant de noter que ces variations méridiennes de température sont liées aux structures des vents par l'équilibre du vent thermique :

$$2\omega \sin\phi \frac{d\overline{U}}{dz} = -\frac{R}{aH}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \phi}, \tag{1.6}$$

où a est le rayon de la terre, R est la constante des gaz parfaits, $z = H \ln p_s/p$ est la hauteur log-pression, avec p_s la pression de surface et H l'échelle de hauteur caractéristique de l'atmopshère. Ainsi, les gradients méridiens de température dans la troposphère se traduisent par deux jets venant de l'ouest au niveau des tropiques sous la tropopause qui s'étendent presque jusqu'à la surface et caractérisent la circulation dans cette couche (figure 1.4b). Dans la moyenne atmosphère, la direction des vents zonaux dépend de la saison : vers l'est dans l'hémisphère d'hiver et vers l'ouest dans l'hémisphère d'été, cette fois ci parce que la température varie uniformément d'un pôle à l'autre.



(a) Températures moyennes zonales en janvier. Les valeurs < (>) 230 K sont représentées en bleu (rouge)

(b) Vent moyen zonal en janvier, les valeurs négatives (positives) sont représentées en bleu (rouge).

FIGURE 1.4 – *Températures et vent moyens zonaux en janvier, données CIRA.*

1.4 Effet des ondes de gravité sur l'écoulement de grande échelle

Dans la section précédente nous laissions entendre que les forçages thermiques seuls induisent des vents zonaux que l'on retrouve par équilibre du vent thermique. Cette vision ne résiste pas à un examen approfondi des températures sur la figure 1.4a. Si par exemple on calcule le champ de température en équilibre radiatif avec le chauffage IR du sol et UV dans la stratosphère, les gradients de température sont beaucoup trop marqués et les vents zonaux beaucoup trop forts. Un exemple frappant est à la mésopause au-dessus du pôle d'été, la température y présente un minima marqué alors que l'ensoleillement est maximum : on dit que l'atmosphère a été conduite hors de l'équilibre radiatif. À cette altitude, cela est surtout dû aux ondes de gravité. Plus bas, les ondes de Rossby dans la moyenne atmosphère ou les ondes baroclines (qui s'apparentent aux ondes de Rossby) dans la troposphère jouent des rôles tout aussi importants.

Si on se limite aux ondes de gravité, on observe qu'elles extraient de la quantité de mouvement de l'écoulement moyen à l'endroit où elles sont générées et la déposent lorsque l'onde est dissipée, représentant ainsi un forçage de l'écoulement moyen. Elles contribuent aussi bien à la météorologie locale en contrôlant la dynamique des régions montagneuses qu'aux échelles planétaires et interannuelles en contrôlant la branche mésosphérique de la circulation de Brewer-Dobson, définie dans le paragraphe suivant.

À l'échelle globale, les circulations sont souvent affectées par le forçage des ondes de gravité. Comme ce forçage est une contribution dite non-géostrophique de la circulation générale, ses effets les plus marquants aux moyennes latitudes se font d'abord sentir sur la circulation méridienne, comme la circulation de Brewer-Dobson dans la moyenne atmosphère, et dans une moindre mesure sur la circulation de Hadley-Ferrel dans la troposphère (sur cette dernière c'est surtout le cycle de vie des ondes baroclines qui est le moteur dynamique). Si on revient à la circulation de Brewer Dobson, il s'agit d'une circulation méridienne dans la moyenne atmosphère s'étendant jusqu'aux hautes latitudes et alimentée au niveau des tropiques par un transport des masses d'air vers le haut. (Plumb, 2002). Cette circulation est principalement initiée par le déferlement des ondes planétaires dans la stratosphère mais les ondes de gravité jouent un rôle prépondérant dans la mésosphère. Elles provoquent une force s'opposant au vent zonal aux moyennes latitudes ayant pour conséquence une circulation méridionale de l'hémisphère d'été vers l'hémisphère d'hiver qui réchauffe l'hiver extra-tropical et refroidit l'été au niveau de la mésopause (Alexander and Rosenlof, 1996; Okamoto et al., 2011). Dans les régions tropicales, où la force de Coriolis est faible, le déferlement des ondes de gravité produit des effets directs sur les vents zonaux (c'est-à-dire sans passer par les circulations méridiennes et leur impact sur la température). Ainsi, en collaboration avec les ondes planétaires équatoriales, elles contribuent notamment au forçage de l'Oscillation Quasi Biennale dans la

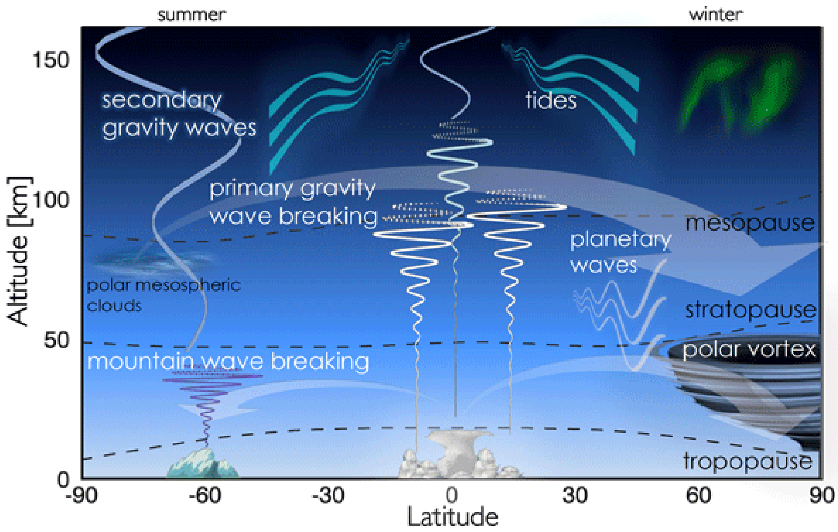


FIGURE 1.5 – Figure schématisant l'impact des ondes (McCormack et al., 2021)

basse stratosphère tropicale ($z < 32$km). Cette oscillation des régimes de vent zonaux près de l'équateur dans la stratosphère a une période d'environ 28 mois et pourrait avoir des effets sur la variabilité troposphérique dans les tropiques (Martin et al., 2019). cette oscillation vient d'un effet de rétroactions entre le déferlement des ondes de gravité (et donc le dépôt de flux de quantité de mouvement) et l'écoulement moyen (Baldwin et al., 2001). Toujours au niveau de l'équateur mais au-dessus de l'oscillation quasi-biennale ($z > 32$km), les vent zonaux moyens évoluent au cours du temps avec un cycle semi-annuel (Semi Annual Oscillation) dont le phasage avec le cycle saisonnier varie en fonction de l'altitude. Cette oscillation, et surtout sa phase d'Est dans la mésosphère est aussi en partie causée et influencée par le déferlement d'ondes de gravité (Richter and Garcia, 2006) .

Les ondes de gravité ont aussi des effets plus locaux, aux échelles dites "méso"-échelles, dont elles contrôlent en partie la dynamique. Ainsi, dans la troposphère, les ondes de gravité contrôlent l'organisation de la convection de l'échelle de quelques km jusqu'à quelques dizaines de km (voire jusqu'aux échelles d'organisation des systèmes convectifs mésoéchelles). Elles peuvent aussi initier la convection profonde dans les tropiques et modeler l'environnement qu'elles traversent en créant des zones d'ascendance et de descente d'air (Lac et al., 2002). De même, dans les moyennes latitudes, des cas d'orages violents et organisés ont été associés à la génération et propagation d'ondes de gravité ayant une origine convective (Miller and Sanders, 1980) ou liée à un jet (Stobie et al., 1983). En région montagneuse, les ondes de gravité orographiques peuvent causer des vents de pente en surface très importants et impacter les précipitations.

Si nous insistons sur cet aspect dans ce cadre introductif c'est parce que les effets globaux des ondes de gravité sont paramétrisés dans les modèles de climat. Nous nous servirons de ces paramétrisations pour caractériser leur signature locale et déterminer leur impact sur la propagation des infrasons.

1.5 Météorologie de montagne et effet local des ondes

On a vu que les ondes de gravité jouent un rôle sur la circulation de grande échelle. Cependant elles sont surtout connues pour leur impact sur la météorologie locale notamment en milieux montagneux. Bien que les premières études sur la météorologie de montagne ne s'intéressaient pas aux ondes - Aristote en 340 avant JC réfléchissait déjà au lien entre la hauteur des montagnes et l'altitude des nuages - , leur impact est significatif et s'inscrit dans un ensemble plus vaste d'effets locaux avec lesquels elles interagissent. C'est dans les cent dernières années que le développement des instruments d'observation en parallèle de la mise en place de campagnes de terrain nationales et internationales ont permis d'approfondir nos connaissances dans ce domaine. De manière concomitante, les simulations numériques de fluides géophysiques ont progressé rapidement et donné un moyen de tester les hypothèses formulées concernant l'influence des montagnes sur l'atmosphère.

Le fait même que les montagnes soient hautes influence les conditions météorologiques qu'elles rencontrent. En effet, si la température et la densité diminuent avec l'altitude, c'est également le cas pour la quantité de vapeur d'eau contenue dans l'atmosphère. Ainsi, certaines hautes montagnes ne vont recevoir que peu de précipitations car le contenu en vapeur d'eau des couches situées au-dessus d'elles est très faible. De même, l'altitude va influencer la phase des précipitations, importante pour deux raisons : leur répartition et le stockage de l'eau à la surface de la Terre. En effet, la différence de vitesse de chute entre la pluie et la neige affecte la répartition des précipitations (la neige, plus lente, sera transportée plus loin par le vent). De plus, l'eau liquide est captée par la végétation et le sol ou ruisselle immédiatement tandis que la neige et la glace peuvent être stockées à la surface de la terre pendant des mois ou des années. Les aspects géométriques du relief peuvent également expliquer les forts vents que l'on trouve au sommet des montagnes : le vent augmente avec l'altitude car l'atmosphère est sujette à une friction moins importante et les sommets assez hauts pénètrent dans des couches de vent plus fort. À cet effet s'ajoute le fait que les sommets atteignant une altitude importante sont généralement dépourvus de végétation, réduisant la friction et laissant libre cours à de forts vents de surface.

En plus de réagir à un forçage thermique important, les montagnes provoquent des mouvements verticaux de parcelles d'air (forçage dynamique). En fonction des conditions météorologiques, la réponse de l'écoulement moyen peut être très disparate. Les caractéristiques du flux incident sont déterminantes pour les caractéristiques des perturbations ainsi créées.

Dans le cas où l'écoulement de grande échelle est au repos, un système de circulation de l'air généré par des phénomènes thermiques dans la vallée se met en place. Lorsque la surface se refroidit (se réchauffe), les couches de l'atmosphère près du relief vont être plus froides (chaudes) que l'air environnant et vont induire un déplacement des parcelles vers le bas (haut). Les variations d'ensoleillement sont à l'origine de ces flux de chaleur et peuvent se traduire à l'échelle des pentes ou des vallées. Ainsi, on trouve des vents montant les pentes le jour (vents anabatiques) et les descendant la nuit (vents catabatiques) (Whiteman, 1990; Poulos and Zhong, 2008). Les variations de température entre les vallées et les plaines participent également à la mise en place d'une circulation d'amplitude plus grande. Les vents ont tendance à remonter la vallée pendant la journée et la descendre la nuit. Ces derniers peuvent provoquer l'accumulation d'air dense et froid dans les creux du terrain qui s'ajoutent au refroidissement radiatif en surface pour causer une inversion de température et initier une *cold pool* (Clements et al., 2003; Rotach et al., 2008). Ces couches très stables sont généralement diurnes mais peuvent persister plusieurs jours et sont souvent associées à des périodes de pollution importantes.

En régime de vent plus fort, si l'atmosphère est très stable ou que la montagne est assez haute, un phénomène appelé *upstream blocking* peut se mettre en place du côté incident. Une ligne de courant spécifique divise la partie inférieure de l'écoulement qui va rester bloquée ou contourner la montagne, et la partie supérieure qui a assez d'énergie pour passer au-dessus du sommet. La partie de l'écoulement bloquée va impacter fortement la formation des nuages et précipitations en provoquant par exemple des ascendances beaucoup plus en aval de l'orographie (Banta et al., 1990). Les parcelles d'air qui atteignent le sommet peuvent condenser si l'atmosphère est assez humide et donner lieu à des *cap clouds* qui entourent le haut de la montagne. Ces nuages sont des nuages lenticulaires dont la base se situe sous le sommet. Elles donnent également lieu à des ondes de gravité se propageant verticalement. Un premier critère définissant cette ligne de courant critique a été défini par Sheppard (1956) et dépend du nombre de Froude F de l'écoulement et de la hauteur H de la montagne, mais Smith and Grønås (1993) a montré que cette analyse n'est pas totalement correcte car elle ne prend pas en compte les forces de pression (Leo et al., 2016). Le mécanisme est le suivant : lors du mouvement ascendant d'une parcelle d'air, une anomalie positive de densité est créée qui résulte en une haute pression et décélère la vitesse des parcelles. Lorsque cette anomalie est située sur la pente, les parcelles d'air redescendent la pente. Mais lorsqu'elle est située au-dessus du sommet, les ondes de gravité déferlent proche de la surface en provoquant des vents de pente très forts descendant le côté amont de la montagne (Clark, 1977).

En cas d'écoulement neutre et fort vent, si la pente de la montagne est raide, la couche limite se détache de la surface au niveau du sommet et forme une basse pression du côté amont de la montagne. Celle-ci provoque une ascendance des parcelles d'air près de la pente et un tourbillon va se former sous le pic en rotation autour d'un axe horizontal. Lorsque l'air est humide, la condensation va se produire près de la pente et donner un lieu à un type de nuage appelé *banner cloud* (Whiteman, 2000).

Un aspect important de cette thèse est de tenter de réunifier ces différents mécanismes (Foehn, blocage, et effet d'abris) au sein d'un même formalisme combinant les théories des ondes de montagne et de la couche limite.

1.6 Plan de la thèse

Le développement de théories sur les ondes de gravité permet de mieux comprendre les mécanismes qui régissent leur propagation et impact sur l'atmosphère. Des simplifications, comme l'approximation linéaire, fournissent un cadre conceptuel pour analyser les processus physiques en jeu. Ces théories servent de fondement aux paramétrisations utilisées dans les modèles climatiques globaux et de prévisions du temps. Un moyen de les calibrer et d'évaluer la précision des paramértisations consiste à exploiter la propagation des infrasons. Les signaux enregistrés sont en effet fortement influencés par les petites perturbations de l'atmosphère, et les mesures (amplitude et contenu fréquentiel) recueillies par un récepteur situé à une certaine distance de la source, dépendent largement de cette variabilité de petite échelle.

Ainsi, cette thèse s'articulera autour de trois axes : le développement d'une théorie des ondes de gravité se propageant dans une couche limite caractérisée par une longueur de mélange, l'impact d'une paramétrisation d'ondes non orographiques sur la propagation des infrasons, et, en perspective, les questions relatives aux paramétrisations d'ondes orographiques.

La première partie de cette thèse se concentre sur les interactions entre les ondes de gravité orographiques et la couche limite, en adoptant une approche théorique. Le premier chapitre reprend les concepts fondamentaux nécessaires à la formulation de la théorie des ondes de gravité orographiques développée dans les chapitres 3 et 4. Le chapitre 3 se concentre sur la réflexion d'ondes se propageant dans une couche limite définie par la théorie de la longueur de mélange, et le chapitre 4 étudie l'impact de cette réflexion sur la propagation des ondes piégées.
Dans la suite, l'influence des champs d'onde de gravité issus d'une paramétrisation d'ondes non orographique sur la propagation d'infrasons sont étudiés.
Enfin, dans le chapitre 6, nous discutons des perspectives de ces travaux, à l'interface entre les deux parties précédentes, pour ce qui concerne la paramétrisation des ondes de gravité orographiques.

Chapitre 2

Rappels des concepts fondamentaux utilisés

2.1 Ondes de gravité

Dans cette section, le formalisme des ondes de gravité – sans inclure leurs sources – est détaillé afin de comprendre leurs caractéristiques et leur influence sur l'atmosphère.

La stabilité de l'atmosphère dépend de sa stratification thermique en fonction de l'altitude. En effet, une parcelle d'air plus chaude, donc moins dense, que son environnement va monter tandis qu'une parcelle d'air plus froide va descendre, c'est la force de flottabilité. Cependant, comme la pression décroît avec l'altitude, la température d'une parcelle qui monte en suivant un déplacement adiabatique diminue, et elle va en partie s'alourdir. Pour prendre en compte ces effets combinés des variations de pression et température, il convient de caractériser la flottabilité d'une parcelle d'air par sa *température potentielle*,

$$\theta = T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/C_p}. \tag{2.1}$$

Ici P est la pression, R la constante des gaz parfaits pour l'air et C_p la capacité thermique à pression constante de l'air. La température potentielle est une quantité thermodynamique centrale directement liée à l'entropie de la parcelle d'air. Elle donne la température d'une parcelle d'air ramenée adiabatiquement à un niveau de pression de référence, $P_0 = 1000$ hPa. La stabilité de l'atmosphère est mesurée par le gradient vertical de la température potentielle.

— $\frac{d\theta}{dz} < 0$, les mouvements verticaux des parcelles d'air sont amplifiés (par exemple, elles seront toujours plus chaudes que leur environnement et continueront à monter), l'atmosphère est *instable*.
— $\frac{d\theta}{dz} = 0$, cas limite appelé *atmosphère neutre*.
— $\frac{d\theta}{dz} > 0$, l'atmosphère est statiquement *stable* : les parcelles d'air sont ramenées vers leur état d'équilibre lorsqu'elles sont déplacées.

Différentes situations météorologiques résultent en des atmosphères plus ou moins stables. Dans la troposphère sur les continents, l'atmosphère est généralement stable la nuit, ou en hiver, lorsque la surface refroidit les couches de basse altitude. L'atmosphère peut alors se déstabiliser en partie l'après-midi. Au-dessus de la mer, l'air est stable au printemps lorsque la température de la surface est plus froide que l'atmosphère et instable pendant l'hiver. La stratosphère est une couche de l'atmosphère particulièrement stable en raison de son gradient de température positif créé par le chauffage par l'ozone, maximum à la stratopause.

Dans le cas d'une atmosphère stable (en négligeant les fluctuations du champ de pression associées au déplacement), une parcelle d'air déplacée verticalement va effectuer des oscillations autour de sa position d'équilibre avec une pulsation N satisfaisant

$$N^2 = \frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}. \tag{2.2}$$

Cependant, lors de mouvements adiabatiques, les fluctuations de pression ne peuvent être négligées. Il n'en reste pas moins que cette fréquence N, qui est la fréquence de Brunt Väisälä dans l'équation (1.4), correspond à la fréquence maximale que peut avoir une onde interne de gravité. Dans les conditions troposphériques moyennes, Holton (1992) estime sa valeur à 0.012s^{-1} dans la troposphère. Elle est proche de 0.02s^{-1} dans la stratosphère.

Les ondes de gravité sont une conséquence directe de ces effets de stabilité. Une parcelle d'air forcée à se déplacer verticalement va osciller et ces perturbations se propagent de proche en proche aux couches de fluide supérieures. Afin d'étudier les ondes à partir des équations décrivant l'atmosphère, certaines hypothèses pertinentes permettent de simplifier le formalisme.

La première de ces hypothèses est celle de *linéarité* qui forme le point de départ de beaucoup d'études théoriques. Elle permet d'éliminer les interactions entre les ondes et de faciliter la compréhension du phénomène étudié. Cette hypothèse de linéarité a été renforcé par les travaux de Dörnbrack and Nappo (1997) qui ont comparé un modèle linéaire et un modèle non-linéaire. Ils ont montré que les effets dynamiques et les paramètres importants caractérisant le comportement non-linéaire des ondes de gravité (altitude du déferlement, dissipation au niveau critique) pouvaient être correctement prédits par la théorie linéaire. En revanche, les comparaisons entre théorie linéaire et observations sont souvent plus compliquées lorsque la dynamique est rendue plus compliquée par des effets non-stationnaires et par la superposition de plusieurs ondes interagissant entre elles (Nappo, 2002) : les interactions entre les ondes ne sont pas toujours négligeables. Un des avantages de la théorie linéaire est qu'elle permet de séparer sans ambiguïté le vent moyen des petites perturbations en écrivant par exemple : $u = \bar{u} + u'$ où $\bar{u}$ est la composante moyenne zonale du vent et u' la perturbation du vent zonal).

Une seconde hypothèse, justifiée lorsque les échelles verticales sont courtes, est l'*approximation de Boussinesq*. Elle ne retient des fluctuations de température que celles qui affectent la flottabilité et négligent leurs effets sur la densité. L'approximation de Boussinesq permet de considérer l'écoulement *non divergent* (densité constante à travers le fluide, sauf pour les variations influençant la flottabilité), ce qui élimine les ondes sonores des solutions possibles. Nous ne la ferons que pour simplifier le formalisme ou dans le cas des interactions entre couche limite et montagnes.

En faisant ces deux hypothèses, les équations de Boussinesq linéarisées autour d'un état de base uniforme ($\bar{u}$,$\bar{v}$, 0) s'écrivent,

$$\partial_t u' + \bar{u}\partial_x u' + \bar{v}\partial_y u', -fv' = -\frac{1}{\rho_r}\partial_x p', \tag{2.3a}$$

$$\partial_t v' + \bar{u}\partial_x v' + \bar{v}\partial_y v' + fu' = -\frac{1}{\rho_r}\partial_y p', \tag{2.3b}$$

$$\partial_t w' + \bar{u}\partial_x w' + \bar{v}\partial_y w' = -\frac{1}{\rho_r}\partial_z p' + b', \tag{2.3c}$$

$$\partial_t b' + \bar{u}\partial_x b' + \bar{v}\partial_y b' + w'N^2 = 0, \tag{2.3d}$$

$$\partial_x u' + \partial_x v' + \partial_z w' = 0. \tag{2.3e}$$

Dans ces équations, (u, v, w) est le vecteur de vitesse du fluide, f est la force de Coriolis et N la fréquence de Brünt-Väisälä. Les "primes" se réfèrent aux petites fluctuations autour de l'état de base. Les trois premières équations sont les équations de conservation de mouvement horizontaux et verticaux, l'équation (2.3d) est le bilan de flottabilité où $b' = g\frac{\theta'}{\theta_r}$ est la flottabilité et l'équation (2.3e) est l'équation de continuité traduisant l'incompressibilité sous les hypothèses énoncées plus haut. Les champs de température potentielle et de pression sont définis par :

$$\theta = \theta_r + \theta_0(z) + \theta' \tag{2.4a}$$

$$p = p_r(z) + p_0(z) + p' \tag{2.4b}$$

Les variables $p_r(z)$ et θ_r sont une pression et une température potentielle de référence, θ_r étant constant. p_0, θ_0 sont des valeurs au repos de la pression et de la température potentielle, ils représentent la stratification au repos. Ainsi, la fréquence de Brunt-Väisäla est défine par :

$$N^2 = \frac{g}{\theta_r}\frac{d\theta_0}{dz}. \tag{2.5}$$

Notons que dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, densité et température potentielle sont de signes opposés, de telle sorte que

$$\frac{dp_r}{dz} = -\rho_r g, \qquad \frac{dp_0}{dz} = \rho_r \frac{\theta_0}{\theta_r} g. \tag{2.6}$$

On utilisera comme valeur de densité de référence $\rho_r = 1$ kg.m^{-3}, et comme température potentielle de référence $\theta_r = 300$K.

Les équations étant linéaires dans l'espace et dans le temps, il est naturel de chercher des solutions sous la forme d'ondes monochromatiques :

$$w' = \hat{w}e^{i(kx+ly+mz-\omega t)} \tag{2.7}$$

où (k, l, m) sont les nombres d'onde dans les trois directions, et ω est la fréquence absolue. En substituant les fluctuations dans l'équation (2.3), ces équations peuvent être combinées en une seule équation pour l'amplitude des perturbations de vitesse verticale et on obtient la relation de dispersion :

$$\hat{\omega}^2 = (\omega - \vec{\bar{u}}\vec{k})^2 = \frac{N^2(k^2+l^2) + f^2m^2}{(k^2+l^2+m^2)} \tag{2.8}$$

où $\hat{\omega}$ est la fréquence intrisèque. Cette relation permet de relier la fréquence des ondes avec ses caractéristiques spatiales (k, l, m) et aux propriétés moyennes de l'atmosphère $(N, \vec{\bar{u}})$. En fréquence, équation (2.8) montre le spectre des ondes de gravité s'étend de f, la force de Coriolis à N, la fréquence de Brünt Väisälä avec k, l, et m des nombres réels souvent déterminés par la source des ondes. Dans la suite de nos études, lorsque l'écoulement sera amené à varier verticalement, on considérera des valeurs locales du nombre d'onde vertical m seulement. Elles pourront être négatives, traduisant alors le fait que les ondes ne se propagent plus verticalement.

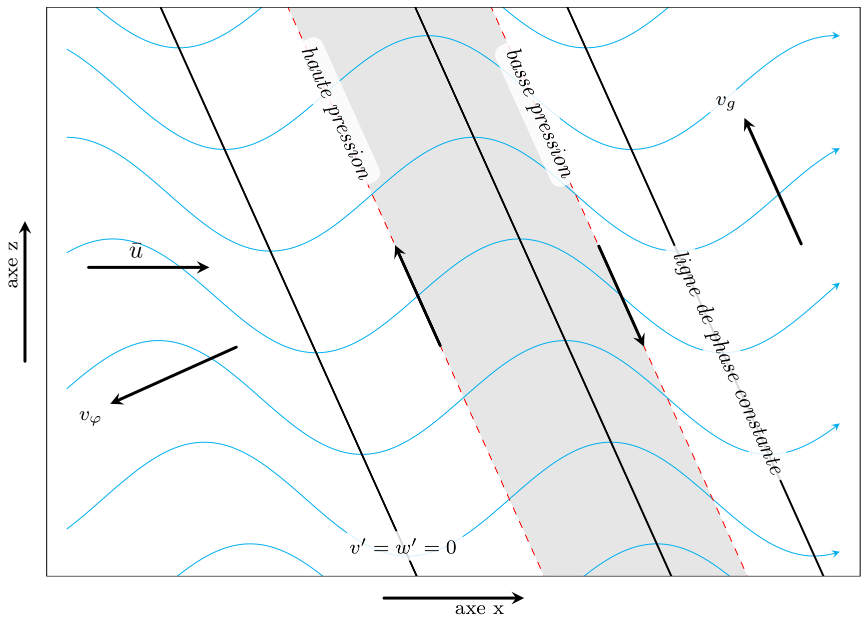


FIGURE 2.1 – Distribution des perturbations de vitesse du vent (v', w'), pression (lignes en rouges) d'une onde de gravité. Les courbes bleues représentent les lignes de courant, v_ϕ est la vitesse de phase et v_g la vitesse de groupe. (modifié à partir de (Durran, 1990))

Aux grandes fréquences, c'est-à-dire lorsque la force de Coriolis est négligeable, les ondes internes de gravité présentent une propriété remarquable. Dans un milieu au repos, leur vitesse de phase et de groupe, dans un milieu au repos est que la vitesse de phase et la vitesse de groupe,

$$\vec{c_\phi} = \frac{\omega\,\vec{k}}{\|\vec{k}\|^2} \text{ et } \vec{c_g} = \frac{\omega^2 m}{(k^2+l^2)(k^2+l^2+m^2)}\left(k, l, -(k^2+l^2)\right), \tag{2.9}$$

sont telles que $\vec{c}_\phi . \vec{c_g} = 0$: la vitesse de propagation des ondes de gravité se fait le long des lignes de phase et perpendiculairement à la vitesse de phase (figure 2.1).

2.2 Interactions avec l'écoulement moyen

Les ondes de gravité transportent de la quantité de mouvement lors de leur propagation. Celle-ci est extraite de l'écoulement moyen à l'endroit où les ondes sont créées, ou dans le cas d'ondes orographiques, à la Terre elle même. Lorsque les ondes déferlent ou rencontrent un niveau critique (c'est-à-dire lorsque leur fréquence intrinsèque $\hat{\omega} = 0$), elles déposent cette quantité de mouvement en créant une force sur l'écoulement moyen appelée force de traînée ou *drag* en anglais, l'affectant localement. Ce nom suggère trompeusement un ralentissement de la circulation alors que l'effet des ondes peut se traduire aussi bien par un ralentissement qu'une accélération du vent.

Le formalisme le plus simple pour décrire cette interaction est de considérer un cas non-tournant avec un domaine pérodique. Dans ce cas, en moyennant les équations de la quantité de mouvement horizontalement sur le domaine, on obtient l'équation suivante pour le vent moyen, toujours dans le cadre de l'approximation de Boussinesq :

$$\rho_r \frac{\partial(\bar{u}, \bar{v})}{\partial t} = -\partial_z(\rho_r \overline{u'w'}, \rho_r \overline{v'w'}). \tag{2.10}$$

L'impact des ondes de gravité se fait alors sentir à travers le gradient vertical du flux de quantité de mouvement horizontal $(\rho_r \overline{u'w'}, \rho_r \overline{v'w'})$. Cette formule est valable même quand l'écoulement de base $(\bar{u}, \bar{v}, N^2)$ varie dans la direction verticale. Dans ce cas, pour des ondes linéaires, non dissipées et stationnaires, Eliassen (1961) a montré que $\partial_z(\rho_r \overline{u'w'}) = 0$: l'onde n'interagit pas avec l'écoulement moyen. Il s'agit d'un théorème de "non-interaction".

Les phénomènes menant à des interactions sont multiples, mais les deux plus importants se produisent lorsque les ondes déferlent ou lorsqu'elles rencontrent des niveaux critiques. Le premier est inéluctable au fur et à mesure que les ondes se propagent vers le haut : la densité de l'atmosphère diminuant avec l'altitude, conserver le flux de quantité de mouvement nécessite d'augmenter les perturbations u', v'. Par relations de polarisations, cela amène à augmenter également la perturbation de flottabilité b', menant à des situations convectivement instables. L'onde déferle alors, ce qui limite l'amplitude du flux de quantité de mouvement à une valeur sous saturante pour laquelle $\partial_z \overline{\rho_r u'w'} \neq 0$. Ce faisant, elle induit une modification du flux de quantité de mouvement se traduisant par une force de traînée exercée sur l'écoulement moyen.

Par ailleurs, la variation du vent avec l'altitude peut également mener au dépôt de quantité de mouvement par les ondes. Lors de la propagation verticale d'une onde, sa fréquence absolue (ω) et son nombre d'onde horizontal ($\vec{k}$) ne changent pas. Si la vitesse du vent, $\vec{\bar{u}}$, varie avec l'altitude, alors la fréquence intrinsèque $\hat{\omega}$ $(= \omega - \vec{k}.\vec{\bar{u}})$ peut éventuellement devenir nulle. À ce niveau appelé *niveau critique* (z_c), la vitesse de phase des ondes vaut celle du vent moyen ($c_\phi = U(z_c)$) et d'après la relation de dispersion, la longueur d'onde verticale $\lambda_z \to 0$ tandis que les perturbations de vent horizontal $u' \to \infty$: l'onde oscille de plus en plus jusqu'à être dissipée. Si l'amplitude initiale de l'onde est suffisemment grande, des effets non linéaires deviennent dominants bien avant l'arrivée aux niveaux critiques, amenant le déferlement à nouveau. Dans certains cas, les distorsions de l'écoulement moyen induites sont si fortes qu'il peut se produire des réflexions partielles avant même que l'onde n'atteigne son niveau critique (Lott and Teitelbaum, 1992).

2.3 Ondes de montagne

Les ondes de montagne sont des ondes internes de gravité étudiées depuis plus d'un demi-siècle. Leurs propriétés sont à la fois liées à la forme et à la taille du terrain qui les créent, et aux propriétés du fluide environnant (profils verticaux de vent, stratification). Pour avoir un premier aperçu de ces ondes, l'approche la plus simple est celle issue de la théorie linéaire lorsque l'écoulement incident est uniforme $U =$ cte, $N =$ cte et perturbé par une montagne dont la hauteur $h(x)$ ne varie que dans la direction de l'écoulement incident. Dans les applications numériques, nous considérerons que $h(x)$ est définie comme une gaussienne ayant pour hauteur maximale H et longueur typique L :

$$h(x) = He^{-\frac{x^2}{2L^2}}. \tag{2.11}$$

À titre d'exemple, nous considérerons que la longueur de la montagne, le vent moyen et la stratification valent $L=$ 1km, $U\approx$ 10 m.s^{-1}, et N=0.012 s^{-1}. Ainsi, le nombre de Rossby aux moyennes latitudes est $R_o = \frac{U_0}{fL} \approx 100$ et la force de Coriolis peut être négligée. Par ailleurs, les ondes de montagne sont stationnaires dans le référentiel du relief, et, dans ce cadre, les équations à l'intérieur de l'écoulement se simplifient en :

$$U\frac{\partial u'}{\partial x} = -\partial_x p', \tag{2.12a}$$

$$U\frac{\partial w'}{\partial x} = -\partial_z p' + b', \tag{2.12b}$$

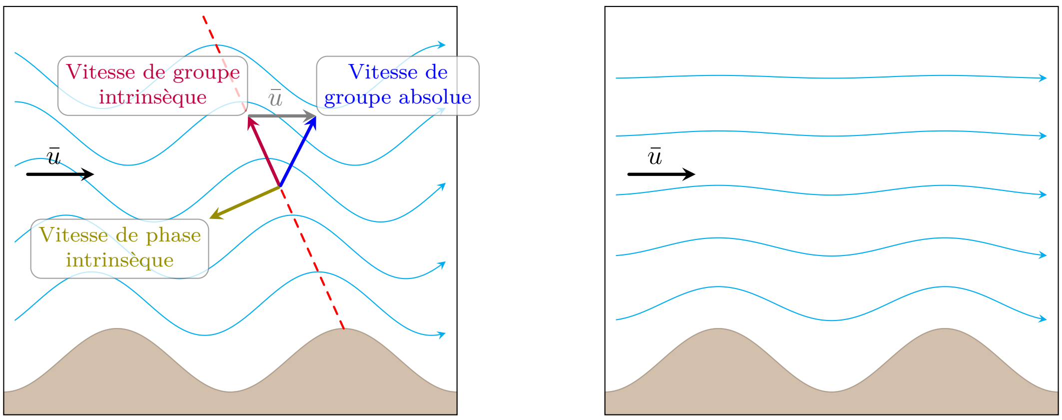
$$U\frac{\partial b'}{\partial x} = -N^2 w', \tag{2.12c}$$

$$\partial_x u' + \partial_z w' = 0, \tag{2.12d}$$

tandis que la condition à la limite à la surface stipule que la composante de l'écoulement normale à la surface est nulle,

$$w'(h) = (U_0 + u')(h)\frac{\partial h}{\partial x}. \tag{2.13}$$

Notons ici que nous adoptons une condition à la limite non-linéaire tout en traitant l'écoulement avec des équations linéaires. La validité de ce traitement a été montré par Long (1953), cela permet d'observer certains phénomènes non-linéaires telles que les effets de Foehn, mais aussi de prédire avec une certaine précision l'altitude de blocage des écoulements sur le flanc en amont de la montagne ou l'apparition du déferlement (Smith, 1979). La deuxième condition à la limite utilisée est la condition dite de *radiation*. Lorsque $z \to \infty$, toutes les ondes doivent avoir un flux d'énergie vers le haut, c'est-à-dire une vitesse de groupe orientée vers le haut, ou être évanescentes.



(a) Ondes se propageant verticalement *(b) ondes évanescentes*

FIGURE 2.2 – Ondes de montagne, modifié depuis Durran (1990)

Pour trouver une solution linéaire, on se place dans l'espace de Fourier. Par exemple, pour la vitesse verticale on peut écrire

$$w'(x,z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\mathbf{w}}(k,z)e^{+ikx}dk$$

où $\hat{\mathbf{w}}$ est la transformée de Fourier de w'. Bien que cette solution soit stationnaire, chaque harmonique a une fréquence intrinsèque $\omega = 0$ nulle, il s'agit bien de mouvements oscillatoires lorsqu'on se place dans le référentiel en mouvement. Dans ce référentiel, les oscillations ont pour fréquence intrinsèque :

$$\hat{\omega} = \omega - kU = -kU.$$

et leur vitesse de phase intrinsèque :

$$\hat{c_I} = \frac{\hat{\omega}}{k} = -U$$

est exactement opposée au vent incident. Dans ce cas, la structure verticale de l'onde reste celle des ondes de gravité monochromatiques (équation (2.8)). Pour caractériser la direction de propagation de ces ondes il est aussi essentiel de calculer leur vitesse de groupe, ce qui nécessite de se placer dans le référentiel en mouvement :

$$\hat{C}_{g_x} = \boxed{\frac{k^2 U}{m^2 + k^2}} - U = -\frac{U m^2}{k^2 + m^2}, \quad \hat{C}_{g_z} = \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial m} = \frac{N^2 k^2}{(k^2 + m^2)^2} \frac{m}{Uk}$$

La vitesse de groupe horizontale intrinsèque $\hat{C}_{g_x}$ est négative mais d'amplitude inférieure au vent incident, c'est-à-dire que la vitesse de groupe absolue est positive, les ondes vont se propager en aval (voir figure 2.2a). Le terme encadré est une contribution non-hydrostatique, ce qui veut dire que dans le cas hydrostatique (par exemple lorsque les k sont très petits) la propagation est purement à la verticale de la montagne : la vitesse de groupe horizontale absolue C_{g_x} est nulle. Par ailleurs, pour que la vitesse de groupe verticale $\hat{C}_{g_z}$ soit positive, c'est-à-dire que les ondes soient produites par la montagne et se propagent vers le haut, les nombres d'onde m et k doivent être de même signe. Notons que dans certains cas la résolution de (2.8) donne des m imaginaires, les ondes sont alors évanescentes dans la direction verticale (figure 2.2b).

Pour clarifier ces points et évaluer le système d'onde on peut noter que le système d'équation (équation (2.12)) peut être combiné en une seule expression pour la vitesse verticale, c'est l'équation de Taylor - Goldstein,

$$\frac{\partial^2 \hat{\mathbf{w}}}{\partial z^2} + (S_c^2 - \boxed{k^2})\hat{\mathbf{w}} = 0, \quad \text{avec } S_c^2 = \frac{N^2}{U^2}, \tag{2.14}$$

où S_c est le paramètre de Scorer. Cette équation doit être résolue pour chaque nombre d'onde et la solution dans l'espace physique est obtenue en sommant toutes les contributions des ondes. Le signe de $S_c^2 - k^2$ permet de connaître la nature évanescente ou propagative de l'onde considérée :

- Si $k^2 > S_c^2$, les solutions de cette équation pour une longueur d'onde donnée s'écrivent :

$$\hat{\mathbf{w}}(k, z) = A e^{\sqrt{k^2 - S_c^2} z} + B e^{-\sqrt{k^2 - S_c^2} z} \tag{2.15}$$

  Le premier terme décrit une onde dont l'amplitude augmente exponentiellement avec l'altitude, ce qui n'est physiquement pas possible ; on a donc $A = 0$. L'onde décrite ici est évanescente, ayant des lignes de phase verticales et une amplitude qui décroît avec l'altitude.

- Si $S_c^2 > k^2$, les solutions s'écrivent :

$$\hat{\mathbf{w}}(k, z) = A e^{imz} + B e^{-imz}, \quad \text{avec } m = sign(k)\sqrt{S_c^2 - k^2} \tag{2.16}$$

  Nous avons vu que les ondes de montagne ont une vitesse de groupe verticale dirigée vers le haut, forçant m et k à être de même signe. L'exponentielle ayant un signe positif traduit une onde se propageant vers le haut, et l'exponentielle ayant un signe négatif une onde se propageant vers le bas. Dans le cas d'une simple source à la surface et d'un écoulement uniforme, aucune onde ne peux se diriger vers le bas, on a donc $B = 0$.

Le terme $S_c = \frac{N}{U}$ agit comme un nombre d'onde de *coupure* entre les ondes propagatives et évanescentes. Comme précédemment, le terme encadré dans l'équation (2.14) est un terme non-hydrostatique, il induit une dépendance de la solution au nombre d'onde.

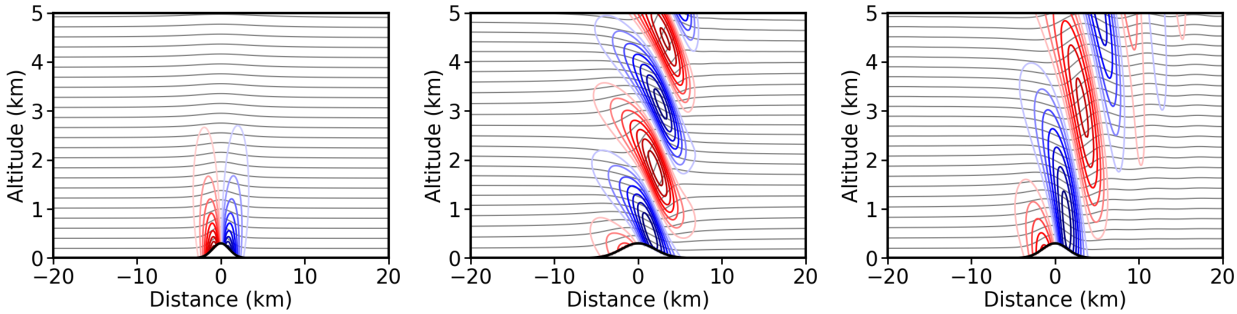
Les constantes A et B des équation (2.15) et (2.16) sont déterminées grâce aux conditions aux limites, ce qui nécessite de résoudre une équation intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{\mathbf{w}}(k, h(x)) - \frac{dh}{dx}(x)\hat{\mathbf{u}}(k, h(x)) \right) e^{ikx} dk = U(h(x))\frac{dh}{dx}(x). \tag{2.17}$$

Dans des situations plus complexes que celle étudiée ici, cette équation peut devenir mal conditionnée numériquement, mais il s'avère que la résolution de ce problème linéaire avec des conditions aux limites non linéaires est grandement simplifié dans le cadre du formalisme en coordonnées curvilignes que nous utiliserons dans les chapitres suivants.

Pour analyser la réponse de l'écoulement au forçage orographique, il est important de noter que notre problème est contrôlé par $\mathcal{N} = 4$ données, U, N, H, et L ne faisant intervenir que $\mathcal{D} = 2$ dimensions, la distance et le temps. La vitesse verticale ne fait intervenir, elle aussi, que ces deux dimensions. Si on applique le théorème π de l'analyse dimensionnelle, cela veut dire que les données du problème peuvent être ramenées à $\mathcal{N} - \mathcal{D} = 2$ paramètres non dimensionnels. Les deux les plus employés sont le nombre de Froude et la hauteur non dimensionnelle de la montagne :

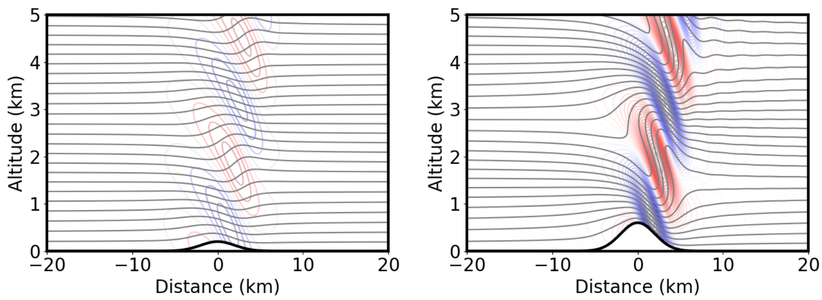
$$F_r = \frac{U}{NL} \text{ et } H_N = \frac{NH}{U}.$$



(a) Fr=100 *(b) Hydrostatique, Fr=0.1* *(c) Non-hydrostatique, Fr=0.5*

FIGURE 2.3 – *Champ de vitesse verticale (positive en rouge, négative en bleu) et de flottabilité (en gris) créées par une montagne, pour différentes valeurs du nombre de Froude, et pour $H = 0.3$.*

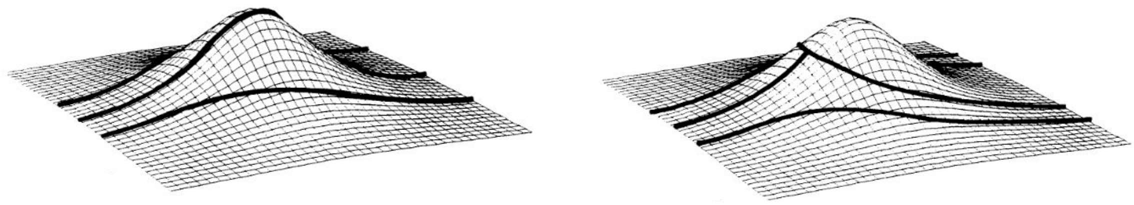
Le premier compare le temps caractéristique des oscillations produites par la stratification (N^{-1}) au temps mis par les parcelles d'air pour traverser l'obstacle (L/U). Si F_r est grand, l'écoulement va trop vite pour que les parcelles d'air aient le temps de sentir l'effet de la stratification, il y aura peu d'ondes internes. Au contraire, si F_r est petit, les ondes internes auront largement le temps de se développer en réponse à la montagne. Il est assez naturel que ce paramètre puisse être lié, pour une montagne de longueur caractéristique donnée, à la longueur d'onde de coupure $S_c = N/U$. En effet, pour une longueur L donnée, les nombres d'onde horizontaux caractéristiques forcés par la montagne sont de l'ordre de $1/L$. Si on reprend les expressions (2.15) et (2.16), la plupart des ondes forcées seront propagatives et quasi hydrostatiques si $1/L << S_c$, c'est-à-dire si $F_r << 1$. Dans ce cadre quasi hydrostatique, toutes les ondes se propagent verticalement au-dessus de la montagne (Fig. 2.3(b)). De la même manière, la plupart des ondes seront évanescentes si $F_r >> 1$ ce qui est illustré sur la Fig. 2.3(a) tandis que pour les valeurs intermédiaires de F_r, ondes évanescentes et progatives co-existent. Pour la partie propagative, la composante non-hydrostatique reste importante et les ondes se propagent en aval (Fig. 2.3(c)).



(a) $H_N = 0.2$ *(b) $H_N = 0.6$*

FIGURE 2.4 – *Champ de vitesse verticale (positive en rouge et négative en bleu) et de flottabilité (en gris) créées par une montagne, $H_N = 0.2$ et $H_N = 0.6$ pour $Fr = 0.1$.*

Le deuxième paramètre (H_N) est tout aussi important. Dans le cas hydrostatique, il mesure le rapport entre la hauteur de la montagne et la longueur d'onde verticale des ondes de gravité ($m = N/U$ dans ce cas). Si on imagine qu'une parcelle à la surface est élevée pour franchir la montagne en amont, la théorie des ondes prédit qu'à une hauteur proche de $1/m$, le signe de la vitesse verticale peut changer. Si cette altitude est située sous le sommet de la montagne, les parcelles d'air ne la franchissent pas, la théorie linéaire n'est plus adaptée. Ce paramètre contrôle donc les effets non linéaires. Quand il est petit, on voit sur la figure 2.4a un système d'onde de petite amplitude et des surfaces isentropes (qui sont aussi des lignes de courant) peu déformées. Quand il est grand, on remarque des surfaces isentropes qui s'écartent en amont (c'est un début de blocage), et qui plongent en aval (c'est un effet de Foehn avec des vitesses verticales descendantes très grandes). On observe aussi qu'au-dessus de la montagne, l'onde de gravité est à la limite du déferlement. C'est la limite de validité de notre modèle linéaire. Pour être complet, il est important de noter que pour les grandes valeurs de H_N, le blocage en amont ne s'étend jamais jusqu'en $x = -\infty$: l'écoulement se sépare horizontalement et se met à contourner l'obstacle comme illustré dans le cas tridimensionnel sur la figure 2.5.



(a) $H_N < 1$ (b) $H_N > 1$

FIGURE 2.5 – Sensibilté à H_N dans le cas tri-dimensionnel : a) non-séparation et b) séparation de l'écoulement autour de la montagne (Smith, 1989).

2.3.1 Ondes piégées

Dans la plupart des cas cependant, les profils de U et N changent avec l'altitude. Lorsque le paramètre de Scorer diminue avec l'altitude, certaines ondes se propageant vers le haut dans les basses couches peuvent être réfléchies vers la surface de la Terre. Elles se propagent alors horizontalement entre le sol et l'altitude où elles sont réfléchies et portent le nom d'*ondes piégées*.

Considérons une atmosphère à deux couches traversées par un vent uniforme mais d'intensité différente telle que $U_1 < U_2$ (figure 2.6). On peut écrire l'équation de Taylor Goldstein pour chacune des couches :

$$\frac{d^2\hat{\mathbf{w}}_i}{dz^2} + (S_{c_i}^2 - k^2)\hat{\mathbf{w}}_i = 0, \qquad i = 1, 2 \tag{2.18}$$

$$S_{c_1}^2 = \frac{4N^2}{U_2^2}, \qquad S_{c_2}^2 = \frac{N^2}{U_2^2} \tag{2.19}$$

La couche n°2 ne contient que des ondes se propageant vers le haut ou des ondes évanescentes. En effet, lorsque $k^2 < S_{c2}$, $\hat{\mathbf{w}}_2$ se traduit en une exponentielle décroissante avec z. Dans la couche inférieure, la réflexion de certains modes à l'interface entre les deux couches peut permettre une propagation des ondes à la fois vers le haut et vers le bas. Les modes piégés sont les modes satisfaisant la condition $S_{c_2}^2 < k^2 < S_{c_1}^2$: ce sont des ondes évanescentes dans la couche supérieure et propagatives dans la couche inférieure. Les ondes se propageant vers le haut et vers le bas vont se superposer et donner lieu à des phénomènes de résonance. Les lignes de phase des ondes sont alors verticales et la propagation horizontale. Plusieurs modes peuvent être piégés, dont l'amplitude dépend de la hauteur de la couche limite et des caractéristiques de la montagne. Le piégeage des ondes est favorisé lorsqu'une couche très stable se développe dans la basse atmosphère ou que le vent croît rapidement avec l'altitude. Si l'on ne prend pas en compte l'effet de la couche limite atmosphérique sur la propagation des ondes piégées, celles-ci se propagent à l'infini. En effet, par la forte dissipation présente dans cette couche, l'amplitude des ondes piégées va diminuer progressivement derrière la montagne.

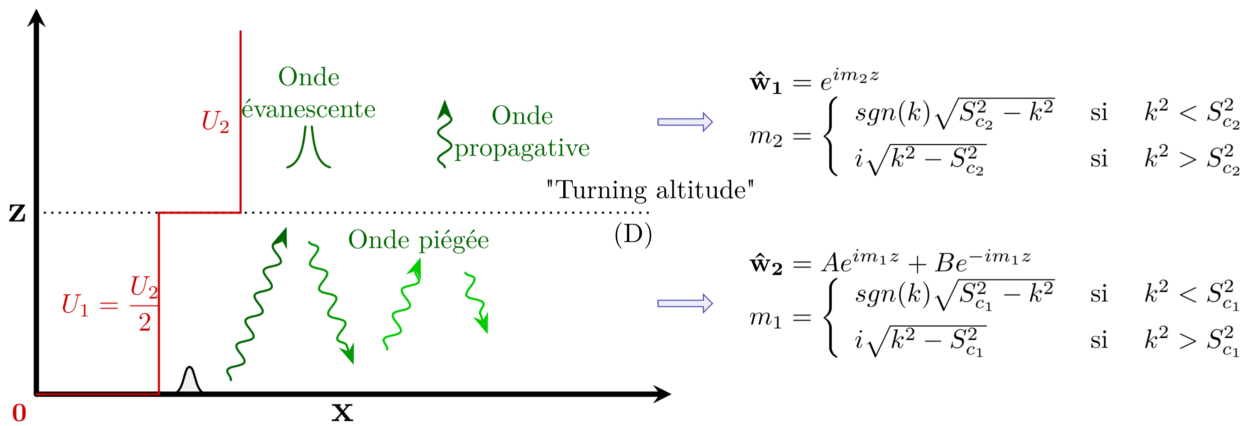


FIGURE 2.6 – Schéma du modèle à deux couches

2.3.2 Propagation des ondes de montagne

Lorsque les ondes de montagne sont créées, elles provoquent une haute pression du côté amont de l'orographie et une basse pression du côté aval. Ainsi, l'onde exerce une force sur la montagne dans le sens de l'écoulement ; une force d'intensité égale est alors exercée depuis l'obstacle sur le fluide : c'est la force de traînée.

Dans le cas non dissipatif, le tenseur des contraintes peut être résumé à son seul terme de pression. Pour une atmosphère en deux dimensions dans le cas stationnaire, l'équation linéaire pour la conservation de quantité de mouvement horizontale (équation (2.12a)) peut être multipliée par la topographie $h(x)$ et intégrée sur x pour obtenir (Nappo, 2002) :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_r u'w' = \underbrace{-\int_{-\infty}^{+\infty} p' \frac{dh}{dx} dx}_{D} \tag{2.20}$$

La différence de pression autour de l'orographie donne lieu à une force de traînée, D (pour *Drag*), traduisant la force exercée par l'écoulement sur l'obstacle. Elle est compensée par un flux vertical de quantité de mouvement porté par les ondes. Comme nous l'avons vu dans la section 2.2, dans le cas linéaire, non dissipatif et stationnaire, Eliassen (1961) a montré que ce flux est conservé sauf lorsque l'onde déferle ou au voisinage d'un niveau critique (lorsque U=0). L'influence du déferlement des ondes sur l'écoulement moyen peut alors être déterminé par le signe de $\partial_z u'w'$. D'après la relation de continuité (équation (2.12d)), on a u'=-$\frac{m}{k}w'$. Or, on a montré dans la section 2.3 que m et k doivent être de même signe ; on a donc $u'w' < 0$ pour des ondes se propageant verticalement et leur déferlement ralentira l'écoulement ($\partial_z u'w'$>0).

Pour un faible nombre de Froude (cas hydrostatique) et des petites montagnes ($H_N << 1$), Smith (1979) a montré que ce flux pouvait s'écrire :

$$D \propto NUH^2 \tag{2.21}$$

La traînée due à l'onde est linéaire en U et indépendante de la largeur de la montagne. Dans le cas d'un écoulement autour d'une montagne dont la hauteur adimensionnelle $H_N \sim 1$ (non linéaire), le vent près de la surface peut avoir une vitesse trop faible pour passer la barrière du relief. Une partie de l'écoulement va être bloquée et déposer la force de traînée qu'elle transporte à bas niveau. C'est ce qu'on appelle le *blocked flow drag.*

Pour des nombres de Froude grand, pour lesquels $F_r = U/(NL) >> 1$, l'écoulement est caractérisé par une stratification neutre (couche limite turbulente), les ondes sont évanescentes et ne peuvent pas transporter de quantité de mouvement loin du relief. Dans ce cas, il existe aussi une force de traînée qui porte le nom de *form drag* mais qui est essentiellement due aux interactions entre la turbulence de couche limite et la montagne. Dans ce cas, la montagne déforme la couche turbulente et la friction turbulente associée, ce qui induit une différence de pression de surface entre ses deux côtés. L'écoulement est alors plus rapide à l'amont (du côté du vent incident) qu'à l'aval : on parle d'effet d'abri. Pour des petites pentes, la couche limite ne se détache pas de la surface du côté opposé au vent et ce mécanisme s'appelle effet d'abri sans séparation (*non-separated sheltering* (Belcher and Wood, 1996)). Pour des pentes plus importantes, la couche limite peut se séparer du relief avec une région de "re-circulation" (Raupach and Finnigan, 1997). Qu'il y ait une séparation ou pas de la couche limite, la région située derrière la montagne est caractérisée par des vents plus faibles et une turbulence plus importante.

Les liens entre *form drag* et turbulence ont poussé le développement de paramétrisations basées sur une longueur de rugosité "effective" permettant de simuler une valeur plus élevée du stress en surface causée par l'orographie sous maille. Cependant, son estimation est basée sur une théorie de couche limite neutre qui n'est plus valable lorsque l'écoulement moyen devient stratifié (Belcher and Wood, 1996). L'idée d'utiliser une longueur de ruguosité "effective" pose un certain nombre de problèmes tels que des vents très faibles à bas niveau dans les régions où la longueur de rugosité est très forte. Ainsi, Wood et al. (2001) a construit une paramétrisation basée sur un profil explicite de traînée orographique. Afin de prendre en compte les échelles multiples composant le relief, Beljaars et al. (2006) a introduit les spectres de l'orographie dans cette méthode.

D'un autre côté, les paramétrisations basées sur les théories d'écoulements stratifiées se sont développées afin d'estimer la force de traînée à haut niveau liée aux ondes de montagne et à bas niveau celle qui est due aux blocages. La limite de largeur de montagne estimée pour basculer d'une paramétrisation représentant le *form drag* à celle qui traduit la force de traînée des ondes de gravité est de $L = 5000$ m.

Cependant, ce critère, indépendant de la nature de l'écoulement, est questionnable.

2.4 Couche limite atmosphérique

La couche limite atmosphérique (CLA) est une couche de l'atmosphère très influencée par ses interactions avec la surface de la Terre. Elle a un temps de réponse aux perturbations très court, de l'ordre de l'heure ou moins, et présente une variation diurne de température et d'extension verticale.
La viscosité de l'air impose à la vitesse du vent de s'annuler à la surface (*no slip boundary condition*, ou condition de non-glissement) causant de forts cisaillements de vent horizontaux, sources de turbulence. À ce processus s'ajoute la convection, source de turbulence causée par le réchauffement de la surface de la terre pendant la journée. Les tourbillons ainsi créés jouent un rôle crucial pour assurer l'équilibre énergétique à la surface par le transport de chaleur et humidité loin de celle-ci et maintenir l'équilibre de quantité de mouvement par son transport vers la surface (Holton and Hakim, 2013). La profondeur de la couche limite atmosphérique découle de ces transports turbulents et peut varier de 30m pour des conditions stables à 3 km pour des conditions très convectives.

Ces flux et transports en région montagneuse sont rendus complexes par l'orographie et nécessitent de s'intéresser précisément aux interactions entre la couche limite atmosphérique et le relief.

2.4.1 Couche limite atmosphérique perturbée par l'orographie

La connaissance des processus météorologiques dans la couche limite en région montagneuse est primordiale pour de nombreuses applications pratiques. Les vents de surface ont notamment besoin d'être pris en compte pour la caractérisation climatique de certaines zones (par exemple pour l'agriculture) ou la planification de nouvelles infrastructures (estimer les endroits propices à accueillir des éoliennes (Meroney et al., 1978)). Le transport et la diffusion de polluants peuvent être affectés par les modulations de la couche limite apportées par l'orographie impactant les personnes vivant dans ces régions mais aussi l'environnement (Giovannini et al., 2020). Les *dowslope windstorms*, vents forts descendant les pentes, rendent compliquée la maîtrise des feux se déclenchant en région montagneuse (Abatzoglou et al., 2023). En effet, ils rendent leur intensité et direction de propagation imprévisibles.

Jackson and Hunt (1975) ont proposé une théorie linéaire pour comprendre comment le relief perturbe la dynamique de couches limites neutres. Elle a ensuite été développée par Belcher et al. (1993) puis Belcher and Wood (1996) pour estimer le *form drag* provoqué par ces interactions.

L'approche qu'ils ont adoptée s'appuie sur une méthode asymptotique : elle consiste à diviser l'écoulement incident en deux régions distinctes : une région *intérieure* de hauteur l sur la figure 2.7 dans laquelle le profil de vent basé sur la théorie de la longueur de mélange (voir section 2.4.2) est très cisaillé ce qui impacte fortement l'écoulement moyen, et une région *extérieure* non dissipative pour laquelle la stratification joue un rôle (contrairement à la région intérieure). Ces deux régions sont de nouveaux divisées en sous-couches. La couche intérieure comporte une couche de surface très fine qui résout correctement les conditions aux limites en surface, et une couche caractérisée par le cisaillement fort de vent. La région extérieure est non dissipative mais la couche appelée *middle layer* sur la figure 2.7 est tout de même très impactée par le cisaillement de vent, tandis que la partie supérieure de la couche extérieure est affectée par les forces de flottabilité et de pression. La couche extérieure est décrite par des équations de flux potentiel : les ondes de gravité ne peuvent pas s'y propager. Les équations résolues dans les régions extérieures et intérieures sont ensuite raccordées par leur développement asymptotique.

2.4.2 Théorie de la longueur de mélange

Les équations décrivant la CLA doivent prendre en compte les mouvements turbulents qui la caractérisent. Pour cela, les variables clefs décrivant le fluide sont décomposées en une superposition d'une valeur moyenne et de fluctuations (e.g. $u = \bar{u} + u'$). Les *Reynolds Average Navier Stokes Equations* (RANS) sont dérivées en moyennant les équations ainsi obtenues. Par exemple, si l'on considère l'équation de bilan pour la quantité de mouvement horizontal dans une atmosphère en deux dimensions (x, z) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + w\frac{\partial u}{\partial z} \quad = \quad -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{2.22}$$

avec ν un coefficient de viscosité cinématique présent dans le terme traduisant la contrainte visqueuse. La forme RANS de cette équation est :

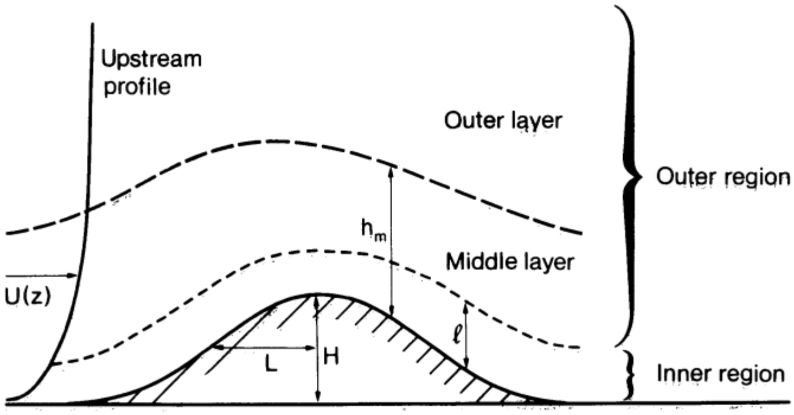


FIGURE 2.7 – Régions de l'écoulement (modifié depuis Carruthers and Hunt (1990))

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \nu(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}) - \frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x} - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \tag{2.23}$$

Les termes $\rho\overline{u'u'} = \tau_{xx}$ et $\rho\overline{u'w'} = \tau_{xz}$ sont des termes de covariance appelés "tenseurs des contraintes de Reynolds" qui décrivent des flux turbulents. Ils traduisent l'interaction entre la turbulence et l'écoulement moyen (voir section 2.2). Ils sont d'ordre de grandeur comparable aux autres termes dans la couche limite et souvent négligeables au-delà. Les équations ne sont alors pas fermées car il y a plus d'inconnues que d'équations. Les termes de covariances peuvent être paramétrisés (fermetures d'ordre 1) ou exprimés à l'aide d'équations prognostiques fonctions de moments d'ordre supérieur qu'il faudra paramétriser à leur tour (fermetures d'ordre supérieur). Les fermetures sont des relations liant les flux turbulents aux quantités moyennes connues. Il en existe deux types : celles qui considèrent les quantités moyennes situées aux mêmes points de l'espace que les flux que l'on souhaite paramétriser (fermetures locales) ou à plusieurs points de l'espace (fermetures non locales).

Parmi les différentes approches existantes, l'une des plus répandues sur laquelle les chapitres 3 et 4 s'appuieront est l'approche flux-gradient, fermeture locale d'ordre 1 qui consiste à supposer les flux proportionnels aux gradients locaux de quantités moyennes :

$$\overline{u'w'} = -K_m \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right). \tag{2.24}$$

Dans le cas des équations pour la quantité de mouvement, le coefficient de proportionnalité K_m s'appelle un *coefficient de diffusion turbulente*. Il n'est pas une propriété du fluide mais dépend des caractéristiques de l'écoulement ainsi que de la position considérée ; il doit être déterminé pour chaque situation. Comme les gradients verticaux sont généralement beaucoup plus forts que les gradients horizontaux dans la couche limite, ces derniers sont souvent négligeables.

Une approche classique pour paramétrer ce coefficient dans la couche limite atmosphérique est basée sur l'hypothèse de la longueur de mélange. Dans une atmosphère quasiment neutre, où les effets de flottabilité sont négligeables, l'échelle horizontale des tourbillons est comparable à leur échelle verticale et Prandtl suppose que l'effet des tourbillons sur l'écoulement moyen dépend de la variance des déplacements verticaux des parcelles d'air ainsi que du cisaillement de vent moyen horizontal :

$$K_m = l_m^2 \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right|, \tag{2.25}$$

l_m est la distance caractéristique parcourue par une parcelle d'air déplacée dans le fluide avant qu'elle ne se mélange au milieu environnant et ne perde ses propriétés (vitesse horizontale, température potentielle...). Près du sol, les déplacements sont limités par la surface ce qui permet d'exprimer la longueur de mélange en fonction de la hauteur : $l_m = \kappa z$, avec $\kappa \approx 0.04$, la "constant von Karman". L'expression de K_m implique que des tourbillons de tailles plus conséquentes, de même qu'un plus fort cisaillement de vent, vont produire un mélange plus important causé par la turbulence.

Cette hypothèse est valable lorsque le flux est dominé par des petits tourbillons donc dans le cas d'une couche limite stable ou neutre.

Près du sol, la couche de surface est définie comme la hauteur sur laquelle les flux turbulents sont considérés comme constants et égaux à leur valeur en surface ($(\overline{u'w'}) = (\overline{u'w'})_s$). Sa profondeur dépend de la stabilité et elle représente environ 10% de la hauteur couche limite. Dans cette couche, les flux turbulents peuvent être considérés constants à une valeur u_*^2 où u_* est la vitesse de friction :

$$u_*^2 = -|(\overline{u'w'})_s|. \tag{2.26}$$

Dans ces conditions, l'équation (2.24) peut être intégrée et donne un profil de vent logarithmique dont la constante d'intégration, z_0, est la longueur de rugosité :

$$\bar{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln(\frac{z}{z_0}) \tag{2.27}$$

z_0 représente la hauteur à laquelle le vent moyen s'annule et est directement liée aux hétérogénéités du terrain. Elle peut varier entre 10^{-4} m pour la mer à 0.5 m pour des forêts ou petits villages et 10-100 m pour les montagnes.

Chapitre 3

Absorption par la couche limite d'une onde de gravité stationnaire

On doit à Scorer (1949) l'une des premières théories formulées pour les ondes de gravité se développant en aval des montagnes, du côté opposé au vent incident. Il a montré que des modes résonnants peuvent être excités lorsque la stratification et le vent moyens varient avec l'altitude. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le développement de ces modes est contrôlé par le paramètre de Scorer, ici dans une atmosphère à deux dimensions (x,z) :

$$S(z) = \frac{N^2}{U^2} - \frac{U_{zz}}{U}. \tag{3.1}$$

Plus précisément, les modes résonnants apparaissent lorsque ce paramètre décroît avec l'altitude au-dessus de la surface. N, U et z sont respectivement la flottabilité moyenne, le vent moyen et l'altitude. Certaines harmoniques avec un nombre d'onde horizontal k rencontrent un niveau tournant h_t lors de leur propagation verticale où (voir équation (2.14)) :

$$S(h_t(k)) = k^2. \tag{3.2}$$

Ces harmoniques ne peuvent alors plus se propager au-delà et sont piégées entre ce niveau et la surface. En raison de réflexions successives entre leur niveau tournant et la surface, un nombre discret de modes deviennent résonnants dans le cas non dissipatif. Scorer (1949), et plus récemment Teixeira et al. (2013) ont appliqué cette théorie à une atmosphère à deux couches, mais des cas présentant des variations plus graduelles de $S(z)$ ont aussi été analysés dans de nombreuses études (voir par exemple (Durran, 1986) ou (Wurtele et al., 1996)). L'une d'elles, que l'on doit à Keller (1994), va particulièrement nous intéresser dans la suite. Elle inclut des ondes piégées dans un écoulement caractérisé par une forte croissance du vent au-dessus de la surface. Après Scorer (1949), des travaux ont montré que des ondes piégées peuvent aussi apparaître lors d'une inversion marquée de densité ou vent. Dans ce cas, les interactions des ondes avec la surface n'est pas aussi importante que lorsque celles ci résultent de réflexions multiples entre la surface et un niveau tournant (Vosper, 2004; Sachsperger et al., 2017). Dans le chapitre 4, nous verrons que des modes résonnants ayant peu d'interactions avec la surface peuvent également se développer lorsque l'état moyen de l'atmosphère varie continuellement sur la verticale.

L'une des faiblesses de la théorie de Scorer (1949) est qu'elle néglige les effets dissipatifs qui se manifestent dans la couche limite atmosphérique, bien que les variations de vent et stratification dans cette couche peuvent piéger les ondes de gravité. Ne pas prendre en compte la dissipation provoque une surestimation de l'amplitude des ondes de montagne, des vents de pentes descendant du côté opposé au vent incident et du développement des ondes piégées à l'aval. Cela a été mis en évidence dans des études numériques (Richard et al., 1989; Miller and Durran, 1991; Georgelin et al., 1994). Plus récemment, Jansing et al. (2022) et Tian et al. (2023) ont montré que des simulations d'ondes de gravité et de phénomènes de Foehn dépendent fortement des paramétrisations de la couche limite. Ces paramétrisations sont encore incertaines en régions montagneuses, comme l'a montré (Goger et al., 2019) (voir aussi la revue de Serafin et al. (2018)). Il est également important de rappeler que d'autres lacunes dans la représentation des effets de couche limite en terrain complexe sont discutés dans Tsiringakis et al. (2017); Lehner and Rotach (2018) et Vosper et al. (2018).

Au delà des modèles numériques, le fait de continuer à analyser les mécanismes fondamentaux à l'œuvre dans les interactions entre les ondes piégées et la couche limite est justifié par des observations. Pendant le programme MAP (*Mesoscale Alpine Program*, Bougeault et al. (2001)), Smith et al. (2002) a montré qu'une forte absorption des ondes a lieu lorsque le vent en bas de la couche limite est faible, ce qui peut inhiber le développement d'ondes piégées malgré des conditions favorables au piégeage en altitude. Dans une publication ultérieure, ils proposent une analyse systématique des propriétés absorptives de la surface, montrant qu'une combinaison de vents faibles dans la couche limite et de la dissipation contribue à l'absorption des ondes (Smith et al., 2006). Ils ont ainsi déterminé un coefficient de réflexion à la surface pour des ondes retournant vers le sol en aval d'une montagne et l'ont relié à un taux de décroissance horizontale des ondes piégées (appelés q et α respectivement). Ils ont trouvé qu'une faible réflexion des ondes en surface (ou forte absorption) est liée à une forte décroissance spatiale.

Cependant, dans ces deux travaux, Smith et al. (2006) et Jiang et al. (2006) ont représenté l'effet de la couche limite par une friction de Rayleigh, peu utilisée dans les modèles. En effet, les effets dissipatifs sont généralement pris en compte en considérant une fermeture de la turbulence basée sur la diffusivité turbulente (section 2.4.2). La principale difficulté en considérant une telle fermeture est que les équations ont un ordre de dérivées plus grand sur la verticale (6 par rapport à 2 pour l'équation de Taylor Goldstein non dissipative). Dans un cas où le coefficient de diffusivité turbulente est constant, Lott (2007) a obtenu des solutions en utilisant des méthodes asymptotiques à la manière de Belcher and Wood (1996) (section 2.4.1). L'écoulement est divisé en une région extérieure non dissipative et une région intérieure où les effets dissipatifs sont d'ordre de grandeur comparable aux termes d'advection. Cette région a une profondeur qui varie selon une échelle caractéristique h_i indépendante de la hauteur de la couche limite et qui vérifie :

$$kU(h_i(k)) \approx \frac{\nu'}{h_i^2}, \tag{3.3}$$

où ν' est le coefficient de diffusion turbulente qui agit sur les perturbations produites par la montagne. Un résultat important de ce travail est que lorsque le nombre de Richardson près de la surface

$$Ri(z) = \frac{N^2}{U_z^2} \underbrace{\approx}_{z \to 0} J > 0.25, \tag{3.4}$$

augmente, la réflexion des ondes à la surface diminue même à la limite non dissipative. De plus, dans cette limite, la réflexion est presque totale lorsque $J < 0.25$. Cette condition rappelle le critère d'instabilité en fonction du nombre de Richardson pour les écoulements parallèles stratifiés (Miles, 1961; Howard, 1961). En allant plus loin, Lott (2007) a montré que les modes neutres associés aux instabilités de Kelvin-Helmholtz (Drazin, 1958) peuvent aussi correspondre à des ondes piégées (voir aussi Soufflet et al. (2022)).

Cependant, le cas considérant une valeur constante de viscosité tourbillonnaire est limité par le fait que la diffusion turbulente est mieux représentée en utilisant la théorie de la longueur de mélange, celle-ci décroissant en se rapprochant de la surface. Mais cela ajoute des difficultés : il faut traiter le problème à l'aide de coordonnées curvilignes et re-calculer les solutions dissipatives. Dans une certaine mesure, ces calculs ont été effectués théoriquement par Belcher et al. (1993), Belcher and Wood (1996) et Hunt et al. (1988), et numériquement par Weng et al. (1997). Mais dans ces articles, les réflexions d'ondes entre la surface (ou le haut de la couche interne) et un point tournant n'ont pas été considérées. En particulier, la dissipation d'ondes piégées dans la couche limite atmosphérique n'a pas été mise en évidence. Dans un article récent, dont une partie est aussi l'objet du chapitre 4, Lott et al. (2023) a dérivé une telle théorie en se concentrant sur la transition entre *form drag* (ou force de traînée turbulente) et *wave drag* (ou force de traînée due aux ondes), ainsi que la transition entre blocage en amont de la montagne et effet d'abris à l'aval (l'article est donné en section 8.2).

L'objectif des deux prochains chapitres (et de l'article dont il est issu) est de calculer un coefficient de réflexion pour une onde se propageant dans une couche limite définie par la théorie de la longueur de mélange (chapitre 3), et de le relier à la réponse d'un écoulement au forçage par une montagne (chapitre 4). Le formalisme utilisé dans ce but est le même que celui développé dans l'article Lott et al. (2023). Comme nous le verrons, le taux de décroissance des ondes piégées est bien expliqué par les propriétés absorptives de la surface et leur nombre d'onde horizontal est contrôlé par la dynamique non dissipative de l'écoulement.

Ce chapitre, dédié à la réflexion des ondes dans une couche limite bien définie commencera par détailler le formalisme utilisé (sections 3.1 et 3.2). La section 3.3 présentera ensuite les résultats concernant le coefficient de réflexion. Les sections 3.5 à 3.7 donnent le détail des calculs de solutions non dissipatives et développement des solutions de raccordement dont nous avons besoin ainsi que des figures complémentaires éclairant les discussions sur le coefficient de réflexion.

3.1 Fermeture turbulente et propriétés de l'écoulement moyen

L'évaluation des solutions en présence d'une montagne nécessite l'utilisation de coordonnées curvilignes. Cependant, celles-ci ne sont pas nécessaires pour le calcul d'un coefficient de réflexion sans considérer un tel forçage. Le formalisme sera donc présenté ici à l'aide de coordonnées cartésiennes (x, z), le formalisme en coordonnées curvilignes sera donné au chapitre 4.

3.1.1 Équations de Boussinesq et fermeture

On se place dans un domaine en deux dimensions (x, z) où u, w représentent la vitesse horizontale et verticale, p la pression et ρ la densité. Le système général d'équations sous l'approximation de Boussinesq (dans lequel les variations de densité ne sont prises en compte que lorsqu'elles sont associées au terme gravitationnel : négligées dans les termes d'inertie mais apparentes dans la force d'Archimède) est :

$$\partial_x u + \partial_z w = 0 \tag{3.5a}$$
$$(\partial_t u + u\partial_x u + w\partial_z u) = -\frac{1}{\rho_r}\partial_x p + \partial_z \tau_{xz} \tag{3.5b}$$
$$(\partial_t w + u\partial_x w + w\partial_z w) = -\frac{1}{\rho_r}\partial_z p - g\frac{\rho}{\rho_r} + \partial_z \tau_{zz} \tag{3.5c}$$
$$(\partial_t b + u\partial_x b + w\partial_z b) = \partial_z q \tag{3.5d}$$

Les profils de densité et de pression sont définis par :

$$\rho = \rho_r + \rho_0(z) + \rho'(x, z, t), \qquad p = p_r(z) + p_0(z) + p,' \tag{3.6}$$

et $b = -g\frac{\rho-\rho_r}{\rho_r}$ est la flottabilité. La valeur de densité de référence est $\rho_r = 1$ kg.m^{-3}, et les variables p_0, p_r, ρ_0 et ρ_r vérifient l'équilibre hydrostatique :

$$\frac{dp_r}{dz} = -\rho_r g, \qquad \frac{dp_0}{dz} = -\rho_0 g. \tag{3.7}$$

En cohérence avec la théorie de la longueur de mélange, les termes du tenseur des contraintes et flux de chaleur dans la direction horizontale sont négligés. Dans le système d'équation (3.5), les flux verticaux de quantité de mouvement horizontal et de flottabilité sont paramétrisés à l'aide d'un coefficient de diffusion turbulente dont l'expression est basée sur la théorie de la longueur de mélange :

$$\tau_{xz} = K_m \partial_z u, \qquad \tau_{zz} = K_m \partial_z w, \qquad q = K_m \partial_z b, \tag{3.8}$$

avec

$$K_m = \Lambda_0^2 \mid \frac{\partial u}{\partial z} \mid . \tag{3.9}$$

Λ_0 est la longueur de mélange, échelle caractéristique des tourbillons.

3.1.2 Longueur de mélange et profils de vent moyen

Les modèles classiques de couche limite atmosphérique pour les écoulements neutres considèrent généralement une transition douce entre l'accroissement linéaire de la longueur de mélange avec la hauteur près de la surface et une valeur limite constante, λ, loin de la surface. Par exemple, Blackadar (1962) en a déterminé une expression couramment utilisée :

$$\frac{1}{\Lambda_0} = \frac{1}{\kappa(z + z_0)} + \frac{1}{\lambda}, \tag{3.10}$$

où z_0 est la longueur de rugosité, κ la constante de von Karman. λ est la valeur limite au-dessus de la couche de surface et pourrait varier avec la stratification, cependant, nous ne l'avons pas pris en compte explicitement dans les travaux présentés ici. En revanche, l'étude qui suit considère un large spectre de valeurs de ce paramètre ; les cas les plus stables étant liés à des valeurs faibles de cette longueur. Dans la couche de surface, $K_m \partial u/\partial z = u_*^2$ où $u_* = \tau_s/\rho_r$ est la vitesse de friction et $K_m \partial b/\partial z = b_*^2$ où $b_* = gH_s/(\rho_s c_p u_* \theta_s)$ est l'échelle caractéristique associée à la flottabilité. τ_s est la contrainte de surface, H_s le flux de chaleur, c_p la capacité thermique de l'air par unité de masse à pression constante et θ_s la température potentielle de référence.

Les profils de vent incident et de flottabilité donnant des flux turbulents constant lorsque Λ_0 satisfait équation (3.10) sont donnés par :

$$U_0(z) = \frac{u_*}{\kappa}\ln(\frac{z+z_0}{z_0}) + u_*\frac{z}{\lambda}, \qquad B_0(z) = \frac{b_*}{\kappa}\ln(\frac{z+z_0}{z_0}) + b_*\frac{z}{\lambda}. \tag{3.11}$$

Le problème de ces profils moyens dérivés de l'équation (3.10) est qu'ils sont logarithmiques jusqu'en $z = \infty$ (Belcher and Wood, 1996). Les couches logarithmiques étant en réalité confinées près de la surface, on préfère modifier la formule pour la longueur de mélange de la manière suivante :

$$\Lambda_0 = \lambda \tanh\left(\kappa\frac{z+z_0}{z}\right). \tag{3.12}$$

Cette approximation permet de simplifier la théorie tout en gardant $\Lambda \underbrace{\approx}_{z\to 0} \kappa z$ près de la surface et $\lambda \underbrace{\approx}_{z\to\infty} \lambda$ dans le champ lointain. Avec cette expression, les profils de vent horizontal et de flottabilité qui donnent des flux uniformes sont :

$$U_V(z) = \frac{u_*}{\kappa}\ln\left(\frac{\sinh(\kappa\frac{z+z_0}{\lambda})}{\sinh(\kappa\frac{z_0}{\lambda})}\right), \qquad B_V(z) = \frac{b_*}{\kappa}\ln\left(\frac{\sinh(\kappa\frac{z+z_0}{\lambda})}{\sinh(\kappa\frac{z_0}{\lambda})}\right), \tag{3.13}$$

où l'indice V souligne les solutions "dissipatives" (*viscous*).
Ainsi, les profils de vent et flottabilité restent logarithmiques près du sol mais auront une croissance linéaire au-dessus de la couche de surface. Ces profils sont tracés en bleu pour le vent et noir pour la flottabilité sur la figure 3.1. Si l'on essaye d'analyser les interactions entre les ondes de montagne et une couche de surface dissipative avec la vitesse du vent donnée par l'équation (3.13), une difficulté apparaît du fait de l'augmentation continuelle de la vitesse avec l'altitude. En plus de ne pas être réalistes, cela confine à bas niveau toutes les ondes de gravité se propageant verticalement. En effet, lorsque la vitesse du vent tend vers l'infini tandis que la fréquence de Brunt Väisälä $N^2 = B_z$ devient constante en $z = \infty$. Ainsi, le paramètre de Scorer de l'équation (3.1) qui contrôle le piégeage des ondes tend vers 0 : toutes les harmoniques sont piégées.

Dans la suite, nous considérerons deux cas. Le premier est le cas "cisaillement constant" décrit ci-dessus, et un cas plus réaliste, le cas "cisaillement variable" où le profil de vent est courbé par une fonction tangente hyperbolique, il devient constant à partir d'une certaine altitude d :

$$U(z) = \frac{u_* d}{\lambda}\tanh\left[\frac{\lambda}{u_* d}U_V(z)\right], \; B(z) = B_V(z) \tag{3.14}$$

d représente la hauteur de la couche limite au-delà de laquelle la vitesse du vent est imposée de manière externe plutôt qu'une solution exacte des solutions dissipatives. Le cas "cisaillement constant" de l'équation (3.13) peut être retrouvé en prenant $d = \infty$ dans l'équation (3.14) ($U(z) = U_V(z)$)

La figure 3.1 montre les profils de vent pour $d = 1$ km et $d = \infty$ dans des configurations typiques des cas qui seront analysés par la suite. Dans des régions montagneuses, les valeurs typiques de la longueur de rugosité, de la longueur de mélange limite, de la vitesse de friction, de la hauteur de la couche limite, et de la longueur caractéristique de la montagne sont :

$$z_0 = 1 \text{ m}, \lambda = 20 \text{ m}, u_* = 0.2 \text{ m.s}^{-1}, d = 1 \text{ km}, L = 1 \text{ km}. \tag{3.15}$$

La valeur retenue pour z_0 correspond à celle qui est souvent considérée au-dessus de surfaces chaotiques (Wieringa, 1992), tandis que celle retenue pour λ correspond aux observations (Sun, 2011). Dans la figure 3.1a), on peut voir que lorsque $d = \infty$, le vent U présente un cisaillement constant sur presque tout le domaine tandis que dans le cas $d = 1$, cette zone est limitée à la couche limite, $z < d$. Le profil de vent sur le zoom, figure 3.1b) met en évidence la transition entre un profil linéaire et un profil logarithmique près de la surface. Cette transition se produit aux alentours de $z = h_i$. La partie logarithmique du profil sera appelée dans la suite la couche de surface. Les asymptotes linéaires de U et B dans la partie cisaillée ($\lambda < z < d$) sont visibles sur les figures 3.1b) et c) en gris, elles sont données par :

$$U(z) \underbrace{\approx}_{\lambda \ll z \ll d} \frac{u_*(z+z_a)}{\lambda}, \; B(z) \underbrace{\approx}_{\lambda \ll z} \frac{b_*(z+z_a)}{\lambda} \tag{3.16}$$

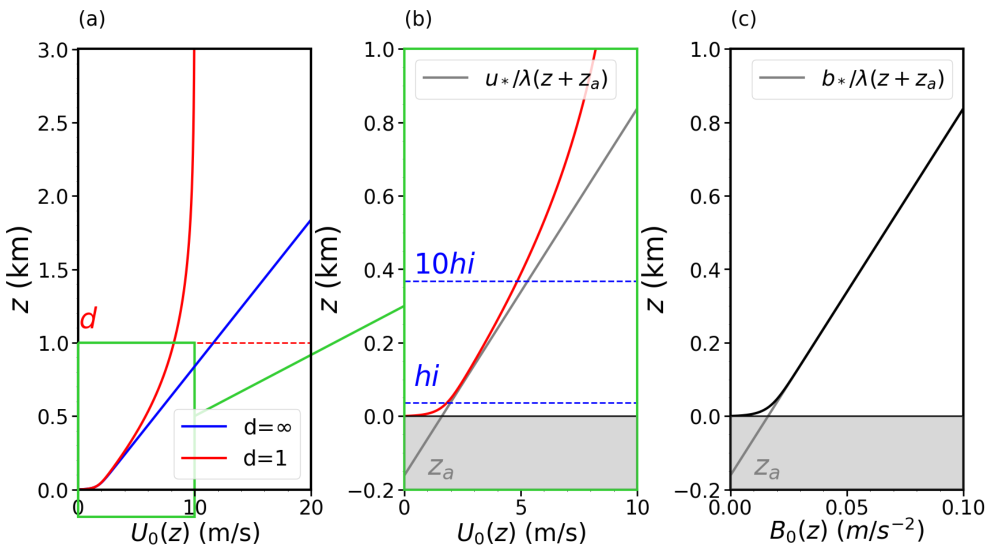


FIGURE 3.1 – Profils moyens pour z_0=1m, λ=20m, avec $u_* = 0.2$ m/s et $b_* = 5$ m/s^{-2} : Vent en a) et b) pour le cas constant shear ($d = \infty$)) en bleu et le cas variable shear (d=1 km) en rouge. Les asymptotes du profil linéaire sont montrées en gris et s'annulent en z=-z_a. Le profil de flottabilité est montré en c) .

où

$$z_a = z_0 - \frac{\lambda}{\kappa} \log\left(2\sinh\frac{\kappa z_0}{\lambda}\right). \tag{3.17}$$

z_a est une mesure de la profondeur du niveau critique de la partie non dissipative du flux : à $z = -z_a$, toutes les perturbations ont une vitesse de phase intrinsèque nulle. Dans la couche limite et en particulier au-dessus de la couche de surface, ces asymptotes correspondent bien à U et B.

Comme évoqué dans l'introduction de ce chapitre, un paramètre important de l'écoulement qui permet d'en quantifier la stabilité est le nombre de Richardson :

$$Ri(z) = \frac{N^2}{U_z^2} \approx \begin{cases} 0 & \text{for} \quad z \to 0 \\ J = \frac{b_*\lambda}{u_*^2} = \frac{\lambda}{\kappa L_{mo}} & \text{for} \quad \lambda << z << d \\ \infty & \text{for} \quad d << z \end{cases} \tag{3.18}$$

où $N^2 = B_z$ et $L_{mo} = u_*^3/(\kappa u_* b_*)$ est la longueur d'Obukhov caractérisant l'extension verticale de la turbulence. En pratique, la longueur de mélange caractéristique λ devrait être liée à L_{mo}, cependant nous avons choisi de garder ces deux paramètres séparés afin de discriminer l'impact dynamique de J sur la dynamique non dissipative et celui de la turbulence au moyen des paramètres λ et z_0. Dans la suite, J sera appelé le nombre de Richardson et sera utilisé pour différencier les régimes de stabilité.

3.2 Solutions linéaires

Pour analyser l'absorption d'ondes de gravité à la surface, on linéarise les équations de Boussinesq (équation (3.5)) autour des profils moyens U et B :

$$u = U(z) + u'(x,z,t), \quad w = w'(x,z,t), \quad b = B(z) + b'(x,z,t), \quad p = p_0(z) + p'(x,z,t) \tag{3.19}$$

où u' et w' sont les perturbations de vent horizontaux et verticaux, tandis que p' et b' sont les perturbations de pression et flottabilité.
La linéarisation des termes dissipatifs des équations (3.5b) et (3.5d) nous donne :

$$\Lambda_0^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\| \frac{\partial u}{\partial z} \approx \Lambda_0^2 \left(\frac{dU}{dz}\right)^2 + 2\Lambda_0^2 \left(\frac{dU}{dz}\right)\frac{\partial u'}{\partial z} = u_*^2 + \underbrace{2\Lambda_0 u_*}_{\nu'} \frac{\partial u'}{\partial z}, \tag{3.20a}$$

$$\Lambda_0^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\| \frac{\partial b}{\partial z} \approx u_* b_* + \Lambda_0 \left(u_* \partial_z b' + b_* \partial_z u'\right). \tag{3.20b}$$

On évalue ensuite le comportement des harmoniques ayant un nombre d'onde $k > 0$, c'est-à-dire en considérant des champs de perturbations de la forme :

$$(u', w', p', b') = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \rho_r \mathbf{p}, \mathbf{b})\, e^{ikx}. \tag{3.21}$$

En faisant l'approximation de Prandtl, le terme de dissipation $\partial_z(\Lambda_0 u_* \partial_z \mathbf{w})$ de l'équation (3.5c) est petit au premier ordre dans la couche interne et est négligé.

Dans l'espace de Fourier, les équations (3.5) stationnaires et linéarisées deviennent :

$$ikU\mathbf{u} + \mathbf{w}\partial_z U + ik\mathbf{p} = \partial_z(2\Lambda_0 u_* \partial_z \mathbf{u}), \tag{3.22a}$$
$$ikU\mathbf{b} + N^2\mathbf{w} = \partial_z(\Lambda_0\,(u_*\partial_z \mathbf{b} + b_*\partial_z \mathbf{u})), \tag{3.22b}$$
$$ikU\mathbf{w} + \partial_z \mathbf{p} - \mathbf{b} = 0, \tag{3.22c}$$
$$ik\mathbf{u} + \partial_z \mathbf{w} = 0. \tag{3.22d}$$

Afin de résoudre les équations selon les méthodes asymptotiques évoquées dans la section 2.4.1, trois régions distinctes sont formées, figure 4.2. La couche intérieure et la couche extérieure sont séparées par une région de raccordement dans laquelle sont dérivés les développements asymptotiques des solutions intérieures et extérieures. Les solutions extérieures sont analytiques, en revanche, les solutions intérieures sont intégrées numériquement à partir de leur forme analytique valable uniquement dans la couche de raccordement. Il est important de souligner que l'intégration numérique commence à partir d'environ $10h_i$. Ce choix numérique est cohérent avec les théories classiques de couche limite dissipative où la profondeur de la couche intérieure, au-delà de laquelle la dissipation a un impact de moins de 1% à l'ordre dominant, est autour de cinq fois son échelle caractéristique (voir aussi (Lott et al., 2020a,b) et (Soufflet et al., 2022)).

Pour intégrer les équations et clarifier l'ordre des développements asymptotiques, nous avons dérivé une forme adimensionnelle du système (3.22) en utilisant les échelles suivantes :

$$(x, z) = L(\bar{z}, \bar{x}), \quad (U_0, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = u_* \frac{L}{\lambda}(\bar{U}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{w}}), \quad \mathbf{p} = u_*^2 \frac{L^2}{\lambda^2}\bar{\mathbf{p}}, \quad \mathbf{b} = u_*^2 \frac{L}{\lambda^2}\bar{\mathbf{b}}, \quad B_0 = \frac{u_*^2 L}{\lambda^2}\bar{B} \tag{3.23}$$
$$\lambda = L\bar{\lambda}, \quad \Lambda_0 = \lambda\bar{\Lambda}, \quad z_0 = L\bar{z}_0.$$

Ainsi, à partir de l'équation (3.12) on a $\bar{\lambda}(\bar{z}) \approx O(1)$ ce qui facilite l'analyse en ordre de grandeur. Les équations adimensionnalisées sont :

$$i\bar{k}\bar{U}\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{w}}\partial_{\bar{z}}\bar{U} + i\bar{k}\bar{\mathbf{p}} = \bar{\lambda}^2\partial_{\bar{z}}(2\bar{\Lambda}_0\partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{u}}), \tag{3.24a}$$
$$i\bar{k}\bar{U}\bar{\mathbf{b}} + \bar{B}_{\bar{z}}\bar{\mathbf{w}} = \bar{\lambda}^2\partial_{\bar{z}}\bar{\Lambda}_0\left(\partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{b}} + J\partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{u}}\right), \tag{3.24b}$$
$$i\bar{k}\bar{U}\bar{\mathbf{w}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{b}} = 0, \tag{3.24c}$$
$$i\bar{k}\bar{\mathbf{u}} + \partial_{\bar{z}}\bar{\mathbf{w}} = 0. \tag{3.24d}$$

On peut voir que le petit paramètre qui va contrôler l'analyse asymptotique est $\bar{\lambda}^2$. Il impacte directement l'épaisseur de la couche intérieure $\bar{h}_i$, et nous verrons que $\bar{h}_i \approx \bar{\lambda}^{2/3}\bar{k}^{-3}$. La condition à la limite à la surface de non-glissement est :

$$\bar{\mathbf{w}}(\bar{z} = 0) = \bar{\mathbf{u}}(\bar{z} = 0) = \bar{\mathbf{b}}(\bar{z} = 0) = 0 \tag{3.25}$$

3.2.1 Solutions dans la région extérieure

Lorsque $\bar{\lambda} << 1$, les termes dissipatifs des équations (3.24) sont négligeables à l'ordre dominant. Cette approximation n'est donc valable que dans la région extérieure, lorsque $\bar{z} >> \bar{h}_i$, région où les profils incidents (3.14) sont :

$$\bar{U}(\bar{z}) \underbrace{\approx}_{\bar{z}>>\bar{\lambda}} U_I(z) = \bar{d}\bar{s} = \bar{d}\tanh\left[\frac{\bar{z} + \bar{z}_a}{\bar{d}}\right], \quad \bar{B}(\bar{z}) \underbrace{\approx}_{\bar{z}>>\bar{\lambda}} B_I(z) = J(\bar{z} + \bar{z}_a), \tag{3.26}$$

sachant que de façon systématique $\bar{h}_i > \bar{\lambda}$ et on rappelle que :

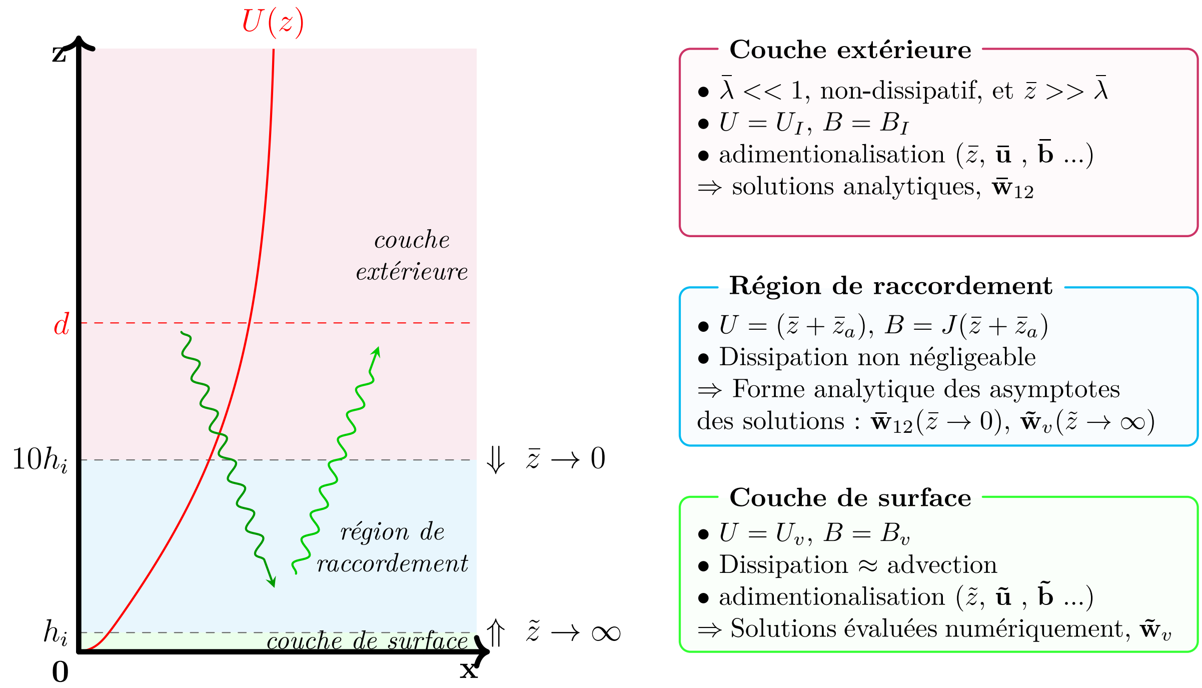


FIGURE 3.2 – Schéma représentant les propriétés des régions considérées pour la résolution des équations

$$\bar{z}_a = \bar{z}_0 - \frac{\bar{\lambda}}{\kappa} \ln\left(2\sinh\left(\frac{\kappa \bar{z}_0}{\bar{\lambda}}\right)\right). \tag{3.27}$$

Comme nous l'avons vu dans la section 3.1.2, $\bar{z}_a$, paramètre lié au profil de vent incident dans l'atmosphère libre, en est la profondeur du niveau critique pour les ondes stationnaires. Il correspond au point supposé où l'asymptote du profil du vent moyen vaut 0 m/s (figure 3.1).

Le système d'équation (3.24) sans terme de dissipation se réduit à l'équation de Taylor- Goldstein suivante :

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{d\bar{z}^2} + \left(\frac{J}{\bar{d}^2\bar{s}^2} - \frac{\bar{s}_{\bar{z}\bar{z}}}{\bar{s}} - \bar{k}^2\right)\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 0. \tag{3.28}$$

La solution des équations s'exprime en terme de fonctions hypergéométriques lorsque $d \neq \infty$ et de fonctions de Hankel lorsque $d = \infty$. Dans le premier cas, les solutions correspondant aux ondes se propageant vers le haut ont été développées dans l'appendix de Soufflet et al. (2022), mais afin d'évaluer la réflexion des ondes au sol, nous avons besoin d'étendre ce calcul aux ondes se propageant vers la surface. Ce calcul est détaillé en section 3.5 et consiste à obtenir une équation hypergéométrique à partir de l'équation (3.28) à l'aide de changements de variables.

Deux de ces solutions nous intéressent particulièrement,

$$\bar{\mathbf{w}}_{1(1)} = \bar{\mathbf{w}}_D \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to\infty} e^{\bar{m}(\bar{z}+\bar{z}_a)}, \qquad \bar{\mathbf{w}}_{2(1)} = \bar{\mathbf{w}}_I \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to\infty} e^{-\bar{m}(\bar{z}+\bar{z}_a)} \tag{3.29}$$

où

$$\bar{m} = \sqrt{|\ \bar{k}^2 - J/\bar{d}^2\ |} \tag{3.30}$$

Quand $\bar{k}^2 < J/\bar{d}^2$, $\bar{m}$ devient $-isign(\bar{k})\bar{m}$. Dans la suite de ce chapitre, nous nous limiterons à l'approximation hydrostatique des solutions extérieures lorsque $\bar{d} \neq \infty$. Nous reviendrons aux autres cas dans le chapitre 4. Dans cette limite,

$$\bar{m} = -isign(\bar{k})\frac{\sqrt{J}}{\bar{d}}, \tag{3.31}$$

il n'y a pas de points tournants ni d'ondes piégées ($\bar{m}$ est toujours imaginaire). Ainsi, on peut étudier la réflexion d'une onde au sol en comparant les solutions d'ondes se propageant vers le haut et celles se propageant vers le bas sans avoir à rester vigilant aux effets de piégeage des ondes dans l'atmosphère. Il est également à noter que cette approximation est aussi valable au premier ordre dans la couche intérieure. La première solution, $\bar{\mathbf{w}}_D$ correspond à une onde se propageant vers le bas ($\bar{m}$ est toujours imaginaire en approximation hydrostatique). La deuxième, $\bar{\mathbf{w}}_I$ correspond à une onde se propageant vers le haut.

Deux autres solutions sont aussi intéressantes :

$$\bar{\mathbf{w}}_{1(0)} \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to 0} (\frac{\bar{z}+\bar{z}_a}{\bar{d}})^{\frac{1}{2}+i\mu}, \qquad \bar{\mathbf{w}}_{2(0)} \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to 0} (\frac{\bar{z}+\bar{z}_a}{\bar{d}})^{\frac{1}{2}-i\mu} \tag{3.32}$$

où

$$\mu = \sqrt{\mid J - \frac{1}{4} \mid} \tag{3.33}$$

qui devient $i\mu$ quand J $< \frac{1}{4}$, μ. Le développement asymptotique de ces solutions près du sol correspondent aux solutions près d'un niveau critique développées par Booker and Bretherton (1967) :

$$\bar{\mathbf{w}}_D \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to 0} \bar{a}_4(\bar{z}+\bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu} + \bar{a}_3(\bar{z}+\bar{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu} = \bar{\mathbf{w}}_{1M} \tag{3.34a}$$

$$\bar{\mathbf{w}}_I \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to 0} \bar{a}_2(\bar{z}+\bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu} + \bar{a}_1(\bar{z}+\bar{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu} = \bar{\mathbf{w}}_{2M} \tag{3.34b}$$

Les $\bar{a}_i$s sont donnés en section 3.5. Ici, le niveau critique est situé sous la surface, en $-\bar{z}_a$. Pour $J > 1/4$, ces deux solutions peuvent être assimilées à une onde se propageant vers le haut ou vers le bas respectivement. Le développement asymptotique des solutions de la couche extérieure en $\bar{z} \to 0$, équation (3.34), va pouvoir être raccordé à celui des solutions de la couche intérieure dans la région de raccordement (voir figure 4.2). La solution externe totale peut alors s'écrire :

$$\bar{\mathbf{w}}_{12} = U_p \bar{\mathbf{w}}_I + D_o \bar{\mathbf{w}}_D. \tag{3.35}$$

3.2.2 Solutions dans la couche intérieure

Pour évaluer les solutions qui satisfont les conditions aux limites, on introduit une échelle caractéristique :

$$\bar{\delta} = \left(\frac{\bar{\lambda}^2}{\bar{k}}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{3.36}$$

L'échelle caractéristique de la couche intérieure considérée jusqu'à présent, $\bar{h}_i$, a un ordre de grandeur comparable à $\bar{\delta}$. Plus précisément, ils coïncident lorsque la viscosité est constante tandis que $\bar{h}_i$ est 1 à 3 fois plus petit que $\bar{\delta}$ dans les cas que nous étudierons ici (voir tableau 3.1). Adopter cette nouvelle échelle nous évite d'introduire une résolution numérique de équation (3.3) et facilite le développement asymptotique des solutions.

$\bar{\lambda}(\times 10^{-3})$ \ $\bar{z}_0(\times 10^{-3})$	0.5	1	2
5	32	24	16
20	196	162	128
50	604	518	432

$\bar{\lambda}(\times 10^{-3})$ \ $\bar{z}_0(\times 10^{-3})$	0.5	1	2
5	22 (29)	23 (29)	24 (29)
20	36 (73)	40 (73)	43 (73)
50	50 (135)	52 (135)	57 (135)

Table 3.1 – Valeurs de $\bar{z}_a$ ($\times 10^{-3}$) à gauche et de $\bar{h}_i$ ($\bar{\delta}$) ($\times 10^{-3}$) à droite pour différentes valeurs de $\bar{\lambda}$ and $\bar{z}_0$ (voir Eqs. (3.3) (3.17), et (3.36))

On peut alors introduire les variables adimensionnées de la manière suivante :

$$\bar{z}+\bar{z}_a = \bar{\delta}(\tilde{z}+\tilde{z}_a),\ \bar{w} = \bar{\delta}\bar{k}\tilde{w},\ \bar{p} = \bar{\delta}\tilde{p},\ (\bar{u},\bar{b}) = (\tilde{u},\tilde{b}).$$

Dans cette région, $\bar{U} \approx \bar{\delta}\bar{U}_V$ ce qui implique que $\bar{U}$ soit petit et ait une échelle caractéristique $\bar{\delta}$. On a donc :

$$U \approx \bar{\delta}\tilde{U} \quad \text{où } \tilde{U} = \frac{\tilde{\lambda}}{\kappa}\ln\left(\frac{\sinh(\kappa\frac{\tilde{z}+\tilde{z}_0}{\tilde{\lambda}})}{\sinh(\kappa\frac{\tilde{z}_0}{\tilde{\lambda}})}\right), \tag{3.37}$$

$$\tilde{\Lambda} = \tanh\left(\kappa\frac{\tilde{z}+\tilde{z}_a}{\tilde{\lambda}}\right).$$

Les équations dans la couche interne s'écrivent alors :

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{U}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} = -i\tilde{\mathbf{p}} + 2\partial_{\tilde{z}}(\tilde{\Lambda}\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}}), \tag{3.38a}$$

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{b}} + J\tilde{U}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} = \partial_{\tilde{z}}(\tilde{\Lambda}(\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{b}} + J\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}})) \tag{3.38b}$$

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{b}}, \tag{3.38c}$$

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{u}} + \partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} = 0. \tag{3.38d}$$

Les solutions seront évaluées numériquement à partir de leur développement asymptotique dans la région de raccordement à l'aide d'un algorithme de Runge Kutta et donnent lieu à une solution totale dans la couche interne, $\tilde{\mathbf{w}}_v$.

3.2.3 Solutions dans la région de raccordement

Cette région est caractérisée par le fait que la solution extérieure est toujours valable, mais les effets dissipatifs commencent à devenir non négligeables. Dans cette région, le cisaillement de vent et de stratification sont presque constants et on peut trouver une forme approximée des solutions de la couche intérieure qui peuvent être raccordées aux solutions non dissipatives de la couche extérieure. Les solutions de la couche intérieure pourront alors être intégrées numériquement à partir de leur développement asymptotique.

Les profils de vent et stratification dans cette couche s'écrivent :

$$\tilde{U}\underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty}(\tilde{z}+\tilde{z}_a), \qquad \tilde{B}\underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty}J(\tilde{z}+\tilde{z}_a). \tag{3.39}$$

Dans cette région de raccordement, $\tilde{\Lambda} \approx 1$. Le système d'équation (3.24) s'écrit :

$$i(\tilde{z}+\tilde{z}_a)\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{U}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} = -i\tilde{\mathbf{p}} + 2\partial^2_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}}, \tag{3.40a}$$

$$i(\tilde{z}+\tilde{z}_a)\tilde{\mathbf{b}} + J\tilde{U}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} = \partial_{\tilde{z}}(\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{b}} + J\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}}) \tag{3.40b}$$

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{b}}, \tag{3.40c}$$

$$i(\tilde{z}+\tilde{z}_a)\tilde{\mathbf{u}} + \partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} = 0. \tag{3.40d}$$

Ce système ne contient plus aucune dépendance avec le nombre d'onde. Il peut être résumé en une seule équation pour $\tilde{\mathbf{w}}$ d'ordre 6 :

$$2\partial^{(6)}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} - 3i(\tilde{z}+\tilde{z}_a)\partial^{(4)}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} - (2-J)i\partial^{(3)}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} - (\tilde{z}+\tilde{z}_a)^2\partial^{(2)}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{w}} - J\tilde{\mathbf{w}} = 0 \tag{3.41}$$

Dans l'section 3.6, 6 solutions asymptotiques quand $\tilde{z} \to \infty$ sont dérivées. Cependant, deux d'entre elles présentent une croissance exponentielle avec $\tilde{z}$ et ne pourront être raccordées aux solutions externes. Elles ne seront pas considérées par la suite. Les quatre autres solutions ont le comportement asymptotique suivant :

$$\tilde{\mathbf{w}}_{v1}\underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty}(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{v2}\underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty}(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu}, \tag{3.42}$$

$$\tilde{\mathbf{w}}_{v3}\underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty}(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{-\frac{9+2J}{4}}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{i}(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{\frac{3}{2}}}, \quad \tilde{\mathbf{w}}_{v4}\underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty}(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{-\frac{5-2J}{4}}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{i}{2}}(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{\frac{3}{2}}}. \tag{3.43}$$

Ces quatre solutions sont représentées figure 3.3 dans le cas typique de la figure 3.1. Deux d'entre elles, $\tilde{\mathbf{w}}_{v3}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_{v4}$ présentent une décroissance exponentielle quand $\tilde{z} \to \infty$ (figure 3.3, courbes en vert et violet), ce sont des solutions entièrement dissipatives. Ainsi, le raccordement entre les solutions de la couche intérieure et celles de la couche extérieure se fera à l'aide d'une combinaison de $\tilde{\mathbf{w}}_{v1}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_{v2}$ (figure 3.3, courbes en bleu et rouge). On peut exprimer la solution dissipative valable dans la couche intérieure :

$$\tilde{\mathbf{w}}_v = \tilde{\mathbf{w}}_{v1} + \tilde{R}\tilde{\mathbf{w}}_{v2} + \tilde{c}\tilde{\mathbf{w}}_{v3} + \tilde{d}\tilde{\mathbf{w}}_{v4}, \tag{3.44}$$

et son asymptote en variable intérieure pour $\tilde{z} \to \infty$:

$$\tilde{\mathbf{w}}_v \underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty} (\tilde{z} + \tilde{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu} + \tilde{R}(\tilde{z} + \tilde{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu} \tag{3.45}$$

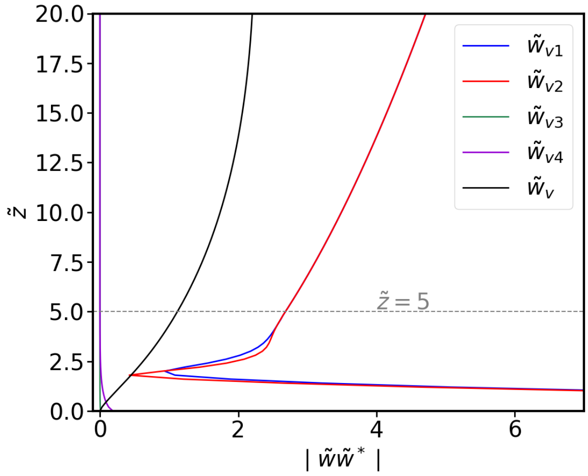


Figure 3.3 – Asymptotes des quatre solutions dissipatives pour $\bar{k}$=1, $\bar{z}_0 = 0.0005$, $\bar{\lambda} = 0.02$

3.2.4 Approximation uniforme de la solution

La combinaison des quatre solutions dissipatives nécessite de déterminer les facteurs devant chaque terme grâce aux conditions aux limites. Celles-ci impliquent que $\tilde{\mathbf{b}}_v, \tilde{\mathbf{w}}_v$ et $\tilde{\mathbf{u}}_v$ doivent être nulles lorsque $\tilde{z} = 0$.

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_{v1} + \tilde{R}\tilde{\mathbf{w}}_{v2} + \tilde{c}\tilde{\mathbf{w}}_{v3} + \tilde{d}\tilde{\mathbf{w}}_{v4} = & 0 \\ \tilde{\mathbf{u}}_{v1} + \tilde{R}\tilde{\mathbf{u}}_{v2} + \tilde{c}\tilde{\mathbf{u}}_{v3} + \tilde{d}\tilde{\mathbf{u}}_{v4} = & 0 \\ \tilde{\mathbf{b}}_{v1} + \tilde{R}\tilde{\mathbf{b}}_{v2} + \tilde{c}\tilde{\mathbf{b}}_{v3} + \tilde{d}\tilde{\mathbf{b}}_{v4} = & 0 \end{cases} \tag{3.46}$$

Une amplitude unitaire est imposée à la solution se propageant vers le haut, $\tilde{\mathbf{w}}_{v1}$. La résolution du système d'équations (3.46) permet de trouver les valeurs de $\tilde{R}, \tilde{c}$ et $\tilde{d}$. Comme évoqué dans la section 3.2.1, lorsque $J > \frac{1}{4}$ chacun des développements asymptotiques des deux solutions exprimées par Booker and Bretherton (1967) peut être assimilé à une onde se propageant vers le haut ($\tilde{\mathbf{w}}_{v1}$) ou vers le bas ($\tilde{\mathbf{w}}_{v2}$) pour $k > 0$. Nous pouvons donc considérer que le coefficient $\tilde{R}$ est un coefficient de réflexion par la couche intérieure lorsque $J > 1/4$.

Pour étendre ce résultat aux cas où $J < 1/4$, nous avons la possibilité d'écrire une fonction de raccordement en variables extérieures de deux façons différentes, depuis les deux régions qui nous intéressent. Tout d'abord, la solution extérieure, équation (3.35), près du sol peut se ré-écrire :

$$\bar{\mathbf{w}}_{12} \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to 0} (\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu}(\bar{a}_4 D_o + \bar{a}_2 U_p) + (\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu}(\bar{a}_3 D_o + \bar{a}_1 U_p) = \bar{\mathbf{w}}_M. \tag{3.47}$$

Ensuite, le développement asymptotique des solutions de la couche interne, équation (3.45), exprimé en variables extérieures quand $\tilde{z} \to \infty$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{w}}_v \quad & \underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty} \quad \tilde{a}_1(\bar{k}\bar{\delta}((\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu} + \tilde{R}(\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu})) \\ & \underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty} \quad \tilde{a}_1\bar{k}\bar{\delta}^{\frac{1}{2}+i\mu}((\tilde{z} + \tilde{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu} + \tilde{R}\bar{\delta}^{-2i\mu}(\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu}) = \bar{\mathbf{w}}_M. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Le coefficient $\tilde{a}_1$ permet l'égalité des deux fonctions de raccordement :

$$\tilde{a}_1 = \frac{\bar{a}_4 + q\bar{a}_2}{\bar{k}}\bar{\delta}^{-\frac{1}{2}-i\mu}. \tag{3.49}$$

L'égalité entre les équations (3.47) et (3.48) nous permet de calculer un coefficient de réflexion total, q :

$$q = \frac{U_p}{D_o} = \frac{\bar{a}_4 - \tilde{R}\bar{a}_3}{\bar{a}_2 - \tilde{R}\bar{a}_1}. \tag{3.50}$$

Ainsi, les deux asymptotes des solutions peuvent être raccordées comme nous pouvons le voir sur la figure 3.4a et permettent d'obtenir une approximation uniforme de la solution, tracée figure 3.4b :

$$\bar{\mathbf{w}} = \bar{\mathbf{w}}_{12}(\bar{k}, \bar{z}) + \bar{k}\bar{\delta}\tilde{\mathbf{w}}_v(\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}) - \bar{k}\bar{\delta}\tilde{\mathbf{w}}_M(\bar{k}, \bar{z}/\bar{\delta}) \tag{3.51}$$

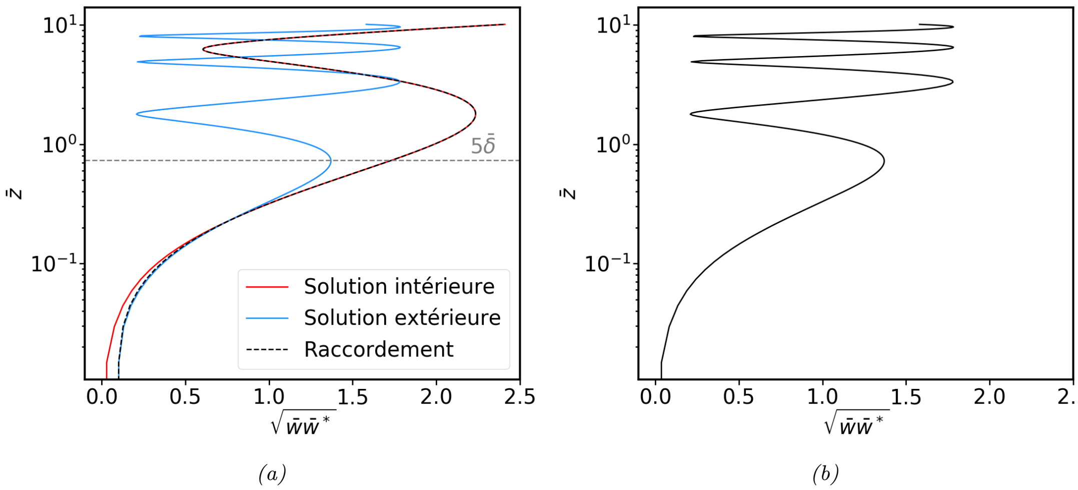


FIGURE 3.4 – Amplitude des solutions dans les trois régions pour $\bar{k}$=1, $\bar{z}_0 = 0.0001$, $\bar{\lambda} = 0.02$ en a) avec $\bar{\mathbf{w}}_{12}$ en bleu, $\bar{\mathbf{w}}_v$ en rouge, $\bar{\mathbf{w}}_M$ en noir, et solution uniforme $\bar{\mathbf{w}}$ (équation (3.51)) en b)

3.3 Absorption par une couche de surface

Pour rendre le développement du formalisme plus clair en quantifiant les effets dissipatifs, nous avons utilisé deux adimensionnements. La partie qui suit donne les résultats obtenus dans ce cadre et afin de faciliter la compréhension, ils seront donnés sous forme dimensionnelle.

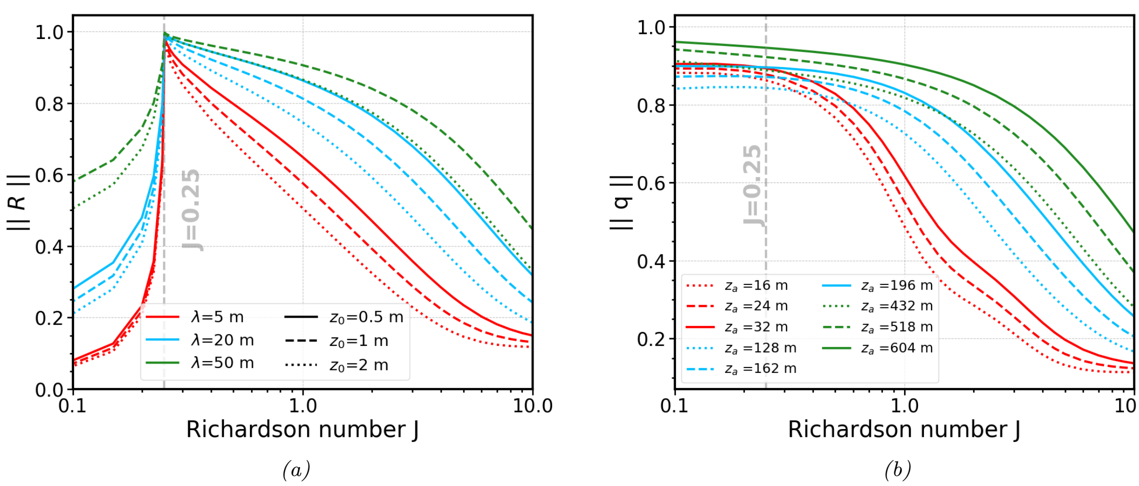


FIGURE 3.5 – Coefficient de réflexion à la surface : a) à la sortie de la couche interne, b) dans la région extérieure dans le cas cisaillement variable hydrostatique avec F=1. Les valeurs de la profondeur du niveau critique, z_a sont données sur la figure b) à la place de λ et z_0 en a)

La figure 3.5a montre le coefficient de réflexion estimé à la sortie de la couche intérieure, R, pour différentes valeurs de la longueur de rugosité (z_0) et de la longueur de mélange (λ) en fonction de J. Ces figures sont tracées pour un nombre d'onde horizontal dominant $k = 1/L = 10^{-3}m^{-1}$. Quand $J > 0.25$, on peut voir que ce coefficient décroît avec la stabilité (J). Cela est consistant avec le fait que les solutions ayant un plus grand μ (donc quand J augmente, voir équation (3.33)) oscillent plus rapidement sur la verticale. Elles sont alors plus absorbées. Ce comportement est illustré sur la figure 3.6a : pour un même z_a, la solution non dissipative (qui correspond aux solutions de Booker and Bretherton (1967)) oscille plus pour un J grand. Cela est particulièrement vrai dans la région où les effets dissipatifs commencent à être significatifs (région placée sous $5h_i$).

Toujours sur la figure 3.5a, on peut noter que le coefficient de réflexion décroît avec la longueur de rugosité z_0, pour λ fixé, ce qui est en accord avec le fait qu'une valeur importante de ce paramètre mène à plus de dissipation. Cela a d'ailleurs été montré et quantifié par Jiang et al. (2006) dans un modèle simple de réflexion d'ondes. De manière plus surprenante, on peut aussi voir sur cette figure que l'absorption décroît (R croît) lorsque la valeur limite de la longueur de mélange, λ, augmente comme si plus de dissipation donnait moins d'absorption. Pour interpréter ce résultat, il faut se rappeler que le caractère oscillatoire des solutions $\tilde{\mathbf{w}}_{v1}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_{v2}$ est plus prononcé près de la surface quand la profondeur du niveau critique n'est pas trop grand (z_a dans l'équation (3.27)). Comme on peut le voir sur le tableau 3.1, cette profondeur diminue quand z_0 croît, mais augmente avec λ, ce qui explique le comportement d'absorption de la figure 3.5a.

Le fait que l'absorption deviennent moins sensible à J lorsque z_a est grand est aussi illustré sur la figure 3.6 : quand $z_a = 162\ m$, (figure 3.6b) les différences entre le comportement oscillatoire des solutions pour $J = 0.3$ et $J = 4$ ne sont pas aussi prononcées que lorsque z_a est plus petit (figure 3.6a). La baisse de réflexion quand J augmente est alors moins importante (par exemple, on peut comparer les courbes en tiret bleues et en pointillés rouges, figure 3.5a). Enfin, il est important de noter que R n'est pas sensible au choix de k car les équations de la couche interne résolues dans la section 3.2 peuvent être calculées de manière indépendante au nombre d'onde. Cela reste vrai dans la limite de notre analyse, c'est-à-dire quand :

$$\bar{\lambda} < \bar{\delta}(\bar{k}) \approx \bar{h}_i(\bar{k}) < \bar{d} \tag{3.52}$$

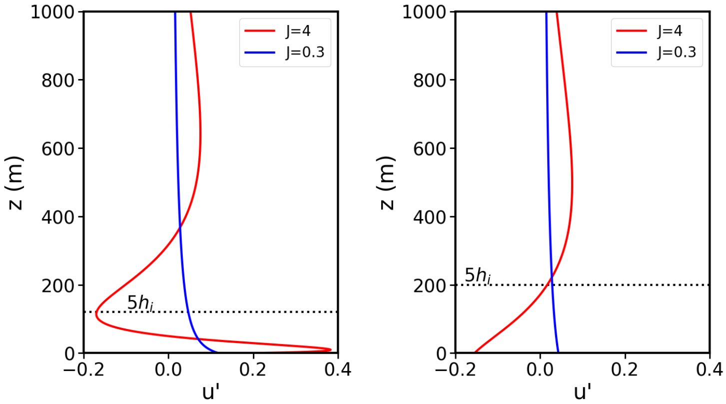
Les résultats pour R quand $J < 0.25$ sont plus difficiles à interpréter car dans ce cas, $\tilde{\mathbf{w}}_{v1}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_{v2}$ dans l'équation (3.44) ne peuvent plus être associées à des ondes de gravité se propageant vers le haut ou vers le bas. C'est pour cette raison que nous nous intéressons maintenant au coefficient de réflexion dans la région externe q, calculé dans la section 3.2.4. En faisant l'approximation hydrostatique dans la couche externe, le piégeage des ondes est évité et on peut analyser la réflexion d'une onde se propageant dans l'écoulement décrit ici.

q est représenté sur la figure 3.5b pour $d = \sqrt{J}$ ($F = 1$), et on voit que son amplitude se comporte quasiment de la même manière que R quand $J > 0.25$. Par contre, contrairement à R, il se rapproche de 1 (réflexion presque totale) quand $J < 0.25$. Là encore, l'approximation hydrostatique des équations dans la région extérieure supprime la dépendance en k des a_is. Comme R ne dépend pas de $\bar{k}$, q ne varie pas beaucoup avec $\bar{k}$ non plus. Il y a cependant une petite sensibilité : en gardant des valeurs entre $0.5 < \bar{k} < 2$, on peut noter une absorption légèrement plus importante quand la profondeur de la couche limite (h_i) augmente et tend vers la hauteur de la couche limite (d), c'est-à-dire quand la couche intérieure pénètre plus dans la couche limite (c'est-à-dire pour les courbes rouges, section 3.7.1).

Cette interprétation soutenant que la réflexion en surface des ondes est presque totale quand $J < 0.25$ a cependant une limite. En effet, le coefficient q est plus qu'un coefficient de réflexion en surface car des réflexions partielles d'ondes peuvent se produire là où la courbure du vent est forte (autour de $z = d$ même en cas hydrostatique car le paramètre de Scorer varie à cet endroit là). Nous avons alors vérifié que ces réflexions partielles ont un impact qualitatif faible en faisant des tests de sensitivité de nos résultats à d, section 3.7.1. Cette faible sensitivité à la courbure du vent autour de d provient probablement du très doux fléchissement du vent de la couche limite par la fonction tanh. Elle a en effet été choisie par Lott (2007) pour limiter ces réflexions partielles.

3.4 Conclusion

En météorologie dynamique et en océanographie, la turbulence de couche limite est souvent paramétrisée avec une diffusivité turbulente. Ces fermetures sont remises en question notamment lorsque les plus petites échelles de la turbulence peuvent rétroagir sur les échelles plus grandes (Schumann and Launder, 1995; Weinbrecht and Mason, 2008), ou en région montagneuse car la turbulence est connue pour être non homogène dans la direction horizontale (Stiperski and Rotach, 2016). Cependant, de nombreux modèles les utilisent encore. Il est donc important de développer des théories qui peuvent aider à comprendre le comportement de ces modèles. Une première étape est alors d'utiliser une théorie linéaire où la turbulence



(a) z_a=16 m *(b) z_a=162 m*

FIGURE 3.6 – Champ de perturbations de vitesses verticales associées aux solutions de Booker and Bretherton (1967) se propageant vers le bas : $\mathbf{u} = \frac{i}{k}(1/2 - i\mu)(z + za)^{-1/2-i\mu}$*. Ici, seulement la partie réelle est montrée*

est représentée par une viscosité dont l'amplitude varie selon la théorie de la longueur de mélange pour observer comment les ondes sont réfléchies à la surface.

Le premier message à retenir de ce travail est que près de la surface, l'écoulement de couche limite non perturbé a un nombre de Richardson nul par construction et est moins absorptif que dans un cas à viscosité constante analysé dans Lott (2007) (comparer les figure 3.5a et figure 3.5b avec les figures 2 et 3 de Lott (2007) respectivement). On peut interpréter cette différence en remarquant que l'absorption au niveau critique dans Lott (2007) est moins efficace car celui-ci se déplace sous la surface dans les cas considérés ici. Pour illustrer ce phénomène, nous pouvons voir que l'absorption est comparable à Lott (2007) seulement lorsque la profondeur du niveau critique z_a est petite. Nous avons aussi constaté que cette profondeur est importante et l'absorption est petite quand la valeur limite de la longueur de mélange est grande... comme si plus de dissipation résulte en moins d'absorption. Cela est dû au fait qu'à une longueur de rugosité fixée, une valeur plus grande de λ mène à une profondeur du niveau critique z_a plus importante. En raison de son rôle central, une suite de ce travail pourrait être de le calculer en pratique sur des profils de vent réels, par exemple en faisant correspondre une fonction linéaire aux vents de couche limite au-delà de la couche de surface et en identifiant la profondeur à laquelle cette fonction s'annule. Nous avons aussi trouvé que l'absorption augmente avec la valeur du nombre de Richardson de l'écoulement moyen. Cela est dû à un comportement plus oscillatoire proche de la surface qui résulte en plus d'absorption, comme dans Lott (2007).

3.5 Annexe A : Calcul des solutions lorsque le cisaillement varie dans l'atmosphère libre

A) Le changement de variable $r = \bar{s}^2 = \tanh[(\bar{z} + \bar{z}_a)/\bar{d}]$ permet de transformer l'équation (3.28) en une équation ayant trois singularités régulières en r=0, 1 et ∞ :

$$\frac{d\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}^2}{dr^2} + \frac{d\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}}}{dr}\left[\frac{1}{2r} - \frac{1}{1-r}\right] + \left[\frac{J}{4r^2(1-r)^2} + \frac{1}{2r(1-r)} - \frac{d^2k^2}{4r(1-r)^2}\right]\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = 0. \tag{3.53}$$

B) Le développement autour des singularités permet de s'approcher de la solution par un développement de Frobenius dont les exposants ont été calculés dans (Soufflet et al., 2022). :

$$r = 0 \quad : \quad \alpha_1 = \frac{1}{4} + i\frac{\mu}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{1}{4} - i\frac{\mu}{2} \tag{3.54}$$

$$r = 1 \quad : \quad \gamma_1 = \frac{-\bar{m}\bar{d}}{2}, \qquad \gamma_= \frac{\bar{m}\bar{d}}{2} \tag{3.55}$$

$$r = \infty \quad : \quad \beta_1 = 1, \qquad \beta_2 = -\frac{1}{2} \tag{3.56}$$

avec

$$\mu = \sqrt{\mid J - \frac{1}{4} \mid}, \qquad \bar{m} = \sqrt{\mid \bar{k}^2 - J/\bar{d}^2 \mid}.$$

Quand J $< \frac{1}{4}$, μ devient $i\mu$ et quand $\bar{k}^2 < J/\bar{d}^2$, $\bar{m}$ devient $-isign(\bar{k})\bar{m}$.

C) On peut alors effectuer un nouveau changement de variable (d'après (Olver, 1974)) :

$$\bar{\mathbf{w}}_{\mathbf{I}} = r^{\alpha_1}(1-r)^{\gamma_1}W(r). \tag{3.57}$$

l'équation (3.28) peut être ramenée à une équation hypergéométrique pour W ayant comme coefficients une combinaison des exposants trouvés précédemment :

$$r(1-r)\frac{d^2W}{dr^2} + [c - (a+b+1)r]\frac{dW}{dr} - abW = 0, \tag{3.58}$$

avec

$$\begin{cases} a = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \frac{5}{4} + i\frac{\mu}{2} - \frac{\bar{m}}{2} \\ b = \alpha_1 + \beta_2 + \gamma_1 = -\frac{1}{4} + i\frac{\mu}{2} - \frac{\bar{m}}{2} \\ c = 1 + \alpha_1 - \alpha_2 = 1 + i\mu \end{cases} \tag{3.59}$$

Trois singularités régulières sont maintenant en $\bar{z} = 0, 1, \infty$.

D) Les deux solutions linéaires indépendantes autour de la singularité r=1, données dans (Abramowitz and Stegun, 1964) (eq 15.5.3) nous intéressent particulièrement car elles permettent de calculer les solutions asymptotiques en $\bar{z} \to \infty$:

$$W_{1(1)} = \quad r^{1-c}F(1+b-c, 1+a-c; a+b+1-c; 1-r) \tag{3.60}$$

$$W_{2(1)} = \quad (1-r)^{c-a-b}F(c-b, c-a; c-a-b+1; 1-r) \tag{3.61}$$

où F est la fonction hypergéométrique. Elles nous permettent de trouver deux solutions :

$$\bar{\mathbf{w}}_{1(1)} = \bar{\mathbf{w}}_D = 2^{\bar{m}}r^{\alpha_1}(1-r)^{\gamma_1}W_{1(1)} \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to\infty} e^{\bar{m}(\bar{z}+\bar{z}_a)}, \tag{3.62a}$$

$$\bar{\mathbf{w}}_{2(1)} = \bar{\mathbf{w}}_I = 2^{-\bar{m}}r^{\alpha_1}(1-r)^{\gamma_1}W_{2(1)} \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to\infty} e^{-\bar{m}(\bar{z}+\bar{z}_a)}. \tag{3.62b}$$

La première solution correspond à une onde d'amplitude unitaire (normalisée par le facteur $2^{\bar{m}}$) croissant exponentiellement avec $\bar{z}$, ou à une onde se propageant vers le bas lorsque $\bar{k}^2 < J/\bar{d}^2$. La deuxième correspond à une onde ayant une amplitude décroissant exponentiellement, ou à une onde se propageant vers le haut.

Dans le cas hydrostatique, on a $\bar{m} = -isign(\bar{k})\sqrt{J}/\bar{d}$, toutes les longueurs d'ondes deviennent évanescentes et sont piégées.

E) Afin de pouvoir raccorder les solutions de la couche extérieure aux développements asymptotiques des solutions dissipatives dans la région de raccordement, nous avons besoin de connaître le comportement de ces solutions autour de la singularité $r = 0$ (en $\bar{z} \to 0$). De nouveau, leur expression est donnée par Abramowitz and Stegun (1964) :

$$W_{1(0)} = F(a, b; c; r), \tag{3.63}$$
$$W_{2(0)} = r^{1-c}F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; r) \tag{3.64}$$

et permet de calculer leur comportement asymptotique :

$$\bar{\mathbf{w}}_{1(0)} = r^{\alpha_1}(1 - r)^{\gamma_1}W_{1(0)} \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to 0} (\frac{\bar{z} + \bar{z}_a}{\bar{d}})^{\frac{1}{2}+i\mu} \tag{3.65a}$$
$$\bar{\mathbf{w}}_{2(0)} = r^{\alpha_1}(1 - r)^{\gamma_1}W_{2(0)} \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to 0} (\frac{\bar{z} + \bar{z}_a}{\bar{d}})^{\frac{1}{2}-i\mu} \tag{3.65b}$$

F) Ces solutions autour des singularités r=0 et r=1 dépendent l'une de l'autre, et sont reliées par Abramowitz and Stegun (1964), eq (15.3.6) :

$$W_{1(0)} = A_1W_{1(1)} + A_3W_{2(1)}, \tag{3.66a}$$
$$W_{2(0)} = A_2W_{1(1)} + A_4W_{2(1)}. \tag{3.66b}$$

avec

$$A_1 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \quad , \quad A_2 = \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(1-a)\Gamma(1-b)},$$
$$A_3 = \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \quad , \quad A_4 = \frac{\Gamma(2-c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(1-c+a)\Gamma(1-c+b)} \tag{3.67}$$

Pour obtenir les solutions en ($\bar{z} \to \infty$) en fonction des solutions en ($\bar{z} \to 0$), on peut exprimer les expressions (3.66) avec $\bar{\mathbf{w}}_{1(1)}$, $\bar{\mathbf{w}}_{2(1)}$, $\bar{\mathbf{w}}_{1(0)}$, $\bar{\mathbf{w}}_{2(0)}$, les inverser et utiliser la forme asymptotique en ($\bar{z} \to 0$) (3.65) :

$$\bar{\mathbf{w}}_{1(1)} = b_4\bar{\mathbf{w}}_{1(0)} + b_3\bar{\mathbf{w}}_{2(0)} \underbrace{=}_{\bar{z}\to 0} \bar{a}_4(\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu} + \bar{a}_3(\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu} = \bar{\mathbf{w}}_{1M} \tag{3.68a}$$
$$\bar{\mathbf{w}}_{2(1)} = b_2\bar{\mathbf{w}}_{1(0)} + b_1\bar{\mathbf{w}}_{2(0)} \underbrace{=}_{\bar{z}\to 0} \bar{a}_2(\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu} + \bar{a}_1(\bar{z} + \bar{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu} = \bar{\mathbf{w}}_{2M} \tag{3.68b}$$

où

$$\bar{a}_1 = b_1\bar{d}^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \ \ \bar{a}_2 = b_2\bar{d}^{-\frac{1}{2}-i\mu}, \ \ \bar{a}_3 = b_3\bar{d}^{-\frac{1}{2}+i\mu}, \ \ \bar{a}_4 = b_4\bar{d}^{-\frac{1}{2}-i\mu} \tag{3.69}$$

Et

$$b_j = \begin{cases} (-1)^{j-1}\dfrac{2^{-\bar{m}}A_j}{A_1A_4 - A_3A_2} & \text{pour j=1,2} \\ (-1)^{j}\dfrac{2^{\bar{m}}A_j}{A_1A_4 - A_3A_2} & \text{pour j=3,4} \end{cases}$$

3.6 Annexe B : Solutions dans la région de raccordement

La région de raccordement est une zone où $\tilde{z}$ est grand mais $\bar{z}$ est petit et où les effets dissipatifs commencent à devenir significatifs, même si elle se situe au-dessus de la couche intérieure. Les cisaillements de vent et stratification constants dans cette région permettent de donner le système d'équation (3.40) qui peut être réduit à une équation d'ordre 6 en variable extérieures ($\bar{z} = \bar{\delta}\tilde{z}$) :

$$2\bar{\delta}^6\partial_{\bar{z}}^{(6)}\bar{\mathbf{w}} - 3i(\bar{z}+\bar{z}_a)\bar{\delta}^3\partial_{\bar{z}}^{(4)}\bar{\mathbf{w}} - (2-J)i\partial_{\bar{z}}^{(3)}\bar{\mathbf{w}} - (\bar{z}+\bar{z}_a)^2\partial_{\bar{z}}^{(2)}\bar{\mathbf{w}} - J\bar{\mathbf{w}} = 0 \tag{3.70}$$

Pour trouver les solutions asymptotiques, nous suivons Koppel (1964) et appliquons une approximation WKB :

$$\bar{\mathbf{w}}(\bar{z}) = A(\bar{z}+\bar{z}_a)e^{\frac{B(\bar{z}+\bar{z}_a)}{\epsilon}}, \tag{3.71}$$

où A et B sont des fonctions et ϵ est un petit paramètre. On peut utiliser le fait que :

$$\bar{\mathbf{w}}^{(n)} \approx \left(\frac{A\dot{B}^n}{\epsilon^n} + n\frac{\dot{A}\dot{B}^{n-1}}{\epsilon^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{A\ddot{B}\dot{B}^{n-2}}{\epsilon^{n-1}} + O(\epsilon^{2-n})\right)e^{B/\epsilon}, \tag{3.72}$$

et prendre $\epsilon = \bar{\delta}^{3/2}$, ce qui rend l'équation (3.70) non-dégénérée à l'ordre dominant. Dans ce cas, à l'ordre ϵ^{-2} on a :

$$2\dot{B}^6 - 3i(\bar{z}+\bar{z}_a)\dot{B}^4 - (\bar{z}+\bar{z}_a)^2\dot{B}^2 = 0. \tag{3.73}$$

Cette équation a trois solutions correspondant à des perturbations qui n'augmentent pas de manière exponentielle loin du sol :

$$\dot{B} = 0,\ \dot{B} = -\sqrt{i}\sqrt{\bar{z}+\bar{z}_a},\ \text{et}\ \dot{B} = -\sqrt{i/2}\sqrt{\bar{z}+\bar{z}_a}.$$

- Quand $\dot{B}=0$, tous les termes en puissance de $\bar{\delta}$ dans l'équation (3.70) sont petits et on retrouve les deux solutions non dissipatives de Booker and Bretherton (1967) :

$$(\bar{z}+\bar{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu};\ (\bar{z}+\bar{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu}. \tag{3.74}$$

- Pour $\dot{B} \neq 0$, il faut aller à l'ordre ϵ^{-1} et obtenir :

$$\dot{A}\left(12\dot{B}^5 - 12i(\bar{Z}+\bar{z}_a)\dot{B}^3 - 2(\bar{Z}+\bar{z}_a)^2\dot{B}\right)$$

$$+A\left(30\ddot{B}\dot{B}^4 - 18i(\bar{Z}+\bar{z}_a)\ddot{B}\dot{B}^2 - (2-J)i\dot{B}^3 - (\bar{Z}+\bar{z}_a)^2\ddot{B}\right) = 0. \tag{3.75}$$

En substituant $\dot{B}$ dans équation (3.75), on a :

$$\frac{\dot{A}}{A} = -\frac{9+2J}{4(\bar{z}+\bar{z}_a)}\ \text{et}\ \frac{\dot{A}}{A} = -\frac{5-2J}{4(\bar{z}+\bar{z}_a)} \tag{3.76}$$

pour $\dot{B} = -\sqrt{i}\sqrt{\bar{z}+\bar{z}_a}$, et $\dot{B} = -\sqrt{i/2}\sqrt{\bar{z}+\bar{z}_a}$ respectivement. Cela donne deux autres solutions WKB :

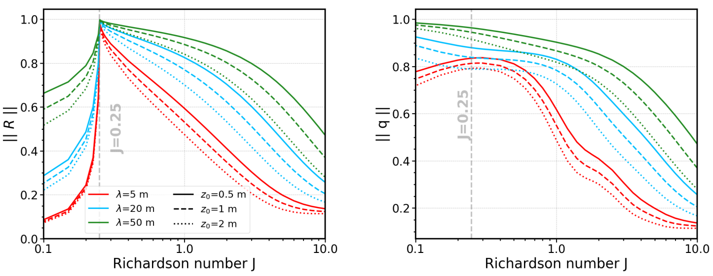
$$(\bar{z}+\bar{z}_a)^{-\frac{9+2J}{4}}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{i}\left(\frac{\bar{z}+\bar{z}_a}{\bar{\delta}}\right)^{3/2}};\ (\bar{z}+\bar{z}_a)^{-\frac{5-2J}{4}}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{i}{2}}\left(\frac{\bar{z}+\bar{z}_a}{\bar{\delta}}\right)^{3/2}}. \tag{3.77}$$

Les solutions de la couche intérieure ayant ces comportements asymptotiques n'ont pas besoin d'être raccordées aux solutions externes car elles décroissent rapidement de manière exponentielle sur la verticale. En revanche, elles sont nécessaires pour satisfaire les trois conditions de non glissement à la surface.

3.7 Annexe C : Sensibilité du coefficient de réflexion

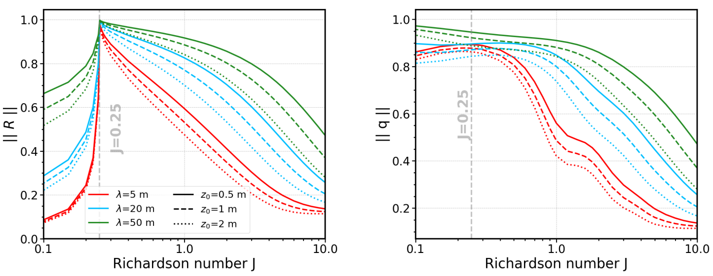
3.7.1 Sensibilité à d

(a) et (b) $d = \sqrt{J}L$, $k = 1/L$



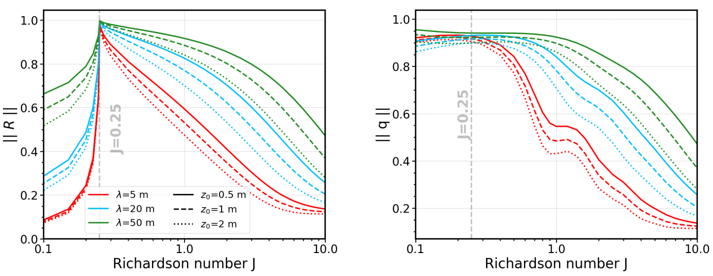
(a) *(b)*

(c) et (d) $d = 2\sqrt{J}L$, $k = 1/L$



(c) *(d)*

(e) et (f) $d = 4\sqrt{J}L$, $k = 1/L$

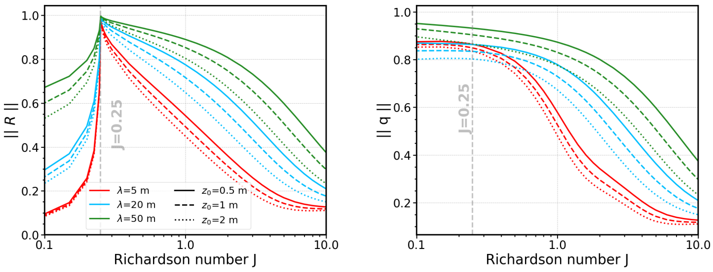


(e) *(f)*

FIGURE 3.8 – *Coefficient de réflexion à la surface : (a), (c), (e) à la sortie de la couche interne, (b), (d) , (f) dans la région extérieure dans le cas cisaillement variable hydrostatique pour différentes valeurs de sld.*

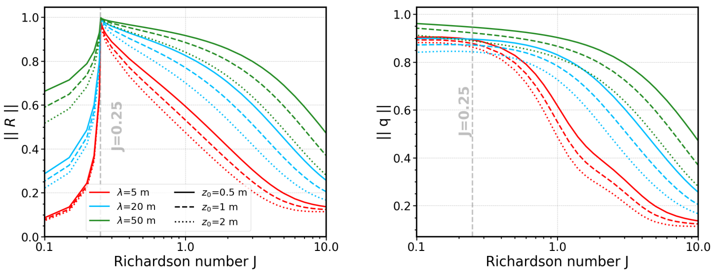
3.7.2 Sensibilité à k

(a) et (b) $d = 1L, k = 0.5/L$



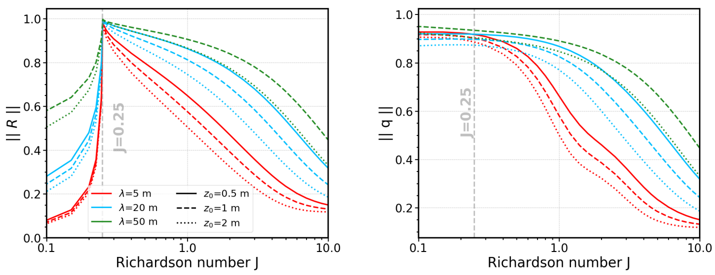
(a) *(b)*

(c) et (d) $d = 1L, k = 1/L$



(c) *(d)*

(e) et (f) $d = 1L,\ k = 2/L$



(e) *(f)* :

FIGURE 3.7 – *Coefficient de réflexion à la surface : (a), (c), (e) à la sortie de la couche interne, (b), (d) , (f) dans la région extérieure dans le cas cisaillement variable hydrostatique pour différentes valeurs de k*

Chapitre 4

Interactions entre une montagne et la couche limite atmosphérique

Dans le chapitre 3, nous avons analysé les liens entre les différents paramètres d'une couche limite basée sur la théorie de la longueur de mélange et la réflexion en surface d'ondes se propageant à travers elle. Le but de ce chapitre est de relier ces résultats avec le comportement des ondes piégées se développant à l'aval d'une montagne.

Afin d'étudier la manière dont les ondes piégées sont affectées par les propriétés de la couche limite, nous allons ajouter une montagne dans le formalisme présenté au chapitre 3. Afin de discriminer l'impact de la région de piégeage des ondes et la quantité d'ondes piégées, les deux profils de vent décrits précédemment seront considérés :

- Le cas "cisaillement constant" caractérisé par un profil de vent logarithmique près de la surface et linéaire au-delà :

$$U_V(z) = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left(\frac{\sinh(\kappa \frac{z+z_0}{\lambda})}{\sinh(\kappa \frac{z_0}{\lambda})} \right), \qquad B_V(z) = \frac{b_*}{\kappa} \ln \left(\frac{\sinh(\kappa \frac{z+z_0}{\lambda})}{\sinh(\kappa \frac{z_0}{\lambda})} \right) \tag{4.1}$$

- Le cas "cisaillement variable" présentant un profil de vent courbé pour devenir constant au-delà d'une hauteur d :

$$U(z) = \frac{u_* D}{\lambda} \tanh \left[\frac{\lambda}{u_* D} U_V(z) \right],\ B(z) = B_V(z) \tag{4.2}$$

Ces profils sont tracés sur la figure 3.1.

Les sections 4.1 à 4.5 redonnent le formalisme développé dans le chapitre précédent en prenant en compte le forçage par la montagne et les coordonnées curvilignes. La section suivante analyse la réponse de l'écoulement à une montagne idéalisée avec une attention particulière portée sur le taux de décroissance spatiale des modes piégés. Les sections 4.10 et 4.11 permettent de développer les solutions non dissipatives dans le cas du cisaillement constant et montre des résultats complémentaires pour mieux décrire les taux de décroissance des modes piégés.

4.1 Formalisme

Les équations pour décrire un écoulement perturbé par une montagne nécessitent d'être exprimées en coordonnées curvilignes. Ainsi, les coordonnées qui suivent le terrain (X, Z) peuvent être reliées aux coordonnées cartésiennes (x, z) par :

$$x = X, \qquad z = Z + h(X)f(Z) = Z + z', \tag{4.3}$$

où $h(x)$ est la hauteur de la montagne et où la fonction $f(Z)$, positive, assure la transition entre les coordonnées suivant le relief près de la surface et les coordonnées cartésiennes loin de celle-ci. Pour cela, $f(0) = 1$ et décroît vers 0 quand $Z \to \infty$. Avec ces coordonnées, les équations de Boussinesq stationnaires peuvent s'écrire de la manière suivante (Clark (1977), équations (2.21)-(2.28) et (3.18)-(3.20)) :

$$\rho \left(u\partial_X u + W\partial_Z u \right) = -(\partial_X \rho p + \partial_Z \rho g^{12} p) + \partial_Z \tau_{XZ}\ , \tag{4.4a}$$

$$\rho\left(u\partial_X w + W\partial_Z w\right) = -\partial_Z p + \rho b + \partial_Z \tau_{XZ}\ , \tag{4.4b}$$

$$\rho\left(u\partial_X b + W\partial_Z b\right) = \partial_Z q_Z\ , \tag{4.4c}$$

$$\partial_X \rho u + \partial_Z \rho W = 0\ , \tag{4.4d}$$

où la "pseudo" densité ρ est le Jacobien de la transformation, ρg^{12} est le coefficient du tenseur métrique, W est la vitesse dans la direction perpendiculaire aux surfaces de $Z = const$:

$$\rho = \partial_Z z\ ,\quad \rho g^{12} = -\partial_X z\ ,\quad W = u\partial_x Z + w\partial_z Z. \tag{4.5}$$

u et w sont les vitesses horizontales et verticales. Contrairement à Clark (1977), nous avons ici choisi de négliger les flux de chaleur dans la direction horizontale (τ_{xx}, τ_{xz} et q_x) en accord avec la théorie de la longueur de mélange (voir chapitre 3).
Comme dans le chapitre précédent, les anomalies de pression sont divisées par une densité constante de référence, ρ_r et la flottabilité $b = -g(\theta - \theta_r)/\theta_r$. Avec ce formalisme, les conditions à la limite deviennent :

$$u(Z=0) = W(Z=0) = b(Z=0) = 0 \tag{4.6}$$

4.2 Échelles de la couche interne et points tournants

Comme nous l'avons vu dans la section 3.2.2 , l'équation (3.3) mesurant l'épaisseur de la couche interne h_i peut être approximée par :

$$h_i(k) \approx \delta(k) = \left(\frac{\lambda^2}{k}\right)^{1/3} \tag{4.7}$$

Les points tournants des ondes sont souvent situés au-dessus de l'échelle caractéristique de la couche interne, à une hauteur h_t définie par l'équation (3.2), niveau où le paramètre de Scorer vaut k^2. Leur présence quantifie le piégeage des ondes tandis que le paramètre J (voir équation (3.18)) quantifie la profondeur sur laquelle le piégeage se produit. Pour illustrer cela (et dans la suite du chapitre), nous considérons une montagne représentée par une gaussienne d'échelle horizontale caractéristique L,

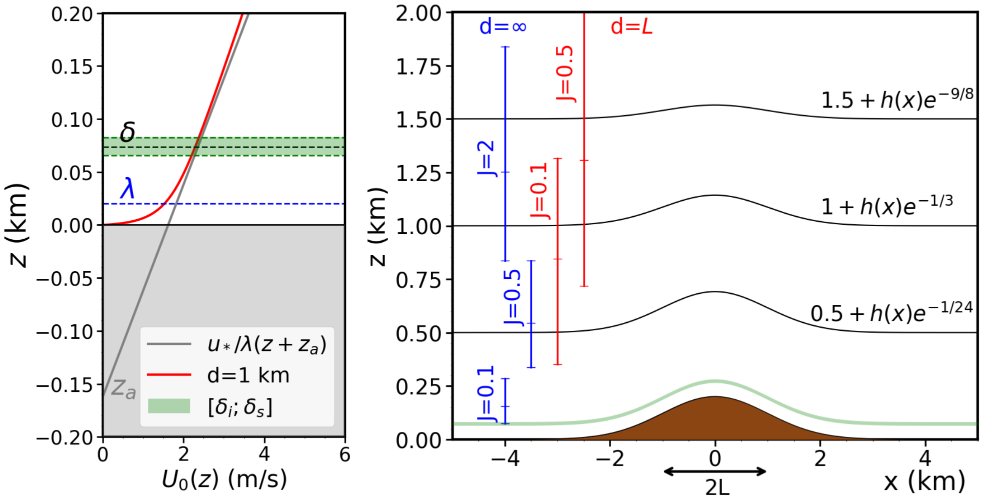
$$h(x) = He^{-x^2/2L^2}, \tag{4.8}$$

où H est le maximum de la hauteur de la montagne. Pour un tel profil, une large portion des harmoniques excitées ont un nombre d'onde horizontal qui s'étend sur l'intervalle $2^{1/2}/L > k > 2^{-1/2}/L$. Transposé aux échelles internes caractéristiques, δ varie sur une plage $\delta_i < \delta < \delta_s$ qui apparaît sur la figure 4.1a en vert. Nous pouvons voir que cet intervalle satisfait $\lambda < \delta(k) < d$.

Sur la figure 4.1b, cette même région apparaît, en plus des zones délimitées en rouge et bleu. Celles-ci représentent les plages d'altitudes correspondants aux niveaux tournants h_t des ondes émises dans un écoulement caractérisé par un J fixé à $0.1, 0.5$ et 2 et pour des k compris dans l'intervalle $[2^{-1/2}L; 2^{1/2}L]$. Ces plages d'altitudes sont obtenues par résolution de l'équation (3.2). Comme dans (Lott et al., 2020b), on peut voir que dans le cas cisaillement constant ($d = \infty$ en bleu sur la figure 4.1b), le paramètre J contrôle l'altitude des niveaux tournants : quand $J < 1$ ($J > 1$), on peut s'attendre à une dynamique neutre (stratifiée) et ces niveaux sont principalement situés sous (au-dessus de) $L = 1$ km. On peut noter qu'en utilisant les profils logarithmiques issus de la formule de Blackadar classique (équation (3.10)), les diagnostics concernant la couche interne et les niveaux tournants diffèrent peu quantitativement de ceux qui sont présentés ici.
Dans le cas cisaillement variable où $d = L$ (courbes en rouge figure 4.1b), l'altitude des points tournants augmente également avec J mais est localisée significativement plus haut que lorsque $d = \infty$. De plus, lorsque J tend vers 1 et augmente, il n'y a plus beaucoup d'ondes piégées (il n'y a quasiment pas de point tournant pour $J = 2$). En effet, lorsque $d = L$, la fraction d'ondes se propageant vers le haut comparée aux ondes piégées est mesurée en comparant le paramètre de Scorer loin de la surface avec $1/L^2$.

$$S_c(\infty) \gtrless 1/L^2 \iff F = \frac{U(\infty)}{N(\infty)L} = \frac{d}{L\sqrt{J}} \lessgtr 1, \tag{4.9}$$

où les profils de flottabilité et de vent sont donnés par l'équation (4.2) et F est le nombre de Froude. Pour résumer, quand $d = L$, il faut garder à l'esprit que pour un F constant, J contrôle à la fois la région de piégeage mais aussi la quantité d'ondes piégées.



(a) *(b)*

FIGURE 4.1 – (a) Profil de vent moyen pour $\lambda = 20$ m, $L = 1$ km, $d = 1$ km, $z_0 = 1$ m, $u_* = 0.2$ $m.s^{-1}$, (b) Schéma du modèle utilisé. Les lignes en noir suivent la surface à Z=0.5,1,1.5. en (a) et (b), la zone verte représente la hauteur caractéristique de la couche interne pour $2^{1/2}/L > k > 2^{-1/2}/L$. En (b), les lignes verticales montrent les altitudes des niveaux tournants h_t pour le même intervalle et pour J=0.1,0.5,2 pour $d = \infty$ ($d = L$) en bleu (rouge)

Pour une montagne de longueur caractéristique L, le nombre de Froude est donné par équation (4.9). Ce paramètre mesure l'importance des effets non-hydrostatiques sur la dynamique. Une difficulté qui apparaît souvent avec les écoulements de couche limite est que changer un paramètre important, par exemple J, en impacte un autre, par exemple F. Dans l'étude réalisée ici, nous nous concentrons sur les propriétés d'absorption de la couche limite et faisons le choix de varier de manière systématique les paramètres λ, z_0 et J ; F prendra seulement les deux valeurs $F = 1$ ($d = \sqrt{J}$) correspondant au cas avec cisaillement variable, et $F = \infty$ ($d = \infty$) correspondant au cas avec cisaillement constant. Dans ces deux cas, le nombre d'harmoniques qui restent piégées par rapport au nombre d'harmoniques excitées par la montagne reste constant quand les autres paramètres changent (z_o, λ). Cependant, pour garder F constant, la profondeur de la couche limite d doit augmenter avec J. Cela va alors avoir deux effets contrastés : d'un côté, les ondes piégées seront plus atténuées près de la surface quand J augmente, mais de l'autre, le fait que la région piégeante s'épaississe permet à plus de modes de se développer.

4.3 Équations

Le même adimensionnement des équations est adopté ici que dans la section 3.2 avec en plus, spécifiquement aux coordonnées curvilignes,

$$W = \frac{u_* L}{\lambda} \bar{W}. \tag{4.10}$$

Le système d'équation équation (4.4) devient :

$$\rho\left(\bar{u}\partial_{\bar{X}}\bar{u} + \bar{W}\partial_{\bar{Z}}\bar{u}\right) = -\left(\partial_{\bar{X}}\rho\bar{p} + \partial_{\bar{Z}}\rho g^{12}\bar{p}\right) + \bar{\lambda}^2\partial_{\bar{Z}}\left(\bar{\Lambda}^2\|\partial_{\bar{Z}}\bar{u}\|\partial_{\bar{Z}}\bar{u}\right) , \tag{4.11a}$$

$$\rho\left(\bar{u}\partial_{\bar{X}}\bar{w} + \bar{W}\partial_{\bar{Z}}\bar{w}\right) = -\partial_{\bar{Z}}\bar{p} + \rho\bar{b} + \bar{\lambda}^2\partial_{\bar{Z}}\left(\bar{\Lambda}^2\|\partial_{\bar{Z}}\bar{u}\|\partial_{\bar{Z}}\bar{w}\right) , \tag{4.11b}$$

$$\rho\left(\bar{u}\partial_{\bar{X}}\bar{b} + \bar{W}\partial_{\bar{Z}}\bar{b}\right) = \bar{\lambda}^2\partial_{\bar{Z}}\left(\bar{\Lambda}^2\|\partial_{\bar{Z}}\bar{u}\|\partial_{\bar{Z}}\bar{b}\right) , \tag{4.11c}$$

$$\partial_{\bar{X}}\rho\bar{u} + \partial_{\bar{Z}}\rho\bar{W} = 0\,. \tag{4.11d}$$

La transformation de coordonnées équation (4.3) adimensionnée s'écrit :

$$\bar{x} = \bar{X},\ \bar{z} = \bar{Z} + \bar{h}(\bar{X})f(\bar{Z}) = \bar{Z} + \bar{z}'. \tag{4.12}$$

L'adimensionnement pour une petite montagne et la fonction permettant la transition entre les systèmes de coordonnées nous donnent :

$$\bar{h}(\bar{x}) = Se^{-\frac{\bar{x}^2}{2}}, \text{ and } f(\bar{Z}) = \exp\left(-\bar{Z}^3/3\right), \tag{4.13}$$

où $S = H/L$ est la pente de la montagne. La définition de $f(\bar{Z})$ est telle qu'à la surface, $f(0) = 1$, $\dot{f}(0) = 0$ et $\ddot{f}(0) = 0$ ce qui permettra de simplifier le formalisme dans la couche interne.

On cherche des solutions sous forme de transformée de Fourier :

$$\bar{u}'(\bar{X}, \bar{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\mathbf{u}}(\bar{k}, \bar{Z}) e^{i\bar{k}\bar{X}} d\bar{k}\,. \tag{4.14}$$

Nous nous intéressons à des montagnes de petites pentes et supposons que la réponse aux termes de forçage est linéaire. Ainsi, les solutions considérées sont de la forme :

$$\bar{u} = \bar{U} + \bar{u}',\ \bar{w} = \bar{w}'; \bar{W} = \bar{W}',\ \bar{p} = \bar{P} + \bar{p}',\ \bar{b} = \bar{B} + \bar{b}',\ \bar{z} = \bar{Z} + \bar{z}' \text{ and } \rho = 1 + \rho', \tag{4.15}$$

Le système équation (4.11) linéarisé avec $\bar{\boldsymbol{\rho}}$ et $\bar{\mathbf{z}}$, les transformées de Fourier de ρ' et $\bar{z}'$, s'écrit alors :

$$i\bar{k}\bar{U}\bar{\mathbf{u}} + \bar{U}_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{W}} + i\bar{k}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\lambda}^2\partial_{\bar{Z}}2\bar{\Lambda}\partial_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{u}} = i\bar{k}\bar{B}\bar{\mathbf{z}} \tag{4.16a}$$

$$i\bar{k}\bar{U}\bar{\mathbf{W}} + \partial_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{p}} - \bar{\mathbf{b}} - \bar{\lambda}^2\partial_{\bar{Z}}\bar{\Lambda}\partial_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{w}} = \bar{\boldsymbol{\rho}}\bar{B} + \bar{k}^2\bar{U}^2\bar{\mathbf{z}}, \tag{4.16b}$$

$$i\bar{k}\bar{U}\bar{\mathbf{b}} + \bar{B}_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{W}} - \lambda^2\partial_{\bar{Z}}\left(\bar{\Lambda}\partial_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{b}} + J\bar{\Lambda}\partial_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{u}}\right) = 0, \tag{4.16c}$$

$$i\bar{k}\bar{\mathbf{u}} + \partial_{\bar{Z}}\bar{\mathbf{W}} = -i\bar{k}\bar{U}\bar{\boldsymbol{\rho}}, \tag{4.16d}$$

$$\text{Où } \bar{\mathbf{W}} - \bar{\mathbf{w}} = -i\bar{k}\bar{U}\bar{z}, \tag{4.16e}$$

La condition de non-glissement à la surface $\bar{U}(0) = \bar{B}(0) = 0$ devient :

$$\bar{\mathbf{u}}(0) = \bar{\mathbf{W}}(0) = \bar{\mathbf{b}}(0) = 0. \tag{4.17}$$

Les termes de forçage des équations équation (4.16) associés aux coordonnées curvilignes apparaissent à la main de droite de ce système. Pour le résoudre, on va d'abord se concentrer sur la partie homogène (sans terme de forçage) puis chercher une solution particulière qui équilibre ces forçages. Ces deux solutions seront combinées pour en formuler une troisième qui satisfera les conditions aux limites. À la fois pour la solution homogène et particulière, le domaine sera divisé en trois régions (voir chapitre 3)). La zone extérieure, non dissipative, est séparée de la zone intérieure par une zone de raccordement.

4.4 Solution homogène

4.4.1 Solutions de la couche extérieure

La couche externe, loin de la surface, est caractérisée par $\bar{\lambda} << 1$, approximation valide pour $\bar{Z} >> \bar{\delta}$. Le système d'équation est alors non dissipatif. Nous distinguons ici la résolution des équations entre les deux cas qui seront considérés dans la suite de ce chapitre - le cas cisaillement variable et le cas cisaillement constant.

- **Cas cisaillement variable, $\bar{d} \neq \infty$**

Ce cas a été développé dans la section 3.2.1 en coordonnées cartésiennes. Pour rappel, les profils de vent et flottabilité dans cette partie éloignée de la surface peuvent s'écrire :

$$\bar{U}(\bar{Z}) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to\infty} \bar{d}\tanh\left[\frac{\bar{Z} + \bar{z}_a}{\bar{d}}\right], \quad \bar{B}(\bar{z}) \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to\infty} J(\bar{Z} + \bar{z}_a) \tag{4.18}$$

et

$$\bar{z}_a = \bar{z}_0 - \frac{\bar{\lambda}}{\kappa}\ln\left(2\sinh\left(\frac{\kappa\bar{z}_0}{\bar{\lambda}}\right)\right) \tag{4.19}$$

Dans le chapitre 3, nous avions besoin des solutions d'ondes se propageant à la fois vers le haut et vers le bas pour pouvoir calculer un coefficient de réflexion. Dans le cas qui nous intéresse ici, le forçage (la montagne) est situé à la surface. Ainsi, nous ne considérerons que les solutions correspondant aux ondes se propageant vers le haut, et leur développement asymptotique pour $\bar{Z} \to 0$:

$$\bar{\mathbf{W}}_I(\bar{z}) = \bar{\mathbf{w}}_I(\bar{k}, \bar{Z} + \bar{z}_a) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to\infty} e^{-\bar{m}(\bar{Z}+\bar{z}_a)}, \tag{4.20}$$

$$\underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to 0} \bar{a}_1 \left(\bar{Z} + \bar{z}_a\right)^{1/2-i\mu} + \bar{a}_2 \left(\bar{Z} + \bar{z}_a\right)^{1/2+i\mu} = \bar{\mathbf{W}}_{IM}, \tag{4.21}$$

où les $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ sont donnés dans l'annexe section 3.5. Dans ces équations,

$$\mu = \sqrt{\left|J - \frac{1}{4}\right|}, \text{ and } \bar{m} = \sqrt{|\bar{k}^2 - J/\bar{d}^2|}, \tag{4.22}$$

quand $J > 1/4$ et $\bar{k}^2\bar{d}^2 > J$ respectivement. Si $J < 1/4$, μ devient $i\mu$ et quand $\bar{k}^2\bar{d}^2 < J$, $\bar{m}$ devient $-i\,\mathrm{sign}(\bar{k})\bar{m}$.

- **Cas cisaillement constant, $\bar{d} = \infty$**
 Lorsque $\bar{d} = \infty$, les profils de vent et flottabilité loin de la surface peuvent s'exprimer :

$$\bar{U_V}(\bar{Z}) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to\infty} \bar{Z} + \bar{z}_a, \quad \bar{B}(\bar{z}) \underbrace{\approx}_{\bar{z}\to\infty} J(\bar{Z} + \bar{z}_a) \tag{4.23}$$

L'équation de Taylor-Goldstein issue du système d'équation (4.16) homogène sans terme dissipatif est :

$$\frac{d^2\bar{\mathbf{W}}}{d\bar{Z}^2} + \left[\frac{J}{(\bar{Z} + \bar{z}_a)^2} - \bar{k}^2\right]\bar{W} = 0, \tag{4.24}$$

dont les solutions s'expriment en terme de fonctions de Hankel. Leur développement est détaillé section 4.10 et nous permet d'écrire leur expression asymptotique :

$$\bar{\mathbf{W}}_I(\bar{z}) = i\sqrt{\frac{\pi\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)}{2}} e^{-\mu\pi/2} H_{i\mu}^{(1)}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to\infty} e^{-\bar{k}(\bar{Z}+\bar{z}_a)} \tag{4.25}$$

$$\underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to 0} \bar{a}_2(\bar{Z} + \bar{z}_a)^{1/2+i\mu} + \bar{a}_1(\bar{Z} + \bar{z}_a)^{1/2-i\mu}$$

$$= \bar{\mathbf{W}}_{IM} \tag{4.26}$$

Où les $\bar{a}_1$ et $\bar{a}_2$ sont donnés dans l'section 4.10.

Dans les deux cas, cisaillement variable et constant, les solutions (4.20) et (4.25) correspondent à un mode d'amplitude unitaire décroissant exponentiellement quand $\bar{Z} \to \infty$ (ou à une onde se propageant vers le haut si $\bar{m}$ est imaginaire). Proche de la surface, les développements asymptotiques des solutions ((4.21) et (4.26)) se comportent comme des solutions de Booker and Bretherton (1967) proche d'un niveau critique (voir la discussion dans la section 3.2.1) qui pourront être raccordées aux solutions dissipatives de la couche interne dans la région de raccordement.

4.4.2 Région de raccordement

Comme dans le chapitre précédent, on va utiliser le fait qu'il existe une région où $\bar{Z}$ est petit mais où les effets dissipatifs deviennent significatifs pour raccorder les solutions des régions externes et internes. On utilise un adimensionnement propre à la couche interne pour calculer les solutions près de la surface (quand $\bar{Z} \to 0$) et à la sortie de la couche intérieure. Elle est présentée section 3.2.3 et complétée pour une situation en coordonnées curvilignes par :

$$\bar{Z} + \bar{z}_a = \bar{\delta}(\tilde{Z} + \tilde{z}_a), \qquad \bar{\mathbf{W}} = \bar{\delta}\bar{k}\tilde{\mathbf{W}}, \qquad U \approx \bar{\delta}\tilde{U} \tag{4.27}$$

La résolution du système homogène est la même que dans la section 3.2.3 mais avec les coordonnées curvilignes. Ainsi, le système d'équation avec les termes dissipatifs et avec le développement asymptotique du profil de vent dans la partie où le cisaillement est constant (équation (4.23)) s'écrit :

$$i(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)\tilde{\mathbf{u}}+\tilde{\mathbf{W}}+i\tilde{\mathbf{p}}-2\partial_{\tilde{Z}}\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}}=0. \tag{4.28a}$$

$$i(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)\tilde{\mathbf{b}}+J\tilde{\mathbf{W}}-\partial_{\tilde{Z}}\left(\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{b}}+J\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}}\right)=0, \tag{4.28b}$$

$$\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{p}}-\tilde{\mathbf{b}}=0, \tag{4.28c}$$

$$i\tilde{\mathbf{u}}+\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{W}}=0, \tag{4.28d}$$

L'équation du sixième ordre issue de ce système nous donne quatre solutions (sans prendre en compte les deux solutions qui croissent exponentiellement), section 3.6. Deux correspondent aux solutions de Booker and Bretherton (1967) :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{v1}\underbrace{\approx}_{\tilde{Z}\to\infty}(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{\frac{1}{2}-i\mu},\quad \tilde{\mathbf{W}}_{v2}\underbrace{\approx}_{\tilde{Z}\to\infty}(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{\frac{1}{2}+i\mu}, \tag{4.29}$$

et deux des solutions ont une décroissance exponentielle avec $\tilde{Z}$ et n'ont pas besoin d'être raccordées aux solutions externes. En revanche, elles sont essentielles pour permettre de satisfaire les conditions à la limite en surface :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{v3}\underbrace{\approx}_{\tilde{Z}\to\infty}(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{-\frac{9+2J}{4}}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{i}[(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)]^{\frac{3}{2}}},\quad \tilde{\mathbf{W}}_{v4}\underbrace{\approx}_{\tilde{Z}\to\infty}(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{-\frac{5-2J}{4}}e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{i}{2}}[(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)]^{\frac{3}{2}}} \tag{4.30}$$

4.4.3 Solutions de la couche interne

Le système d'équation en coordonnées curvilignes avec les termes dissipatifs devient :

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{u}}+\tilde{U}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{W}}=-i\tilde{\mathbf{p}}+2\partial_{\tilde{z}}(\tilde{\Lambda}\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}}), \tag{4.31a}$$

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{b}}+J\tilde{U}_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{W}}=\partial_{\tilde{z}}(\tilde{\Lambda}(\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{b}}+J\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{u}})) \tag{4.31b}$$

$$\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{p}}=\tilde{\mathbf{b}}, \tag{4.31c}$$

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{u}}+\partial_{\tilde{z}}\tilde{\mathbf{W}}=0, \tag{4.31d}$$

où $\tilde{U}$ est donné par :

$$\tilde{U}=\frac{\tilde{\lambda}}{\kappa}\log\left(\frac{\sinh\kappa(\tilde{Z}+\tilde{z}_0)/\tilde{\lambda}}{\sinh\kappa\tilde{z}_0/\tilde{\lambda}}\right),\ \tilde{\Lambda}=\tanh\left(\kappa\frac{\tilde{Z}+\tilde{z}_0}{\tilde{\lambda}}\right), \tag{4.32}$$

Les solutions sont intégrées vers la surface par un algorithme de Runge-Kutta à partir de $\tilde{z}\approx 5$, initié par les solutions de raccordement. Pour cela, on fait coïncider les deux solutions $\tilde{\mathbf{W}}_{v1}$ et $\tilde{\mathbf{W}}_{v2}$, équation (4.29), avec le développement asymptotique des solutions extérieures eq (4.26) :

$$\tilde{\mathbf{W}}_{12}\underbrace{\approx}_{\tilde{Z}\to\infty}\tilde{a}_1(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{1/2-i\mu}+\tilde{a}_2(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{1/2+i\mu} \tag{4.33}$$

avec

$$\tilde{a}_1=\frac{\bar{a}_1}{\bar{k}}\bar{\delta}^{-1/2-i\mu},\tilde{a}_2=\frac{\bar{a}_2}{\bar{k}}\bar{\delta}^{-1/2+i\mu}. \tag{4.34}$$

On évalue également numériquement les deux solutions qui sont exponentiellement petites loin de la surface, $\tilde{\mathbf{W}}_{v3}$ et $\tilde{\mathbf{W}}_{v4}$, eq (4.30).

4.4.4 Approximation uniforme

Maintenant qu'on a les solutions intérieures, extérieures et de raccordement, on peut exprimer une approximation des trois, mais il est nécessaire de les écrire dans les mêmes coordonnées. L'approximation uniforme pour la vitesse verticale des solutions d'ondes se propageant vers le haut peut être écrite

$$\bar{\mathbf{W}}_{12U}(\bar{Z})=\bar{\mathbf{W}}_I(\bar{Z})+\bar{k}\bar{\delta}\tilde{\mathbf{W}}_{12}(\bar{Z}/\bar{\delta})-\bar{\mathbf{W}}_{IM}(\bar{Z}). \tag{4.35}$$

tandis que l'approximation uniforme des solutions dissipatives qui correspondent à $\tilde{\mathbf{W}}_3$ et $\tilde{\mathbf{W}}_4$ consiste simplement à les écrire en terme d'adimensionnement externe puisque ces deux fonctions deviennent exponentiellement petites dans la couche lointaine (dans ce cas, externe et raccordement coïncident) :

$$\bar{\mathbf{W}}_{3U}(\bar{Z})=\bar{k}\bar{\delta}\tilde{\mathbf{W}}_3(\bar{Z}/\bar{\delta}),\ \bar{\mathbf{W}}_{4U}(\bar{Z})=\bar{k}\bar{\delta}\tilde{\mathbf{W}}_4(\bar{Z}/\bar{\delta}) \tag{4.36}$$

4.5 Solution particulière

Une particularité des coordonnées curvilignes est qu'elles font apparaître des termes de forçage nécessitant la résolution d'une solution particulière.

Région extérieure
Quand on néglige les termes dissipatifs des équations (4.16), une solution particulière est obtenue en faisant la différence entre les champs moyens exprimés en coordonnées cartésiennes et curvilignes. Par exemple, pour le vent, la différence est : $\bar{U}(\bar{z}) - \bar{U}(\bar{Z})$. Ainsi, on peut calculer la solution particulière linéaire :

$$\bar{\mathbf{u}}_{Ip} = \bar{\mathbf{z}}\bar{U}_{\bar{Z}},\ \bar{\mathbf{b}}_{Ip} = \bar{\mathbf{z}}\bar{B}_{\bar{Z}},\ \bar{\mathbf{p}}_{Ip} = \bar{\mathbf{z}}\bar{B}(\bar{Z}),\ \text{et}\ \bar{\mathbf{W}}_{Ip} = -i\bar{k}\bar{U}\bar{\mathbf{z}}. \tag{4.37}$$

Pour vérifier cette solution particulière, il suffit de remplacer ces expressions dans équation (4.16) sans termes dissipatifs.

Région de raccordement
Dans la région de raccordement, la solution particulière est :

$$\bar{\mathbf{u}}_{Mp} = \bar{\mathbf{z}},\ \bar{\mathbf{b}}_{Mp} = J\bar{z},\ \bar{\mathbf{p}}_{Mp} = J(\bar{Z} + \bar{z}_a)\bar{\mathbf{z}},\ \text{and}\ \bar{\mathbf{W}}_{Mp} = -i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)\bar{\mathbf{z}}. \tag{4.38}$$

Région intérieure
Dans cette région, on utilise l'adimensionnement décrit en section 4.4.2 pour écrire à l'ordre dominant :

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{U}_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{W}} + i\tilde{\mathbf{p}} - \partial_{\tilde{Z}}2\tilde{\Lambda}\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}} = i\tilde{B}\bar{h}, \tag{4.39a}$$

$$\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{b}} = 0, \tag{4.39b}$$

$$i\tilde{U}\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{B}_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{W}} - \partial_{\tilde{Z}}\tilde{\Lambda}\left(\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{b}} + J\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}}\right) = 0, \tag{4.39c}$$

$$i\tilde{\mathbf{u}} + \partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{W}} = 0. \tag{4.39d}$$

La solution particulière est alors obtenue par intégration numérique des équation (4.39) initiée par les solutions de raccordement équation (4.38). Si on appelle $\tilde{\mathbf{W}}_{Vp}(\bar{k}, \tilde{Z})$ la solution, une expression uniforme de la solution particulière est :

$$\bar{\mathbf{W}}_{Up}(\bar{k}, \tilde{Z}) = \bar{\mathbf{W}}_{Ip}(\bar{k}, \bar{Z}) + \bar{k}\bar{\delta}\tilde{\mathbf{W}}_{Vp}(\bar{k}, \bar{Z}/\bar{\delta}) - \bar{\mathbf{W}}_{Mp}(\bar{k}, \bar{Z}), \tag{4.40}$$

Avec des expressions similaires pour $\bar{\mathbf{u}}_{Up}$ et $\bar{\mathbf{b}}_{Up}$.

4.6 Conditions aux limites

On peut alors écrire l'expression complète des champs, par exemple ici de vitesse verticale, en combinant linéairement les trois solutions homogènes ($\bar{\mathbf{W}}_{12U}(\bar{Z})$,$\bar{\mathbf{W}}_{3U}(\bar{Z})$ et $\bar{\mathbf{W}}_{4U}(\bar{Z})$) ainsi que la solution particulière ($\bar{\mathbf{W}}_{pU}(\bar{Z})$) :

$$\bar{W}(\bar{X}, \bar{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(f_2(\bar{k})\bar{\mathbf{W}}_{12U}(\bar{k}, \bar{Z}) + f_3(\bar{k})\bar{\mathbf{W}}_{3U}(\bar{k}, \bar{Z}) + f_4(\bar{k})\bar{\mathbf{W}}_{3U}(\bar{k}, \bar{Z}) + \bar{\mathbf{W}}_{pU}(\bar{k}, \bar{Z})\right) e^{i\bar{k}\bar{X}} d\bar{k} \tag{4.41}$$

Les coefficients $f_i(\bar{k})$ peuvent être trouvés à partir de la condition à la limite, équation (4.6) :

$$\begin{cases} f_2(\bar{k})\bar{\mathbf{W}}_{12U}(\bar{k}, 0) + f_3(\bar{k})\bar{\mathbf{W}}_{3U}(\bar{k}, 0) + f_4(\bar{k})\bar{\mathbf{W}}_{3U}(\bar{k}, 0) = & -\bar{\mathbf{W}}_{pU}(\bar{k}, 0) \\ f_2(\bar{k})\bar{\mathbf{u}}_{12U}(\bar{k}, 0) + f_3(\bar{k})\bar{\mathbf{u}}_{3U}(\bar{k}, 0) + f_4(\bar{k})\bar{\mathbf{u}}_{3U}(\bar{k}, 0) = & -\bar{\mathbf{u}}_{pU}(\bar{k}, 0) \\ f_2(\bar{k})\bar{\mathbf{b}}_{12U}(\bar{k}, 0) + f_3(\bar{k})\bar{\mathbf{b}}_{3U}(\bar{k}, 0) + f_4(\bar{k})\bar{\mathbf{b}}_{3U}(\bar{k}, 0) = & -\bar{\mathbf{b}}_{pU}(\bar{k}, 0) \end{cases} \tag{4.42}$$

Ensuite, les champs d'ondes sont reconstruits par transformée de Fourier inverse et interpolation sur une grille rectangulaire.

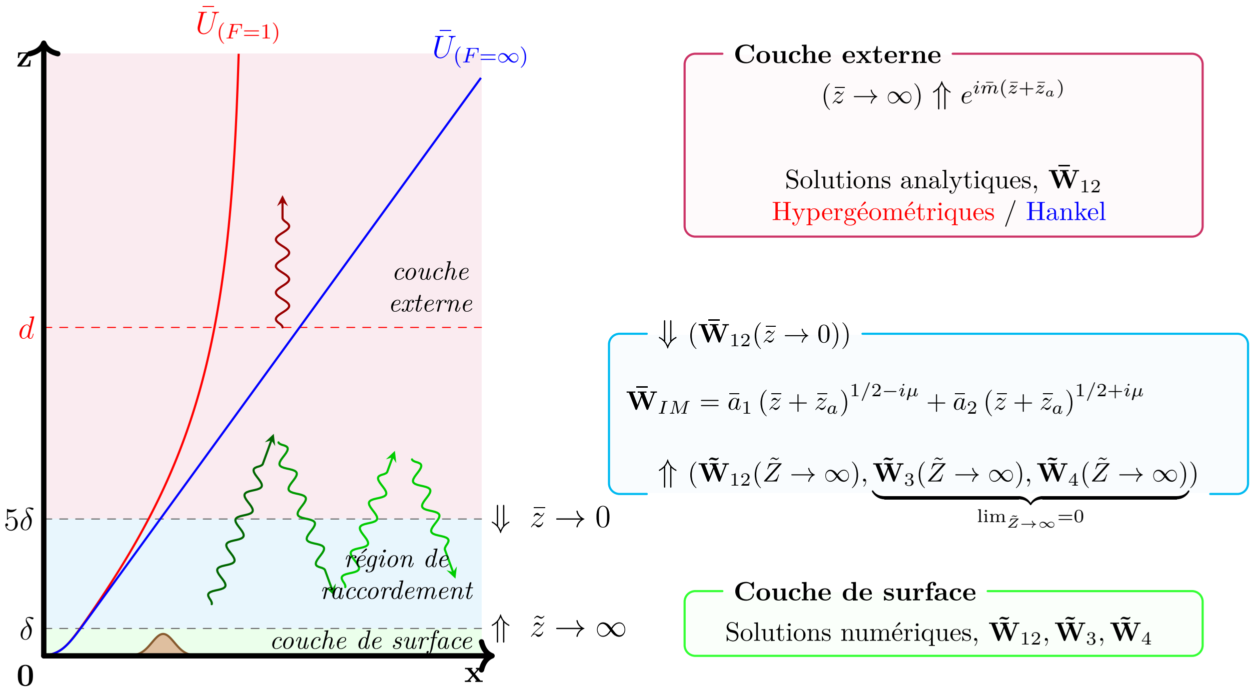


Figure 4.2 – Schéma représentant les propriétés des régions considérées pour la résolution des équations

4.7 Développement des ondes piégées

Comme au chapitre 3, le formalisme a été développé sous forme adimensionnée mais par souci de clarté, les résultats présentés dans la suite seront sous forme dimensionnelle. Dans notre modèle, chaque harmonique $\bar{\mathbf{w}}(\bar{k}, \bar{z})$ varie sur la verticale. Quand $z/L >> d$, elles se comportent comme :

$$e^{-m(z+za)} \text{ où } m = \begin{cases} -i\sqrt{F^{-2}L^{-2} - k^2} & \text{pour} \quad k < k_c = (FL)^{-1} \\ \sqrt{k^2 - F^{-2}L^{-2}} & \text{pour} \quad k > k_c \end{cases} \tag{4.43}$$

où k_c est le nombre d'onde de coupure séparant les ondes piégées et les harmoniques se propageant verticalement librement.

4.7.1 Champ d'onde

Les champs de vitesse verticale sont représentés sur la figure 4.3 pour différentes valeurs du nombre de Richardson J, pour z_0=1 m et λ=20 m. Les six premières sous-figures montrent les champs d'onde pour le cas cisaillement constant, c'est-à-dire $F = \infty$ et donc $m = k$. Les champs d'onde obtenus avec cisaillement variable (F=1) sont tracés sur les six sous-figures du bas.

Quand $F = \infty$, on peut voir que le champ d'onde décroît rapidement avec l'altitude en conséquence de la présence de points tournants (m devient réel) pour tous les nombres d'ondes. Pour de petits J, l'altitude de ces points tournants, $h_t(k)$ est proche de la surface par rapport à l'échelle caractéristique horizontale ($kh_t < 1$ pour l'harmonique dominante) tandis qu'elle est située plus loin pour des J plus grand (voir section 4.2). Cela a pour conséquence que pour des $J < 1$, les ondes piégées ne peuvent pas se développer de manière significative, comme on peut le voir sur la figure 4.3a,b. Pour $J > 1$, la réponse de l'écoulement est dominée par les ondes piégées dont l'amplitude décroît à l'aval de la montagne. Pour $J = 2$, on observe un mode dominant confiné à bas niveau qui décroît derrière la montagne tandis que pour $J = 3.5$, deux modes coexistent (figure 4.3e) : le mode le plus long apparaît à des altitudes plus hautes que celles correspondant aux cas où J est plus petit, tandis que le second mode est beaucoup plus court et se manifeste dans la partie la plus basse du domaine, confiné près de la surface juste derrière la montagne. À $J = 4.5$, ce mode proche de la surface est extrêmement atténué, ce qui est consistant avec l'absorption très importante de la surface (figure 3.5). Le fait que plusieurs modes coexistent dans la réponse de l'écoulement au forçage, et que le mode dominant soit confiné près de la surface pour de petits J, puis se développe plus haut pour de grand J, sera étudié plus en détail dans la section 4.7.2.

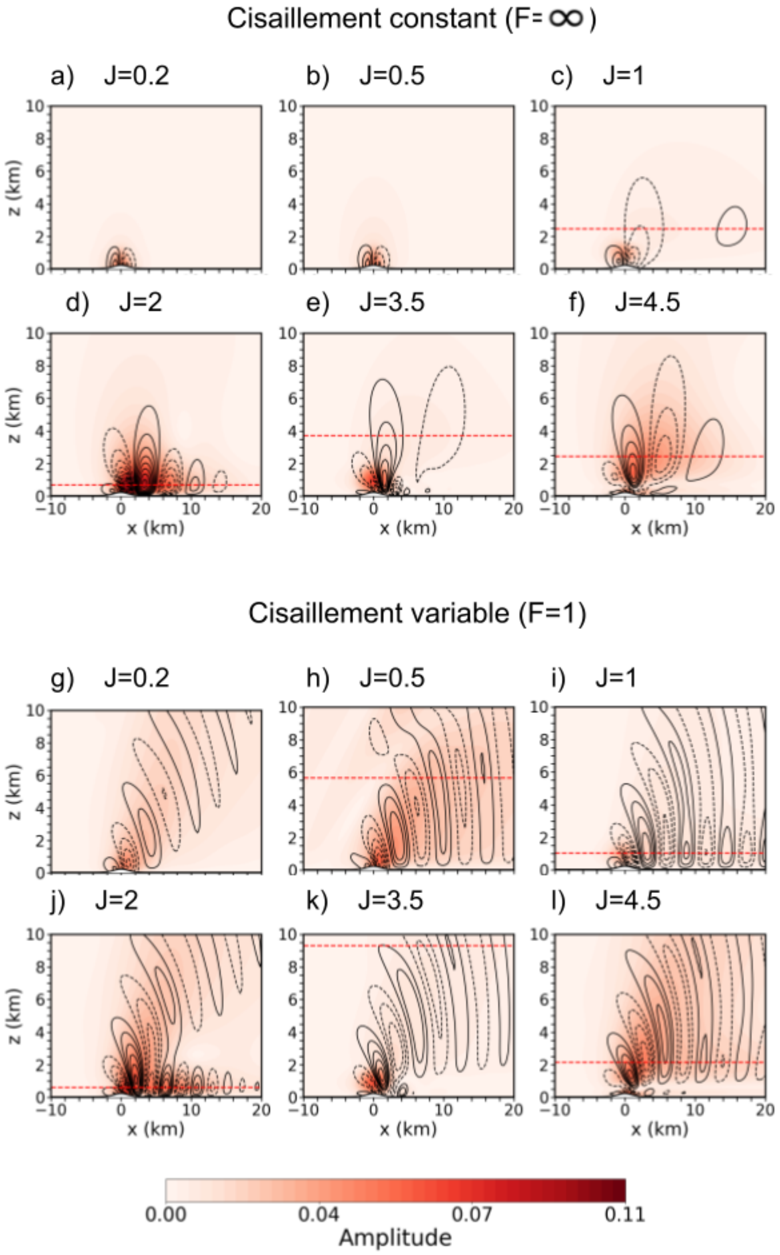
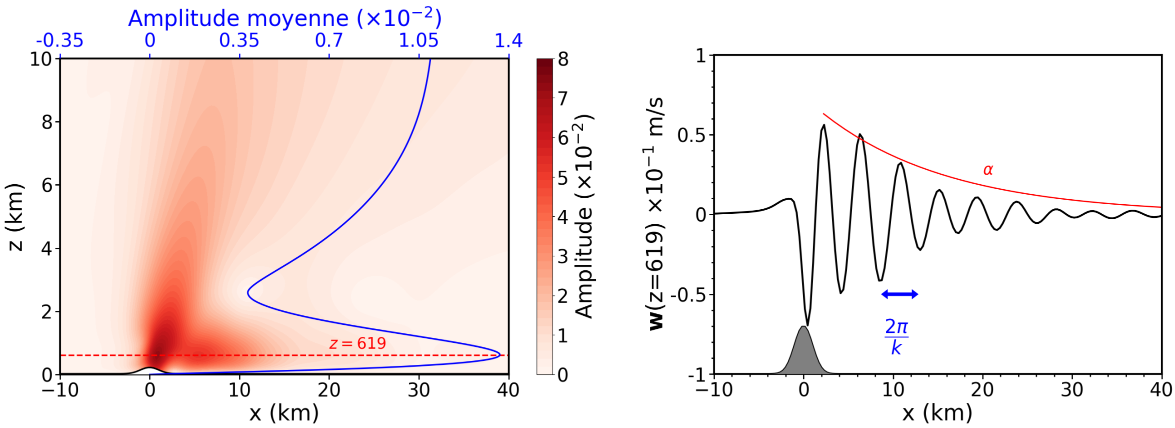


FIGURE 4.3 – Champ de vitesse verticale $\bar{\mathbf{w}}(x,z)$ pour une longueur de rugosité de z_0=1 m et une longueur de mélange λ = 20 m (z_a=162 m). Les cas à cisaillement constant (n haut) et cisaillement variable (en bas) sont représentés. Les contours représentent la vitesse verticale et ont un intervalle de 0.01 m.s^{-1} et la couleur représente l'amplitude de $\bar{\mathbf{w}}$. Les lignes en pointillé rouge donnent l'altitude où les caractéristiques des ondes piégées sont extraites.

Quand $F = 1$, les six sous-figures les plus basses de la figure 4.3 montrent qu'une partie importante des champs d'ondes est due aux harmoniques qui ne rencontrent pas de niveau tournant (ce sont celles pour lesquelles $k < k_c$). Ces harmoniques sont libres de se propager dans la région extérieure et se combinent pour former un système d'ondes se propageant verticalement. Quand $J = 0.2$, dans la figure 4.3g), ces composantes sont dominantes dans la réponse au forçage et il y a peu de signal à bas niveau en aval de la montagne. Cela est en adéquation avec le signal très faible du cas à cisaillement constant, figure 4.3a). Les ondes piégées à bas niveau deviennent de plus en plus importantes à mesure que J augmente (figure 4.3h,i,j), causé par l'approfondissement de la région de piégeage. Curieusement, pour $J = 0.5$, le mode piégé fusionne avec le système d'ondes se propageant vers le haut au-dessus de la montagne. Comme nous le verrons dans la prochaine section, cela se produit car les modes résonnant piégés qui se manifestent en premier quand J augmente ont un nombre d'onde horizontal proche de la valeur de coupure qui sépare les harmoniques se propageant et piégées ($k = 1/(FL)$). Avec l'augmentation de J, le signal de l'onde près de la surface devient distinct de celui de la région lointaine et décroît de plus en plus fortement dans la direction horizontale avec J (voir figure 4.3i,j en dessous de z=2 km). Ce signal devient très petit pour J=3.5 (figure 4.3k), et on suppose que dans ce cas, l'absorption à la surface est trop importante pour que les ondes piégées se développent derrière la montagne. De manière similaire au cas à cisaillement constant, un second mode apparaît au-dessus du premier (figure 4.3k,l autour de 3 km). Il n'est plus confiné près de la surface mais est significatif et peu atténué.

4.7.2 Ondes piégées



(a) (b)

Figure 4.4 – Extraction de α et k pour $z_a = 162$ m et $J = 2$. (a) Amplitude des perturbations de vitesse verticale obtenue en combinant $\bar{\mathbf{w}}$ et sa transformée de Hilbert (en couleurs), amplitude moyennée entre $x = 5$ km et $x = 40$ km (en bleu) et altitude z_{max} du maximum d'amplitude correspondant (en rouge). (b) vitesse verticale $\bar{\mathbf{w}}$ à z_{max} et montagne (en gris).

L'évolution à l'aval de la montagne des ondes de gravité dissipées peut être caractérisée en utilisant une description en terme de paquet d'ondes d'un nombre d'onde complexe. Pour poursuivre cette approche dans un but de diagnostic, nous utiliserons un profil idéalisé d'onde piégée de la forme

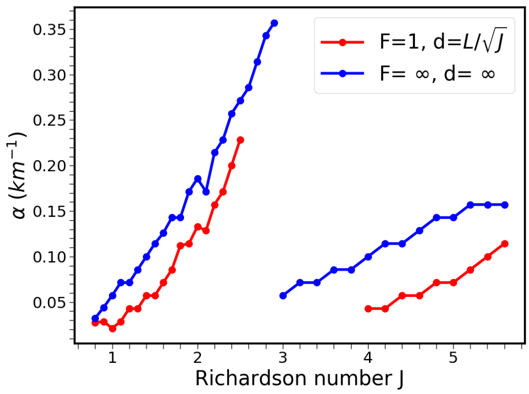
$$\mathbf{w}_S = Ae^{ikx-\alpha x}, \tag{4.44}$$

où l'amplitude A est un nombre complexe, α est le taux de décroissance derrière la montagne, et k est le nombre d'onde horizontal. Pour évaluer α et k, on se place à l'altitude z_{max} où les ondes piégées présentent un maximum relatif d'amplitude. Cette altitude est évaluée en moyennant l'enveloppe de $\mathbf{w}$ entre 5km$<x<$40km, elle-même obtenue en combinant $\mathbf{w}$ et sa transformée de Hilbert dans la direction horizontale (figure 4.4a). Les paramètres α et k sont alors estimés en minimisant le carré de la distance entre $\mathbf{w}(x, z_{max})$ et $\mathbf{w}_S$.

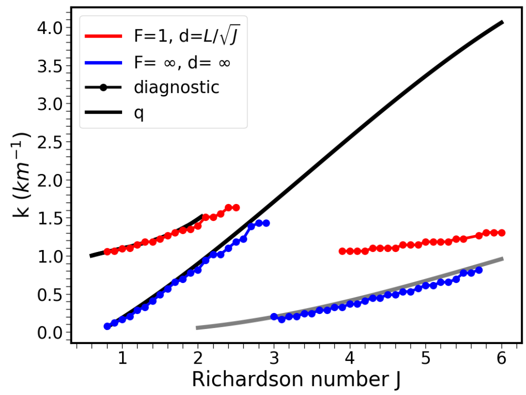
Les figure 4.5a et 4.5b montrent comment le taux de décroissance α et le nombre d'onde k sont affectés par le nombre de Richardson J pour un z_a fixé (=162 m). En 4.5c et 4.5d, c'est la dépendance de ces deux paramètres avec la profondeur du niveau critique z_a pour J fixé (à 1 et 3.5) qui est représentée. Une figure plus complète en section 4.11 présente les variations de α et k en fonction de J pour plusieurs valeurs de z_a dans les deux écoulements (variable et constant) étudiés ici.

Pour un z_a donné (162 m figure 4.5a et pour d'autres valeurs en annexe figure 4.9a, figure 4.10a), le taux de décroissance α augmente avec J, ce qui est cohérent avec le fait que les ondes sont plus absorbées par la surface (voir le coefficient de réflexion figure 3.5b). Cependant, l'approche adoptée ici pour déterminer les propriétés des ondes à bas niveau produit un saut pour $k(J)$ et $\alpha(J)$ quand J augmente. Ce comportement est lié à la co-existence de deux modes piégés (que l'on peut voir dans les champs de vitesse verticale figure 4.3). En effet, lorsque ces deux modes sont présents, le couple (k, α) qui minimise $\mathbf{w}(x, z_{max}) - \mathbf{w}_S$ capture celui qui est le moins absorbé. De manière générale, l'onde la moins absorbée est celle qui est confinée à plus haut niveau comme on peut le voir sur la figure 4.3(f) dans le cas à cisaillement constant et figure 4.3(j) dans le cas variable. En revanche, pour les petits J, l'onde piégée à bas niveau est dominante (par exemple pour $J = 2$, voir figure 4.3(d) et (j)). On peut souligner l'augmentation de α avec J moins marquée après le saut, c'est-à-dire que pour le deuxième mode, les ondes ont une décroissance en amplitude en fonction de J moins forte que pour le premier mode. Cela

(a) et (b) z_a=162 m

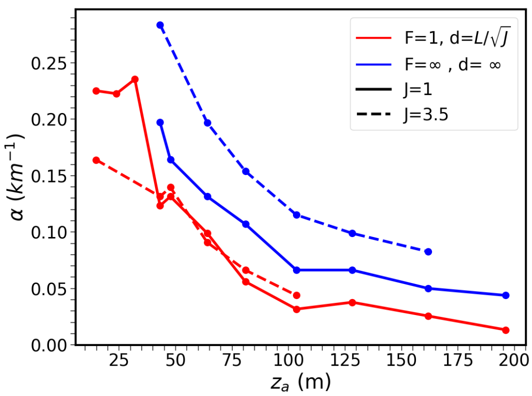


(a) Taux de décroissance α

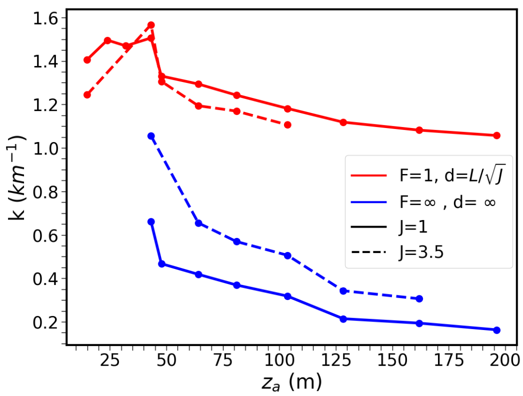


(b) Mode piégé (k)

(c) et (d) J fixé (=1. et 3.5)



(c) Taux de décroissance α



(d) Mode piégé (k)

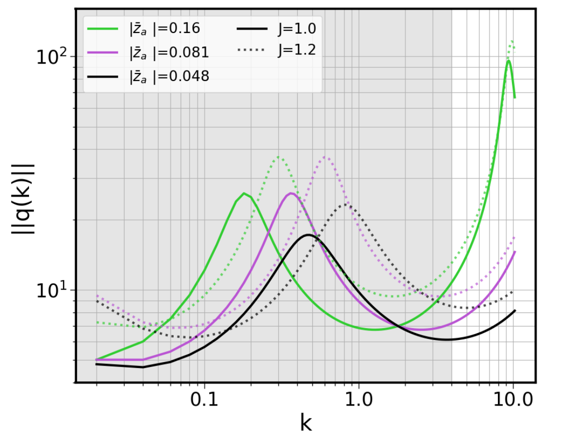
:

FIGURE 4.5 – Taux de décroissance spatiale α (a,c) et nombre d'onde k (b,d) extrait du modèle (a,b) pour $z_a = 162$ m en fonction du nombre de Richardson J ; (c,d) pour deux valeurs de J en fonction de la profondeur du niveau critique z_a. Sur les figures (a,b), les lignes solides avec des points sont issues du diagnostic fait par minimisaton de $\mathbf{w}(x, z_{max}) - \mathbf{w}_S$ pour le cas cisaillement constant (F=∞) en bleu et cisaillement variable (F=1) en rouge. Les lignes pleines en dégradé de gris dans (b) donnent les maximus des deux premiers modes issus des maximums de $|q(k)|$ pour $k > k_c = 1/(FL)$. $k_c = 0$ quand $F = \infty$ et $k_c = 1$ km^{-1} quand $F = 1$. (voir figure 4.10a et figure 4.10b en Annexe).

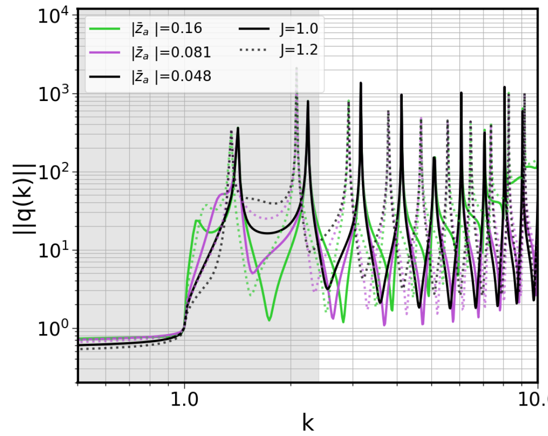
est dû aux interactions moins prononcées de ce deuxième mode avec la surface. On peut également noter que les taux de décroissance sont plus forts dans le cas cisaillement constant ($F = \infty$) que quand $F = 1$ car les ondes sont plus confinées et retournent plus rapidement vers la surface où elles sont absorbées.

Par ailleurs, dans le cas cisaillement constant ($F = \infty$), les modes dominants ont souvent un k plus petit qu'en cas variable car les modes ayant $k < 1/L$ ne peuvent pas être piégés quand $F = 1$. Par ailleurs, les figure 4.5c et figure 4.5d montrent α et k respectivement en fonction de z_a pour des valeurs données de J. Cela revient à regarder l'ordre des courbes sur les figure 4.10 et figure 4.9 en annexe pour un J donné. Il est intéressant de noter ici que pour un J donné, le taux de décroissance est plus grand pour de petits z_a, en raison de la dissipation plus importante dans la couche la plus basse. Cela est consistant avec les résultats de la section 3.3 montrant que les ondes sont plus absorbées lorsque le niveau critique est proche de la surface (z_a petit).

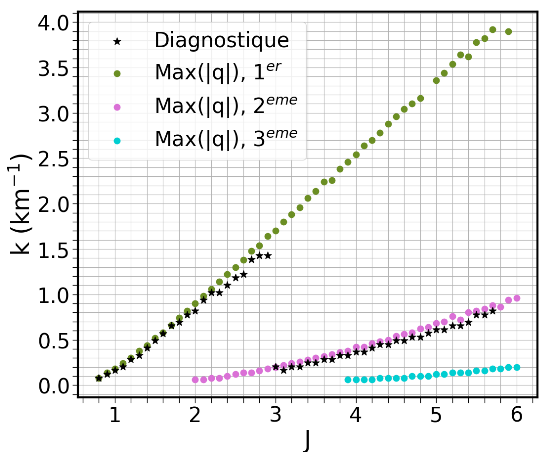
Des prédictions du nombre d'onde privilégié peuvent aussi être obtenues en utilisant les résonances du coefficient de réflexion, $|q(k)|$ équation (3.50), mais sans faire l'approximation hydrostatique. Lorsque k varie au-delà du nombre d'onde de coupure ($k_c = 1/(FL)$, voir équation (4.22)), $|q(k)|$ présente des maximums. Ce sont des nombres d'ondes pour lesquels la solution non dissipative ayant une décroissance exponentielle, $\bar{\mathbf{w}}_I$ dans équation (3.29), domine celle qui croît exponentiellement, $\bar{\mathbf{w}}_D$. $|q(k)|$ est présenté



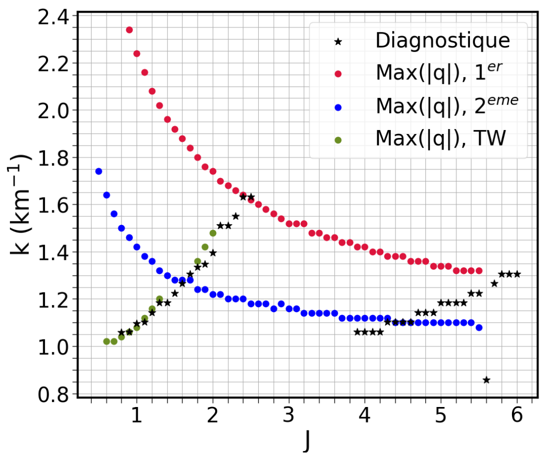
(a) Coefficient de réflexion non hydrostatique, $F = \infty$



(b) Coefficient de réflexion non hydrostatique, $F = 1$



(c) Modes piégés, $F = \infty$ pour z_a=162 m

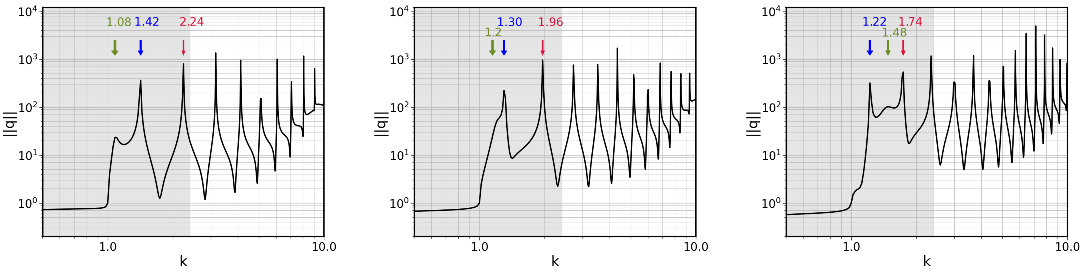


(d) Modes piégés, $F = 1$ pour z_a=162 m

FIGURE 4.6 – Coefficient de réflexion non hydrostatique (a) et (b) en cas $F = \infty$ et $F = 1$ dont les "pics" sont représentés en couleurs en (c) et (d) en fonction de J. Les modes calculés par minimisation de $\bar{\mathbf{w}}(\bar{x}, \bar{z}_{max}) - \mathbf{w}_S$ sont tracés en noir. La zone grisée en (a) et (b) correspond au domaine de k représenté figure (c) et (d).

dans le cas à cisaillement constant et variable figure 4.6a et figure 4.6b respectivement pour différentes valeurs de z_a (en couleurs) et J (types de lignes).

Comme le nombre de Richardson à la surface $R_i(z = 0) = 0$, on suit Lott (2007) et suppose que la résonance qui correspond au mode piégé est celle qui se trouve le plus près du nombre d'onde de coupure ($k_c = 0$ km^{-1} dans le cas à cisaillement constant et $k_c = 1$ km^{-1} dans le cas variable). Nous nous intéressons donc aux modes piégés ayant des valeurs de k plus grande que le nombre d'onde de coupure et qui correspondent aux maximums de $|q(k)|$. Ces "pics" du coefficient de réflexion sont montrés en couleurs figure 4.6c et figure 4.6d pour les cas à cisaillement constant et variable respectivement. Sur ces mêmes figures, les modes piégés issus de la minimisation de $\mathbf{w}(x, z_{max}) - \mathbf{w}_S$ sont tracés en noir. Nous pouvons voir que dans le cas où $F = \infty$, il y a un bon accord entre les deux premiers modes obtenus par les résonances de $|q(k)|$ et le mode estimé par le modèle. Dans ce cas, quand plusieurs modes coexistent, le diagnostic issu du modèle sélectionne le mode qui a le plus petit nombre d'onde k car il est moins confiné près de la surface (et moins dissipé). Lorsque l'écoulement est caractérisé par un cisaillement variable du vent, plusieurs résonances ayant des comportements différents apparaissent. La figure 4.7 montre le suivi des trois premiers "pics" des résonances pour des valeurs de J données. Le premier pic sur la figure 4.7a à $J = 1$ n'est pas aussi marqué que les deux autres et a une amplitude plus faible. On retrouve les mêmes différences entre le deuxième pic et les autres figure 4.7c où $J = 2$. De plus, les comportements distincts de ces pics sont soulignés figure 4.6b où l'on peut constater que les deux "pics" les plus marqués ne dépendent pas de z_a, contrairement au premier. Au vu de ces différences, et par continuité, le premier maximum de $|q(k)|$ pour $J < 1.6$ et le deuxième pour $1.8 < J < 2.2$ sont représentés de la même couleur figure 4.6d et labellisés "TW" pour *trapped waves*. On peut voir en effet qu'il correspond bien au mode estimé par le modèle (en noir) et a un comportement similaire aux modes piégés du cas à cisaillement constant : le nombre d'onde augmente avec J. Les deux autres pics ont un comportement opposé, k diminue avec J. Autour de $J = 4$ où l'on devrait voir émerger le deuxième mode piégé dans les résonances de $|q(k)|$, nous ne voyons pas de mode se distinguer. Cela peut être dû aux interactions qu'il a avec les résonances très proches du nombre d'onde de coupure.



(a) J=1 (b) J=1.4 (c) J=2

FIGURE 4.7 – Suivi des maximums du coefficient de réflexion non hydrostatique, $|q(k)|$, en cisaillement variable pour $z_a = 162m$

4.8 Accord avec la théorie non dissipative

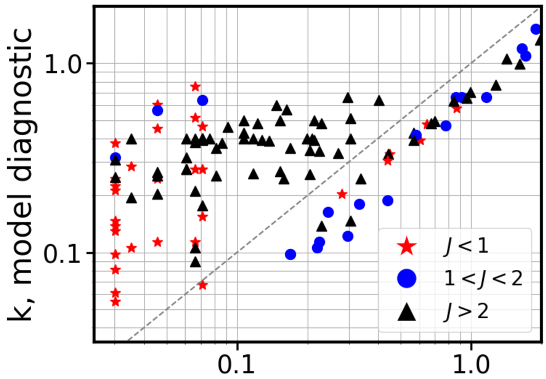
Les figure 4.5b et figure 4.5d montrent également que le nombre d'onde dominant des modes piégés a tendance à augmenter avec J et diminuer quand z_a augmente. Cela est plus lié à la dynamique non dissipative qu'aux effets liés à la couche interne. Pour le vérifier, nous nous demandons dans quelle mesure les théories plus simples développées dans le passé restent valides. Dans ce but, nous considérons les solutions de l'équation de Taylor Goldstein non dissipative en prenant pour écoulement incident équation (4.23) (cisaillement constant) et équation (4.18) (cisaillement variable). Pour de tels profils où la couche logarithmique est absente, les solutions non dissipatives potentiellement résonnantes pour $F = \infty$ et $F = 1$ sont données par $\bar{\mathbf{w}}_I$ dans équation (4.48) et équation (3.62b) respectivement et pour des nombres d'onde k tels que $\bar{\mathbf{w}}_I(k, z = 0) = 0$.

Les figures figure 4.8a et figure 4.8b montrent les nombres d'onde extraits des théories entièrement dissipatives développées dans ces chapitres en fonction des nombres d'onde prédits par la théorie non dissipative dans le cas à cisaillement constant ($F = \infty$). Ces deux figures sont tracées avec des paramètres (z_0, λ, J) variables mais on peut distinguer deux régimes séparés. Sur la figure de gauche (figure 4.8a), la profondeur du niveau critique est $z_a < 3h_i$ tandis que sur la figure de droite (figure 4.8b), le niveau critique est $z_a > 3h_i$, plus loin de la surface. On peut voir que la théorie non dissipative est assez correcte quand le niveau critique est situé loin de la surface par rapport à la profondeur de la couche interne, mais devient inexacte quand il en est proche. La même comparaison dans le cas à cisaillement variable ($F = 1$) figure 4.8c et figure 4.8d apporte le même message sauf peut-être le fait que le prédicteur non dissipatif est plus exact que dans le cas à cisaillement constant car celui - ci fonctionne bien quand z_a est proche de la surface (comparer figure 4.8c et figure 4.8a).

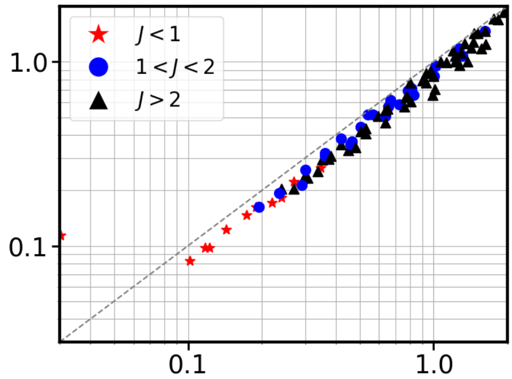
4.9 Conclusion

Pour analyser les ondes piégées issues de l'interaction d'une couche limite turbulente avec des montagnes assez basses, nous avons utilisé une théorie linéaire où la turbulence est représentée par une viscosité dont l'amplitude varie selon la théorie de la longueur de mélange. Nous sommes conscients qu'une telle théorie simplifie les interactions entre la turbulence et l'obstacle, par exemple en négligeant l'impact de la perturbation sur la longueur de mélange, ou la dépendance de cette variable avec la stabilité. Elle ne prend pas non plus en compte le fait que les perturbations produisent de la turbulence dans la partie lointaine de l'écoulement, c'est-à-dire que la turbulence et les effets dissipatifs pénètrent dans cette région. Plus fondamentalement, elle néglige aussi le fait qu'aux échelles horizontales étudiées ici, l'énergie des tourbillons peut être rétrodiffusée sur la grande échelle, effet qui est complètement absent quand on représente la turbulence par une diffusivité turbulente (Sun et al. (2015)). Cependant, la théorie que nous formulons reste plus réaliste que celles qui ont été développées jusqu'à présent pour décrire les interactions entre les montagnes et la couche limite (Smith et al. (2002), Lott et al. (2020a)). De plus, la fermeture que

(a) et (b) Cisaillement constant, $F = \infty$

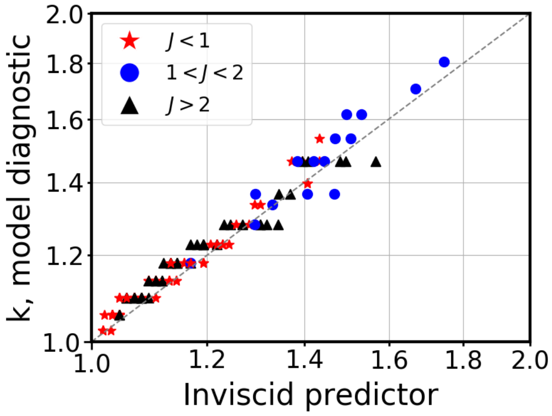


(a) $z_a < 3h_i$

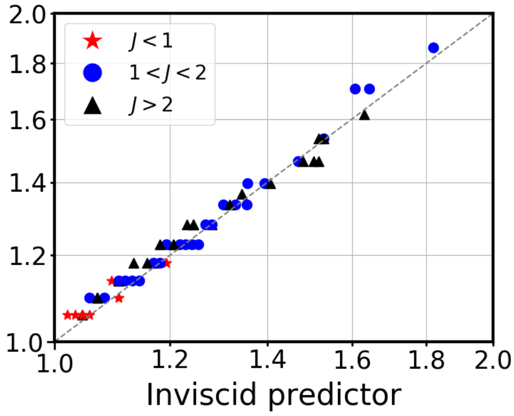


(b) $z_a > 3h_i$

(c) et (d) Cisaillement variable, $F = 1$



(c) $z_a < 3h_i$



(d) $z_a > 3h_i$

FIGURE 4.8 – Nombres d'onde évalués avec les théories dissipatives en fonction des nombres d'onde prédits par la théorie non dissipative. La première ligne montre le cas cisaillement constant avec $d = \infty$, la deuxième montre le cas cisaillement variable, $d = \sqrt{J}L$. À gauche (droite) sont les cas avec un niveau critique proche (loin) de la surface.

nous analysons est représentative des fermetures de turbulence utilisées dans les modèles atmosphériques mésoéchelles qui sont utilisés pour les "large eddy simulations" dans les régions montagneuses (Doyle et al. (2011)). Notre théorie peur aider à interpréter les phénomènes se manifestant dans ces modèles.

Ce chapitre a pour but de relier les propriétés absorptives de la couche intérieure décrite au chapitre 3 au taux de décroissance des ondes piégées à l'amont des montagnes. Nous avons trouvé qu'ils sont effectivement très liés. Nous avons également pu constater que les ondes piégées ont des nombres d'ondes horizontaux proche de la valeur de coupure $\sqrt{N}(\infty)/U(\infty)$, un comportement qui était déjà souligné dans Lott (2007) quand le nombre de Richardson à la surface est nul, ce qui est toujours le cas ici. Pour de grands nombres de Richardson au-dessus de la surface, J, et quand l'absorption est importante, notre analyse révèle la présence d'ondes de gravité se propageant à l'aval de la montagne. Leur taux de décroissance est assez petit malgré le fait que la surface est supposée les absorber fortement. Cette nouvelle catégorie d'ondes est caractérisée par le fait qu'elles ont une très faible amplitude près de la surface et une grande amplitude au niveau de la hauteur de la couche limite et au-delà. Pour ces ondes, les réflexions multiples en surface qui se produisent dans le mécanisme de Scorer (1949) arrivent à une distance plus grande à l'aval de la montagne que pour les ondes purement piégées dans la couche limite.

Nous avons essayé de voir si des théories non dissipatives classiques en considérant des écoulements sans couche de surface logarithmiques peuvent encore être appliquées pour prédire les ondes piégées. Le résultat que nous obtenons soutient que c'est généralement le cas pour prédire les nombres d'ondes horizontaux. Cependant, quelques écarts apparaissent lorsque la dissipation est importante, ce qui dans notre cas, revient à dire que la profondeur du niveau critique z_a est petite.

4.10 Annexe D : Calcul des solutions dans le cas du cisaillement constant

Avec un changement de variable $\lambda^2 = -k$ et $\nu^2 = \frac{1}{4} - J = i\mu$, l'équation (4.24) s'écrit :

$$\bar{\mathbf{W}}'' + \left(\lambda^2 - \frac{\nu^2 - 1/4}{(\bar{Z} + \bar{z}_a)^2}\right)\bar{\mathbf{W}} = 0 \tag{4.45}$$

Elle a pour solution Abramowitz and Stegun (1964) (Eq 9.1.49)) :

$$\bar{\mathbf{W}} = (\bar{Z} + \bar{z}_a)^{1/2} H^{(1)}_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \tag{4.46}$$

1. développement en $\bar{Z} \to +\infty$:
La forme asymptotique de la fonction de Hankel, donnée par Abramowitz and Stegun (1964) (Eq 9.2.3) en ($\bar{Z} \to \infty$) nous permet d'écrire :

$$H^{(1)}_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to\infty} \sqrt{\frac{2}{i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)\pi}} e^{-i(1/2i\mu\pi + 1/4\pi)} e^{-\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)} \tag{4.47}$$

On peut trouver une solution représentant une onde d'amplitude unitaire se propageant vers le haut :

$$\bar{\mathbf{W}}_I(\bar{k}, \bar{z}) = i\sqrt{\frac{\pi\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)}{2}} e^{-\mu\pi/2} H^{(1)}_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to\infty} e^{-\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)} \tag{4.48}$$

2. développement en $\bar{Z} \to 0$: Quand $\bar{Z} \to 0$, on peut écrire Abramowitz and Stegun (1964) (Eq 9.1.3)) :

$$H^{(1)}_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) = \frac{i}{\sin(i\mu\pi)}(e^{\mu\pi} J_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) - J_{-i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a))) \tag{4.49}$$

où J est la fonction de Bessel dont on peut exprimer le développement lorsque $\bar{Z} \to 0$:

$$J_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to 0} \frac{(\frac{1}{2}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)))^{i\mu}}{\Gamma(i\mu + 1)}, \text{ et } J_{-i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to 0} \frac{(\frac{1}{2}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)))^{-i\mu}}{\Gamma(-i\mu + 1)}. \tag{4.50}$$

En gardant à l'esprit que $\sin(i\mu\pi) = i\sinh(\mu\pi)$ et $i = e^{i\pi/2}$, on peut écrire :

$$H^{(1)}_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \underbrace{\approx}_{\bar{Z}\to 0} \frac{1}{\sinh(\mu\pi)} \left[e^{\mu\pi/2} (\frac{1}{2}\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a))^{i\mu} \frac{1}{\Gamma(i\mu + 1)} - e^{-\mu\pi/2} (\frac{1}{2}\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a))^{-i\mu} \frac{1}{\Gamma(1 - i\mu)} \right] \tag{4.51}$$

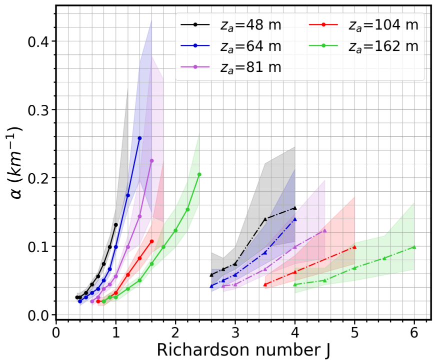
On peut alors calculer notre solution totale $\bar{\mathbf{W}}_I(\bar{k}, \bar{z})$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{W}}_I(\bar{k}, \bar{z}) &= i\sqrt{\frac{\pi\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)}{2}} e^{-\mu\pi/2} H^{(1)}_{i\mu}(i\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)) \\ &= \left(\frac{\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)}{2}\right)^{1/2} \frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)} \left[\left(\frac{\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)}{2}\right)^{i\mu} \frac{1}{\Gamma(1 + i\mu)} - \left(\frac{\bar{k}(\bar{Z} + \bar{z}_a)}{2}\right)^{-i\mu} \frac{1}{\Gamma(1 - i\mu)} \right] \\ &= \bar{a}_2(\bar{Z} + \bar{z}_a)^{1/2 + i\mu} + \bar{a}_1(\bar{Z} + \bar{z}_a)^{1/2 - i\mu} \end{aligned} \tag{4.52}$$

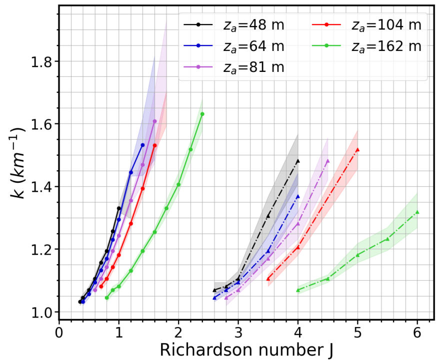
où :

$$\bar{a}_1 = -\frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)} \left(\frac{\bar{k}}{2}\right)^{1/2 - i\mu} \frac{1}{\Gamma(1 - i\mu)}, \text{ et } \bar{a}_2 = \frac{i\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)} \left(\frac{\bar{k}}{2}\right)^{1/2 + i\mu} \frac{1}{\Gamma(1 + i\mu)} \tag{4.53}$$

4.11 Annexe E : Compléments sur le taux de décroissance et le nombre d'onde dominant des ondes piégées

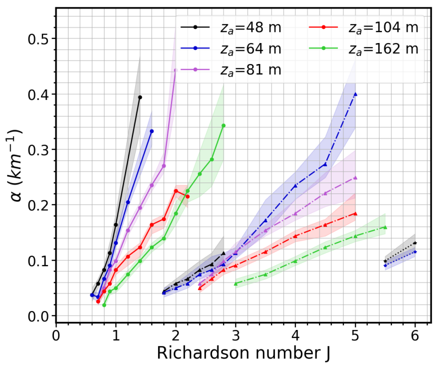


(a) α

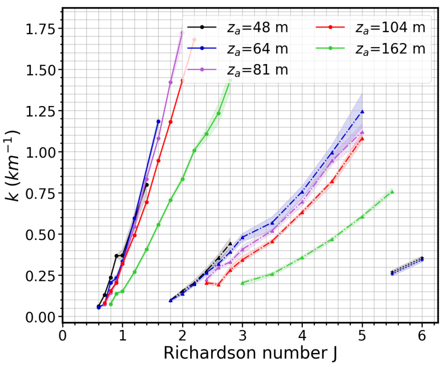


(b) k

FIGURE 4.9 – Taux de décroissance α (a) et nombre d'onde correspondant au mode piégé extrait du modèle (b) pour différents z_a en cas cisaillement variable ($F = 1$). Les plages de couleurs représentent une plage d'incertitude de 20% d'erreur



(a) α en cas cisaillement constant



(b) k en cas cisaillement variable

FIGURE 4.10 – Taux de décroissance α (a) et nombre d'onde correspondant au mode piégé extrait du modèle (b) pour différents z_a en cas cisaillement constant ($F = \infty$).

Chapitre 5

Propagations des infrasons lorsque le guide d'onde stratosphérique est perturbé par des ondes de gravité

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous allons nous intéresser à l'impact des ondes de gravité non-orographiques sur la propagation des infrasons. Pour cela, des champs d'ondes de gravité sont calculés à partir des flux d'Eliassen-Palm issus d'une paramétrisation d'ondes de gravité non-orographique. L'intérêt est double : comprendre les interactions entre les infrasons et les ondes de gravité et s'assurer que la paramétrisation donne des champs d'onde réalistes. Après la présentation des données utilisées dans cette étude, un descriptif de la paramétrisation sera fourni, suivi d'une analyse des champs d'ondes calculés. Ensuite, le formalisme lié à la propagation des infrasons sera exposé avant de procéder à l'étude des résultats obtenus à partir de la propagation des infrasons dans une atmosphère perturbée par les ondes.

5.1.1 Infrasons

Les infrasons atmosphériques sont des ondes acoustiques dans la bande de fréquences 0,001–20 Hz. Ces ondes sont omniprésentes dans l'atmosphère et émises soit par des phénomènes naturels, tels que les éruptions volcaniques (Delclos et al., 1990), les tremblements de terre (Mutschlecner and Whitaker, 2005), les microbaroms (Down, 1967; Donn and Rind, 1971; Olson and Szuberla, 2005) et les aurores boréales (Wilson and Nichparenko, 1967; Wilson, 1969), soit par des sources anthropiques (McKisic, 1997; Campus and Christie, 2009), parmi lesquelles figurent les avions supersoniques (Balachandran et al., 1977), les explosions chimiques (Ceranna et al., 2009), et les explosions minières (Hagerty et al., 2002). Les ondes infrasonores se propagent sur de longues distances à travers des conduits atmosphériques résultant de la stratification naturelle des propriétés atmosphériques (température, densité et vents). Au cours de leur propagation, les infrasons accumulent des informations sur les fluctuations des propriétés atmosphériques et représentent ainsi une précieuse source d'informations pour étudier la dynamique atmosphérique jusqu'à la basse thermosphère (Le Pichon et al., 2005a,b; Lalande, 2012; Assink et al., 2013).

Dans le cadre du Système international de surveillance (en anglais IMS) mis en place pour vérifier la conformité au Traité d'interdiction complète des essais nucléaires, les ondes infrasonores font partie des signaux surveillés et sont enregistrées en continu à la surface terrestre par 60 stations infrasonores certifiées. D'abord regroupées au sein de bulletins automatiques, les informations extraites des stations sont revues par plusieurs dizaines d'analystes à Vienne. Cette étape permet d'aboutir à un catalogue unique, appelé Late Event Bulletin (LEB). En deux décennies, l'IMS a ainsi permis d'identifier plus d'un million d'événements, dont une fraction est associée à des infrasons. La figure 5.1 montre la distribution géographique de ces évènements pour la période 2014 - 2024. La quantité croissante de données recueillies par le réseau IMS dans le monde a permis des études systématiques des capacités du réseau en termes de caractérisation et de localisation des sources ainsi que des études atmosphériques (Le Pichon et al., 2018). En parallèle, d'autres stations infrasonores permanentes et temporaires ont été déployées pour surveiller des sources spécifiques, telles que le réseau USArray (Walker et al., 2011), les expériences de calibration de Sayarim (Fee and Matoza, 2013), les déploiements infrasonores régionaux à l'UTTR (Talmadge et al., 2010), le Large Aperture Infrasound Array aux Pays-Bas (Fricke et al., 2014) et des capteurs infrasonores

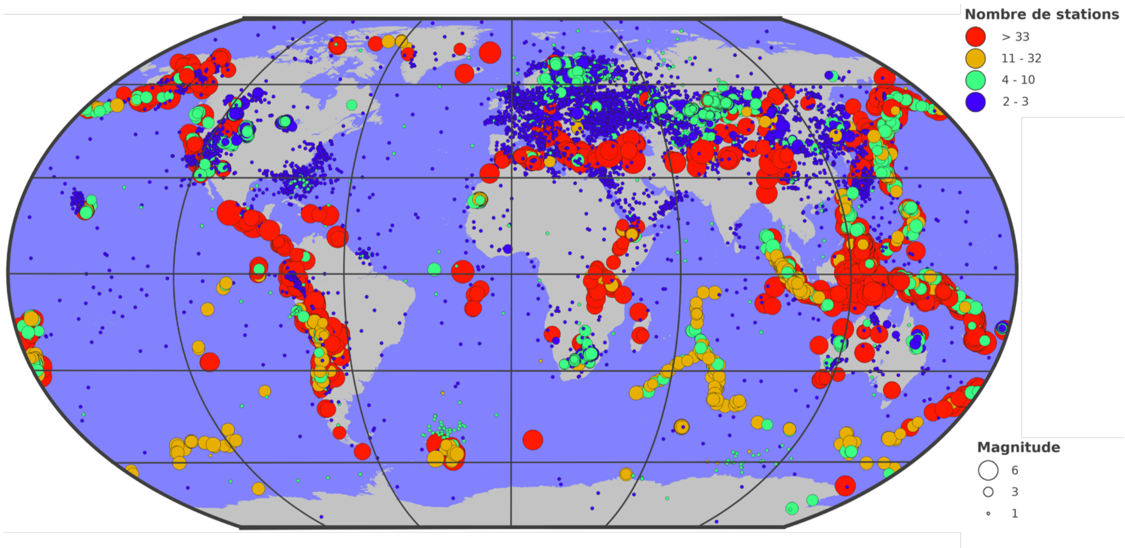


Figure 5.1 – Événements naturels et anthropiques de la base de données Late Event Bulletin pour la période 2014-2024 ayant généré au moins une détection infrasonore. Pour chaque événement, la taille du cercle indique la magnitude estimée et la couleur, le nombre de stations ayant enregistré l'événement.

pour la surveillance des activités volcaniques dans le monde (Assink et al., 2012; Fee et al., 2010; Fee and Matoza, 2013).

Des progrès significatifs ont été réalisés dans la détection, la localisation et la caractérisation des sources infrasonores. Cependant, comprendre l'interaction entre les ondes infrasonores et les structures atmosphériques de petite échelle reste un défi car les observations ne sont généralement pas reproductibles en raison des changements constants de l'atmosphère. Une approche largement répandue au sein de la communauté scientifique consiste à ajouter des perturbations atmosphériques à un état atmosphérique simulé (Drob et al., 2013). En général, cet état atmosphérique est obtenu à partir des analyses de données de prévisions numériques du temps (NWP en anglais), telles que le Système mondial de prévisions (GFS en anglais) de la NOAA ou le Système de prévisions intégré (IFS) du Centre européen pour les prévisions météorologiques à moyen terme (ECMWF). Pour la haute atmosphère, ces données sont complétées par des modèles empiriques comme le modèle HWM (Hedin et al., 1996; Drob et al., 2008) et le modèle MSIS (Picone et al., 2002). Le modèle de référence climatologique semi-empirique Ground-to-Space (G2S), a été largement utilisé pour la modélisation des infrasons et résulte d'un effort pour créer un modèle atmosphérique global (Drob et al., 2003).

Les modèles NWP sont développés à partir de données provenant de satellites, de radars, de ballons météorologiques et de divers systèmes de mesures in situ à l'échelle mondiale afin de réduire les biais propres à chaque mesure. En raison de leur résolution spatio-temporelle limitée, les modèles NWP ne peuvent pas résoudre la plupart des phénomènes de petite échelle qui se produisent dans l'atmosphère, tels que les ondes de gravité atmosphériques et la turbulence. Ces modèles ne capturent qu'une partie du spectre des ondes d'inertie-gravité, comme l'ont indiqué Shutts and Vosper (2011). De plus, la précision des spécifications atmosphériques à haute altitude est limitée par le manque d'observation dans la haute atmosphère, typiquement au-dessus de 50 km. À ces altitudes, la précision des modèles NWP se dégrade considérablement, avec des incertitudes sur les vitesses atteignant environ 20–25 m.s^{-1} et des écarts de plus de 5 % dans la stratosphère pour des modèles équivalents (G2S et ECMWF). Une étude de Le Pichon et al. (2015), qui compare divers modèles NWP avec des observations in situ, confirme qu'entre 40 et 60 km, l'écart-type de la différence moyenne dépasse 5 K pour la température et 20 m.s^{-1} pour le vent zonal. Ces différences sont encore plus élevées dans la haute atmosphère et entraînent des différences significatives dans les formes d'onde acoustiques, en termes de temps de trajet, de durée des signaux, d'amplitudes, de vitesses de trace, etc.

Plusieurs études ont mis en évidence la corrélation directe entre la variabilité spatio-temporelle des signaux infrasonores enregistrés et la dynamique atmosphérique. Ces études soulignent généralement la nécessité de modèles atmosphériques précis pour expliquer les observations d'infrasons. Plus récemment, il a été suggéré que ces observations pourraient fournir des contraintes supplémentaires et une validation indépendante des systèmes de spécification atmosphérique existants (modèles de climat globaux, modèles de prévision numérique du temps...) (Drob et al., 2009; Lalande, 2012; Assink et al., 2013; Arrowsmith et al., 2013). Cependant, une telle approche est difficile en raison de la nature hautement non linéaire

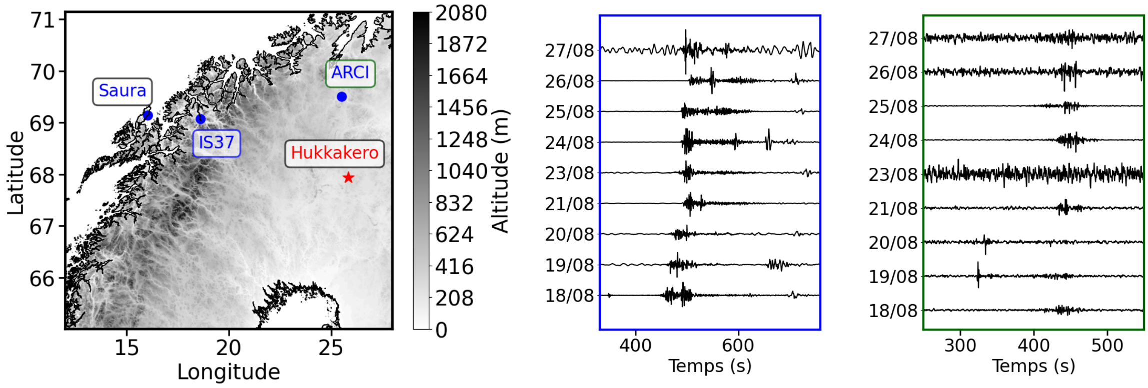


FIGURE 5.2 – Emplacement des sources de données utilisées dans cette étude : site des explosions de Hukkakero, stations infrasons IS37 et ARCI, radar à moyenne fréquence Saura. Les signaux enregistrés l'année 2016 aux stations IS37 et ARCI sont représentés.

du problème inverse et repose fortement sur la validité physique du modèle direct. Une approche prometteuse, développée par Chunchuzov et al. (2015), consiste à modéliser la diffusion provoquée par les inhomogénéités atmosphériques des signaux provenant d'explosions de forte énergie. En raison de la nature non linéaire de la propagation du son dans la haute atmosphère, il est raisonnable de supposer que le signal frappant une inhomogénéité se manifeste sous la forme d'une onde en forme de N, caractérisée par une configuration où la pression et la vitesse varient de manière non linéaire. Ainsi, en mesurant le signal diffusé vers la Terre, il devient possible de déduire la forme de l'inhomogénéité. Ce problème inverse est plus abordable que ceux basés sur la propagation des infrasons.

Au cours des dernières décennies, l'utilisation extensive des méthodes de tracé de rayons pour propager les infrasons atmosphériques conduit à un accord acceptable entre les observations et les simulations dans certains contextes (Ceranna et al., 2009). Cependant, dans de nombreuses situations, les méthodes de tracé de rayons ne sont pas adaptées pour capturer l'interaction complexe entre le champ d'ondes infrasonores et les perturbations de petite échelle présentes dans l'atmosphère, car elles ne prédisent pas certaines trajectoires réfractées importantes ainsi que les trajectoires diffractées et diffusées. Ces dernières années, des efforts ont été faits pour développer des modèles de formes d'ondes en utilisant des solveurs directs dans le domaine temporel (Del Pino et al., 2009; de Groot-Hedlin, 2008; Dergham and Millet, 2013) ; cependant, ceux-ci sont exigeants en termes de temps de calcul. L'utilisation de méthodes de modes normaux couplées à la reconstruction de Fourier pour résoudre le problème temporel constitue une alternative efficace (Pierce, 1965a; Waxler, 2002, 2004; Waxler et al., 2008; Assink et al., 2013; Bertin et al., 2014) et crédible au calcul direct dans le domaine temporel. Cette approche est utilisée dans le cadre de cette thèse.

Des études récentes se sont concentrées sur l'interaction entre les ondes de gravité et les ondes infrasonores (Kulichkov, 2009) et les ont comparées avec des simulations d'ondes complètes (Hedlin and Drob, 2014; Chunchuzov et al., 2014). En particulier, ces deux dernières études se sont appuyées sur des observations consécutives à des explosions réalisées aux États-Unis et enregistrées par un réseau sismique dense, le U.S. Transportable Array. Bien que les sismomètres réagissent aux signaux infrasonores via le couplage acoustique-sismique, la comparaison entre les formes d'ondes simulées et observées n'est pas directe. L'étude de Hedlin and Drob (2014) se concentre sur l'augmentation de la durée du signal due à des structures fines, en s'appuyant principalement sur une méthode reposant sur des interpolations des temps de trajet théoriques des rayons, bien qu'une comparaison avec un modèle d'ondes complètes soit également présentée. Dans l'article de Chunchuzov et al. (2014), l'ensemble de données étudié par Hedlin and Drob (2014) est comparé aux résultats de la modélisation d'ondes complètes. En plus de l'identification des temps de trajet et des phases, des comparaisons de formes d'ondes sont présentées.

5.1.2 Données issues du site Hukkakero

Le site de Hukkakero, en Finlande (67.94°N, 25.84°E), a été d'un intérêt particulier pour les études liées aux infrasons ces dernières années. À Hukkakero, des explosions contrôlées liées à la destruction d'explosifs militaires ont lieu chaque année depuis 1988, en août-septembre. Il y a en général une axplosion par jour, avec une charge équivalente à environ 20 tonnes de TNT (Gibbons et al., 2015). En plus de générer une onde de pression atmosphérique, ces explosions produisent des signaux sismiques clairs qui permettent une estimation précise de l'heure et de l'emplacement d'origine grâce à des techniques de localisation sismique (Gibbons et al., 2020). Blixt et al. (2019) ont montré que le réseau sismique ARCES dans le nord de la Norvège enregistre, en plus des ondes sismiques, les ondes aériennes couplées au sol associées aux explosions de Hukkakero. Ces explosions sont également bien représentées dans les bulletins d'événements tels que le bulletin européen des infrasons (Pilger et al. (2018), Figure 10), ainsi que dans le LEB. Les stations infrason et le site de Hukkakero sont représentés sur la figure 5.2. Sont également représentés les signaux enregistrés au cours de l'année 2016 à deux stations différentes.

Une station infrason est un ensemble de microbaromètres répartis dans l'espace, mais suffisamment proches les uns des autres pour que les signaux reçus soient cohérents et permettent d'estimer les paramètres de l'onde plane dominante arrivant au réseau. Cette opération est réalisée grâce à des techniques de traitement du signal qui permettent de réduire le bruit incohérent et de séparer les signaux acoustiques. L'identification des signaux d'intérêt est généralement basée sur le back-azimut observé, la vitesse apparente et la cohérence inter-capteurs moyenne. Le back-azimut représente la direction de provenance de l'onde plane. La vitesse apparente est la vitesse à laquelle l'onde plane semble se déplacer horizontalement le long du réseau. Ce paramètre est estimé à partir des délais temporels entre les capteurs (ainsi que du back-azimut) et contient des informations sur l'angle d'incidence de l'onde plane.

Les signaux d'infrasons issus des explosions de Hukkakero ont été exploités dans plusieurs études de sondage atmosphérique. Blixt et al. (2019) ont analysé 30 ans d'explosions de Hukkakero détectées au réseau sismo-acoustique ARCES/ARCI (Norvège) en termes de déviation du back-azimut due aux vents transversaux (composante du vent perpendiculaire à la direction de propagation) le long du trajet de propagation. Les estimations des vents transversaux obtenues montrent un bon accord avec le modèle de réanalyse ERA-Interim du Centre européen pour les prévisions météorologiques à moyen terme (ECMWF). Amezcua et al. (2020) et Amezcua and Barton (2021) ont proposé une méthode d'assimilation hors ligne des données d'infrasons dans des modèles atmosphériques à l'aide de filtres d'ensemble de Kalman. Leur étude prolonge l'approche de Blixt et al. (2019), en démontrant que l'assimilation de la déviation du back-azimut permet des corrections des vents atmosphériques aux altitudes troposphériques et stratosphériques. Sur la base du même ensemble de données, Vera Rodriguez et al. (2020) ont développé une méthodologie d'inversion étendue qui utilise les observations d'infrasons pour mettre à jour les profils de vent et de température atmosphériques à partir des ensembles de réanalyse ERA5.

5.2 Paramétrisation des ondes de gravité

Un moyen de représenter l'effet des ondes de gravité sur l'atmosphère est d'utiliser des paramétrisations. On peut alors les exploiter pour représenter précisément l'état de l'atmosphère lors de la détection d'un signal infrasonore. La paramétrisation des ondes de gravité joue un rôle déterminant pour représenter correctement les circulations de la troposphère et de la moyenne atmosphère dans les modèles de climat globaux (GCMs). L'importance de ces ondes sur le climat, détaillée dans l'introduction chapitre 1 , a rendu nécessaire la prise en compte de la quantité de mouvement qu'elles transportent dans les GCMs. Leur échelle caractéristique est généralement inférieure à la taille typique des mailles des modèles (une centaine de km), ainsi leur impact doit être paramétrisé. L'idée n'est pas de résoudre explicitement l'effet des ondes mais d'ajouter leur influence locale (sous maille) aux équations de bilan de quantité de mouvement de grande échelle. De manière générale, les paramétrisations d'ondes de gravité ont trois composantes : la caractérisation des ondes au niveau de la source, leur propagation verticale, et leur dissipation lors de laquelle la déposition de quantité de mouvement sur l'écoulement moyen est estimée. Les paramétrisations des ondes de gravité sont souvent séparées en fonction de leurs sources. Si les caractéristiques des ondes au niveau de la source (nombres d'ondes, vitesses de phase, direction de propagation...) sont facilement prédictibles lorsque celle-ci est orographique, la nature intermittente des autres types de sources rendent ces propriétés plus difficiles à cerner. La dissipation des ondes est estimée de manières très différentes selon les paramétrisations mais l'hypothèse d'onde plane est généralement effectuée, la force causée par les ondes se faisant le long d'une direction spécifiée par la propagation des ondes. La plupart des paramétrisations sont unidirectionnelles (sur la verticale) et utilisent des paramètres et champs issus du modèle projetés le long de la direction de propagation (Kruse et al., 2023). Dans la suite de ce chapitre, nous nous intéresseront plus particulièrement aux ondes de gravité non orographiques.

Pour paramétriser les ondes de gravité non orographiques, deux approches différentes sont généralement suivies. La première approche, spectrale, repose sur l'idée que les ondes de gravité suivent le spectre saturé "universel" des ondes. En effet, malgré des questions encore non résolues sur la cause de cette forme spectrale générale, des travaux théoriques (Hines, 1991; Dewan and Good, 1986) et observations (Smith et al., 1987; Zhang et al., 2006) montrent que les ondes de gravité existent sous la forme d'un spectre suivant une loi de puissance dont la pente décrit comment l'énergie de l'onde évolue avec son nombre d'onde (Van Zandt, 1990). Le fait que les variations verticales du vent de grande échelle contrôlent la force de traînée exercée par les ondes rend cette approche pertinente dans les GCMs, à moindre coût. Cependant, l'absence de spécification des sources dans ce type de schéma ne permet pas de prendre en compte les variations liées à leur cycle annuel ou aux changements de climat. De plus, des observations montrent que les champs d'ondes de gravité sont dominés par des paquets d'ondes bien définis correspondant à des événements localisés. Cette intermittence au niveau de la source se traduit par des variations spatio-temporelles significatives d'amplitude des perturbations induites par les ondes (Eckermann and Hocking, 1989; Wright et al., 2013; Hertzog et al., 2012). Cela a un impact direct sur la propagation des infrasons, très sensibles aux perturbations de vent et température. En effet, il est connu que, même pour un trajet source-récepteur fixé, la variabilité temporelle de l'atmosphère est telle qu'un signal infrason observé depuis une source répétée va varier fortement d'un événement à un autre (Blom and Waxler, 2021).

La seconde approche a pour but d'intégrer cet effet dans les paramétrisations est de discrétiser de manière stochastique le domaine spectral des ondes émises, en ondes monochromatiques. En effet, des observations de ballons proches de la source des ondes de gravité ont montré que l'entièreté du spectre n'est pas résolue à un instant donné (Hertzog et al., 2008). Ainsi, les quelques harmoniques émises à un instant spécifique dans la paramétrisation représentent le paquet d'onde individuel quasi-monochromatique observé et l'intermittence est prise en compte par le choix stochastique de leurs propriétés dans le code (Eckermann, 2011; Lott et al., 2012a) : c'est l'approche "multiwave". Considérer la propagation des infrasons dans une atmosphère représentée par une telle paramétrisation a un intérêt double. Réaliser un grand nombre de champs d'ondes pour un événement donné permet de simuler la propagation des infrasons dans un large spectre de perturbations, même lorsque la situation réelle correspondait à des perturbations particulièrement fortes. De plus, la comparaison des signaux simulés avec les signaux réels permet de récolter des informations sur les champs d'ondes de gravité réels et ainsi contraindre les paramètres de la source prescrite dans la paramétrisation. C'est cette approche qui sera suivie dans la suite.

5.2.1 Formalisme de la paramétrisation des ondes de gravité non-orographiques

Les ondes de gravité influençant les hautes latitudes sont générées par fronts et jets ou ondes de montagnes plutôt que par la convection. Ainsi, le cas d'étude à Hukkakero qui nous intéresse ici nous amène à considérer plus particulièrement cette première source (jets et fronts). La paramétrisation multiwave pour les ondes générées par les fronts et jets développée dans Lott et al. (2012a), ACAMA, est détaillée dans la suite de ce chapitre. Sa version originale permet de calculer le flux d'Eliassen-Palm (EP) lié aux ondes de gravité, et nécessite d'être adaptée pour obtenir des champs d'onde de gravité impactant la propagation des infrasons.

La perturbation du champ de vitesse verticale est représenté comme une série de Fourier stochastique :

$$w' = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \hat{w}_n e^{z/2H} e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} \tag{5.1}$$

où w' est la vitesse verticale, z la coordonnée verticale en log-pression, $H = 7$ km, l'échelle caractéristique verticale. $\hat{w}_n(z)$ correspond à la structure verticale complexe d'une harmonique donnée, $\vec{k}$ au nombre d'onde horizontal, ω à la fréquence absolue. Ces deux derniers paramètres sont choisi aléatoirement pour chaque onde. Les C_n donnent l'amplitude d'une harmonique donnée et mesurent la probabilité qu'a une onde de représenter entièrement le champs d'onde. Ce coefficient est appelé "coefficient d'intermittence" et vérifie :

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 = 1. \tag{5.2}$$

Pour décrire la propagation verticale des ondes et leur effet sur le climat, on souhaite calculer un flux d'Eliassen Palm à partir de l'équation (5.1). À une altitude donnée, ce flux est lié aux ondes par Cugnet et al. (2019) :

$$\vec{F^z} = \rho_0(z)\overline{\vec{u}'w'} = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n^2 \vec{F}_n^z \quad \text{où} \quad \vec{F}_n^z = \rho_r \mathcal{R}\{\frac{\vec{\hat{u}}_n \hat{w}_n^*}{2}\} \tag{5.3}$$

$\vec{F}_n^z(z)$ est le flux d'Eliassen-Palm porté par chaque onde, u' la perturbation de vitesse horizontale, $\rho_0(z) = \rho_r e^{-z/H}$ avec ρ_r constant.

Lott et al. (2012a) et de la Cámara and Lott (2015) ont montré que l'émission d'ondes de gravité par des anomalies de vorticité potentielle dans un écoulement caractérisé par un profil de vent cisaillé, toujours à une altitude fixée, produit un flux d'Eliassen Palm donné par :

$$\vec{F}^z = \frac{F_0}{4}e^{-\pi\sqrt{J}}, \text{ où } F_0 = \frac{\rho_r g^2}{f\theta_r^2 N^3}(\rho_r q_r \sigma_z)^2 \tag{5.4}$$

où g est la constante de gravité, f le paramètre de Coriolis, N la fréquence de Brünt Väisälä, $J = N^2/\Lambda^2$ est le nombre de Richardson avec Λ le cisaillement du vent horizontal. ρ_r et θ_r sont les densité et température potentielle de référence, q_r l'amplitude de l'anomalie de vorticité potentielle et σ_z sa profondeur.
Pour représenter l'anomalie de vorticité potentielle sous maille, on donne sa décomposition en série de Fourier stochastique :

$$q' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \hat{q}_n e^{i(\vec{k}_n \vec{x}_n - \omega_n t)} \tag{5.5}$$

où $\hat{q}_n$ est l'amplitude de l'harmonique n de q', $\vec{k}_n$ et ω_n son nombre d'onde horizontal et fréquence au niveau du sol choisis aléatoirement. Ainsi, on peut calculer le flux d'EP intégré sur toute la hauteur. On le ramène ensuite à une altitude d'émission, z_l. Cela est moins coûteux d'un point de vue numérique et le flux reste correct car il normalisé par la densité qui décroît avec l'altitude. De plus, l'impact de l'émission d'ondes à différents niveaux de modèle a été testé par Ribstein et al. (2022) et n'a pas d'influence significative. On obtient alors :

$$\vec{F}_n^{zl} = G_0 \frac{\Delta z}{4f} \frac{\vec{k}_n}{||\vec{k}_n||} \int_0^{ztop} \rho_0(z') N(z') q_n'^2 e^{-\pi\sqrt{J(z')}} dz' \tag{5.6}$$

Dans cette expression, σ_z^2 qui représente le carré de la profondeur de l'anomalie de vorticité potentielle est transformé en un pas de grille dz' multiplié par un paramètre de *tuning* Δz. G_0 est un autre paramètre de *tuning* d'ordre 1 qui contrôle l'amplitude du flux d'EP. En pratique, $\hat{q}_n$ est relié au champ de vorticité relative de grande échelle ζ_r tel que $\rho_r \hat{q}_n \simeq \zeta_r \bar{\theta}_{0,z}$. $\frac{\vec{k}_n}{||\vec{k}_n||}$ est le vecteur d'onde horizontal aléatoire.

Pour estimer les profils verticaux du flux sur toute l'atmosphère, on passe d'un niveau à un autre en (a) appliquant une petite diffusivité $\nu = \mu/\rho_0$ qui permet de s'assurer que l'onde est bien dissipée sur les derniers niveaux, (b) limitant l'amplitude de l'onde par sa valeur à saturation calculée d'après **?** et (c) mettant à 0 la valeur du flux au delà d'un niveau critique. Ainsi, le flux d'Eliassen-Palm au niveau $z + dz$ est lié au flux en z par :

$$\vec{F}(z+\delta z) = \frac{\vec{k}}{||\vec{k}||}\frac{\hat{\omega}}{|\hat{\omega}|}\underbrace{\Theta(\hat{\omega}(z+\delta z)\hat{\omega}(z))}_{(c)}\min\{\underbrace{|\vec{F}(z)|e^{-2\frac{\mu m^3}{\rho_0 \hat{\omega}}\delta z}}_{(a)}, \underbrace{\rho_r S_c^2 \frac{|\hat{\omega}|^3 k_{min}^2}{N|\vec{k}|^4}}_{(b)}\} \tag{5.7}$$

Les deux premières fractions permettent de s'assurer que le flux d'EP est dans la direction de la vitesse de phase tandis que la fonction Heaviside Θ s'annule lorsque la fréquence intrinsèque change de signe (on a un niveau critique, représenté en pointillés violets sur la figure 5.3). k_{min} correspond à la plus grande longueur d'onde qui a besoin d'être paramétrée, il est lié à la résolution du modèle. S_c est un paramètre de *tuning* qui contrôle le déferlement des ondes par la saturation. Les différents termes de l'équation (5.7) sont représentés sur la figure 5.3. L'onde est émise à une altitude de 480 m, et le flux d'EP reste constant tant que la saturation (en pointillés rouge) n'est pas limitante. Le niveau critique causé par $\hat{\omega}$=0 force dans tous les cas l'onde à s'arrêter de se propager et le flux à devenir nul (les pointillés violets sur la figure correspondent au niveau où le flux d'EP vaut 0 (trait en bleu)).

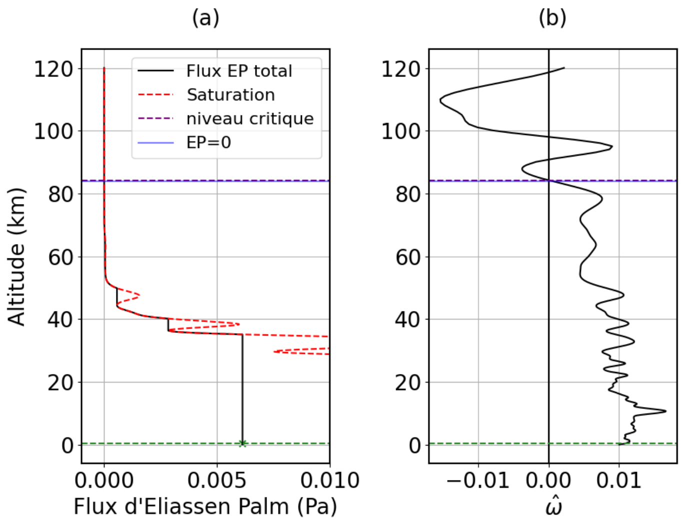


FIGURE 5.3 – (a) Flux d'Eliassen-Palm en fonction de la hauteur et différents termes de l'équation (5.7) (b) $\hat{\omega}$, la fréquence intrinsèque, et niveaux critiques

5.2.2 Champs d'onde de gravité

L'idée est d'utiliser la paramétrisation décrite dans la section précédente pour calculer les perturbations de vitesses de vent horizontales et de température influençant la propagation des infrasons. Elles seront ensuite superposées aux profils de vent moyens. Ainsi, le formalisme a été légèrement modifié. N ondes monochromatiques seront émises dont les fluctuations peuvent s'écrire :

$$(\vec{u}', T)(\vec{x}, z, t) = \sum_{n=1}^{N} C_n(\hat{\vec{u}}_n(z), \hat{T}_j(z)) e^{i(\vec{k}_n.\vec{x} - \omega_n t)} \tag{5.8}$$

où T est la température, le vecteur d'onde horizontal $\vec{k}_n$ et la fréquence absolue ω_n sont choisis aléatoirement. L'amplitude de $\vec{k}_n$ est tirée aléatoirement entre $k_{min} = 2.10^{-5}$ km^{-1} et $k_{max} = 10^{-3}$ km^{-1} et la direction de propagation se situe entre $[0 : 2\pi]$. La vitesse de phase horizontale choisie aléatoirement obéit à une loi normale $\mathcal{N}(0, c_{car}^2)$ où c_{car} est l'un des paramètres centraux du modèle. Ainsi, la fréquence intrinsèque $\hat{\omega}$ et le nombre d'onde vertical m sont donnés par :

$$\hat{\omega} = \sqrt{f^2 + c_{car}^2 k^2}, \text{et } m = -\frac{N(z)||\mathbf{k}_n||}{\sqrt{\hat{\omega}_n(z)^2 - f^2}} \tag{5.9}$$

Le signe "-" assure une propagation vers le haut au dessus du niveau d'émission de l'onde. Contrairement à la paramétrisation originale, le flux émis au niveau de la source ne dépend pas de la vorticité relative mais est tiré aléatoirement dans une loi log normale $Log - \mathcal{N}(ep_s, 0.3)$. La vitesse de phase est par convention toujours positive au niveau d'émission des ondes. Ainsi, le calcul d'un niveau à un autre se fait en simplifiant légèrement l'argument de la fonction Heaviside et le coefficient de l'équation (5.7) pour annuler le flux d'EP si la fréquence intrinsèque $\hat{\omega}$ change de signe.

Le flux émis est distribué de manière égale entre toutes les directions possibles ce qui contredit la théorie soutenant que la direction privilégiée d'émission des ondes est opposée au cisaillement de vent. Cependant, les ondes émises avec une vitesse de phase dans la direction du cisaillement de vent ont une vitesse de phase qui décroît et un nombre d'onde vertical qui augmente lorsqu'elles sont évaluées au niveau supérieur. Ainsi, d'après équation (5.7), le flux d'EP est plus fortement réduit pour ces ondes que pour celles qui ont une vitesse de phase dans l'autre sens. Afin d'éviter l'émission d'ondes très saturées, créant une force de traînée importante juste au dessus du niveau où la source est située, et pour définir le flux d'EP à tous les niveaux du modèle, on évalue celui-ci au niveau $z - dz$ avec l'équation (5.7). Cela aura pour conséquences de réduire l'émission d'ondes dans le sens du cisaillement de vent.

On utilise une approximation WKB pour calculer la perturbation de vitesse verticale. L'équation de Taylor-Goldstein hydrostatique a pour solution :

$$w'(x, z, t) = Am^{-1/2} e^{z/2H} e^{i \int m dz'} \tag{5.10}$$

où $e^{z/2H}$ permet de normaliser par la densité, A est une amplitude, m varie lentement sur la verticale. On a alors :

$$w' = \sqrt{\frac{2||\vec{F}_n \hat{\omega}_n||}{\rho_r N}} e^{-i \int_0^z \frac{N||\vec{k}_n||}{\hat{\omega}_n} dz' + i\chi_n} e^{z/2H} \tag{5.11}$$

La phase χ_n est choisie de manière aléatoire. Par les relations de polarisation, on peut calculer les perturbations de vitesse horizontale et de température :

$$\vec{u} = \frac{-\vec{k}\omega - if\vec{e}_z \wedge \vec{k}}{\omega^2 - f^2} \frac{N^2}{m\omega} w' \tag{5.12}$$

$$T = -i\frac{N^2}{\omega}\frac{H}{R} w' \tag{5.13}$$

Pour générer des champs d'ondes de gravité cohérents avec la paramétrisation originale utilisée dans le modèle de climat LMDZ, on calcule 200 ondes monochromatiques en choisissant aléatoirement $\vec{k}_n$ et ω (ou plutôt c_ϕ la vitesse de phase). Puis, elles seront combinées en choisissant une phase χ_n de manière aléatoire. L'onde monochromatique associée au flux d'EP de la figure 5.3 est représentée dans la direction zonale en figure 5.4a) et un champ d'onde de gravité reconstruit à partir de 200 ondes monochromatiques est représenté figure 5.4b). La phase aléatoire permet d'obtenir plusieurs réalisations de champs d'onde à partir des mêmes 200 ondes émises.

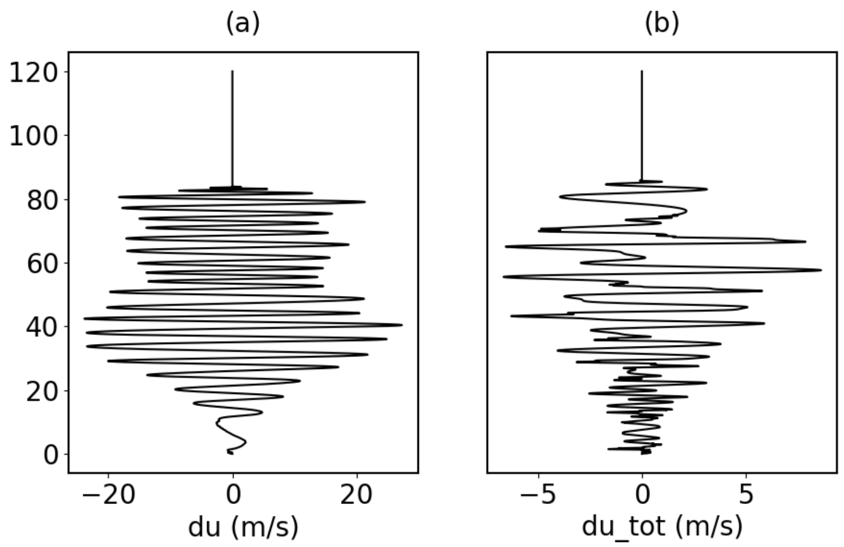


FIGURE 5.4 – (a) perturbations de vitesse du vent dans la direction zonale pour une onde monochromatique (b) champ d'onde de gravité reconstruit à partir de 200 ondes monochromatiques.

5.2.3 Application au site Hukkakero

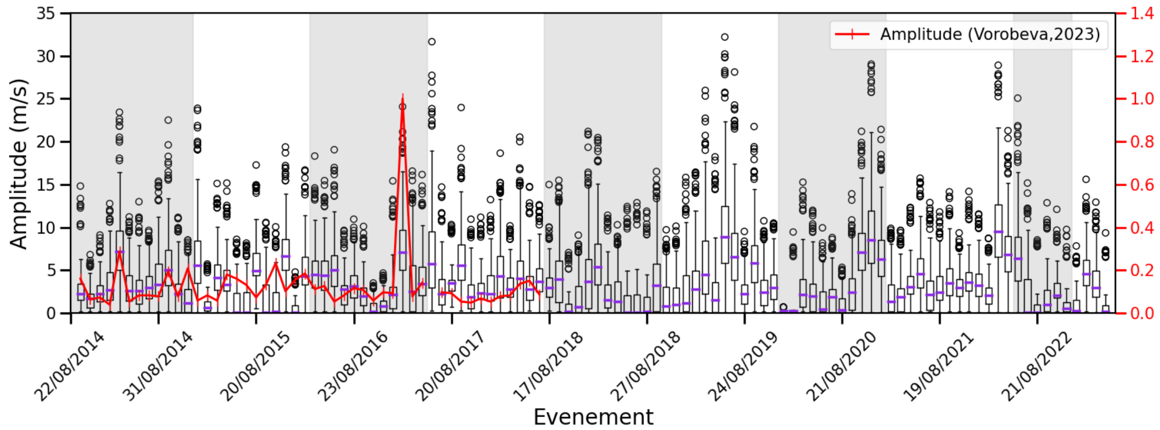


FIGURE 5.5 – Variations des amplitudes des perturbations entre 2014 et 2023 (boxplots), amplitudes issues de Vorobeva et al. (2023) en rouge.

Le modèle développé dans la partie 5.2.1 a été appliqué à une série de 106 profils de vitesse du son, corrigés des effets de vent. Cette correction a été obtenue en ajoutant la projection du vent dans la direction liant une source et un récepteur. Pour l'exemple retenu ici, la source correspond au site de Hukkakero et le capteur est placé au niveau de la station IS37. À chaque profil correspond une date pour laquelle un enregistrement infrasonore est disponible à la station IS37. Partant des profils de température et de vitesses, le modèle développé dans le cadre de cette thèse permet d'obtenir pour chaque date un ensemble de profils de célérité, construits en ajoutant aux données produites par le ECMWF les perturbations induites par les ondes de gravité.

La figure 5.5 reproduit l'effet de la perturbation induite par les ondes de gravité, en se limitant à l'amplitude maximale de la perturbation de célérité effective dans la stratosphère, entre 45 km et 55 km. Les statistiques sont obtenues à partir de 2000 réalisations du champ d'ondes de gravité. Cette figure montre que l'effet de la perturbation induite par les ondes de gravité varie considérablement d'un évènement à l'autre, chaque évènement étant identifié par une date. Le calcul des outliers (points situés au-delà du percentile 99,5) indique que l'amplitude de la perturbation de célérité peut atteindre plusieurs dizaines de mètres par seconde, soit 10% environ de la valeur moyenne. L'intérêt de ce cas d'application est que pour chaque date, un signal infrasonore a été enregistré à la station IS37. Pour chaque date, le signal enregistré par la station IS37 peut être utilisé pour estimer les caractéristiques de la perturbation qu'il faudrait ajouter aux données ERA5, en résolvant un problème inverse. Cette approche, qui a été développée par Vorobeva et al. (2023), permet d'obtenir une amplitude de perturbation (courbe rouge de la figure 5.5) qu'il est possible de comparer aux résultats de la paramétrisation utilisée dans cette thèse.

Certains paramètres de la paramétrisations ont un impact déterminant et ont, pour cette raison, fait l'objet d'une étude qui est détaillée dans l'annexe section 5.6. Les valeurs sélectionnées pour construire la figure 5.5 permettent d'obtenir des petites longueurs d'onde verticale (de l'ordre de trois kilomètres). Ces valeurs sont données par $S_c = 2.5$ et un flux d'EP de loi log normale centrée en 3 mPa. La vitesse de phase des ondes de gravité est représentée par une loi normale dont la variance est fixé à 5 m.s^{-1}.

5.3 Modélisation de la propagation des infrasons

5.3.1 Représentation modale

Dans cette section, nous décrivons brièvement le cadre théorique utilisé dans cette étude pour la simulation de la propagation infrasonore. Nous utilisons une méthode de modes normaux combinée à une transformée de Fourier inverse dans le domaine temporel pour la propagation acoustique. Le modèle d'onde de gravité est traité à l'aide de l'approximation WKB et des techniques d'intégration des nombres d'onde.

L'atmosphère est supposée stratifiée et caractérisée par des profils de masse volumique $\rho_0(z)$, de vitesse du son $c(z)$ et de vitesse du vent horizontal $\mathbf{v}_{0,H}(z)$. On note $p_A(\mathbf{x}_H, z, t)$ la pression acoustique, où $\mathbf{x}_H$ est la composante horizontale du vecteur position, i.e. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_H + z\mathbf{e}_z$. Suivant les travaux de Brekhovskikh and Godin (2012) (voir Eq. (1.1.5) de Vol. 1) et sous l'hypothèse que les signaux acoustiques présentent un contenu fréquentiel élevé par rapport à la fréquence de Brunt-Väisälä (typiquement 0.05 Hz), alors le champ de pression est gouverné par l'équation

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{0,H}\nabla_H\right)\left[\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_{0,H}\cdot\nabla_H\right)^2 p_A - \rho_0\nabla\cdot\left(\frac{\nabla p_A}{\rho_0}\right)\right] + 2\left(\frac{d\mathbf{v}_{0,H}}{dz}\cdot\nabla_H\right)\frac{\partial p_A}{\partial z} = 0. \tag{5.14}$$

On suppose que la propagation se fait sur une surface de sol plate et rigide à $z = 0$, de sorte que l'Éq. (5.14) doit être complétée par la condition aux limites

$$\left.\frac{\partial p_A}{\partial z}\right|_{z=0} = 0. \tag{5.15}$$

On suppose également que les gradients de cisaillement vertical du vent rapportés à une longueur d'onde ne sont pas significatifs, ce qu'on exprime par la condition $|d\mathbf{v}_{0,H}/dz| \ll \omega$. Avec cette hypothèse, l'équation des ondes se réduit à une forme beaucoup plus simple :

$$\left[\nabla_H^2 + \rho_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial z}\right) + \frac{1}{c^2}\left(\omega + i\mathbf{v}_{0,H}\cdot\nabla_H\right)^2\right]\hat{p}_A(\mathbf{x}_H, z, \omega) = 0, \tag{5.16}$$

avec la convention

$$p_A(\mathbf{x}_H, z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{p}_A(\mathbf{x}_H, z, \omega)e^{-i\omega t}d\omega. \tag{5.17}$$

Plutôt que d'essayer de trouver la solution générale à l'équation (5.16)), nous allons faire quelques hypothèses simplificatrices. Tout d'abord, nous supposerons que la propagation est restreinte à un plan vertical. Cette hypothèse ignore l'influence des vents transverses sur le chemin de propagation. À l'exception de circonstances extraordinaires (Evers and Haak, 2001), les déviations induites par les vents transverses sont faibles. Ensuite, nous ferons l'approximation dite de vitesse du son effective, qui consiste à ajouter à la vitesse du son, celle du vent horizontal dans la direction de propagation. Explicitement, si $\hat{\mathbf{k}}_H$ est le vecteur unitaire dans la direction de propagation et v_0 la composante du vent dans le plan de propagation, alors

$$\frac{\omega + i\mathbf{v}_{0,H}\cdot\nabla_H}{c} \simeq \frac{\omega}{c + v_0} = \frac{\omega}{c_e}. \tag{5.18}$$

La validité de cette approximation dépend du nombre de Mach, qui est ici supposé petit (i.e. $v_0 \ll c$), et de l'opérateur $-i\nabla_H$, qui est approximé par la multiplication par $\hat{\mathbf{k}}_H$ dans le plan de propagation. Cette dernière condition est équivalente à avoir une vitesse de phase proche de celle du son, ce qui revient, dans une interprétation géométrique à supposer que l'angle de lancement du rayon est suffisamment faible (Godin, 2002; Assink et al., 2017). Notons enfin que l'approximation (5.17) est en général précise pour les ondes réfractées dans la stratosphère et que, lorsque ce n'est pas le cas, on observe un raccourcissement des chemins de propagation calculés, qui s'accompagne d'une sous-estimation des temps de parcours du signal et d'une légère distorsion du train d'onde.

L'absorption du son peut être prise en compte en ajoutant une partie imaginaire à l'équation d'onde, sous la forme

$$\frac{\omega}{c_e(z)} \mapsto \frac{\omega}{c_e(z)} + i\alpha(z), \tag{5.19}$$

où le coefficient d'atténuation $\alpha(z)$ peut être calculé en utilisant l'approximation des ondes planes (Sutherland and Bass, 2004). Avec l'approximation (5.18) et l'ansatz (5.19), l'équation (**??**) se réduit à

$$\left[\nabla_H^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c_e(z)} + i\alpha(z)\right)^2\right]p(\mathbf{x}_H, z, \omega) = 0, \tag{5.20}$$

expression dans laquelle les termes qui sont petits devant ω^2/c_e^2 ont été supprimés. Le champ de pression se déduit de la solution de (5.20) en appliquant la transformation $\hat{p}_A = \sqrt{\rho_0}p$ et p satisfait à la condition aux limites des ondes de Lamb (Pierce, 1965b)

$$\left.\frac{\partial p}{\partial z}\right|_{z=0} = -\frac{\rho_0'(0)}{2\rho_0(0)}p|_{z=0}. \tag{5.21}$$

L'équation (5.20) peut être résolue par une technique de séparation des variables. Cette approche revient à exprimer la solution sous la forme d'une superposition de fonctions propres $\psi_j(z)$. Chaque fonction propre est solution de l'équation (5.20)), dans laquelle l'opérateur ∇_H^2 est remplacé par $-k_H^2$. Dans ce cas, les conditions aux limites s'expriment sous la forme $\psi(z) \to 0$ lorsque $z \to \infty$ et $2\rho_0(0)\psi'(0)+\rho_0'(0)\psi(0) = 0$. On arrive ainsi à l'expression :

$$p(\mathbf{x}_H, z, \omega) = \sum_j p_j(\mathbf{x}_H, \omega)\psi_j(z), \tag{5.22}$$

où les composantes p_j satisfont à l'équation de Helmholtz

$$\left(\nabla_H^2 - k_j^2\right) p_j(x_H) = 0. \tag{5.23}$$

Avec la substitution $\nabla_H^2 \mapsto -k_H^2$, l'équation (5.20)) complétée par la condition en $z = 0$ forme un problème de Sturm-Liouville non auto-adjoint sur une demi-droite. Ici, k_H^2 est le paramètre de valeur propre, qui peut être interprété comme un nombre d'onde horizontal, d'où la notation. Une théorie complète a été développée pour les représentations modales (Dunford and Schwartz, 1971). Cette théorie permet d'établir qu'il existe un ensemble discret de nombres d'onde horizontaux complexes $k_H = k_j$ et des fonctions propres associées ψ_j biorthogonales [1] au sens de la propriété

$$\int_0^\infty \psi_j(z)\psi_k(z)\, dz = \delta_{jk}. \tag{5.24}$$

En pratique, les nombres d'onde horizontaux et les fonctions propres sont déterminés par la voie numérique, en remplaçant l'axe vertical par une grille discrète et en utilisant soit une méthode aux différences finies (Jensen et al. (2000), section 5.7.1), soit une méthode de colocation spectrale (Bertin et al., 2014) pour discrétiser l'opérateur. Cette seconde méthode est utilisée dans le cadre de cette thèse.

La décomposition modale permet une interprétation physique particulièrement simple du phénomène de propagation. Chaque solution $p_j(\mathbf{x}_H, \omega)\psi_j(z)$ se propage horizontalement avec une vitesse de phase donnée par $c_j = \omega/k_j$. En adoptant des coordonnées cylindriques r, θ, avec $r = |\mathbf{x}_H|$, la solution en champ lointain de l'équation (5.23) s'obtient en tirant parti de l'approximation $|k_j|r \gg 1$, ce qui conduit à

$$p_j(\mathbf{x}_H) \sim C\frac{e^{ik_j r}}{\sqrt{r}}, \tag{5.25}$$

où, pour une source ponctuelle unitaire à l'altitude z_S, la constante C est donnée par $ie^{-ip/4}/\sqrt{8\pi k_j \rho_0(z_S)}$. Ainsi, si $\hat{p}_I(\omega)$ est la composante de Fourier du signal source extrapolé à $r = 1$ m, alors, en champ lointain, on a

$$\hat{p}_A(r, z, \omega) \sim \hat{p}_I(\omega)\frac{ie^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi r}}\sqrt{\frac{\rho_0(z)}{\rho_0(z_s)}}\sum_j \psi_j(z_s)\psi_j(z)\frac{e^{ik_j r}}{\sqrt{k_j}}. \tag{5.26}$$

L'expression (5.26) doit être complétée par une intégrale sur un continuum de modes, mais en pratique, cette contribution correspond à des réfractions thermosphériques, qui peut donc être ignorée lorsqu'on s'intéresse aux seules phases stratosphériques. Si l'atténuation est incluse dans le modèle, alors toutes les solutions croissent ou décroissent exponentiellement lorsque $z \to \infty$. Dans ce cas, on peut montrer qu'il n'existe pas de spectre continu et que la somme sur les modes est complète (Dunford and Schwartz, 1971).

Les simulations d'infrasons étudiées dans la suite de ce chapitre n'ont pas été réalisées par mes soins mais pas Elodie Noëlë au CEA.

5.3.2 Pertes par transmission

L'équation (5.26) produit, pour une fréquence fixée, un champ de pression. En normalisant ce champ par une valeur de référence, par exemple choisie à r = 1 km de la source, on obtient une perte par transmission qu'il est d'usage de calculer en décibels (dB) en prenant le logarithme. La figure 5.6 représente son évolution au sol (z = 0) en prenant pour profil de célérité deux situations distinctes pour lesquelles la valeur maximale du rapport de célérité effective R(z) = ce(z)/ce(0) est inférieure ou de l'ordre de l'unité. Ces deux situations correspondent aux dates du 1er septembre 2014 et du 22 août 2014, respectivement.

1. On parle de biorthogonalité plutôt que d'orthogonalité parce que ψ_j est orthogonale aux fonctions ψ_k^* de l'adjoint qui est, dans ce cas, le conjugué complexe de l'équation pour ψ_j.

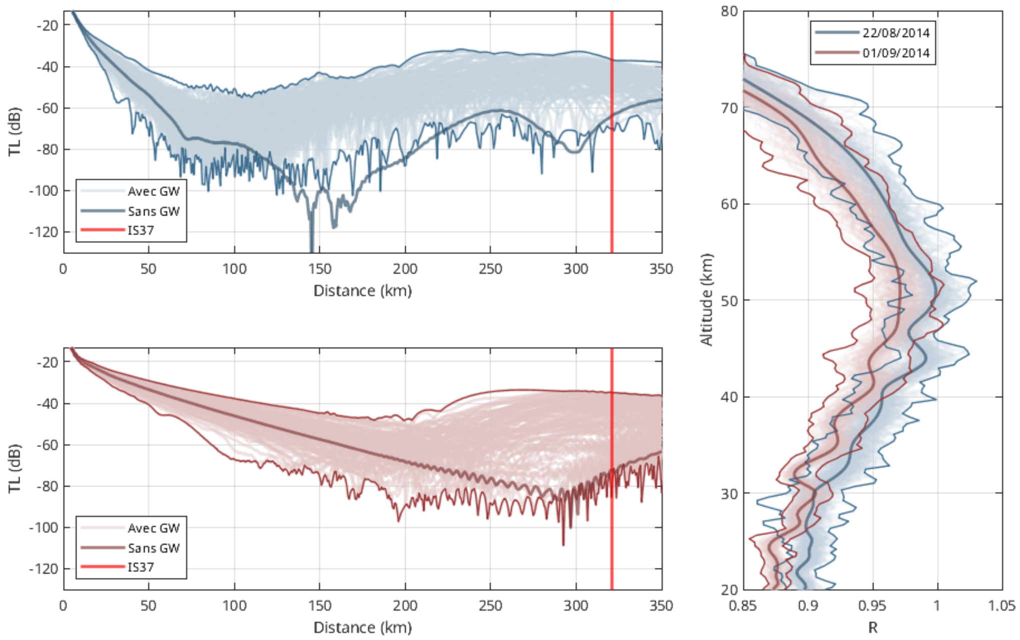


Figure 5.6 – (a) Pertes par transmission à 0.5 Hz en fonction de la distance pour deux conditions de propagation ; (b) : profils de célérité effective correspondants sans et avec l'effet des ondes de gravité. La position de la station IS37 est représentée par une ligne verticale rouge. La perte par transmission (TL) est calculée à partir de l'équation (5.26).

L'évolution au sol de l'atténuation est le reflet des mécanismes de réfraction qui se produisent dans l'atmosphère, sous l'effet des gradients verticaux de célérité effective. Ces mécanismes agissent principalement dans la stratosphère où la célérité effective atteint son maximum. L'atténuation décroît dans une zone dite d'ombre, puis croît sous l'effet d'ondes qui, après s'être réfractées dans la stratosphère, sont réfléchies au sol. L'extension de la zone d'ombre dépend du profil vertical de célérité effective. Si on a $\mathrm{R} < 1$ dans la stratosphère, alors la perte par transmission au sol est caractérisée par un accroissement du signal aux distances supérieures à 300 km environ. Lorsque la situation est proche du seuil $\mathrm{R} \simeq 1$, l'évolution dans la zone d'ombre est en grande partie régie par la distribution verticale des fluctuations de ce(z) au voisinage des altitudes pour lesquelles on a $\mathrm{R} \simeq 1$. Dans les deux cas considérés ici pour l'illustration, l'ajout d'un champ d'ondes de gravité accroît la célérité effective, au moins localement, ce qui modifie drastiquement les conditions de propagation, comme le montre les pertes par transmission de la figure 5.6. Le gain peut atteindre 40 dB au niveau de la station IS37, mais dépend en grande partie de la réalisation du champ d'ondes de gravité. Ainsi, et bien que la perturbation induite par les ondes de gravité n'excède pas quelques mètres par secondes, l'effet des ondes de gravité sur les niveaux de pression acoustiques dépend à la fois du profil moyen (i.e. sans ondes de gravité) et des caractéristiques des fluctuations.

5.3.3 Synthèse des signaux infrasonores

Dans cette section, nous discutons de l'utilisation de la transformée de Fourier inverse pour modéliser la propagation de signaux impulsionnels à large bande. En utilisant le fait que p_A est réel et en passant d'une intégrale sur la pulsation ω à une intégrale sur la fréquence f, on obtient :

$$p_A(r,z,t) = \mathrm{Re}\sqrt{8\pi}\int_0^{\infty} \hat{p}(r,z,2\pi f)e^{-2i\pi f t}\, df. \tag{5.27}$$

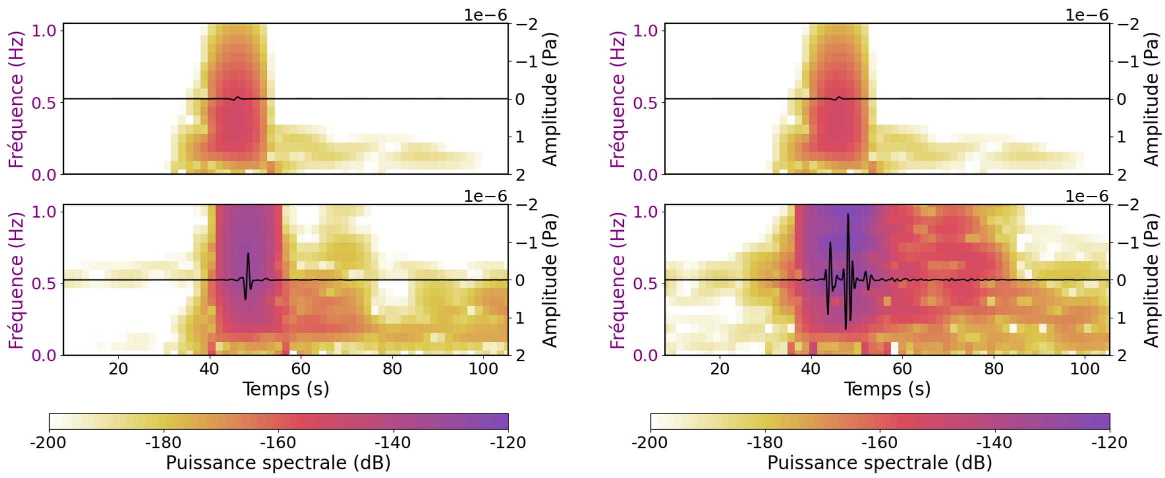
Pour les signaux à bande passante limitée, l'intégrale ci-dessus peut être estimée numériquement de manière précise et efficace en l'approximent par une somme discrète finie qui peut être évaluée à l'aide de l'algorithme FFT (Fast Fourier Transform).

La fréquence maximale F requise dépend de la bande passante du signal à la source et du taux d'atténuation des hautes fréquences. Le spectre des ondes générées par des explosions a une bande passante très large en raison de la montée rapide de l'onde de pression ; cependant, les composantes haute fréquence s'atténuent rapidement, de sorte que, dans un modèle de propagation linéaire, ces hautes fréquences peuvent être également atténuées. D'un autre côté, si la bande passante du spectre source est trop étroite, le signal propagé perd les caractéristiques d'une impulsion. Un compromis efficace consiste à utiliser une forme de spectre source, telle que celle introduite dans l'équation (14) de **?** [voir également la figure 3(a) de Waxler et al. (2015)]. Ce spectre source est asymétrique avec une bande passante environ cinq fois supérieure à la fréquence de pic. Notez qu'un pas de temps plus fin, permettant un échantillonnage plus précis du signal résultant, peut être obtenu sans augmentation significative du temps de calcul via la technique du *zero padding*.

Déterminer la longueur de la fenêtre temporelle T peut être difficile. La communauté infrasonore a adopté la nomenclature sismique en désignant les signaux reçus de différentes trajectoires de propagation comme des "phases". Il existe diverses trajectoires le long desquelles un signal, ou phase de propagation, peut atteindre un récepteur, et chacune de ces trajectoires a des temps de propagation distincts. En général, ce temps dépend à la fois de la longueur de la trajectoire de propagation et de la vitesse du son le long de cette trajectoire. Pour la propagation des infrasons, en raison des grandes altitudes atteintes par les signaux, la longueur de la trajectoire est souvent aussi significative que la vitesse du son. En pratique, la durée T est déterminée par la relation :

$$T \geq \frac{R(c_{\text{max}} - c_{\text{min}})}{c_{\text{max}} c_{\text{min}}}, \tag{5.28}$$

où c_{max} et c_{min} sont respectivement la célérité maximale et minimale, et R est la distance de propagation. Les célérités peuvent être aussi basses qu'environ 210 m/s (Assink et al., 2012, 2013) pour les phases thermosphériques, et atteindre 340 m/s pour les phases troposphériques. Les célérités des phase stratosphériques sont typiquement de l'ordre de 300 m/s, mais peuvent être assez rapides ((Evers and Haak, 2001; Kulichkov et al., 2004; Waxler et al., 2015), atteignant même 360 m/s.

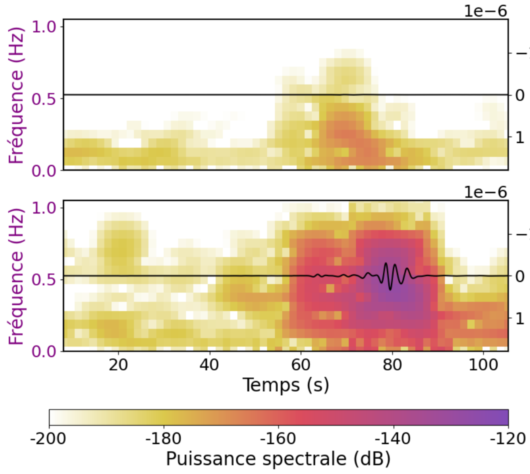


(a) Cas Ceff ratio max < 1

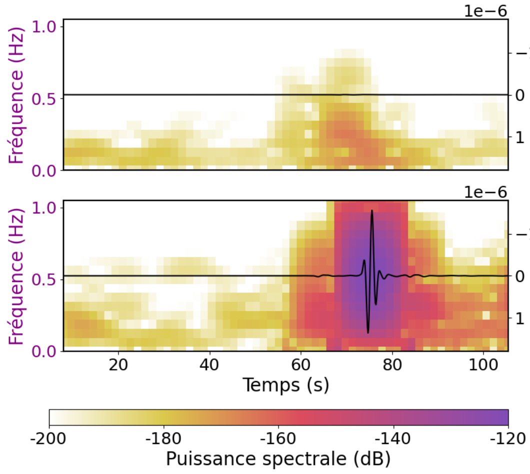
(b) Cas Ceff ratio max > 1

FIGURE 5.7 – *Signaux simulés pour le cas défavorable (22/08/2014), sans ondes de gravité en haut, avec en bas.*

Les spectrogrammes et signaux correspondant aux événements favorable du 22/09/2014 et défavorable du 01/09/2014 sont tracés figures 5.7 et 5.8 respectivement. Les figures du haut représentent les spectrogrammes et signaux générés par la propagation d'infrasons à travers des profils de célérité effective non perturbés et les figures du bas correspondent à des cas perturbés. Les figures figures 5.7 et 5.8a) montrent un cas où les ondes de gravité causent un maximum du profile de célérité < 1. Nous pouvons voir que le signal est plus fort en amplitude que celui "sans ondes de gravité" et le contenu fréquentiel est plus important. De plus, il dure également plus longtemps. La différence entre le signal correspondant à un profil avec ou sans ondes est plus marquée lorsque le cas était défavorable. Les figures figures 5.7 et 5.8a) représentent les mêmes profils moyens mais cette fois, la perturbation provoque un maximum du profil de célérité > 1. des petites structures apparaissent et le contenu fréquentiel est beaucoup plus riche dans les deux cas (22/08/2014 et 01/09/2014). De nouveau, le cas défavorable montre la différence la plus marquée entre le signal perturbé et non perturbé



(a) Cas Ceff ratio max < 1



(b) Cas Ceff ratio max > 1

FIGURE 5.8 – *Signaux simulés pour le cas favorable (01/09/2014), sans ondes de gravité en haut, avec en bas.*

5.4 Etude des interactions infrasons - ondes de gravité

5.4.1 Effets sur l'atténuation

La représentation modale équation (5.26)) permet de calculer l'atténuation pour une fréquence donnée. On parle de perte par transmission. La figure 5.9 en donne un exemple pour une fréquence de $f = 0.5$ Hz pour 113 cas entre 2014 et 2024. Pour chacun des cas (ou événements), 100 ondes de gravité ont été générées. La figure du bas montre le maximum du profil de célérité effective pour chaque événement avec ondes de gravité (en rouge, moyenne et deux écart type) et sans (en noir). Comme le montrait la figure 5.6, les ondes de gravité accroîssent le maximum de célérité effective, en particulier pour les événements défavorables. La figure 5.9 en haut montre les pertes par transmission associées aux profils de célérités (en noir, sans ondes de gravité et en bleu, moyenne et deux écart type). Un amplitude plus forte du signal est enregistrée à la station I37NO lorsque les infrasons se sont propagés dans une atmosphère perturbée par des ondes de gravité. La différence est, en adéquation avec le constat pour la célérité effective, plus marquée pour les cas défavorables.

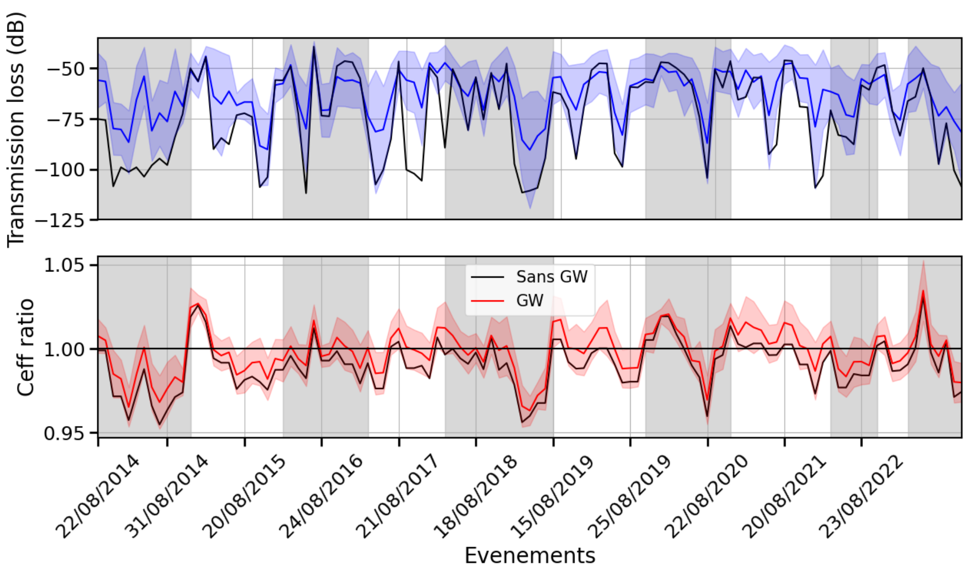


FIGURE 5.9 – *En haut, pertes par transmission simulées à la station I37NO avec (en bleu, 100 ondes) et sans (en noir) ondes de gravité. En bas, maximums du profil de célérité effective avec (en rouge) et sans (en noir) ondes de gravité. Les plages colorées représentent deux écarts types autour de la moyenne.*

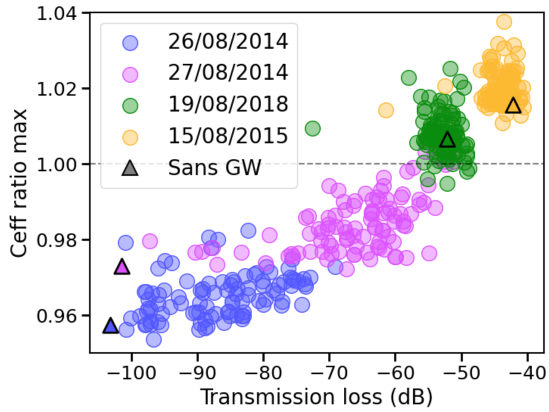


FIGURE 5.10 – Perte par transmission en fonction du maximum du profil de célérité dans la stratosphère. Les cercles représentent les 100 réalisations d'ondes de gravité, et les traingles montrent les cas sans perturbations.

Afin d'évaluer l'impact des ondes de gravité en fonction du maximum du profil de célérité effective (CRmax) avec et sans ondes de gravité, on peut calculer la corrélation entre les pertes par transmission et le CRmax pour les 113 événements. Le coefficient de Pearson qu'on obtient, de 0.674, est significatif.

Quatre événements sont tracés sur la figure 5.10. Les triangles correspondent aux cas non perturbés et les cercles représentent les 100 cas d'ondes de gravité générés pour chaque événement. Les deux cas initialement défavorables (26/08/2014 et 27/08/2014) montrent un impact important des ondes de gravité en terme de pertes par transmission causées par les profils de célérité (allant jusqu'à 50 dB de différence). En revanche, les cas favorables montrent une différence moindre, qui s'inverse même pour certains profils d'ondes de gravité. Pour chaque événement, on peut calculer la différence entre les pertes par transmission du profil non perturbé avec les moyennes des pertes par transmission des 100 cas d'ondes de gravité. Si on calcule la moyenne de cette distance pour les événements initialement favorables (CRmax>1) parmis les 113 cas, on obtient une perte de 15.21 dB. Si on fait le même calcul pour les cas défavorables (CRmax<1), la différence est de 4.18 dB. On peut donc confirmer les observations pressenties sur la figure 5.9 : les ondes de gravité impactent plus les cas initialement défavorables que favorables.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, l'impact de champs d'ondes de gravité sur la propagation d'infrasons est étudié à l'aide d'une paramétrisation d'ondes de gravité de sources frontales et liées aux jets. Ces champs sont dérivés de profils de vitesse de vent et température à un point donné, puis ajoutés à ces profils. Ils constituent l'ingrédient de base de simulations de propagation d'infrasons par modes normaux effectuées ici.
Le cas pratique étudié ici se situe en Finlande. Les explosions régulières qui ont lieu pendant les mois d'août et septembre chaque année à Hukkakero sont enregistrées à la station norvégienne I37NO située à 321 km de la source. Un premier travail a été d'étudier la sensibilité de la paramétrisation stocastique en terme d'amplitude des perturbations à différents paramètres régissant le flux d'Eliassen Palm, la saturation, et la vitesse de phase caractéristique des ondes. Pour cela, 2000 réalisations de champs d'ondes de gravité ont été réalisées pour les 106 événements enregistrés à Hukkakero entre 2014 et 2023 dans de multiples configurations correspondant à des "jeux de paramètres". On observe que l'amplitude des perturbations de célérité effective dans la stratosphère augmente avec ces trois paramètres (flux d'EP, vitesse de phase caractéristique et saturation) et que les différents jeux de paramètres provoquent une variabilité inégale entre les événements traduisant, dans un extrême, une prédonominance de l'écoulement moyen, et dans l'autre, une importance accrue de la stocasticité de la paramétrisation.

Des simulations de propagation des infrasons ont par ailleurs été réalisées pour étudier l'impact des ondes de gravité par deux aspects : l'atténuation des champs de pression avec la distance (pertes par transmission) et les signaux infrasons simulés à une distance donnée. Des signaux et spectrogrammes correspondants à la propagation d'infrasons dans une atmosphère perturbée par un champ d'onde de gravité généré ont montré que ces dernières augmentent l'amplitude et enrichissent le contenu fréquentiel du signal au niveau de la station. La comparaison avec les signaux réels (typiquement ceux qui sont représentés section 5.1.2) montre tout de même que les simulations ne génèrent de fréquences assez faibles. Une étude consistant à ajouter une perturbation aux profils de vent et température sous forme de cosinus (de longueurs d'onde 500m, 1km, 5km) autour de 50km a été effectuée. Elle n'est pas détaillée ici car elle présente des problèmes de filtrage au niveau de la source produisant du bruit et des petites structures parasites s'ajoutant aux signaux mais permettait de présentir que les longueurs d'ondes aux alentours de 5 km sont beaucoup trop grandes pour expliquer la partie "coda" des signaux. Les longueurs d'ondes de 1km permettent de s'approcher (dans les signaux) des structures observées même si ceux-là sont composés d'un mélange de ce type de petites longueurs d'ondes ainsi que d'autres légèrement plus grandes. Ainsi, nous pouvons supposer que les longueurs d'ondes principales qu'il faut paramétriser sont situées entre 1 et 5 km mais cela mérite un travail plus approfondit.

Étudier les pertes par transmission au niveau de la station pour 113 événements a souligné l'importance des ondes de gravité pour les cas défavorables. En effet, on constate un gain moyen de 15.21 dB pouvant aller jusqu'à 50 dB dans ces cas contre des valeurs beaucoup plus faibles (gain moyen de 4.18 dB) dans les cas favorables.

Un travail qui n'a pu aboutir et mérite plus profonde réflexion serait d'effectuer l'étude des paramètres de la paramétrisation en terme de longueurs d'ondes caractéristiques. En effet, des essais ont été faits pour l'estimer dans la zone de réflexion principale de la phase stratosphérique (autour de 50km). Le premier essai a été de calculer une longueur de corrélation pour chaque champ d'ondes. Si l'on observe un "glissement" vers les grandes longueurs d'ondes avec l'altitude (voir figure 5.4b)), le niveau, ou la gamme d'altitude, auxquelles se produit la transition varie entre les réalisations. La mesure d'une longueur de corrélation sur une gamme d'altitude fixée sous estime alors les petites structures. Un deuxième essai a été de tracer les spectrogrammes des profils et d'en extraire la longueur d'onde dominante pour chaque altitude. De nouveau, le glissement vers les grandes longueurs d'ondes rendent imprécises ces mesures.

Il serait également pertinent de s'intéresser aux statistiques des signaux obtenus avec la paramétrisation des ondes. En effet, on peut supposer l'existence de liens forts entre les caractéristiques des signaux (en terme de temps d'arrivée, durée du signal, amplitude) et les profils de célérités effective – et donc des perturbations générées.

Enfin, les simulations étudiées ici en terme de signaux et pertes par transmission étaient réalisées avec une configuration des paramètres correspondant au cas "Short Wave" utilisé dans Ribstein et al. (2022). Il serait intéressant de comparer ces résultats avec la configuration "Long wave".

5.6 Annexe F : Etude de la sensibilité aux paramètres

Plusieurs paramètres de la paramétrisation sont critiques et influent sur les statistiques des champs d'ondes de gravité reconstruits. Le premier est le nombre minimum d'ondes monochromatiques à émettre pour reconstruire les champs. Trois autres paramètres, détaillés dans la section 5.6.2, ont été identifiés comme cruciaux : l'espérence de la loi log-normale régissant le flux d'Eliassen Palm (EP), la variance de la loi normale suivie par la vitesse de phase (CPHA) et le paramètre de Saturation (SC).

5.6.1 Longueur d'ondes des ondes monochromatiques émises

Pour l'événement du 26 août 2014, 5000 réalisations de champs d'onde de gravité ont été réalisées à partir de n ondes monochromatiques, n variant de 50 à 600. La figure 5.11 représente la distribution des amplitudes de perturbations induites par les champs d'onde entre 45 et 55km pour $n = 50, 100, 200, 300$. Deux jeux de paramètres (EP, SC, CPHA) sont représentés et distingués par le trait plein ou pointillé.

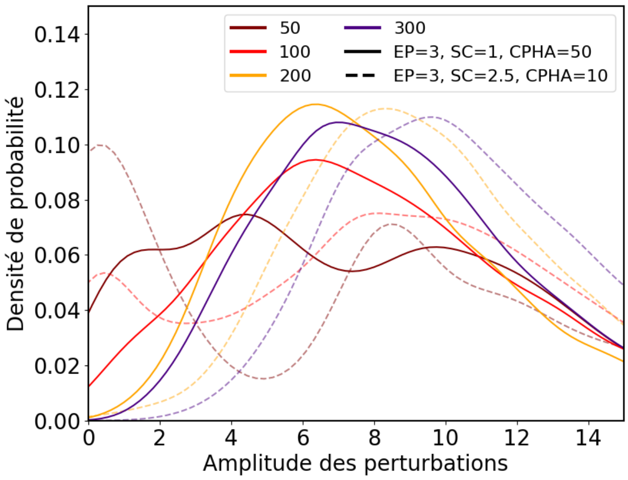


FIGURE 5.11 – Amplitudes des perturbations du profil de célérité effective entre 45 et 55 km pour 50, 100, 200 et 300 ondes monochromatiques combinées en 5000 réalisations. En traits pleins, cas avec EP=3., SC=1., CPHA=50 et en traits pointillés EP=3., SC=2.5, CPHA=10

On peut voir sur cette figure que les distributions d'amplitude de perturbation pour $n > 200$ varient peu (en réalité à partir de 150, par montré ici) tandis que pour $n < 200$, elles sont beaucoup plus disparates. Ainsi, dans toute l'étude présentée ici, le nombre retenu est $n = 200$.

5.6.2 Sensibilité à l'amplitude des ondes émises, la saturation et la vitesse de phase ((EP,SC,CPHA).

À l'instar de la section 5.2.3, 2000 réalisations de champs d'ondes de gravité ont été effectuées pour chacun des 106 événements energistrés à la station I37NO entre 2014 et 2023. L'amplitude des perturbations sont tracées sous forme de boxplots figure 5.12 et figure 5.13. Le premier jeux de paramètre, (EP=4.5, Sc=2.5, cpha=10 figure 5.12), correspond au cas "Short Wave" du [JAMES] à l'exception du flux d'Eliassen palm qui était fixe mais dépendant de l'altitude. Ce sont des ondes de plutôt courtes longueurs d'onde. La deuxième figure, figure 5.13) peut être assimilée à la configuration "Long Wave" du [JAMES] et présente des longueurs d'ondes plus longues. Le paramèrte de saturation permet ici d'avoir des amplitudes de même ordre de grandeur entre les deux configurations.

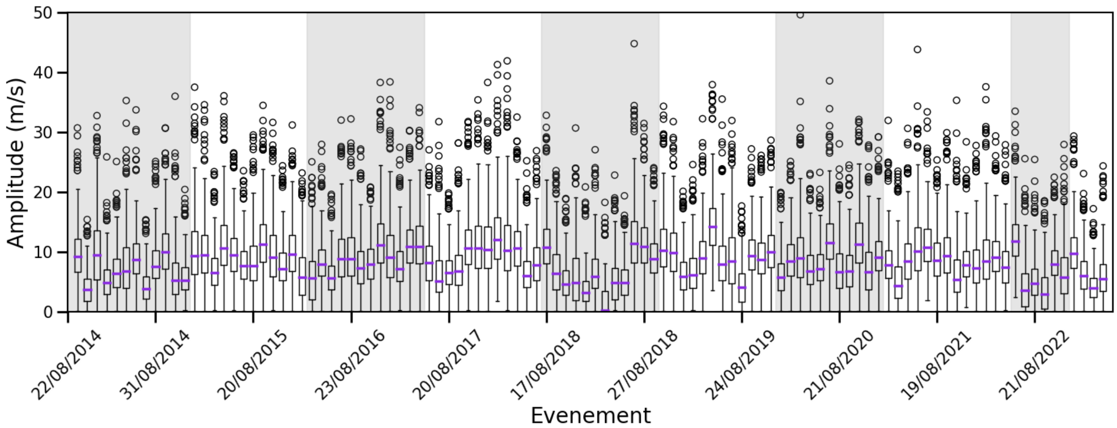


Figure 5.12 – EP=4.5, Sc=2.5, cpha=10

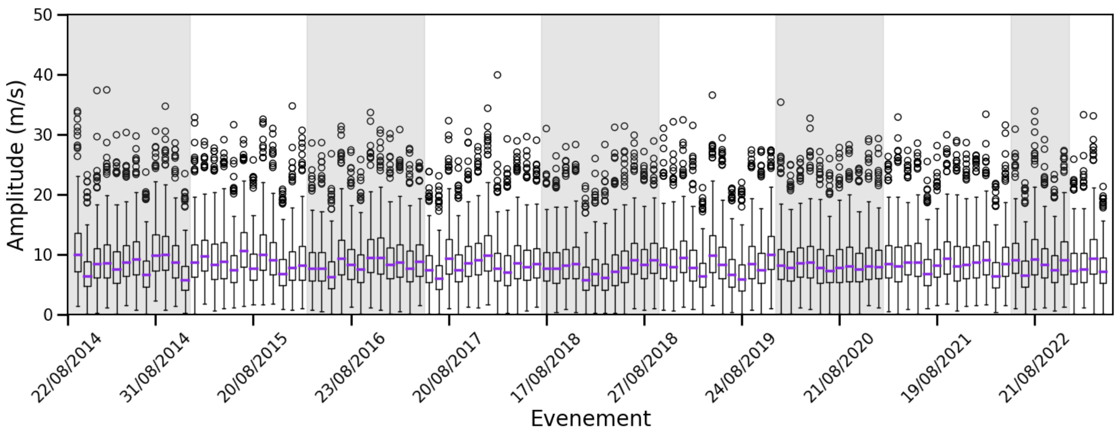
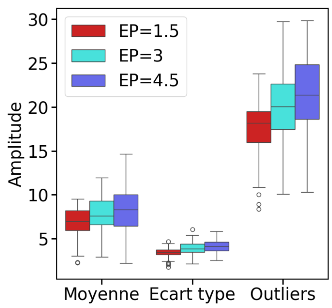


Figure 5.13 – EP=4.5, Sc=1., cpha=30

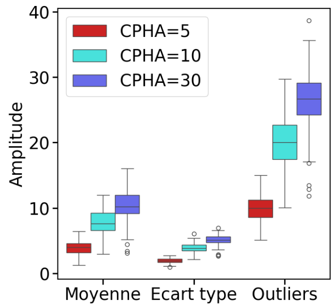
En effet, les amplitudes des perturbations sur ces deux figures sont bien du même ordre de grandeur mais la variabilité entre les événements est plus forte dans le cas "Short Wave" que "Long Wave". Celà veut dire que dans le premier cas, la variabilité de l'écoulement domine la nature des ondes de gravité atteignant les altitudes 45 - 55km tandis que pour de plus grandes longueurs d'ondes, la stocasticité de la paramétrisation est dominante. On peut le quantifier en s'intéressant à la moyenne de moyennes divisée par la moyenne des écart types.

Afin de comprendre l'impact de ces trois paramètres sur l'amplitude de manière systématique, on peut calculer pour les 106 événements, les distributions des moyennes (traits violets sur les figure 5.12 et figure 5.13) μ, des écarts types σ et des outliers. Elles sont représentées figure 5.15 pour trois valeurs de EP, SC et CPHA.

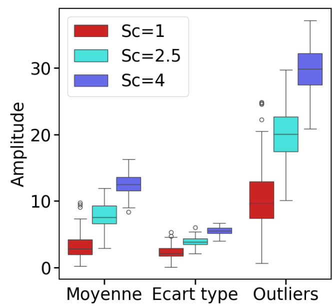
On peut constater que l'amplitude des perturbations augmente avec les trois paramètres considérés ici. Par exemple, la figure 5.12 montre des amplitudes plus importante que la figure 5.5 (Ep=3, SC=2.5, CPHA=5).



(a)



(b)



(c)

FIGURE 5.14

FIGURE 5.15 – Variation entre les événements des amplitudes pour différents Ep (a), CPHA (b) et SC (c) en terme de moyenne, écart type, et outliers.

Chapitre 6

Perspective

Dans le cadre de ce travail de thèse, j'ai aussi commencé à réfléchir au problèmes des paramétrisations de l'orographie aux échelles sous maille. En effet Une source d'erreur majeure dans les modèles de prévision météorologique et climatiques résulte d'une représentation inadéquate des processus de petite et moyenne échelle dans les régions montagneuses. Des lacunes dans la compréhension des processus ont généralement conduit à des paramétrisations qui ne sont pas bien contraintes. Le principal obstacle est le manque de connaissances observationnelles et théoriques des processus et cela a amené les différents centres de prévision a adopter des approches radicalement différentes Sandu et al. (2015). Par exemple, dans le modèle IFS du CEPMMT les montagnes de petites échelles induisent une fort accroissement de la trainée turbulente (formalisme décrit dans Beljaars et al. (2006)) et une contribution du blocage et des ondes de gravité moins importante (schéma décrit dans Lott and Miller (1997)) tandis que pour le modèle de Météorologie anglais (MetUM) c'est le contraire. Il y a clairement un manque de contraintes sur l'importance relative de ces différents processus, des compensations d'erreur se produisent sans que nous en ayons vraiment le contrôle. Cela est préoccupant si on cherche à développer des paramétrisations valables sur une gamme d'échelles importantes, ces mécanismes produisant des erreurs importantes aussi bien dans les modèles de prévision météorologiques (Williams et al., 2020) que dans les modèle de climat (Gastineau et al., 2020). Traiter ces questions d'interactions entre la couche limite et les montagnes, et améliorer leur paramétrisation exige de partir d'une base théorique extrêmement solide. C'est cependant un problème très ardu, et les travaux sur ce sujet sont notoirement complexes et difficiles à appliquer (Belcher and Wood, 1996). Ce n'est que récemment que ces questions ont commencé à être reprise (Smith et al., 2006) et le formalisme plus complet décrivant l'interaction entre une couche limite et une montagne que nous avons développé dans Lott et al. (2023) et au cours de cette thèse pourrait servir de base à une réunification de ces paramétrisations. Ce formalisme n'est valable que pour des montagnes de faible pente, il convient de l'étendre à des situations fortement non-linéaires, et de l'utiliser pour formuler une nouvelle paramétrisation ou combiner celles existantes. Enfin, dans ce développement, l'étude de la propagation des infrasons en présence d'ondes de montagnes pourraient servir de base pour ajuster les champs induits par les paramétrisations de l'orographie sous maille dans l'atmosphère libre. Je détaille dans la suite quelques pistes que j'ai suivi dans ces directions

6.1 Paramétrisation de l'orographie aux échelles sous maille

La paramétrisation de l'effet des montagnes d'échelles sous-maille dans les modèles repose sur deux vision des écoulements autour des montagnes. La vision «neutre» où la montagne crée un effet d'abris en aval et des vents forts sur la pente en amont et au sommet, et la vision «stratifiée» où la montagne induit des vents forts sur la pente en aval (avec effet de Foehn) et un effet de blocage de l'écoulement en amont. Jusqu'à présent ces effets sont paramétrisés de manière séparées, via des paramétrisations dites de «drag orographique turbulent» prenant en compte les effets d'abris (TOFD, (Beljaars et al., 2006)), et par des paramétrisations de l'orographie sous maille négligeant le turbulence mais représentant le blocage et les ondes de gravité (SSO, (Lott and Miller, 1997)). On considère en général que la première paramétrisation concerne des montagnes d'échelles sous maille de longueur $L <$ 5km et la seconde les échelles plus grande. Cette séparation est arbitraire, il convient de la rendre dépendante des caractéristiques de l'écoulement mais surtout elle est proche de la résolution des modèles de prévision les plus récents, il faut donc déterminer comment ces différents effets interagissent, cela est d'autant plus nécessaire que cette zone de transition est aussi peuplée d'ondes «piégées» dans la basse atmosphère qui sont encore mal paramétrées. Trois effets différents ont besoin d'être paramétrisés dans les modèles de climat : la force de traînée due aux ondes de gravité, les blocages d'écoulement à bas niveau dans le cas stratifié, et la force de traînée turbulente.

6.1.1 Bref historique des paramétrisations SSO

Les paramétrisations des ondes de montagne sont les premières paramétrisations d'onde de gravité à avoir été implémentées dans les modèles de circulation générale au début des années 80 (Palmer et al., 1986), elles ont été complétée par des paramétrisations d'ondes non orographiques lorsque les GCMs se sont étendus à la mésosphère. Si on revient aux ondes de montagnes, les premières paramétrisations représentent typiquement l'effet d'une seule onde monochromatique se propageant verticalement avec un vitesse de phase horizontale nulle (voir la revue dans Young-Joon Kim and Chun (2003)). Les caractéristiques au niveau de la source y sont basées sur les théories en deux dimensions d'écoulement hydrostatique, stationnaire et uniforme à l'aplomb d'un obstacle. Cependant, les phénomènes liés à l'anisotropie du relief et à la dynamique non linéaire de l'écoulement près de la surface (blocage, séparation ou ondes piégées) ne sont pas pris en compte dans ce type de paramétrisations alors qu'ils produisent une force de traînée importante et impactent la dynamique de grande échelle. C'est pour prendre en compte ces effets que Lott and Miller (1997) ont développé une paramétrisation de la force de traînée générée par l'orographie sous maille (*Subgrid Scale Orographic drag scheme*, SSO) qui inclut l'impact de la séparation des lignes de courant autour de l'obstacle.

Dans cette paramétrisation, 'écoulement incident est divisé en deux couches (voir figure 6.1). Dans la première, limitée par une hauteur Z_{blk}, il est bloqué et ne peut pas passer au dessus de la montagne. La hauteur de cette couche dépend des paramètres de l'écoulement et d'une hauteur critique non dimensionnelle de la montagne fixée. Les lignes de courant se séparent et une force de traînée est exercée de l'obstacle sur l'écoulement. Cette "force de traînée de l'écoulement bloqué" dépend de l'angle entre l'écoulement incident et l'obstacle, du rapport d'aspect de la montagne vu depuis l'écoulement et des caractéristiques de l'orographie (écart type, anisotropie, pente, orientation). La couche située au dessus de Z_{blk} est favorable à la propagation d'ondes de gravité. Cependant, l'amplitude des ondes, réduite par la présence de la couche bloquée, est définie par la hauteur effective $H_{eff} = H - Z_{blk}$ où H est la hauteur non dimensionnelle de la montagne. Dans la couche supérieure, la force de traînée des ondes de gravité est considérée constante au dessus de Z_{blk} jusqu'à ce que l'onde déferle.

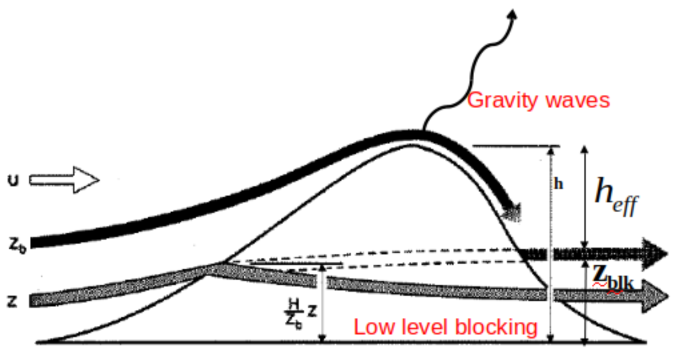


FIGURE 6.1 – Schéma explicatif de la paramétrisation SSO

6.1.2 Bref historique des paramétrisations TOFD

D'un autre côté, des chercheurs plus issues du domaine de la turbulence ont développées des paramétrisations dites de « turbulent orographic form drag» a priori nécessaires pour des obstacles d'échelles horizontales plus petites (quelques kilomètres). Dans certains modèles ces effets sont représentés en modifiant la longueur de rugosité, on parle alors de «longueur de ruguosité effective» (Grant and Mason, 1990; Wood and Mason, 1993), celle ci étant augmentée avec la pente de la topographie. Cette méthode a permis d'améliorer les performances de modèles numériques de prévision du temps (Georgelin et al., 1994; Gregory et al., 1998; Milton and Wilson, 1996) mais elle a aussi tendance à sous estimer les vents de surface dans les régions où la rugosité effective est très forte. Dans d'autre modèles, il a été choisi de représenter explicitement le profil de force de traînée lié à l'orographie (Wood et al., 2001) en considérant un cas simplifié de crêtes sinusoïdales. Beljaars et al. (2006) l'a étendu à des topographies réelles plus complexes contenant de multiples échelles. Cette approche permet d'influencer une plus grande couche de l'atmosphère et de prendre en compte les effets directionnels liés à l'orientation de l'orographie par rapport à la direction du vent à bas niveau.

6.1.3 Comparaison SSO/TOFD en offline

Des comparaisons entre la partie représentant l'écoulement bloqué de SSO et TOFD, ont été faites par Sandu et al. (2015) dans le modèle de prévision du temps IFS du centre européen. Ils ont montré que, pour ces deux paramétrisations, augmenter la force de traînée orographique calculée modifie la pression de surface, le vent zonal et la température dans l'hémisphère nord dans les prévision à 10 jours ainsi que dans une intégration saisonnière. Cependant, la magnitude de ces changements dépend du schéma (TOFD) ou (SSO) modifié. Pour la prévision à 10 jours, c'est TOFD qui a l'impact le plus grand sur l'atmosphère tandis que pour une échelle de temps saisonnière c'est plutôt SSO. Cela est dû au fait qu'à ces échelles de temps, la partie "blocage" de SSO impacte les vents de la basse stratosphère tandis que les effets de TOFD sont principalement dans la basse troposphère.

J'ai repris ce travail, en implémentant TOFD dans le GCM du LMD, LMDz mais en me limitant au mode offline, c'est à dire en prenant en compte les champs de vent, de température et de précipitations issues des réanalyses ERA5 défradées à i=une résolution proche de celle de LMDz. Ainsi, on peut étudier l'impact de la paramétrisation en étudiant les trainées qu'elles produisent. Pour cela, la figure figure 6.2 représente la force de traînée à bas niveau calculée par SSO, paramétrisation dans laquelle cette force est essentiellement due à l'écoulement bloqué. La force de traînée est ici moyennée sur le mois de juillet 2014, de même que pour la figure 6.3 qui représente la force de traînée turbulente issue de la paramétrisation TOFD.

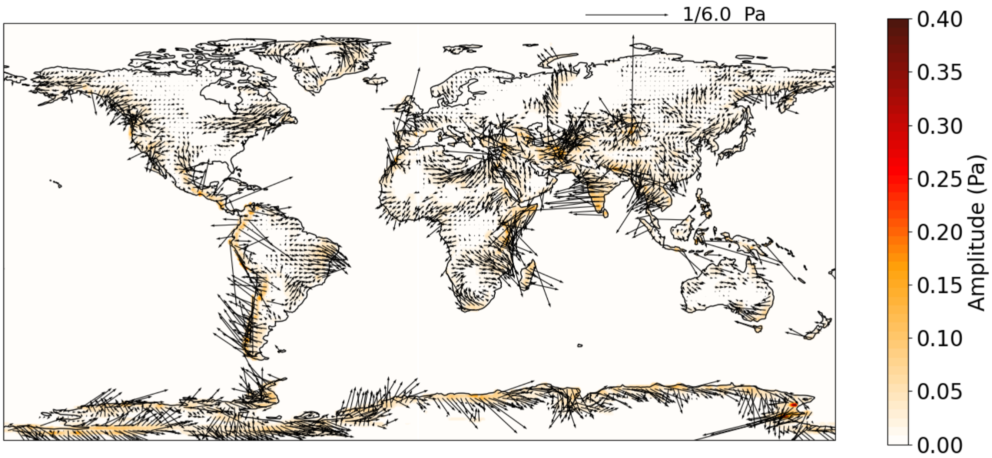


FIGURE 6.2 – Force de traînée à bas niveau moyénnée pour 2014 dans SSO

La première chose, assez logique, que l'on peut constater est que les directions de la force de traînée causée par les deux paramétrisations sont les mêmes. Par ailleurs, les zones de chaînes de montagne les plus importantes (les Andes, l'Himalaya, et surtout l'Antarctique) provoquent une force de traînée plus importante pour TOFD que SSO. En revanche, les zones de relief moins fort (les Alpes, l'Afrique, les Apalaches) sont sous représentées dans TOFD par rapport à SSO. On peut d'ailleurs faire le même constant par rapport aux latitudes en regardant la figure 6.6. Celle ci montre les tendances causées par SSO et TOFD, moyennées zonalement dans la basse troposphère. Comme pressenti sur les cartes, TOFD est plus fort au SSO an Antartique. On peut également constater que son impact aux moyennes latitudes pénètre moins dans la troposphère que SSO. Ceci dit et globalement, l'effet de TOFD est souvent proche de l'effet de SSO dans les basses couches.

Dans un furur proche il serait utile de faire fonctionner ces deux paramétrisations dans le GCMs en mode online et de voir l'impact de ces deux paramétrisations sur la climatologie, mais aussi sur l'atmosphère à court terme, au regard de l'article de Sandu et al. (2015).

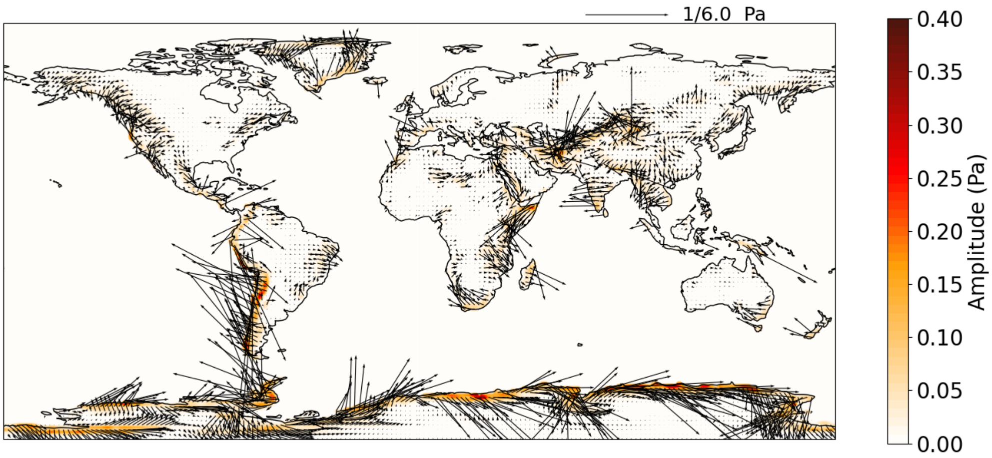
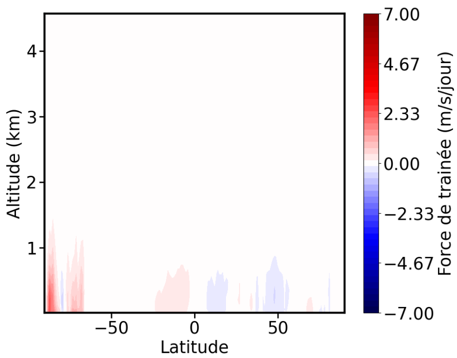
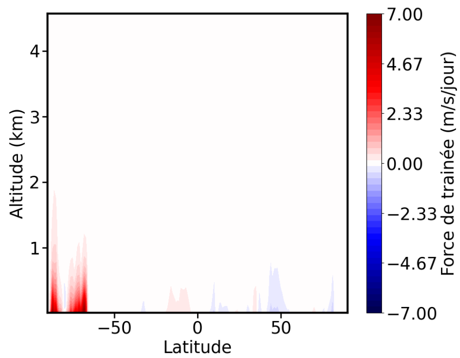


FIGURE 6.3 – Force de traînée à bas niveau moyennée pour 2014 dans TOFD



(a) SSO



(b) TOFD

FIGURE 6.4 – Termes de tendances, moyennés zonalement sur le mois de juillet 2014

6.2 Représentation de l'orographie

Les différences entre ces deux paramétrisations, et le désir de les réunifier m'a amener à questionner la manière dont est représentée l'orographie sous maille. En effet, à chaque point de grille, SSO considère l'altitude moyenne, $\bar{h}$ de la maille au dessus du niveau de la mer. Quatre paramètres sont ensuite calculés à partir de la différence entre la hauteur de la topographie non résolue issue d'un modèle à haute résolution (dataset de l'US Navy) et $\bar{h}$. La topographie non résolue est ensuite remplacée par une représentation elliptique équivalente de la montagne, définie par ces quatre paramètres. La variance, ou déviation standard μ de chaque région sous maille est calculée. μ donne une échelle de hauteur caractéristique de l'orographie sous maille, et 2μ l'enveloppe physique des pics. L'anisotropie γ est définie comme le rapport entre le petit et le grand axe de la montagne elliptique tandis que ψ donne l'angle entre la direction de l'écoulement à bas niveau et l'axe principal de la topographie. σ représente la pente moyenne. Il peut être interprété comme le nombre d'onde moyen de l'orographie sous maille. Ces paramètres sont illustrés figure 6.5.

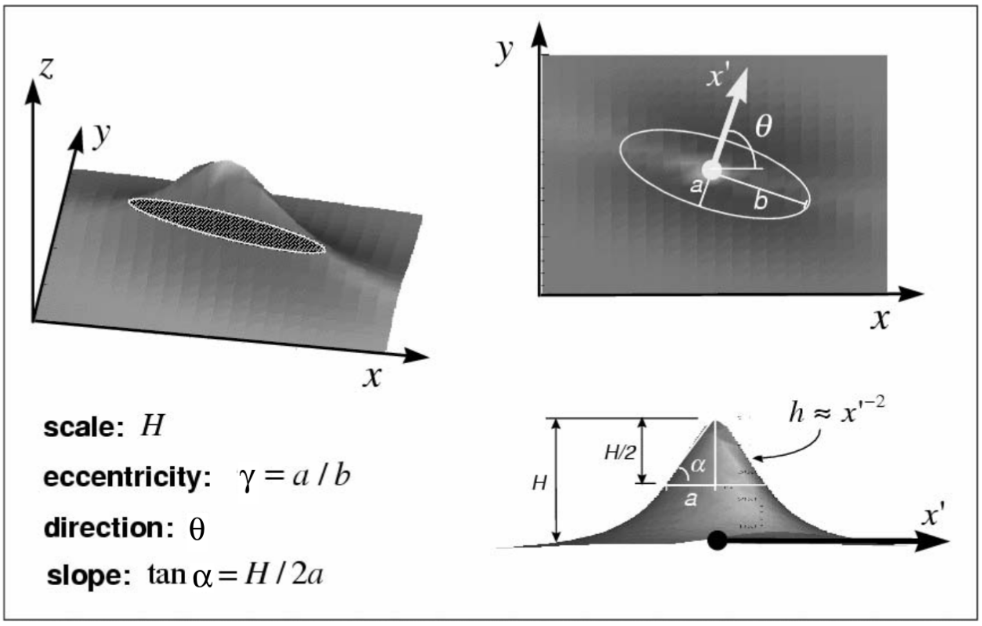


FIGURE 6.5 – Illustration des quatre paramètres utilisés pour définir une montagne elliptique (issue de **?***)*

La force de traînée dans TOFD est, pour sa part, calculée à partir de la variance de la pente du terrain. Le spectre de la hauteur de l'orographie est représenté par une loi de puissance empirique. Deux problèmes se posent alors. Le premier est la nécessité d'avoir des données de topographie à haute résolution sur tout le globe. En effet, les échelles intéressantes pour la force de traînée turbulente sont de l'ordre de 5 km jusqu'à 10 m. Au moment de la parution de l'article de (Beljaars et al., 2006), il n'existait pas ce type de dataset. Ils ont donc décidé d'étudier les données de l'U.S. Geological Survey en Amérique du nord à une résolution d'environ 100 m. En traçant des spectres dans la direction Est - Ouest et Nord - Sud, ils ont pu en déduire que les deux directions ne présentaient pas de différences marquées, et qu'un changement de pente des spectre se produit aux alentours de $k = 0.003\ m^{-1}$. La moyenne des exposants des lois de puissance dans les deux régimes leur ont permis de déduire un spectre général à utiliser dans la paramétrisation. Une telle approche présente un autre problème : pour que la variance de la pente converge, le spectre d'orographie doit décroître plus vite que k^{-3} où k est le nombre d'onde. Cependant, **?** a montré que des spectres réels peuvent avoir des pentes entre k^{-1} et k^{-4}, ne remplissant pas toujours la condidition de convergence. Beljaars et al. (2006) considère alors qu'il faut prendre en compte les différents forçage de vent "ressentis" par chaque échelle horizontale. Ainsi, les petites échelles devraient être impactées par un vent moins important que les grandes et avoir un impact moindre sur la force de traînée. En pratique, cela revient à dimensionner le spectre par le vent au niveau du relief.

Afin d'aller plus loin sur l'étude des spectres, j'ai fait un calcul des spectres à partir de la base de donnée de topographie créée par la Japan Aerospace Exploration Agency (JAXA) à partir du satellite *Advanced Land Observing Satellite* "DAICHI" (ALOS). J'ai d'abord soustrait le plan moyen de données à 30m et 90m de résolutions, et appliqué un fenêtrage en forme de cosinus à partir de 25% du rayon depuis le centre, jusqu'au bord. La taille du fenêtrage n'a pas montré de différence frappante dans les résultats, mais l'extraction du plan est un élément décisif. Un exemple en Finlande avec les données de résolution 30m est représenté figure 6.6.

Une double transformée de Fourier (dans la direction x et y) est appliquée à la topographie,

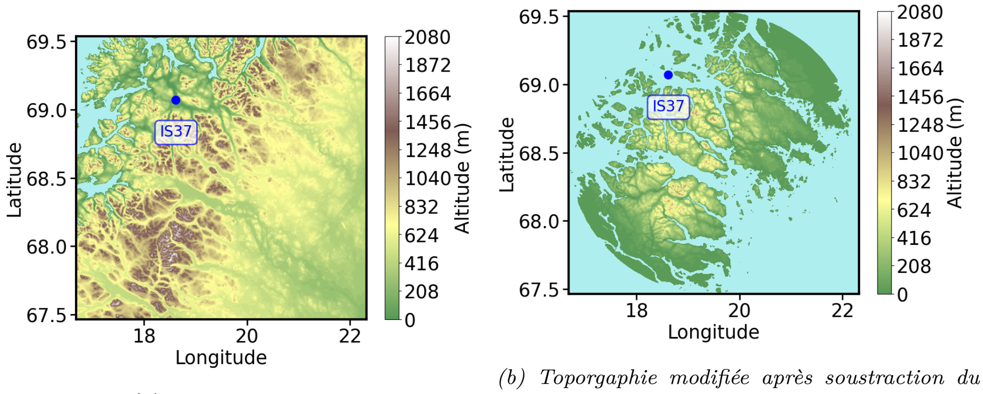
$$h(x,y) = \int\int \hat{h}(k,l)e^{i(kx+ly)}dkdl. \tag{6.1}$$

Le spectre est alors donné par :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \hat{h}(k,l)\hat{h}^*(k,l)dkdl, \tag{6.2}$$

et transformé en coordonnées polaires :

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} K\hat{h}(K,\theta)\hat{h}^*(K,\theta)dKd\theta$$



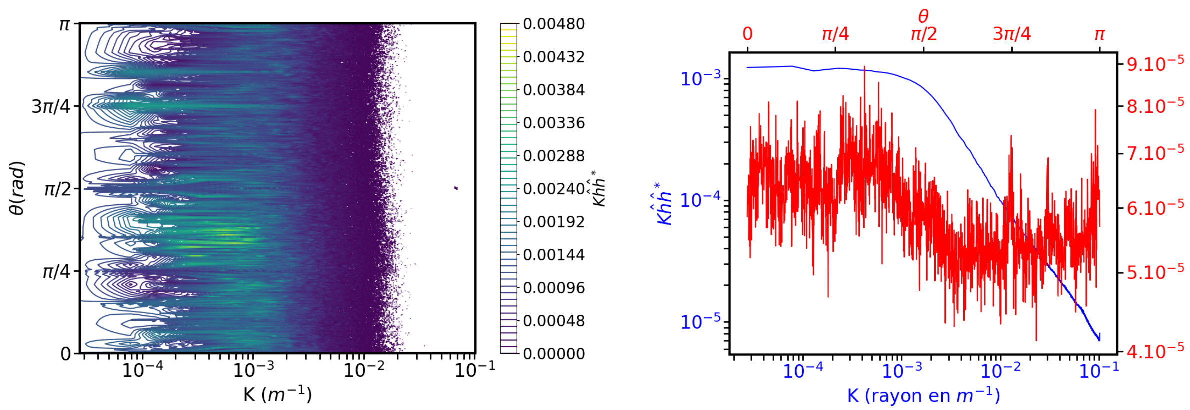
(a) Topographie "brute"

(b) Toporgaphie modifiée après soustraction du plan et du tapper.

FIGURE 6.6 – *Topographie étudiée*

On peut le tracer en fonction de l'angle θ et du rayon K. La figure 6.7a est le résultat de l'exemple présenté figure 6.6b. Il peut être intégré tour à tour en θ et K, ce qui donne la courbe rouge et la courbe bleue de la figure 6.7b respectivement. L'orientation de l'orographie est donnée par la courbe rouge qui pourrait être paramétrisée par un cosinus (pas montré ici). Par ailleurs, on paramétrise le spectre figure 6.8 en effectuant un fit d'une droite horizontale pour la première partie du spectre et une droite ax^{-b} pour la deuxième. Ces deux courbes sont séparées par un nombre d'onde de coupure trouvé en minimisant l'erreur entre les fits et le spectre.

Avec ces nouveaux spectres théoriques, il faudrait adapter le formalisme de TOFD mais surtout introduire une représentation spectrale dans la paramétrisation SSO, plutôt qu'une représentation à l'aide de montagne elliptiques isolées : une telle représentation est difficile à combiner avec l'approche spectrale de TOFD.



(a)

(b)

FIGURE 6.7 – *Spectre de l'orographie : a) double transformée de Fourier tracée en fonction des coordonnées polaires, b) intégration en θ (en rouge) et en K (en bleu)*

6.3 Impact des ondes de montagne sur la propagation des infrasons

Dans le but d'étudier l'impact des ondes de gravité sur la propagation des infrasons, j'ai entrepris de calculer des champs d'ondes à partir de SSO. Comme dans le chapitre 5, les champs peuvent s'écrire :

$$(\vec{u}', T)(\vec{x}, z, t) = \sum_{n=1}^{N} C_n(\hat{\vec{u}}_n(z), \hat{T}_j(z))e^{i(\vec{k}_n.\vec{x}-\omega_n t)} \tag{6.3}$$

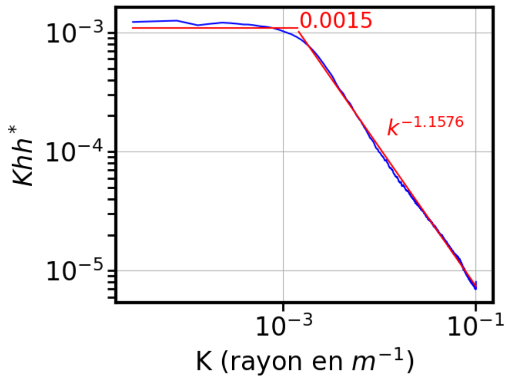


Figure 6.8 – Paramétrisation (en rouge) du spectre d'orographie à Hukkakero (en bleu).

avec N le nombre d'ondes monochromatiques émises. Pour calculer $\hat{\vec{u}}_n(z)$ et $\hat{T}_j(z)$, la première étape est d'estimer le déplacement total η en fonction de la force de traînée, $\vec{\tau}$, calculée par SSO au niveau du point d'intérêt (récepteur). On a par exemple dans la direction x :

$$\tau_x = -\rho\overline{u'w'} = -\frac{\rho}{L_x L_y}\int_0^{L_x}\int_0^{Ly} u'w'dxdy \tag{6.4}$$

Or avec,

$$w' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{w}e^{i(kx+ly)}dkdl, \quad \text{et} \quad u' = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}e^{i(kx+ly)}dkdl,$$

et en sachant que $\int e^{ikx}dx^d = (2\pi)^d\delta(k)$, on peut écrire :

$$\tau_x = -\frac{4\pi^2\rho}{L_x L_y}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(k,l)\hat{w}^*(k,l)dkdl. \tag{6.5}$$

Pour les ondes orographiques, $\omega = 0$ et on peut écrire les relations de polarisation de cette manière :

$$\begin{cases} u' = & -i\dfrac{k}{\vec{k}\vec{U}}\dfrac{N^2}{m}\hat{\eta} \\ v' = & -i\dfrac{l}{\vec{k}\vec{U}}\dfrac{N^2}{m}\hat{\eta} \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad m^2 = \frac{N^2|\vec{k}|^2}{|\vec{k}\vec{U}|^2}$$

Où $\hat{\eta}$ est le déplacement des lignes de courant et $w = i\vec{k}\vec{U}\hat{\eta}$. $\vec{\tau}$ devient alors dans les deux directions :

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \frac{4\pi^2\rho}{L_x L_y}\vec{\alpha}|\vec{k}\vec{U}|N\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\eta}\hat{\eta}^*dkdl \qquad \text{avec } \vec{\alpha} = \frac{(k,l)}{|\vec{k}|} = \frac{(\tau_x,\tau_y)}{|\tau|} \\ |\vec{\tau}| &= \frac{4\pi^2\rho}{L_x L_y}|\vec{k}\vec{U}|N|\hat{\eta}|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, on peut exprimer $\hat{\eta}$ en fonction de $|\vec{\tau}|$. Comme pour la paramétrisation des ondes non orographiques, on utilise une approximation WKB pour calculer la perturbation de déplacement vertical.

$$\eta'(x,z,t) = Am^{-1/2}e^{z/2H}e^{i\int mdz'} \tag{6.6}$$

où A est une amplitude, $e^{z/2H}$ permet de normaliser par la densité, et m varie lentement sur la verticale. On a alors :

$$\eta' = \hat{\eta}m^{-1/2}e^{-i\int_0^z \frac{N||\vec{k}_n||}{\vec{\omega}_n}dz' + i\chi_n}e^{z/2H} \tag{6.7}$$

La phase χ_n est choisie de manière aléatoire. On peut alors calculer les perturbations de vitesse horizontale et de température par les relations de polarisation :

$$\vec{u} = -iN\frac{\vec{k}}{|\vec{k}|}\eta' \quad (6.8)$$

$$T = N^2\frac{H}{R}\eta' \quad (6.9)$$

À l'instar de la paramétrisation d'ondes non orographiques, 200 ondes émises ont un nombre d'onde tiré aléatoirement entre 0.00002 et 0.001. Une idée intéressante serait de pondérer leurs amplitudes par le spectre des ondes calculée dans la partie précédente. Ainsi, on peut répartir l'impact de la force de traînée calculée par SSO sur chaque onde monochromatique en fonction du spectre et les combiner pour obtenir un champs d'onde total.

Il serait à présent important de regarder l'impact de ces champs sur la propagation des infrasons, de la même manière que la paramétrisation des ondes non orographiques. Pour cela, les cas réels étudiés à Hukkakero ne sont pas idéaux car les explosions ont lieu en août et septembre, moment où les ondes de gravité orographiques sont bloquées par les vents dans la basse stratosphère et troposphère. Or, sur 106 cas entre 2014 et 2023, seulement deux présentent une phase troposphérique marquée. l'effet des ondes orographiques n'est alors que peu influant sur les signaux. Il n'est pas aisé de trouver des cas d'étude aussi réguliers que ceux enregistrés en Norvège, mais une autre manière de regarder l'impact de la paramétrisation pourrait être de calculer des cartes d'atténuation globales.

Chapitre 7

Conclusion

Développer des théories pour les ondes de gravité permet de comprendre les mécanismes à l'œuvre dans leur propagation. Des simplifications telles que l'approximation linéaire offrent un cadre simplifié pour bien comprendre les processus physiques en jeu. Dans cette optique, la première partie de cette thèse s'intéresse aux interactions entre les ondes de gravité orographiques et la couche limite dans un cadre théorique. Ces théories constituent les fondations des paramétrisations utilisées notamment dans les modèles de climat globaux et de prévision numérique du temps. Par exemple, les deux paramétrisations "Subgrid Scale Orography" et "Turbulent Orographic Form Drag" s'appuient sur des travaux théoriques solides. La première vise à représenter la force de traînée causée par les ondes orographiques, ainsi que celle due aux effets de blocage. Elle est issue de théories développées pour les milieux stratifiés en présence d'orographies de faibles pentes. En revanche, la traînée turbulente causée par le relief met en jeux des échelles spatiales beaucoup plus petites (jusqu'à environ 5 km) et les paramétrisations ayant pour but de la modéliser sont basées sur des théories pour les écoulements neutres. Un moyen de calibrer ces paramétrisations et vérifier leur exactitude est d'utiliser la propagation des infrasons. En effet, ceux-ci sont très influencés par les petites perturbations présentes dans l'atmosphère, et les signaux (amplitude et contenu fréquentiel) captés au niveau d'un récepteur plus ou moins éloignés de leur source dépendent fortement de cette variabilité de petite échelle.

Tout d'abord, la réflexion d'ondes se propageant dans une couche limite représentée par une longueur de mélange a été étudiée. Le profil de vent est logarithmique près de la surface puis augmente linéairement avec l'altitude (cas cisaillement constant). Un cas plus réaliste a également été étudié, avec un profil de vent qui devient constant au-delà d'une certaine altitude représentant la couche limite (cas cisaillement variable). Deux paramètres contrôlent le comportement des ondes. Le premier, le nombre de Richardson, J, quantifie la stabilité de l'écoulement dans la couche cisaillée. La réflexion des ondes diminue quand J augmente, comportement lié au caractère oscillatoire des solutions. En effet, quand J est grand, les ondes oscillent plus rapidement sur la verticale et sont alors plus absorbées. Le même genre d'argument permet de comprendre l'influence du paramètre z_a, profondeur du niveau critique du profil non dissipatif. En effet, les solutions des équations oscillent fortement en s'approchant du niveau critique. Ainsi, lorsque celui-ci est situé loin sous la surface, les oscillations assez faibles mènent à peu de dissipation et donc une forte réflexion des ondes. La longueur de mélange asymptotique, λ, et la longueur de rugosité, z_0, caractéristiques de la couche limite, influencent seulement indirectement la réflexion des ondes au travers de z_a.

Ajouter un forçage par une montagne dans ce cadre théorique permet d'étudier le développement des ondes piégées au regard des résultats obtenus sur le coefficient de réflexion. Le taux de décroissance des ondes et les modes se développant à l'aval de la montagne ont ainsi pu être étudiés au vu des paramètres J et z_a. Dans les deux cas (cisaillement variable et constant), des modes piégés se développent lorsque le nombre de Richardson J est assez grand (> 1). En effet, l'altitude de leurs points tournant, liée à J, se situe alors assez loin de la surface pour que des ondes piégées se propagent. En adéquation avec les résultats sur le coefficient de réflexion, lorsque J augmente, le taux de décroissance des ondes piégées augmente aussi (elles sont plus absorbées). De même, les ondes sont plus absorbées lorsque z_a est petit, c'est à dire que le niveau critique est proche de la surface. Un résultat important de ce travail est la mise en évidence de la coexistence de modes lorsque $J > 2$. Ceux-ci se développent loin de la surface et sont donc peu influencés par celle-ci. Ils ont le comportement d'ondes interfaciales alors même que nos profils ne présentent pas d'interface. L'étude des modes horizontaux piégés montre qu'ils correspondent à des résonances du coefficient de réflexion dans le cas à cisaillement constant. Lorsque l'écoulement est constant au-delà de la couche limite, et que toutes les ondes ne sont pas piégées, d'autres résonances rendent l'identification des modes piégés difficiles. Un dernier résultat important de ce travail est que les modes résonnants correspondent aux prédictions de la théorie non dissipative lorsque le niveau critique est situé loin de la surface.

Pour aller plus loin dans ce travail, il pourrait être intéressant d'évaluer la profondeur du niveau critique théorique pour des profils réels. Cela pourrait être fait en faisant correspondre une fonction linéaire aux profils de vent au delà de la couche de surface et en cherchant la profondeur à laquelle elle s'annule. Considérer des couches limites plus complexes, typiquement définies par une TKE pourraient également apporter des résultats intéressants à comparer avec ceux obtenus par la théorie de la couche de mélange.

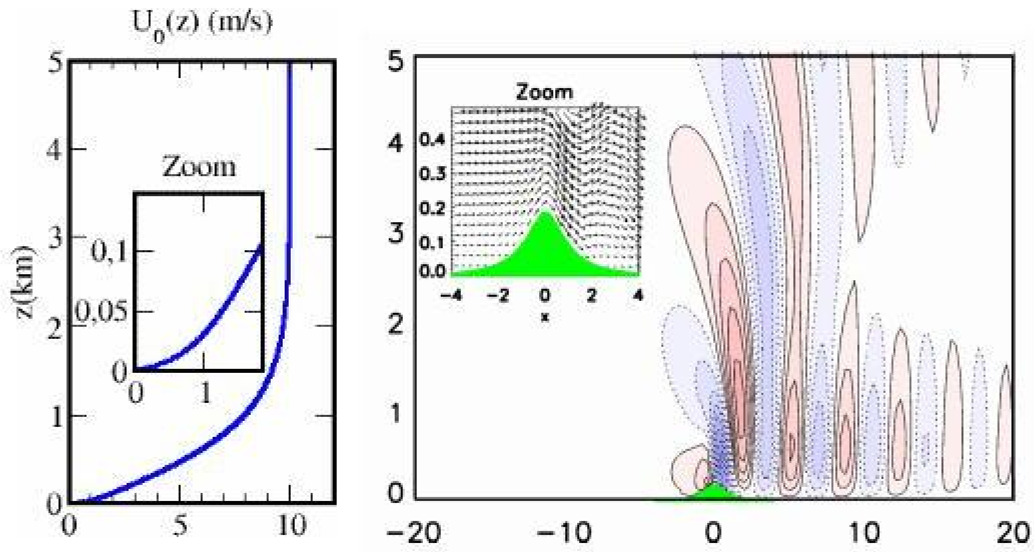
La deuxième étude phare de cette thèse a été d'étudier l'impact d'une paramétrisation d'ondes non orographiques sur la propagation des infrasons. L'idée à terme serait d'ajouter également la paramétrisation des ondes orographiques mais le temps a manqué et ce travail n'a pas pu voir le jour. La paramétrisation stochastique d'ondes générées par des fronts et jets, conçue initialement pour évaluer la force de traînée qu'elles créent, a été adaptée pour générer des champs de perturbations des profils de vent et température. Le cas que nous étudions ici (des explosions régulières à Hukkakero en Finlande enregistrées depuis 1988 à une station située à 321 km de la source) a un suivi temporel nous permettant d'étudier la variabilité de la paramétrisation pour des cas proches mais tout de même différents. Trois paramètres s'avèrent cruciaux pour les caractéristiques des champs d'ondes générés : le paramètre contrôlant l'amplitude le flux via le flux d'Eliassen Palm emis (EP), le paramètre contrôlant la saturation des ondes (Sc), et le paramètre contrôlant la vitesse de phase caractéristique des ondes (cpha). L'amplitude des ondes augmente avec chacun d'entre eux, mais leur influence sur la longueur d'onde doit également être prise en compte (et faire l'objet d'une étude supplémentaire). Des simulations de propagation des infrasons ont été réalisées et permettent d'étudier l'impact des ondes de gravité par deux aspects : l'atténuation des champs de pression avec la distance et (pertes par transmission) et les signaux infrasons simulés à une distance donnée. La paramétrisation dans sa configuration "Short Wave" (Ribstein et al., 2022) (EP=3 mPa, Sc=2.5, cpha=5 m/s) montre une influence significative des ondes de gravité sur l'amplitude et le contenu fréquentiel du signal lorsque le profil de célérité non perturbé est défavorable. Cependant, il serait pertinent d'étudier plus en profondeur les statistiques des caractéristiques des signaux générés au regard des profils de perturbation de célérité effective.

Enfin, le chapitre 6 entame une réflexion sur la prise en compte du relief dans les paramétrisation d'ondes de gravité orographiques. Deux paramétrisations, SSO et TOFD sont comparées en offline et méritent une étude plus approfondie quant à leur impact sur la climatologie et météorologie modélisée dans les modèles de climat globaux.

Chapitre 8

Versions publiées des travaux présentés dans cette thèse

8.1 Annexe G : Neutral and stratified turbulent boundary layer flow over low mountains



In this paper a theory for the interaction between a boundary layer and a low mountain is derived. The incident wind considered (U_0, left panel) presents a logarithmic profile near the surface. The theory describes the transition from neutral to stratified flows, and the systems of mountain waves (upward propagating and trapped, see right panel) that develop during the transition. The theory also reproduces the transition from downstream sheltering to downslope winds (see zoom) as stratification increases. The mountain drag and Reynolds stress profiles are also discussed.

Received: 17 March 2023 | Revised: 11 September 2023 | Accepted: 1 October 2023

DOI: 10.1002/qj.4591

Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society RMetS

RESEARCH ARTICLE

Neutral and stratified turbulent boundary-layer flow over low mountains

Francois Lott[1] | Anton Beljaars[2] | Lucile Pauget[1,3] | Bruno Deremble[4]

[1]Universite PSL, Ecole Normale Supérieure, Département des géosciences, Laboratoire de Météorologie Dynamique, Paris, France

[2]Research Department, European Centre for Medium-Range Weather Forecasts, Reading, UK

[3]Département Analyse Surveillance Environnement, Commissariat à l'Energie atomique/DAM, Bruyères le Chatel, France

[4]Institut des Géosciences de l'Environnement, University Grenoble Alpes, Grenoble, France

Correspondence
Francois Lott, Laboratoire de Météorologie Dynamique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France.
Email: flott@lmd.ens.fr

Funding information
Laboratoire Conventionné Yves Rocard BLOWAVES; VESRI-Schmidt Future: Datawave project

Abstract

A theory for flow over gentle hills using a mixing-length turbulence closure is developed to describe the transition from turbulent orographic form drag to gravity wave drag. It confirms that the first is associated with downstream sheltering, and the second with upstream blocking and strong downslope winds. It shows that the altitude at which the incident flow needs to be taken to calculate the drag is the inner layer scale at which dissipation equilibrates disturbance advection. It also shows that the parameter that controls the transition, here a Richardson number, compares the mountain length with the altitude of the turning points above which the upward-propagating gravity waves become evanescent. Our solutions are also used to show that the downslope winds penetrate well into the inner layer and that a good fraction of the drag is deposited in the inner layer: all of it in the neutral case, a large fraction in the intermediate cases when there are trapped lee waves, and even in stable situations without trapping part of the gravity wave drag is eroded in the inner layer. Some discussion on how to combine neutral and stratified effects in the parametrization of subgrid scale orography in large-scale models is given.

KEYWORDS

flow blocking, mountain drag, mountain waves, neutral and stratified boundary layers, Reynolds stress, sheltering effect

1 | INTRODUCTION

Topographies with small horizontal scale L are assumed to produce disturbances with amplitude exponentially decaying in the free atmosphere (evanescent waves), hence essentially affecting the boundary layer. The modification of turbulent dissipation (and induced stress) results in mountain drag forces that can substantially increase the turbulent drag (Hunt et al., 1988a). In this case, the drag is related to downstream "non-separated" sheltering with the pressure loss across the hill being caused by frictional retardation of the flow near the surface when the slopes are sufficiently small or by flow separation on the downstream side when the slopes are large—see, for instance, the large-eddy simulations in Allen and Brown (2002) and Reinert et al. (2007). A pretty illustration of such downstream separation and the associated circulations is the formation of banner clouds, which sometimes appear in the right conditions (Voigt & Wirth, 2013). For mountains with bigger horizontal length scale and in the presence of stratification, buoyancy force can act against downstream sheltering, forcing an intense flow along the downstream flank of the hill. The mechanism at work in this case is related to buoyancy/gravity waves and is efficient for two reasons. The first reason is that in the presence of internal waves the disturbance amplitudes no longer decay exponentially with altitude in the free atmosphere, which means that the dynamics is no longer limited to the boundary layer. The second reason is that, close to the surface, the horizontal and vertical winds have opposite phase; that is, large horizontal wind occurs when the vertical velocity is negative, which is the fundamental mechanism causing downslope winds—see more details in the review by Durran (1990). Still in these conditions, the wind also becomes weak upstream, causing upstream blocking for large mountains—some recent observations and large-eddy simulations are found in Pokharel et al. (2017) and Sauer et al. (2016). In these stratified cases, the drag is caused by mountain waves for low hills and blocked flow drag for mountains of sufficient height.

Although these contrasting dynamics can be studied in great detail using high-resolution models (Finnigan et al., 2020), the transition between the two regimes has not received much attention. To our knowledge, only a few articles address this transition explicitly. Belcher and Wood (1996) analyse theoretically the transition from form drag to wave drag, the form drag being related to non-separated sheltering gradually being replaced by wave drag when stratification increases. The transition has also been analysed in wind-tunnel experiments and numerical simulations by Ross et al. (2004) or in the prediction of where flow separation is likely to occur (Ambaum & Marshall, 2005). The fact that the transition itself is not much studied does not mean that the interplay between boundary layers and mountain waves has never been analysed. Numerous articles analyse the impact of the boundary layer on mountain waves (Richard et al., 1989; Smith et al., 2006) or on the trapped waves developing at a boundary-layer inversion (Sachsperger et al., 2015; Teixeira et al., 2013a). The fact that some wave drag in the boundary layer can be significant was also recognized by Tsiringakis et al. (2017) and earlier by Chimonas and Nappo (1989). Beyond the drag itself, the contribution of boundary-layer waves to turbulent exchange is also recognized in oceanography and for sediment suspension (Boegman & Stastna, 2019; Soontiens et al., 2015).

The purpose of this study is to revisit early theories about the interactions between mountain and boundary layer in the neutral and stratified case. For this purpose we return to theories dating back from the 1980–1990s (Belcher & Wood, 1996; Hunt et al., 1988a; Hunt et al., 1988b) and complement them by deriving uniform approximations that capture smoothly the transitions between the so-called "inner" and "outer" regions. As we will see, the solutions we obtain capture all together the rich quasi-"inviscid" dynamics associated with the conventional mountain wave theory (which includes trapped lee waves) and its explicit interaction with the boundary-layer dynamics (for instance, the extent to which downslope winds penetrate into the inner layer). Our study also has a more practical motivation: there are two families of subgrid-scale orography parametrizations in present-day weather forecast and climate models. A first family represents the enhancement of turbulent drag by orography (Wood & Mason, 1993), with parametrizations that are today improved to represent better nonlinear effects and the vertical distribution of the drag (Beljaars et al., 2004; Wood et al., 2001). A second family represents a dynamics controlled by gravity waves (Palmer et al., 1986) and that has also been extended to include nonlinear effects (Lott & Miller, 1997). It is generally assumed that the first type of parametrization, also called "turbulent orographic form drag", should act for mountains of scale $L < 5$ km typically, whereas the second type, also called "subgrid-scale orography" (SSO) should consider large-scale mountains (Beljaars et al., 2004). With increasing model resolution it could be argued that only the turbulent orographic form drag parametrizations should stay in the future, the gravity wave part being explicitly resolved, but we are probably still far from this status. A first reason is that the effective resolution of weather forecast models can be near an order of magnitude coarser than the model grid size (Vosper et al., 2016). A second reason is that the $L = 5$ km cut-off is quite arbitrary and should be determined according to the local condition before removing the SSO-type schemes. A third reason is that even if a model can potentially resolve the small-scale gravity waves, they will certainly interact with some form of turbulent parametrization; understanding theoretically the interaction remains important.

In a recent series of papers, Lott and co-workers (Lott et al., 2020a; Lott et al., 2020b; Soufflet et al., 2022) formulated such theory and presented uniform solutions in the constant eddy-viscosity case for small slopes S. They show that the disturbance amplitude is near that predicted using inviscid theory if one takes for incident wind its value at altitude near the inner layer scale δ where dissipative effects equilibrate disturbance advection:

$$\frac{U_0(\delta)}{L} \approx \frac{\nu'(\delta)}{\delta^2}, \tag{1}$$

U_0 and ν' respectively being the incident wind and the eddy diffusivity acting on the disturbance. Lott et al. (2020b) then describe the transition from neutral to stratified and show that the transition occurs when the Richardson number $J \approx 1$ (see Section 2.1). To interpret this result they estimated in their eq. (33) the turning point altitude where the Scorer parameter satisfies

$$S_c(h_t) = \frac{N(h_t)^2}{U(h_t)^2} - \frac{U_{zz}(h_t)}{U(h_t)} = 1/L^2, \tag{2}$$

where h_t is the altitude above which the disturbance with wave number $1/L$ becomes evanescent in the vertical direction. In Lott et al. (2020b), the turning level was found to be approximately at $h_t \approx \sqrt{J}\,L$. With $J < 1$ ($J > 1$) the turning level is close to (far from) the surface compared with the mountain length, and we argued that the gravity waves have not (have) enough vertical space to develop and the dynamics is neutral (stratified). When the wind is sheared in the boundary layer and becomes constant above, Soufflet et al. (2022) found that the Richardson number in the boundary layer, but above the inner layer, is still the appropriate parameter to estimate the nature of the dynamics. In all cases we found that the transition from neutral to stratified is also a transition from downstream sheltering to upstream blocking when the height of the mountain approaches the inner layer scale (Lott et al., 2020b; Soufflet et al., 2022). Soufflet et al. (2022) also revealed the significance of the trapped lee waves during the transition (when $J \approx 1$) and the redistribution of the pressure drag in terms of vertical and horizontal pseudo momentum flux.

Since the constant-viscosity model is too simple to represent the real eddy diffusivity, particularly its decay when approaching the surface, the purpose of this article is to extend the formalism in Lott et al. (2020a), Lott et al. (2020b), and Soufflet et al. (2022) by using a first-order mixing-length closure reminiscent of the one used in Belcher and Wood (1996).

The plan of the article is as follows. In Section 2 we recall the basic equations and give an outline of the theory used in comparison with the theories used in the past. In Section 3 we describe the transition from downstream sheltering to upstream blocking and describe the trapped waves that develop strongly during the transition. In Section 4 we present diagnostics of mountain drag and Reynolds stresses profiles. In Section 5 we summarize and discuss the significance of our results in the context of subgrid-scale orography parametrization. We also relate them to the results in Belcher and Wood (1996). The model is detailed in the Appendix; it combines asymptotic developments and numerical integrations of the inner layer equations using a curved coordinate formalism.

2 | BASIC EQUATIONS

2.1 | Boussinesq equations and mixing length

All our calculations use the Boussinesq approximation written in hybrid terrain following coordinates (X, Z), which are related to the Cartesian coordinates (x, z) via

$$x = X, \quad z = Z + h(X)f(Z) = Z + z', \tag{3}$$

where $h(x)$ is the mountain height and the function $f(Z)$ is positive. $f(Z)$ ensures the transition from terrain-following coordinates near the surface to Cartesian coordinates by taking $f(0) = 1$ and decaying towards zero for $Z \rightarrow \infty$. From Clark (1977), it can be shown that the stationary Boussinesq equations can be written as follows:

$$\rho(u\partial_X u + \mathrm{W}\partial_Z u) = -(\partial_X \rho p + \partial_Z \rho g_{12} p) + \partial_Z \tau_{XZ}, \tag{4a}$$

$$\rho(u\partial_X w + \mathrm{W}\partial_Z w) = -\partial_Z p + \rho b + \partial_Z \tau_{XZ}, \tag{4b}$$

$$\rho(u\partial_X b + \mathrm{W}\partial_Z b) = \partial_Z q_Z, \tag{4c}$$

$$\partial_X \rho u + \partial_Z \rho \mathrm{W} = 0, \tag{4d}$$

where the "pseudo" density ρ is the Jacobian of the coordinate transformation, ρg_{12} is a metric tensor coefficient, and W a velocity in the direction perpendicular to the Z =constant surfaces:

$$\rho = \partial_Z z, \quad \rho g_{12} = -\partial_X z, \quad \mathrm{W} = u\partial_x Z + w\partial_z Z, \tag{5}$$

where u and w are the horizontal and vertical velocities. Compared with Clark (1977), we have rather followed the common practice to neglect the stresses and heat flux in the horizontal direction (τ_{XX}, τ_{ZX}, and q_X), which is consistent with the mixing-length model we will adopt. Finally, in Equations 4a–4d we have divided pressure anomaly by a constant reference density ρ_s—$(p - p_s(z))/\rho_R \rightarrow p$—and the buoyancy $b = -g(\theta - \theta_s)/\theta_s$, where θ is potential temperature and θ_s a reference value.

In general, we will assume no slip and no flow boundary conditions at the surface:

$$u(Z = 0) = \mathrm{W}(Z = 0) = b(Z = 0) = 0. \tag{6}$$

To express the stress tensors, we use a closure for eddy diffusivity based on mixing length theory:

$$\tau_{XZ} = \nu\partial_Z u, \quad \tau_{ZZ} = \nu\partial_Z w, \quad q_Z = \nu\partial_Z b, \quad \text{with } \nu = \Lambda_0^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial Z} \right\|, \tag{7}$$

where Λ_0 is the mixing length. Standard atmospheric boundary-layer models for neutral flow often have a smooth transition from the linear increase of mixing length near the surface to a constant limit value λ far away from the surface; for instance, according to the so-called

Blackadar formulation:

$$\frac{1}{\Lambda_0} = \frac{1}{\kappa(Z + z_0)} + \frac{1}{\lambda}, \tag{8}$$

where κ is the von Karman constant and z_0 a roughness length. As λ limits the mixing above the surface layer it could vary with stratification, a constraint we did not include explicitly. Note, nevertheless, that our calculations will cover a large range of λ, with more stable cases being related to smaller values of this parameter. A difficulty with the mixing-length profile in Equation (8) is that the background flows that give uniform fluxes have a logarithmic contribution that extends up to $z = \infty$—see Belcher and Wood (1996). As log-layers are confined to the near surface and to simplify the theory, we slightly modify the formula for the mixing length in Equation (8) and take

$$\Lambda_0 = \lambda \tanh\left(\kappa \frac{Z + z_0}{\lambda}\right). \tag{9}$$

This approximation keeps $\Lambda \approx \kappa Z$ near the surface and $\Lambda \approx \lambda$ in the far field. With this expression, the horizontal wind and buoyancy profiles that give uniform fluxes are

$$\begin{aligned} U_V(Z) &= \frac{u_*}{\kappa} \log\left[\frac{\sinh \kappa(Z + z_0)/\lambda}{\sinh \kappa z_0/\lambda}\right], \\ B_V(Z) &= \frac{b_*}{\kappa} \log\left[\frac{\sinh \kappa(Z + z_0)/\lambda}{\sinh \kappa z_0/\lambda}\right], \end{aligned} \tag{10}$$

where the subscript V denotes the background "viscous" solutions, $u_* = \sqrt{\tau_s/\rho_R}$ is the friction velocity, and $b_* = gH_s/(\rho_s c_p u_* \theta_s)$ is the buoyancy scale, with τ_s and H_s for surface stress and heat flux and c_p for the air heat capacity per unit mass at constant pressure.

Another difficulty when one tries to analyse the interaction between mountain waves and a dissipative surface layer is that the velocity in Equation (10) keeps increasing with altitude, which is not realistic. The vertical profiles also tend to confine vertically propagating gravity waves to low altitudes. This can spuriously limit the contribution of the gravity waves to the Reynolds stress for instance. To circumvent this issue, we will consider cases where the wind profile is modified to become constant above a height d:

$$\begin{aligned} U_0(Z) &= \frac{u_* d}{\lambda} \tanh\left[\frac{\lambda}{u_* d} U_V(Z)\right], \\ B_0(Z) &= B_V(z). \end{aligned} \tag{11}$$

This introduces a boundary-layer depth d above which the background flow is externally imposed rather than being an exact solution of the viscous equations. Note that the case with infinite winds in the far field, Equation (10), can be obtained with Equation (11) by taking $d = \infty$.

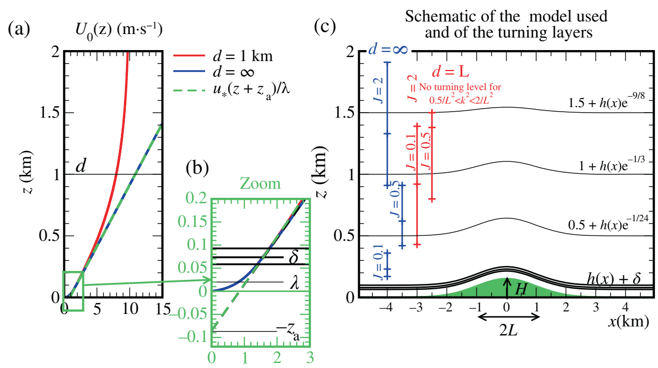


FIGURE 1 (a, b) Background winds used and their various fits according to layer properties (see legend) $\lambda = 20$ m, $z_0 = 1$ m, $L = 1$ km, $d = 1$ km, $u_* = 0.2$ m·s^{-1}. (c) Schematic of the model used. The three thin black solid lines follow the surfaces $Z = 0.5, 1, 1.5$. In (b) and (c) the thick black almost horizontal lines span the inner layer scales corresponding to the dominant harmonics excited by a Gaussian mountain ridge of horizontal scale L. In (c) the vertical lines indicate the location and depth of the turning layer spanned by the turning levels according to Equation (2): cases with $d = \infty$ ($d = L$) are in blue (red). The central crosses are for the dominant wave number $k = 1/L$.

As an illustrative example, Figure 1 shows the background wind profiles for $d = 1$ km and $d = \infty$ in a configuration that is characteristic for the cases we will analyse. For mountainous areas, typical values for roughness length, the limit value of the mixing length, friction velocity, boundary-layer depth, and the mountain length scale are

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 \text{ m}, \lambda = 20 \text{ m}, u_* = 0.2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \\ d &= 1 \text{ km}, L = 1 \text{ km}. \end{aligned} \tag{12}$$

The choice for z_0 corresponds to that often made over chaotic surfaces (Wieringa, 1992), whereas that for λ is consistent with observations (Sun, 2011). In Figure 1a one sees that when $d = \infty$, U_0 has constant shear over almost the entire domain, whereas when $d = 1$ km, the constant shear zone is limited to the boundary layer where $z < d$. Henceforth, we will call cases using $d = \infty$ "constant-shear" cases and cases using $d \neq \infty$ "variable-shear" cases. Note that to analyse cases where all harmonics propagate aloft, we will also consider hydrostatic solutions when $d \neq \infty$.

The zoom near the surface in Figure 1b shows that, when approaching the surface, the background wind transitions from a linear profile to a log-profile around $z = \lambda$. We will call the logarithmic domain of the profile the surface layer. Figure 1a,b also shows the linear asymptote of U_0 when $\lambda \ll z \ll d$, illustrating that

$$U_0(z) \underbrace{\approx}_{\lambda \ll z \ll d} \frac{u_*(z+z_a)}{\lambda}, \quad B_0(z) \underbrace{\approx}_{\lambda \ll z} \frac{b_*(z+z_a)}{\lambda}, \tag{13}$$

where the parameter

$$z_a = z_0 - \frac{\lambda}{\kappa} \log\left(2 \sinh \frac{\kappa z_0}{\lambda}\right) \tag{14}$$

measures the depth of the "critical level": at $z = -z_a$ all disturbances have null intrinsic phase speed. At least in the boundary layer and above the surface layer, these asymptotes match U_0 and B_0 quite well. An important measure of the flow stability is the background flow Richardson number:

$$Ri(z) = \frac{B_{0z}}{U_{0z}^2}. \tag{15}$$

From the flow profiles in Equation (11), it is clear that $Ri(z)$ is zero near the surface, constant and equal to parameter J in the shear zone, and infinite when $z \gg d$. Parameter J is defined as

$$J = Ri(\lambda \ll z \ll d) = \lambda \frac{b_* u_*}{u_*^3} = \frac{\lambda}{\kappa L_{mo}}, \tag{16}$$

where L_{mo} is the Obukhov length. Though in principle the characteristic length λ should be related to L_{mo}, we have chosen to keep them separated in order to disentangle the dynamical impact of J through the inviscid dynamics and of the turbulence (and hence λ or z_0) through the near-surface dissipation. In the remaining part of this article, in the interest of brevity J will be called the Richardson number and will be used to control the stability regime.

2.2 | Inner scales and turning points

According to many articles about turbulent flows over gentle hills, it is often necessary to separate in the analysis three different layers separated by the inner layer scale and the turning level defined in Equations 1 and 2 respectively (Belcher & Wood, 1996). If we replace L by the horizontal wave number k^{-1} and take for the eddy diffusivity acting on disturbances $\nu' = 2\Lambda u_*$, Equation (1) becomes

$$kU_0(\delta) \approx \frac{2\Lambda(\delta) u_*}{\delta^2}. \tag{17}$$

We have verified that it is very well approximated by

$$\delta(k) = \left(\frac{\lambda^2}{k}\right)^{1/3}, \tag{18}$$

an expression that facilitates the asymptotic development as a function of the small parameter λ/L presented in the Appendix. The turning points are often located above the inner layer scale, at a height h_t defined by Equation (2), again replacing L by k^{-1}. Their presence quantifies wave trapping, whereas the parameter J quantifies the depth over which trapping occurs. To illustrate these points, here and in the rest of the article we will consider Gaussian ridges with characteristic horizontal scale L:

$$h(x) = H\, e^{-x^2/2L^2}, \tag{19}$$

where H is the maximum mountain height. For such a profile, a large fraction of the excited harmonics have wave numbers that span the interval $2^{1/2}/L < k < 2^{-1/2}/L$. The corresponding interval in δ is shown in Figure 1b, illustrating that the inner layer scales satisfy $\lambda < \delta(k) < d$. In Figure 1c, this band of inner layer scales is also shown following the mountain profiles.

Figure 1c shows the vertical space spanned by the turning points h_t, and for the cases with $d = \infty$ (blue) and $d = L$ (red) after implicit resolution of Equation (2) and replacing $1/L$ by $2^{1/2}/L < k < 2^{-1/2}/L$ again. As in Lott et al. (2020b), one sees that in the constant-shear case ($d = \infty$, blue vertical lines) the parameter J controls the altitude of the turning levels: when $J < 1$ ($J > 1$) the turning layer is predominantly below (above) $L = 1$ km and we can expect a neutral (stratified) behaviour. Note also that using the linear–log profiles for U_V and B_V derived from the more classical Blackadar formula, Equation (8), the aforementioned diagnostics of inner layer and turning points do not differ much quantitatively.

In the variable-shear case with $d = L$ (red vertical lines), the turning points' altitude also increases with J but is located significantly higher than when $d = \infty$. Furthermore, when J approaches 1 and becomes larger, there are not many waves trapped (there is almost no turning level for $J = 2$). In these cases with fixed $d = L$, the fraction of propagating versus trapped waves is measured by comparing the Scorer parameter in the far field with $1/L^2$,

$$S_c(\infty) \gtrless 1/L^2 \Longleftrightarrow F = \frac{N(\infty)L}{U(\infty)} = \sqrt{J}\frac{L}{d} \gtrless 1,$$

where we have used the buoyancy profile in Equation (10) and the wind profile in Equation (11). F is a conventional Froude number, controlling the amount of drag that can be transported by gravity waves in the far field (Teixeira et al., 2013b). It is very likely that it impacts the surface drag, an effect that we will only measure indirectly here and by comparing the cases $\mathrm{Fr} = \sqrt{J}$ with cases with $\mathrm{Fr} = 0$ (constant shear) and $\mathrm{Fr} = \infty$ (hydrostatic). In other words, when $d = L$ we have to keep in mind that J controls both the depth of the trapping region and the significance of trapping. In this article we emphasize the first aspect and leave to a subsequent article a more systematic analysis where both the depth of the trapping region and the amount of trapping change separately.

2.3 | Non-dimensional formulation

To integrate our equations using boundary-layer techniques we start by deriving a non-dimensional form of Equations 4a–4d using the scalings

$$
\begin{aligned}
(X, Z) &= L\left(\overline{X}, \overline{Z}\right),\\
(U_0, u, w, \mathrm{W}) &= \frac{u_* L}{\lambda}(\overline{U}, \overline{u}, \overline{w}, \overline{\mathrm{W}}),\\
p &= u_*^2 \frac{L^2}{\lambda^2}\overline{p},\\
(B_0, b) &= u_*^2 \frac{L}{\lambda^2}(\overline{B}, \overline{b}).
\end{aligned}
\tag{20}
$$

All the length scales characterizing the boundary-layer depth and turbulent mixing become

$$
\begin{aligned}
d = L\overline{d}, \quad \delta = L\overline{\delta}, \quad h_t = L\overline{h}_t,\\
\lambda = L\overline{\lambda}, \quad z_0 = L\overline{z}_0, \quad \Lambda_0 = \lambda\overline{\Lambda}.
\end{aligned}
\tag{21}
$$

According to Equation (9), the last scaling makes $\overline{\Lambda}(\overline{z}) \approx O(1)$, which permits one to write Equations 4a–4d as

$$
\rho\left(\overline{u}\partial_{\overline{X}}\overline{u} + \overline{\mathrm{W}}\partial_{\overline{Z}}\overline{u}\right) = -\left(\partial_{\overline{X}}\rho\overline{p} + \partial_{\overline{Z}}\rho g_{12}\overline{p}\right) + \overline{\lambda}^2\partial_{\overline{Z}}\left(\overline{\Lambda}^2\|\partial_{\overline{Z}}\overline{u}\|\partial_{\overline{Z}}\overline{u}\right), \tag{22a}
$$

$$
\rho\left(\overline{u}\partial_{\overline{X}}\overline{w} + \overline{\mathrm{W}}\partial_{\overline{Z}}\overline{w}\right) = -\partial_{\overline{Z}}\overline{p} + \rho\overline{b} + \overline{\lambda}^2\partial_{\overline{Z}}\left(\overline{\Lambda}^2\|\partial_{\overline{Z}}\overline{u}\|\partial_{\overline{Z}}\overline{w}\right), \tag{22b}
$$

$$
\rho\left(\overline{u}\partial_{\overline{X}}\overline{b} + \overline{\mathrm{W}}\partial_{\overline{Z}}\overline{b}\right) = \overline{\lambda}^2\partial_{\overline{Z}}\left(\overline{\Lambda}^2\|\partial_{\overline{Z}}\overline{u}\|\partial_{\overline{Z}}\overline{b}\right), \tag{22c}
$$

$$
\partial_{\overline{X}}\rho\overline{u} + \partial_{\overline{Z}}\rho\overline{\mathrm{W}} = 0 \tag{22d}
$$

and makes explicit that the small parameter controlling the inner layer dynamics is $\overline{\lambda}^2$. Still in non-dimensional form, the coordinate transform in Equation (3) writes

$$
\overline{x} = \overline{X}, \quad \overline{z} = \overline{Z} + \overline{h}(\overline{X})f(\overline{Z}) = \overline{Z} + \overline{z}'. \tag{23}
$$

The following choice is made for the low hill and the vertical scaling function:

$$
\overline{h}(\overline{x}) = S\,\mathrm{e}^{-\overline{x}^2/2} \quad \text{and} \quad f(\overline{Z}) = \exp\left(-\overline{Z}^3/3\right), \tag{24}
$$

where $S = H/L$ is the mountain slope. In Equation (24), the definition of $f(\overline{Z})$ is such that, at the surface, $f(0) = 1$, $\dot{f}(0) = 0$, and $\ddot{f}(0) = 0$, properties that permit one to simplify the formalism in the inner layer.

2.4 | Linear analysis

If we consider hills of small slope S, we can assume that the response to the forcing terms is linear and consider solutions of the form

$$
\begin{aligned}
\overline{u} = \overline{U} + \overline{u}', \quad \overline{w} = \overline{w}'; \overline{\mathrm{W}} = \overline{\mathrm{W}}', \quad \overline{p} = \overline{P} + \overline{p}',\\
\overline{b} = \overline{B} + \overline{b}', \quad \overline{z} = \overline{Z} + \overline{z}', \quad \rho = 1 + \rho'
\end{aligned}
\tag{25}
$$

with normalized backgrounds

$$
\overline{U}(\overline{Z}) = \overline{d}\tanh\left\{\frac{\overline{\lambda}}{\kappa\overline{d}}\log\left[\frac{\sinh\kappa(\overline{Z} + \overline{z}_0)/\overline{\lambda}}{\sinh\kappa\overline{z}_0/\overline{\lambda}}\right]\right\}, \tag{26a}
$$

$$
\overline{B}_{\overline{Z}} = J\coth[\kappa(\overline{Z} + \overline{z}_0)/\overline{\lambda}], \tag{26b}
$$

$$
\overline{\Lambda}(\overline{Z}) = \tanh[\kappa(\overline{Z} + \overline{z}_0)/\overline{\lambda}]. \tag{26c}
$$

We then search solutions in the form of Fourier transforms:

$$
\overline{u}'(\overline{X}, \overline{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\mathbf{u}}(\overline{k}, \overline{Z})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{X}}\,d\overline{k}. \tag{27}
$$

Denoting $\overline{\boldsymbol{\rho}}$ and $\overline{\mathbf{z}}$ the Fourier transforms of ρ' and $\overline{z}'$ defined in Equation (25), Equations 22a–22d linearize to

$$
\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{U}\,\overline{\mathbf{u}} + \overline{U}_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{W}} + \mathrm{i}\overline{k}\,\overline{\mathbf{p}} - \overline{\lambda}^2\partial_{\overline{Z}}2\overline{\Lambda}\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{u}} = \mathrm{i}\overline{k}\overline{B}\overline{\mathbf{z}} \tag{28a}
$$

$$
\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{U}\,\overline{\mathbf{W}} + \partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{b}} - \overline{\lambda}^2\partial_{\overline{Z}}\overline{\Lambda}\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{w}} = \overline{\boldsymbol{\rho}}\,\overline{B} + \overline{k}^2\overline{U}^2\overline{\mathbf{z}}, \tag{28b}
$$

$$
\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{U}\,\overline{\mathbf{b}} + \overline{B}_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{W}} - \lambda^2\partial_{\overline{Z}}\left(\overline{\Lambda}\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{b}} + J\overline{\Lambda}\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{u}}\right) = 0, \tag{28c}
$$

$$
\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{\mathbf{u}} + \partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{W}} = -\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{U}\,\overline{\boldsymbol{\rho}}, \tag{28d}
$$

where

$$
\overline{\mathbf{W}} - \overline{\mathbf{w}} = -\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{U}\,\overline{\mathbf{z}}. \tag{28e}
$$

The no-slip boundary condition become

$$
\overline{\mathbf{u}}(0) = \overline{\mathbf{W}}(0) = \overline{\mathbf{b}}(0) = 0. \tag{29}
$$

2.5 | Rationale of the theoretical model and relation with earlier studies

As expected with terrain-following coordinates, Equations 28a–28d contain forcing terms associated with the metric, all of which are placed at the right-hand side. In Appendix A.1 we compute the solutions of the homogeneous Equations 28a–28d, and in Appendix A.2 we compute a particular solution that equilibrates these forcings. Both solutions are used to formulate a complete solution that matches the boundary conditions. For both the homogeneous solution and the particular solution we separate the domain of integration between an "inner layer" and an "outer layer", separated by a matching region where we derive asymptotic solutions that are valid in the lower part of the outer layer and upper part of the inner layer. The homogeneous and particular solutions have exact analytical solutions in both the outer and matching regions, the solutions in the inner layer being evaluated numerically starting from solutions in the matching region. Importantly, the numerical integration starts from near 5δ down to the surface, a numerical choice that is consistent with conventional viscous boundary-layer theory where the inner layer depth, above which dissipation has less than 1% impact at leading order, is around five times the inner layer scale—see also Lott et al. (2020a), Lott et al. (2020b), and Soufflet et al. (2022).

To a large extent, Equations 28a–28d and their inner layer approximation derived in the Appendix (see Equations A26a–A26d) are similar to those in Belcher and Wood (1996), and to the basic equations in other articles using linear theory in curved coordinates (Beljaars et al., 1987; Weng et al., 1997). In terms of dynamics, there is, nevertheless, one important difference with Belcher and Wood (1996): we do not consider explicitly the presence of an almost inviscid middle layer where the Scorer parameter, Equation (2), is dominated by the background wind curvature. The reason is that our numerical integration starts from around 5δ, which corresponds to altitudes where the background wind curvature is small (in the "matching region", the background gradients are almost constant). To appreciate better the significance of the middle layer in our case, we have followed Hunt et al. (1988b) and translated those equations into a non-dimensional form and calculated the middle layer scale as the highest altitude $\overline{h}_m$ below which

$$\left\|\frac{\overline{U}_{\overline{Z}\,\overline{Z}}}{\overline{U}}\right\| \gg 1 \quad \text{and} \quad \left\|\frac{\overline{U}_{\overline{Z}\,\overline{Z}}}{\overline{U}}\right\| \gg \frac{\overline{B}_{\overline{Z}}}{\overline{U}^2} \tag{30}$$

and always found that $0 < \overline{h}_{\rm m} < 2\overline{\delta}$ with $\overline{h}_{\rm m} \approx 0$ when J is large and $\overline{h}_{\rm m} \approx 2\overline{\delta}$ when J is small (not shown). The middle layer scale is either near the inner layer scale or it does not even exist—for cases when $\overline{h}_{\rm m} < \overline{\delta}$, see Hunt et al. (1988b). This is in contrast to the altitude of the turning levels, which are often well above $\overline{\delta}$ when $J \neq 0$ (see Figure 1c). In other words, our model potentially presents a large region between the inner scale and the turning points that can support the vertical propagation of internal gravity waves; these waves will fully interact with the turning levels and the inner layer, yielding trapped lee waves that gradually attenuate downstream. This plus the intrinsic interest of providing uniform approximations are the major originalities of our work. Apart from these, our model is consistent with the truncated mixing-length model for turbulence adopted in the theory exposed in Belcher and Wood (1996) because it neglects the impact of turbulence above the inner layer consistent with the rapid-distortion mechanism.

3 | WAVE FIELD AND TRANSITION FROM DOWNSTREAM SHELTERING TO UPSTREAM BLOCKING

3.1 | Wave field

To construct the solutions of Equations 27 and 28a–28d, we consider a very large periodic domain in the horizontal (e.g., $-50 < \overline{X} < 50$) sampled by 1024 points, yielding a spectral resolution $d\overline{k} \approx 0.06$. The resolution in the vertical is refined near the surface when needed; typically, we set $d\overline{Z} \approx S/10$ near the surface (actually more for plotting purposes rather than for precision). Indeed, the solutions derived in the Appendix are analytical in the outer and matching regions (see Equations A5–A13–A16 for the homogeneous solution and Equations A24 and A25 for the particular solution). Hence, when the numerical integrations are carried out in the inner layer (Appendix A.1.3 for the homogeneous solution and Appendix A.2.3 for the particular solution) we use an adaptive vertical step to minimize the error. After being evaluated on the curved grid, the solutions are linearly interpolated on the rectangular grid, the vertical velocity $\overline{w}'$ being expressed out of $\overline{\rm W}'$ according to Equation (28e). In all panels representing the velocity fields, we take for parameter values those listed in Equation (12) and slope $S = 0.2$, their non-dimensional counterparts being given in the caption of Figure 2. Note that we will also systematically vary the non-dimensional turbulent lengths $\overline{\lambda}$ and $\overline{z}_0$ to test the sensitivity of our results to these two parameters.

We plot in Figure 2 the vertical velocity field $\overline{w}'$ when the outer flow has variable shear (Figure 2a,d,g), constant shear (Figure 2b,e,h), and variable shear with the hydrostatic approximation (Figure 2c,f,i). In each case, we present results for increasing values of the Richardson number (from top to bottom). In Figure 2a,d,g, harmonics with wave number $\overline{k} > \sqrt{J}$ encounter a turning height above which they are evanescent (see Equations A5 and A6 when $\overline{d} = 1$). In Figure 2b,e,h, all harmonics encounter

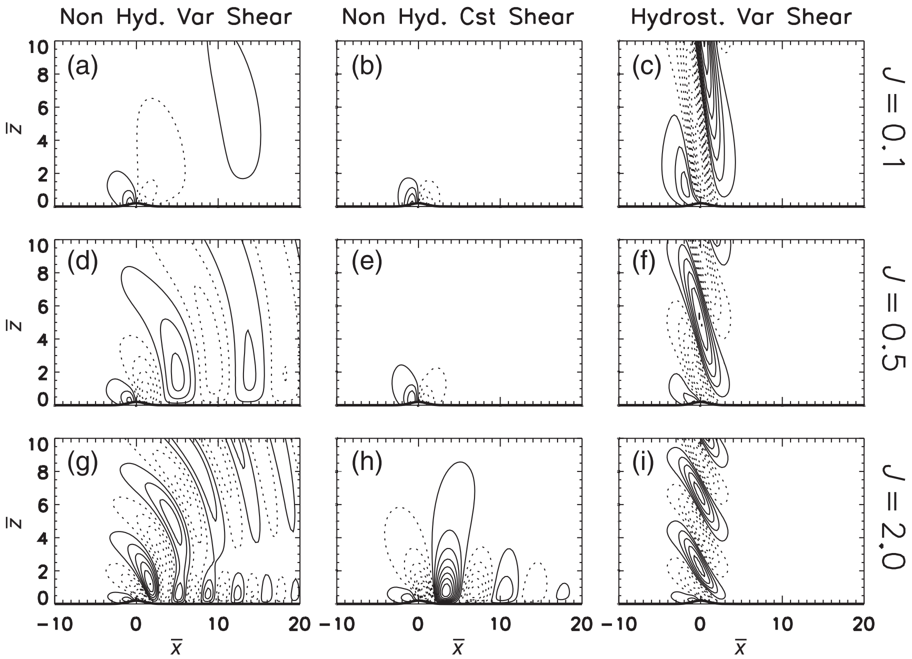


FIGURE 2 Non-dimensional vertical velocity field $\overline{w}'$ for a mountain of slope $S = 0.2$, and boundary-layer flow with mixing length $\overline{\lambda} = 0.02$ (corresponding inner layer $\overline{\delta} \approx 0.07$) and roughness length $\overline{z}_0 = 0.001$ (depth of the critical layer $\overline{z}_a \approx 0.16$). The boundary-layer depth $\overline{d} = 1$ except in (b), (e), and (h), where $\overline{d} = \infty$. Contour interval is 0.01, with negative values dashed. Note that all these patterns have been validated with the nonlinear model used in Lott et al. (2020b) (not shown).

a turning height. In Figure 2c,f,i, there is no turning point: all harmonics propagate upward when $\overline{z} \to \infty$.

A first interesting aspect to notice is that the typical amplitude of the vertical velocity right on the windward side of the hill is near $\overline{U}(\overline{\delta}/2)S \approx 0.04$, which is the amplitude of the vertical velocity produced when an inviscid flow of speed $\overline{U}(\overline{\delta}/2)$ passes over a ridge of slope S (note that the contour interval in each panel stays the same at 0.01). This situation is very similar to the constant-viscosity case discussed in Lott et al. (2020a), where dissipative effects force streamlines, up to $\overline{Z} = \overline{\delta}/2$, to be displaced vertically over a distance S, such that at $\overline{Z} = \overline{\delta}/2$ the vertical velocity should scale as $\overline{U}(\overline{\delta}/2)S$.

If we now look for similarities with previous constant-viscosity studies, we conclude that the solutions with variable wind in Figure 2a,d,g are similar to those shown in Soufflet et al. (2022). In the near-neutral case (Figure 2a) almost no waves develop aloft because most harmonics encounter a turning height and perhaps because the resonant modes have longer horizontal wavelength than those predominantly excited by Equation (19)—as in Soufflet et al. (2022) and anticipating results in a subsequent article. In contrast, when $J = 0.5$ in Figure 2d, trapped waves dominate the response, because many harmonics still encounter turning altitudes, whereas near-resonant modes have shorter horizontal wavelength. The response becomes dominated by upward propagating waves when $J = 2$ in Figure 2g. This occurs because less harmonics encounter turning height, but there is also a system of trapped lee waves developing downstream.

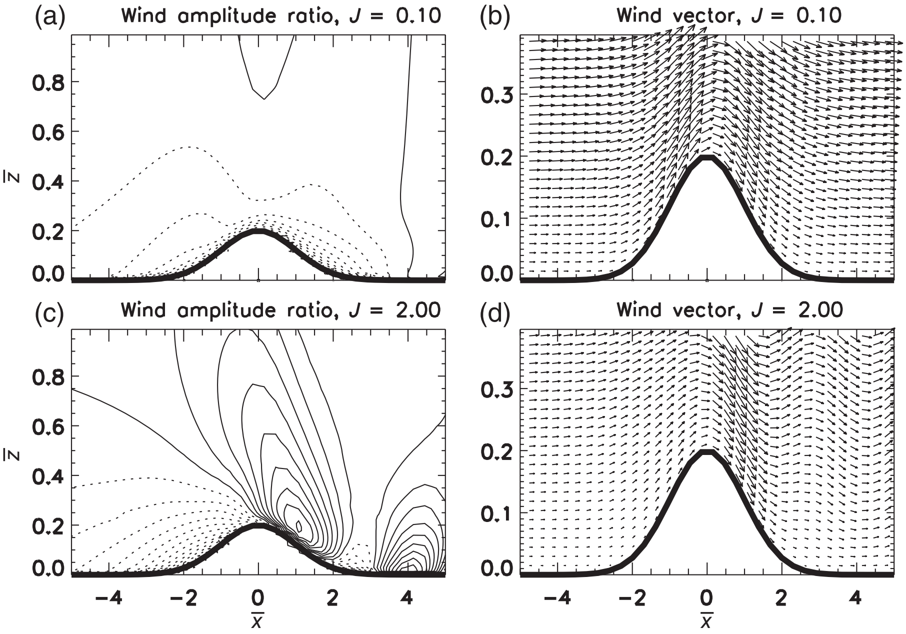
The solutions with constant shear in Figure 2b,e,h are characterized by very weak waves up to $J = 0.5$ (Figure 2b,e), which is a consequence of the facts that (i) all harmonics encounter turning heights in the vertical, (ii) the turning heights are located near the surface (around $\overline{h}_t \approx \sqrt{J}$), and (iii) upward waves cannot fully develop. When J increases further in Figure 2h, trapped lee waves start to develop. They have two origins, the first is that in this case the gravity waves have more room to propagate vertically before returning to the surface downstream (see Lott et al., 2020b), and the second is that the waves returning to the surface are less absorbed than in the constant-viscosity case, permitting downward propagation. A more complete analysis of the trapped waves will be given in a subsequent article, but the onset of trapped waves when the wind shear becomes constant is reminiscent of the inviscid solutions with constant wind shear and non-zero wind at the surface in Keller (1994).

The hydrostatic solutions in Figure 2c,f,i present purely vertically propagating waves, as expected from Equation (A7), the vertical wavelength decreasing with J.

3.2 | Downstream sheltering versus upstream blocking

To characterize the near-surface flow, we plot in Figure 3 the wind perturbation caused by the hill, normalized by the incident wind and the total wind vector (background plus perturbation) in the quasi-neutral and stratified cases shown in Figure 2a,g. The neutral case in Figure 3a shows a relative augmentation in wind amplitude above the hill top compared with the upstream

FIGURE 3 Near-mountain velocity fields with the same parameters as in Figure 2b,h. (a, c) The total wind amplitude normalized by the background wind, $\sqrt{\overline{u}^2+\overline{w}^2}/\overline{U}(Z)$. The contour interval is 0.1 with values below zero dashed. (b, d) The total wind vector $\overline{u}, \overline{w}$.



flank, and an intensification above the hill crest that is characteristic of neutral flow over hills. Still in the near-neutral case, the wind amplitude along the downstream flank is also reduced compared with the upstream flank, a behaviour characterizing non-separated sheltering and produced by enhanced surface friction and dissipation as the air travels across the ridge. Note, nevertheless, that the sheltering effect is much less pronounced than in the constant-viscosity case, a behaviour that naturally follows from the decrease of the diffusion coefficient when approaching the surface—compare Figure 3b here and Lott et al. (2020b, fig. 6b).

In the stratified case in Figure 3c,d, the upslope/downslope asymmetry is much more pronounced: there is strong wind intensification on the downstream side, with strong downslope winds penetrating well into the inner layer. On the upstream side there is also pronounced deceleration, a process that we called non-separated blocking in Lott et al. (2020b).

We analyse more systematically the transition from neutral to stratified flow according to the downslope/upslope asymmetry—that is, following Soufflet et al. (2022)—in Figure 4. We plot the ratio between the downslope wind intensity and upslope wind intensity,

$$\underbrace{Max}_{\overline{z}<\frac{2S}{3},0<\overline{x}<2}\sqrt{\overline{u}^2+\overline{w}^2}\Big/\underbrace{Max}_{\overline{z}<\frac{2S}{3},-2<\overline{x}<0}\sqrt{\overline{u}^2+\overline{w}^2}, \tag{31}$$

as a function of the Richardson number J. We also systematically vary the value of the mixing length $\overline{\lambda}$ between 0.005 and 0.05, a range of variation that permits one to satisfy $\overline{\delta} \ll 1$ and to keep the dimensional values of λ of the order

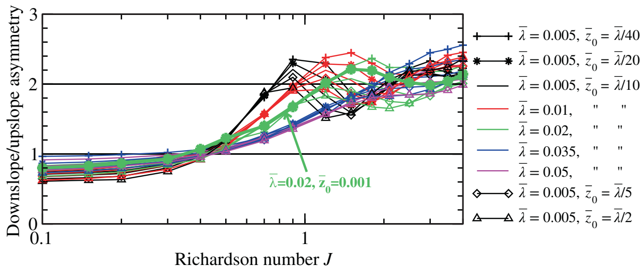


FIGURE 4 Downslope sheltering versus upstream blocking index defined as the ratio between the maximum downslope wind amplitude and the maximum upslope wind amplitude; see Equation (31). Non-hydrostatic cases with variable shears, $S = 0.2$, and for values of $\overline{\lambda}$ and $\overline{z}_0$ shown in the legend.

of 20 m and below when the the dimensional hill length varies in the range 200 m $< L <$ 5 km. In order to be consistent with our asymptotic analysis, we have to keep the roughness length $\overline{\lambda}/2 < \overline{z}_0 < \overline{\lambda}/40$, and to keep $\overline{z}_a = O(\overline{\delta})$, $\overline{z}_a$ being controlled by the ratio $\overline{z}_0/\overline{\lambda}$; see Equation (14). Physically, this means that our calculations are only valid if the depth of the critical level $\overline{z}_a$ compares with the inner layer scale. In practice, we found that we should always satisfy the criterion $5\overline{\delta} - \overline{z}_a > 0$ to have inner solutions that converge.

For almost all values of the dissipation parameters, Figure 4 shows that the transition from neutral to stratified behaviour occurs for $J \approx 0.5$, almost as in Soufflet et al. (2022, fig. 7b). The sheltering is nevertheless less pronounced, the ratio in Equation (31) falling below 0.5 in the constant-viscosity case when $J \ll 1$ and for $S = 0.15$, whereas it is always between 0.5 and 1 for a larger slope

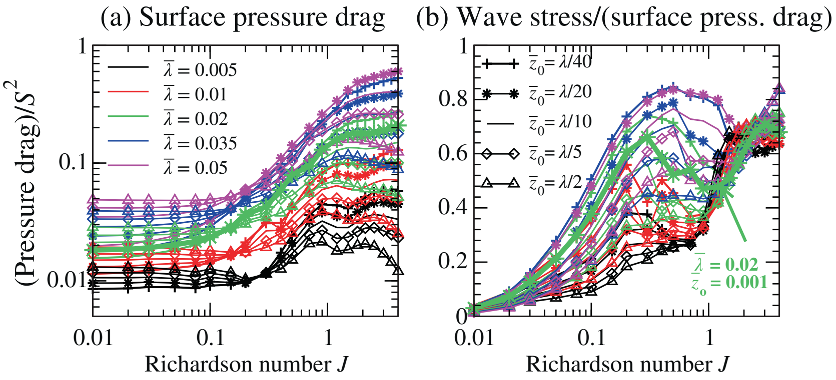


FIGURE 5 Mountain drag and wave momentum flux divided by S^2 in the non-hydrostatic variable-shear case and for different values of $\bar\lambda$ and $\bar z_0$. (a) Mountain drag $\overline{\overline{\tau}}_{\rm wav}(\overline{Z}=0)$. (b) Ratio between wave stress in the far field and at the mountain drag, $\overline{\overline{\tau}}_{\rm wav}(\overline{Z}=\infty)/\overline{\overline{\tau}}_{\rm wav}(\overline{Z}=0)$.

($S = 0.2$). Again, this is related to the fact that, here, dissipative effects are smaller near the surface when compared with the constant-viscosity case.

4 | WAVES STRESS AND MOUNTAIN DRAG

4.1 | Pressure drag and momentum fluxes

To appreciate the action of the wave on the large-scale flow, we next use a momentum budget in curved coordinates by averaging in $\overline{X}$ Equation (22a) written in flux form,

$$\frac{\partial \overline{\overline{\rho u}}}{\partial \bar t} = \frac{\partial}{\partial \overline{Z}}\left(\underbrace{-\overline{\rho u}\,\overline{\mathrm{W}} + \overline{p\partial_{\overline{X}}\overline{z}}}_{\overline{\overline{\tau}}_{\rm wav}} + \overline{\overline{\tau}}_{\overline{X}\,\overline{Z}}\right), \tag{32}$$

where we have "re-"introduced a "large-scale" tendency on the left-hand side to emphasize that we will use the stationary linear model to analyse the effect of the disturbances on the large-scale flow. This expression is appealing because the first two terms in the momentum flux on the right-hand side permit one to capture smoothly the transition from mountain drag at $Z = 0$ to the conventional "Eulerian mean" wave momentum flux when $\overline{Z} \gg 1$ (e.g., where $\overline{Z} = \bar z$). To a certain extent this expression also has a Lagrangian character. In the surface layer, the averaging is simply along the streamlines that follow the ridge, making the average in good part Lagrangian by construction. Above the inner layer it follows that, when dissipation is weak, the Reynolds stress alone equals the pressure torque along streamlines—see Lott et al. (2020a, eq. 23) when dissipation is small. In the following, we analyse the wave stress $\overline{\overline{\tau}}_{\rm wav}$, which is the contribution of our linear solutions to the sum of these two terms, after verification that the second-order contribution to the dissipative stress $\overline{\overline{\tau}}_{\overline{X}\,\overline{Z}}$, $(\bar\lambda\,\overline{\Lambda u'_{\overline{Z}}})^2$, is significantly smaller than the wave stress in the inner layer.

Figure 5a shows the surface pressure drag as a function of J in the variable-shear case ($\bar d = 1$) and for the different values of the parameters $\bar\lambda$ and $\bar z_0$. The pressure drag is divided by S^2, simply because we diagnose a quadratic term from a theory that is linear in S. On it, we see that the curves spread over a very large range of values and that the drag has a systematic tendency to increase with J. This is the classical behaviour where gravity wave drag gradually replaces the form drag due to non-separated sheltering and when the trapping region becomes thicker (Yu & Teixeira, 2015). There is also a tendency for the drag to increase with $\bar\lambda$. As the incident wind at the inner layer scale $\overline{U}(\bar\delta)$ increases with $-\lambda$ (not shown), this is consistent with our results in Lott et al. (2020a), where we show that it is the incident wind at the inner layer scale that controls the drag amplitude.

The dependence of the drag on $\bar z_0$ is related to flow stability. In the neutral case, say for $J < 0.5$, the drag increases with roughness ("triangles" are above "plus signs") simply because there is more dissipation, making the sheltering more pronounced ("triangles" are below "plus signs" in Figure 4). The situation reverses in the stratified case ($J > 0.5$), where the drag decreases when the roughness length increases. An interpretation could be that when there is an increase in $\bar z_0$ then $\bar z_a$ decreases; that is, the critical level gets closer to the surface, which makes the waves become more attenuated by the enhancement of the dissipative effects that occur near critical levels (Booker & Bretherton, 1967). As in these cases the drag is dominated by wave drag, enhanced wave dissipation could result in decreased wave drag.

Figure 5b plots the ratio between the wave stress in the far field and the surface pressure drag. Without a surprise, one sees that for small J, most of the pressure drag is deposited at low levels (typically about 80% when $J \leq 0.1$), which is a natural consequence of the fact that most harmonics are evanescent in the vertical and in the far field. At the other extreme for the stable cases, a good fraction of

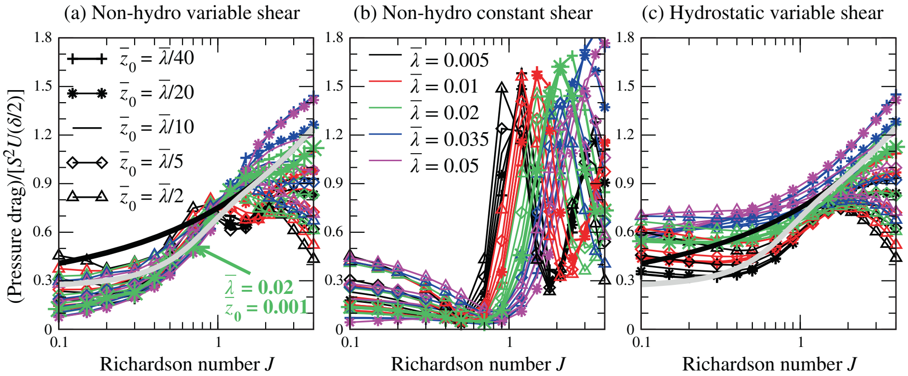


FIGURE 6 Mountain drag divided by $S^2\overline{U}(\delta/2)$ and for different values of $\overline{\lambda}$ and $\overline{z}_0$. The thick black and grey lines in (a) and (c) are for the rough estimates of the variations in drag with Richardson number discussed in Section 5 (see Equations 33 and 34 respectively).

the drag radiates in the far field (about 70% when $J > 1$), with only 30% of the surface drag being eroded by dissipation. Finally, the transition region, say for $0.1 < J < 1$, is remarkably rich in terms of variations in this ratio. When we look at the vertical velocity fields in Figure 2 and compare the case with $J = 0.5$ in Figure 2e with the other less stable and more stable cases in Figure 2b,h respectively, we see that the transition region is clearly dominated by trapped lee waves that do not contribute substantially to the momentum flux in the far field. In this intermediate regime, we also observe a big variability in the momentum flux arriving in the far field. As an illustration, we see in Figure 5b that, for $J = 0.3$, about 20% of the drag becomes a momentum flux when $(\overline{\lambda} = 0.005, \overline{z}_0 = \overline{\lambda}/2)$ (black line with triangles), whereas it is 80% when $(\overline{\lambda} = 0.035, \overline{z}_0 = \overline{\lambda}/10)$ (blue line with diamonds).

Following the earlier suggestion that the incident velocity relevant for the drag must be measured at the inner layer scale, Figure 6a shows the pressure drag divided by $\overline{U}(\overline{\delta}/2)S^2$, which is an estimate of the wave drag occurring for an incident flow of speed $\overline{U}(\overline{\delta}/2)S^2$ when $J = 1$. We believe that this predictor could also work for the drag due to non-separated sheltering because it compares relatively well with $\overline{\delta}\,\overline{u}(S)S$, a measure of the drag associated with the pressure decrease across the hill that equilibrates surface friction (see Lott et al., 2020b). With this normalization, one sees that the drag values remain on the order of magnitudes around 1, with smaller values in the neutral cases and larger values in the stratified cases. The figure also illustrates well the transition around $J = 1$, with larger drag in the stratified case. There is, nevertheless, a rich variability in drag as a function of $\overline{z}_0$ and $\overline{\lambda}$ when stability is large; we did not manage to capture this variability with a simple predictor.

To emphasize the significance of the conditions of wave propagation aloft, we plot in Figure 6b,c the drag when all the waves are trapped (the non-hydrostatic case with constant shear) and free to propagate aloft (hydrostatic with variable shear). When all the disturbances are trapped in Figure 6b, the transition at $J \approx 1$ is even more pronounced than in Figure 6a. In almost all cases, and when J varies between 0.5 and 1, the drag decreases before increasing rapidly as J approaches 1. These rapid transitions occur for all values of $\overline{\lambda}$ and $\overline{z}_0$, as was also seen in the constant-viscosity case. This variation is related to the interaction between the reflected waves and the surface (yielding relatively low and high drag states also see Teixeira et al., (2013a). When all the waves can propagate aloft, we observe the opposite behaviour (Figure 6c, hydrostatic variable shear). The variations in drag with J are much less dramatic than in the other two cases. Interestingly, one sees that for small J the pressure drag is larger than in Figure 6a,b, illustrating that allowing all the disturbances to propagate freely as gravity waves in the vertical direction favours the drag. Of course, this is academic, since only few disturbances can propagate vertically when J is small in the non-hydrostatic case, but it illustrates the general significance of the waves for the mountain drag.

Finally, Figure 7 shows vertical profiles of the waves stress ($\overline{\tau}_{\text{wav}}$ in Equation 32) in the nine cases presented in Figure 2. As expected, we see a decrease with altitude of the momentum flux, which typically occurs over a depth near $\overline{Z} \approx 3\overline{\delta} \approx 0.2$. The fact that such a decrease occurs inside the inner layer depth $5\overline{\delta}$ is systematic, but the exact depth is somehow dependent on the critical level depth $\overline{z}_a$ (and hence $\overline{z}_0$) (not shown). We see that the momentum flux decrease has two causes: (i) the effect of wave trapping that always dominates the constant-shear case (black curves) and (ii) the erosion by dissipation of the waves when they travel upward through the inner layer and that is the only mechanism at work in the hydrostatic case (about 15%–20% erosion, see blue curves). In the non-hydrostatic case with variable shear, one sees that the two effects contribute almost equally. For instance, in the stratified case ($J = 2$), the red and blue dotted curves show that the decrease of the stress in the inner layer is two to three times larger in the non-hydrostatic case than in the hydrostatic one. The contribution of the trapped waves to the momentum flux decay equals and exceeds the erosion of the freely propagating waves.

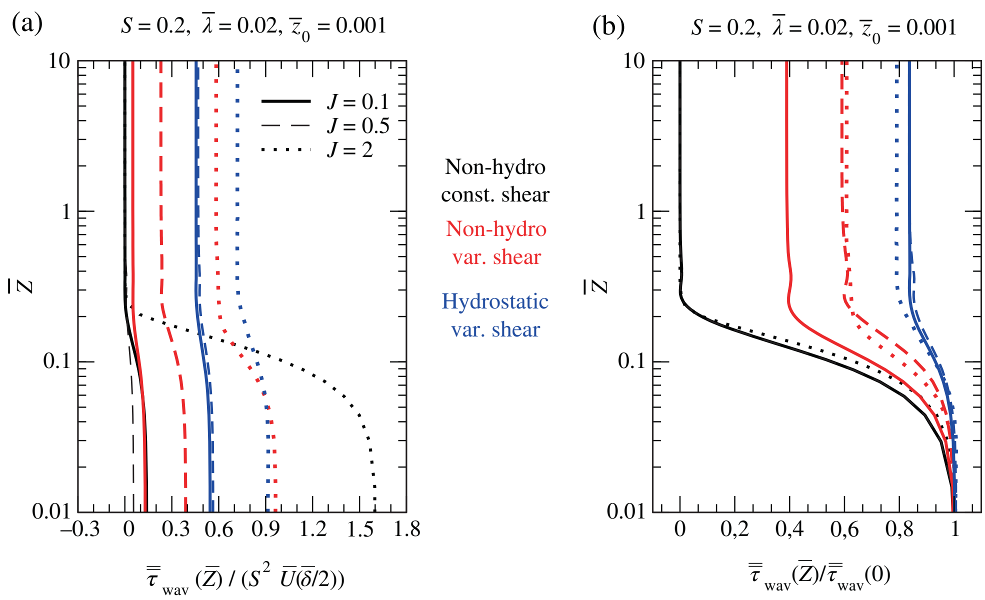


FIGURE 7 Momentum flux vertical profiles according to Equation 32 and for the nine cases in Figure 2. Panels on the left and right are identical except the stress profiles in (b) are divided by the surface value to emphasize erosion with altitude.

5 | SUMMARY AND DISCUSSION

In dynamical meteorology and oceanography, boundary-layer turbulence is often parametrized with an eddy diffusivity in order to capture the interaction between the surface and the boundary layer. Although these types of closure are today questioned—for instance, because the smallest scales of turbulence can backscatter on the large scales (Schumann & Launder, 1995; Weinbrecht & Mason, 2008), or in mountainous areas because the turbulence is notoriously non-homogeneous in the horizontal direction (Stiperski & Rotach, 2016)—many numerical models still use them. It seems essential, therefore, to provide theory that could help explain the behaviour of these models; for example, the system of mountain waves developing in a boundary layer parametrized by a classical mixing-length closure.

This type of study could also provide some guidance to develop parametrization of subgrid-scale orography for at least two reasons. The first is that parametrizations of subgrid-scale mountains are rooted in linear theories that depict (i) the interaction between the boundary layer and subgrid-scale orography using eddy diffusivity closure, and (ii) the generation of mountain waves in the stratified case neglecting the boundary layer (except that the large-scale flow that enters in the evaluation of the wave drag is impacted by the boundary layer). The second is that the transition between stratified and neutral flow can seemingly be characterized by near-resonant trapped lee waves that are not well parametrized in models. This article provides some answers to help in developing a parametrization that encompasses all the scales of the SSO. The first answer is that it suggests that the incident wind value at the inner layer scale should be used to measure the drag (or average over the inner layer; see normalization in Figure 6). In a large-scale model that uses a viscosity-type closure, and for a given mountain length, this height can be diagnosed by comparing the amplitude of the disturbance advection with dissipation—according to Equation (1). With our mixing-length model closure this is well approximated by $\delta = L^{1/3}\lambda^{2/3}$, as in Equation (18) with $k = 1/L$. The second answer is that the nature of the drag (i.e., mountain drag due to non-separated sheltering versus gravity wave drag) has to be decided above the inner layer. This is very important because it can be done without requesting information about the properties of the turbulence itself; we just have to find, for a given mountain length L, the turning point altitude $h_{\rm t}$, defined in Equation (2), and compare it with L. If $h_{\rm t} < L$, gravity waves do not have enough space to develop in the vertical and the dynamics is neutral, if $h_{\rm t} > L$ then the dynamics is stratified. More specifically, in the constant-shear cases with the turning altitude at around $h_{\rm t} \approx \sqrt{J}L$, small (large) values of J mean that the turning altitude is close to the surface (far from the surface) and we found neutral (stratified) behaviour. In the variable-shear case, the turning altitude is slightly above the surface for small J and substantially higher (up to the top of the atmosphere) for large J, yielding about the same qualitative conclusions. In contrast to Belcher and Wood (1996), we find that this turning altitude should not be used to evaluate the incident wind that enters in the drag formula.

Making closed-form predictions beyond the fact that the drag scales with

$$\rho_{\rm s}\left[\frac{u_* L}{\lambda} U(\delta/2) S^2\right]$$

turned out to be quite difficult, so we did not propose any in the core of the article. Nevertheless, we can suggest some attempts to capture at least the J dependence. The first is

$$\left[\rho_s \frac{u_* L}{\lambda} U(\delta/2) S^2\right] 0.25 \times (1 + 2\sqrt{J}), \tag{33}$$

where the first term in brackets is the dimensional form of the normalization used in Figure 6, and the second term is the sum of a form drag and a wave drag, as shown by the thick black curves in Figure 6a,c. This fit is adapted in the hydrostatic case when all disturbances becomes waves in the far field. It overestimates the drag in the neutral case, where gravity waves should not play a role. So, to separate both regimes and allow a rapid transition from one to the other, we also plot in thick grey the predictor

$$\begin{aligned}&\left[\rho_s \frac{u_* L}{\lambda} U(\delta/2) S^2\right] \times 0.25 \\ &\times \left\{1 + \left[1 + \tanh\left(\frac{J - 0.5}{0.5}\right)\right]\sqrt{J}\right\}.\end{aligned} \tag{34}$$

The tanh term in Equation (34) limits the wave contribution in the neutral case and allows for a quite rapid transition from the neutral to the stratified cases. The rapid increase in drag when $J \approx 0.5$ is presumably related to trapped waves.

An important limitation of our work, nevertheless, is that we have focused on the depth of the trapping region and less on the relative amount of waves that stay trapped (i.e., that are evanescent for $z \to \infty$). This relative amount is controlled by the inverse Froude number

$$F^{-1} = \frac{U(\infty)}{N(\infty)L}, \tag{35}$$

which is well known to control the non-hydrostatic effect on the mountain wave drag (Teixeira et al., 2013b). In the constant-shear case ($F^{-1} = \infty$), all the waves stay trapped; in the variable-shear case ($F^{-1} = d/(L\sqrt{J})$), the fraction of trapped waves decreases when J increases because we always take $d/L = 1$; and in the hydrostatic case ($F^{-1} \approx 0$), all the waves propagate up. Accordingly, it is likely that the increase in drag with J in Figure 6a is due to the fact that more waves can propagate up. To illustrate that this effect is at work in our results, we notice that when J is small ($J \leq 0.5$) the drag is larger in the variable-shear case than when all the waves are trapped (Figure 6b) and smaller than when all can propagate up (Figure 6a). In a companion paper, we do experiments where J only controls the free shear layer stability, not the amount of trapping; for instance, leaving F constant by taking $d = L\sqrt{J}$.

We are not going to speculate further on the application of our results, except to formulate them in a way that involves further the background flow at the dynamical levels we have identified. We can, for example, approximate the wind factor $u_* L/\lambda$ by $U(h_t)$ and we can interpret the Richardson number dependence in terms of $\overline{h}_t$, the ratio between the turning heights and the mountain length, in which case the drag predictor, Equation (33), can be roughly approximated by

$$\rho_s U(h_t) U(\delta/2) S^2 \overline{h}_c^{-2} \left(1 + \overline{h}_t/\overline{h}_c\right), \tag{36}$$

where $\overline{h}_t = h_t/L$ and $\overline{h}_c = 0.5$ is a critical value. In all these formulas one should replace $\overline{h}_t$ by the "normalized" boundary layer depth $\overline{d}$ when it is larger. This formula could be compared with Belcher and Wood (1996), the slope S being replaced by Hk and $\overline{h}_t$ by the inverse of a Froude number, $F_t^{-1} = U(h_t)/LN(h_t)$. According to the previous discussion herein concerning the potential role of the Froude numbers on the dynamics and drag, we leave this issue to further analysis. In this article, the most significant difference we identify is that one of the two background wind values in Equation (36) is to be taken near the inner layer scale (i.e., in $\delta/2$) not at the turning altitude h_t. Nevertheless, the most important similarity is that, in both formulations, the nature of the dynamics (neutral or stratified) has to be decided at the turning height.

AUTHOR CONTRIBUTIONS

Francois Lott: conceptualization; formal analysis; methodology; writing – original draft. **Anton Beljaars:** conceptualization; methodology; writing – original draft. **Lucile Pauget:** software; validation. **Bruno Deremble:** validation; writing – original draft.

ORCID

Francois Lott https://orcid.org/0000-0003-2126-5510

REFERENCES

Allen, T. & Brown, A. (2002) Large-eddy simulation of turbulent separated flow over rough hills. *Boundary-Layer Meteorology*, 102, 177–198.

Ambaum, M. & Marshall, D. (2005) The effects of stratification on flow separation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 62, 2618–2625.

Belcher, S.E. & Wood, N. (1996) Form and wave drag due to stably stratified turbulent flow over low ridges. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 122, 863–902.

Beljaars, A., Walmsley, J. & Taylor, P. (1987) A mixed spectral finite-difference model for neutrally stratified boundary-layer flow over roughness changes and topography. *Boundary-Layer Meteorology*, 38, 273–303.

Beljaars, A.C.M., Brown, A.R. & Wood, N. (2004) A new parametrization of turbulent orographic form drag. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130, 1327–1347.

Boegman, L. & Stastna, M. (2019) Sediment resuspension and transport by internal solitary waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 51, 129–154.

Booker, J.R. & Bretherton, F.P. (1967) The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 102–109.

Chimonas, G. & Nappo, C.J. (1989) Wave drag in the planetary boundary layer over complex terrain. *Boundary-Layer Meteorology*, 47, 217–232.

Clark, T.L. (1977) A small-scale dynamic model using a terrain-following coordinate transformation. *Journal of Computational Physics*, 24, 186–215.

Durran, D.R. (1990) Mountain waves and downslope winds. *AMS Meteorological Monographs*, 23, 59–83.

Finnigan, J., Ayotte, K., Harman, I., Katul, G., Oldroyd, H. & Patton, E. (2020) Boundary-layer flow over complex topography. *Boundary-Layer Meteorology*, 177, 247–313.

Hunt, J.C.R., Leibovich, S. & Richards, K.J. (1988a) Turbulent shear flows over low hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 114, 1435–1470.

Hunt, J.C.R., Richards, K.J. & Brighton, P.W.M. (1988b) Stably stratified shear flow over low hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 114, 859–886.

Keller, T.L. (1994) Implications of the hydrostatic assumption on atmospheric gravity waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51, 1915–1929.

Koppel, D. (1964) On the stability of flow of a thermally stratified fluid under the action of gravity. *Journal of Mathematical Physics*, 5, 963–982.

Lott, F., Deremble, B. & Soufflet, C. (2020a) Mountain waves produced by a stratified boundary layer flow. Part I: hydrostatic case. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 77, 1683–1697.

Lott, F., Deremble, B. & Soufflet, C. (2020b) Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer. Part II: form drag, wave drag, and transition from downstream sheltering to upstream blocking. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 78, 1101–1112.

Lott, F. & Miller, M. (1997) A new subgrid scale orographic drag parameterization; its testing in the ecmwf model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123, 101–127.

Palmer, T.N., Shutts, G.J. & Swinbank, R. (1986) Alleviation of systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 112, 2056–2066.

Pokharel, B., Geerts, B., Chu, X. & Bergmaier, P. (2017) Profiling radar observations and numerical simulations of a downslope wind storm and rotor on the lee of the medicine bow mountains in Wyoming. *Atmosphere*, 8, 39.

Reinert, D., Wirth, V., Eichhorn, J. & Panhans, W.-G. (2007) A new large-eddy simulation model for simulating air flow and warm clouds above highly complex terrain. Part i: the dry model. *Boundary-Layer Meteorology*, 125, 109–132.

Richard, E., Mascart, P. & Nickerson, E.C. (1989) The role of surface friction in downslope windstorms. *Journal of Applied Meteorology*, 28, 241–251.

Ross, A., Arnold, S., Vosper, S., Mobbs, S., Dixon, N. & Robins, A. (2004) A comparison of wind tunnel experiments and simulations of neutral and stratified flow over a hill. *Boundary-Layer Meteorology: An International Journal of Physical and Biological Processes in the Atmospheric Boundary Layer*, 113, 427–459.

Sachsperger, J., Serafini, S. & Grubisic, V. (2015) *Lee waves on the boundary-layer inversion*. Frontiers in Geophysics. Submitted.

Sauer, J.A., Muñoz-Esparza, D., Canfield, J.M., Costigan, K.R., Linn, R.R. & Kim, Y.-J. (2016) A large-eddy simulation study of atmospheric boundary layer influence on stratified flows over terrain. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 73, 2615–2632.

Schumann, U. & Launder, B.E. (1995) Stochastic backscatter of turbulence energy and scalar variance by random subgrid-scale fluxes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, 451, 293–318.

Smith, R.B., Jiang, Q. & Doyle, J.D. (2006) A theory of gravity wave absorption by a boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 63, 774–781.

Soontiens, N., Stastna, M. & Waite, M.L. (2015) Topographically generated internal waves and boundary layer instabilities. *Physics of Fluids*, 27, 086602.

Soufflet, C., Lott, F. & Deremble, B. (2022) Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer. Part iii: trapped lee waves and horizontal momentum transport. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 79, 1601–1614.

Stiperski, I. & Rotach, M.W. (2016) On the measurement of turbulence over complex mountainous terrain. *Boundary-Layer Meteorology*, 159, 97–121.

Sun, J. (2011) Vertical variations of mixing lengths under neutral and stable conditions during cases-99. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 50, 2030–2041.

Teixeira, M.A.C., Argain, J.L. & Miranda, P.M.A. (2013a) Orographic drag associated with lee waves trapped at an inversion. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 70, 2930–2947.

Teixeira, M.A.C., Argaín, J.L. & Miranda, P.M.A. (2013b) Drag produced by trapped lee waves and propagating mountain waves in a two-layer atmosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 139, 964–981.

Tsiringakis, A., Steeneveld, G.-J. & Holtslag, A. (2017) Small-scale orographic gravity wave drag in stable boundary layers and its impact on synoptic systems and near-surface meteorology. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143, 1504–1516.

Voigt, M. & Wirth, V. (2013) Mechanisms of banner cloud formation. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 70, 3631–3640.

Vosper, S.B., Brown, A.R. & Webster, S. (2016) Orographic drag on islands in the nwp mountain grey zone. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 142, 3128–3137.

Weinbrecht, S. & Mason, P.J. (2008) Stochastic backscatter for cloud-resolving models. Part i: implementation and testing in a dry convective boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65, 123–139.

Weng, W., Chan, L., Taylor, P. & Xu, D. (1997) Modelling stably stratified boundary-layer flow over low hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123, 1841–1866.

Wieringa, J. (1992) Updating the davenport roughness classification. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 41, 357–368 https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/016761059290434C

Wood, N., Brown, A. & Hewer, F. (2001) Parameterizing the effects of orography on the boundary layer: an alternative to effective roughness lengths. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127, 759–777.

Wood, N. & Mason, P. (1993) The pressure force induced by neutral, turbulent flow over hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 119, 1233–1267.

Yu, C.L. & Teixeira, M.C. (2015) Impact of non-hydrostatic effects and trapped lee waves on mountain-wave drag in directionally sheared flow. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141, 1572–1585.

How to cite this article: Lott, F., Beljaars, A., Pauget, L. & Deremble, B. (2024) Neutral and stratified turbulent boundary-layer flow over low mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 150(758), 195–212. Available from: https://doi.org/10.1002/qj.4591

APPENDIX A. MIXED THEORETICAL FINITE-DIFFERENCE MODEL

To solve the set of Equations 28a–28d over a semi-infinite domain, we combine theoretical inviscid solutions and numerical solutions in the inner layer, with the inner layer scale varying for each harmonic according to

$$\overline{\delta}(\overline{k}) = \left(\frac{\overline{\lambda}^2}{\overline{k}}\right)^{1/3}. \tag{A1}$$

The matching between the inviscid or "outer layer" solution will be made in a matching region in which analytical asymptotic solutions are also derived. These "matching" solutions will permit one to initialize the dissipative equations at $\overline{z} \approx 5\overline{\delta}$, which is relatively near the ground, and integrate them down to the surface to give the "inner solutions". The uniform solutions are combinations of these three "outer", "matching", and "inner" solutions; they will be evaluated for both the homogeneous solution and the particular solution. The derivation of the matching solutions is central to our study, because in them one can identify those asymptoting the inviscid solution and which are the Booker and Bretherton (1967) solutions, and those with exponential growth with altitude and which are purely due to dissipations. The fact that they have exponential growth explains why the system we analyse is almost impossible to integrate numerically from $\overline{z} \approx \infty$ to the surface.

A.1 Homogeneous solution

A.1.1 Outer solution

When $\overline{\lambda} \ll 1$ and without the right-hand side terms, the set of Equations 28a–28d reduce to the homogeneous inviscid equations. We will use this approximation where $\overline{Z} \gg \overline{\delta}$; and as $\overline{\delta} > \overline{\lambda}$, they can be solved using the background profiles approximated by

$$\overline{U} \approx \overline{d}\tanh\frac{\overline{Z}+\overline{z}_a}{\overline{d}}, \quad \overline{B} \approx J(\overline{Z}+\overline{z}_a). \tag{A2}$$

For such profiles, the inviscid homogeneous part of Equations 28a–28d satisfies the Taylor–Goldstein equation,

$$\frac{d^2\overline{\mathbf{W}}}{d\overline{Z}^2} + \left[\frac{J}{\overline{U}^2} + \frac{2}{\overline{d}^2}\left(1-\frac{\overline{U}^2}{\overline{d}^2}\right) - \overline{k}^2\right]\overline{\mathbf{W}} = 0, \tag{A3}$$

the solutions of which can be expressed in terms of Haenkel functions when $\overline{d} = \infty$ or hypergeometric functions when $\overline{d} \neq \infty$; that is, the solution named $\overline{\mathbf{w}}_I$ given in Lott et al. (2020b, eq. 12) and Soufflet et al. (2022, eq. 13) respectively. The only difference with Lott et al. (2020b) and Soufflet et al. (2022) is that the critical level is at $Z = -\overline{z}_a$ rather than at $Z = 0$, a behaviour that is transparent when we write the asymptotic forms

$$\overline{\mathbf{W}}_I(\overline{z}) = \overline{\mathbf{w}}_I(\overline{k}, \overline{Z}+\overline{z}_a)$$
$$\underbrace{\approx}_{\overline{Z}\to\infty} e^{-\overline{m}(\overline{Z}+\overline{z}_a)}, \tag{A4}$$
$$\underbrace{\approx}_{\overline{Z}\to 0} \overline{a}_1\left(\overline{Z}+\overline{z}_a\right)^{1/2-i\mu} + \overline{a}_2\left(\overline{Z}+\overline{z}_a\right)^{1/2+i\mu} = \overline{\mathbf{W}}_{IM}, \tag{A5}$$

where the $\overline{a}_1$ and $\overline{a}_2$ are given by Lott et al. (2020b, eq. 13) when $\overline{d} = \infty$ and by Soufflet et al. (2022, eq. A12) when $\overline{d} \neq \infty$. Still in Equation (A5), we have

$$\mu = \sqrt{\left|J - \frac{1}{4}\right|} \quad \text{and} \quad \overline{m} = \sqrt{|\overline{k}^2 - J/\overline{d}^2|} \tag{A6}$$

when $J > 1/4$ and when $\overline{k}^2\overline{d}^2 > J$ respectively. When $J < 1/4$, μ is changed to $i\mu$; and when $\overline{k}^2\overline{d}^2 < J$, $\overline{m}$ is changed to $-i\,\mathrm{sign}(\overline{k})\overline{m}$. The solution in Equation (A5) corresponds to a "unit amplitude" exponentially decaying mode when $\overline{Z} \to \infty$ (or backward-propagating wave when $\overline{m}$ is imaginary). Near the surface Equation (A5) behaves like the linear combinations of the near critical level solutions of Booker and Bretherton (1967), the critical level being located below the surface (at $Z = -\overline{z}_a$). The function $\overline{\mathbf{W}}_{IM}$ in Equation (A5) is a matching function that will play a central role in the build up of uniform approximations.

Finally, note that when the shear varies in the far field the hydrostatic approximation is simply obtained by changing $\overline{m}$ in Equation (A6) by

$$\overline{m} = -\mathrm{i}\,\mathrm{sign}(\overline{k})\sqrt{J/\overline{d}}. \tag{A7}$$

A.1.2 Matching region

An important aspect of our work is that there exists a matching region when $\overline{Z}$ is small but above the surface layer where dissipative effects start being significant. In this region, the background wind shear and stratification are almost constant—in dimensional form, see Equation (13)—and we can find an approximate form of the viscous solutions that will match the outer solution and that will allow one to initialize analytically the inner layer numerical integration. In this matching region, the homogeneous parts of Equations 28a–28d are approximated by

$$\mathrm{i}\overline{k}(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})\overline{\mathbf{u}} + \overline{\mathbf{W}} + \mathrm{i}\overline{k}\,\overline{\mathbf{p}} - 2\overline{\lambda}^2\partial_{\overline{Z}}\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{u}} = 0. \tag{A8a}$$

$$\mathrm{i}\overline{k}(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})\overline{\mathbf{b}} + J\overline{\mathbf{W}} - \lambda^2\partial_{\overline{Z}}\left(\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{b}} + J\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{u}}\right) = 0, \tag{A8b}$$

$$\partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{b}} = 0 \quad \text{and} \quad \mathrm{i}\overline{k}\,\overline{\mathbf{u}} + \partial_{\overline{Z}}\overline{\mathbf{W}} = 0, \tag{A8c}$$

which can be approximated by one sixth-order equation for $\overline{\mathbf{W}}$:

$$\begin{aligned} &2\overline{\delta}^6\overline{\mathbf{W}}^{(6)} - 3\mathrm{i}(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})\overline{\delta}^3\overline{\mathbf{W}}^{(4)} - (2-J)\mathrm{i}\overline{\delta}^3\overline{\mathbf{W}}^{(3)} \\ &\quad - (\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^2\overline{\mathbf{W}}^{(2)} - J\overline{\mathbf{W}} = 0. \end{aligned} \tag{A9}$$

To find asymptotic solutions, we follow Koppel (1964) and try the WKB ansatz,

$$\overline{\mathbf{W}}(\overline{Z}) = A(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})\,\mathrm{e}^{B(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})/\epsilon}, \tag{A10}$$

where A and B are functions and ϵ a small parameter. If we use that

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{W}}^{(n)} \approx \Bigg[&\frac{A\dot{B}^n}{\epsilon^n} + n\frac{\dot{A}\dot{B}^{n-1}}{\epsilon^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{A\ddot{B}\dot{B}^{n-2}}{\epsilon^{n-1}} \\ &+ O(\epsilon^{2-n}) \Bigg]\,\mathrm{e}^{B/\epsilon}, \end{aligned} \tag{A11}$$

a choice that leaves non-degenerated Equation (A9) at the leading order is $\epsilon = \overline{\delta}^{3/2}$. In this case and at order ϵ^{-2} one has

$$2\dot{B}^6 - 3\mathrm{i}(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})\dot{B}^4 - (\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^2\dot{B}^2 = 0. \tag{A12}$$

This admits three solutions corresponding to disturbances that do not grow exponentially in the far field:

$$\dot{B} = 0, \quad \dot{B} = -\sqrt{\mathrm{i}}\sqrt{\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}}}, \quad \text{and} \quad \dot{B} = -\sqrt{\mathrm{i}/2}\sqrt{\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}}}.$$

When $\dot{B} = 0$, all terms with powers in $\overline{\delta}$ in Equation (A9) are small and give the two inviscid solutions of Booker and Bretherton (1967):

$$(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^{(1/2)-\mathrm{i}\mu}; \quad (\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^{(1/2)+\mathrm{i}\mu}. \tag{A13}$$

For $\dot{B} \neq 0$, one needs to go to order ϵ^{-1} and obtain

$$\begin{aligned} &\dot{A}[12\dot{B}^5 - 12\mathrm{i}(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})\dot{B}^3 - 2(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^2\dot{B}] + A[30\ddot{B}\dot{B}^4 \\ &\quad - 18\mathrm{i}(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})\ddot{B}\dot{B}^2 - (2-J)\mathrm{i}\dot{B}^3 - (\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^2\ddot{B}] = 0. \end{aligned} \tag{A14}$$

After substitution of $\dot{B}$ this gives

$$\frac{\dot{A}}{A} = -\frac{9+2J}{4(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})} \quad \text{and} \quad \frac{\dot{A}}{A} = -\frac{5-2J}{4(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})} \tag{A15}$$

for $\dot{B} = -\sqrt{\mathrm{i}}\sqrt{\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}}}$ and $\dot{B} = -\sqrt{\mathrm{i}/2}\sqrt{\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}}}$ respectively. This gives two other WKB solutions:

$$\begin{aligned} &(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^{-(9+2J)/4}\,\mathrm{e}^{-(2/3)\sqrt{\mathrm{i}}[(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})/\overline{\delta}]^{3/2}}; \\ &(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})^{-(5-2J)/4}\,\mathrm{e}^{-(2/3)\sqrt{\mathrm{i}/2}[(\overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}})/\overline{\delta}]^{3/2}}. \end{aligned} \tag{A16}$$

The inner solutions having these asymptotic behaviours do not need to be matched to the outer solution because they decay exponentially fast in the vertical; they are mandatory to satisfy the three no-slip surface conditions.

A.1.3 Inner solutions

To evaluate the solution when $\overline{Z} \to 0$, we next introduce the inner layer scale and the inner variables:

$$\begin{aligned} &\overline{\delta} = \left(\frac{\overline{\lambda}^2}{\overline{k}}\right)^{1/3}, \quad \overline{Z}+\overline{z}_{\mathrm{a}} = \overline{\delta}(\tilde{Z}+\tilde{z}_{\mathrm{a}}), \quad \overline{\mathbf{W}} = \overline{\delta}\,\overline{k}\,\tilde{\mathrm{W}}, \\ &\overline{\mathbf{p}} = \overline{\delta}\,\tilde{\mathbf{p}}, \quad \overline{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{u}}, \quad \overline{\mathbf{b}} = \tilde{\mathbf{b}}. \end{aligned} \tag{A17}$$

With these new variables and at leading order, the homogeneous part of Equations 28a–28d transforms into

$$\mathrm{i}\tilde{U}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{U}_{\tilde{Z}}\tilde{\mathrm{W}} = -\mathrm{i}\tilde{\mathbf{p}} + \partial_{\tilde{Z}}2\tilde{\Lambda}\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}}, \tag{A18a}$$

$$\mathrm{i}\tilde{U}\tilde{\mathbf{b}} + J\tilde{U}_{\tilde{Z}}\tilde{\mathrm{W}} = \partial_{\tilde{Z}}\tilde{\Lambda}(\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{b}} + J\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}}), \tag{A18b}$$

$$\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{b}}, \quad \text{and} \quad \mathrm{i}\tilde{\mathbf{u}} + \partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathrm{W}} = 0. \tag{A18c}$$

Here, we have also written

$$\begin{aligned} &U \approx \overline{\delta}\tilde{U}, \text{ where } \tilde{U} = \frac{\tilde{\lambda}}{\kappa}\log\left[\frac{\sinh\kappa(\tilde{Z}+\tilde{z}_0)/\tilde{\lambda}}{\sinh\kappa\tilde{z}_0/\tilde{\lambda}}\right], \\ &\tilde{\Lambda} = \tanh\left(\kappa\frac{\tilde{Z}+\tilde{z}_0}{\tilde{\lambda}}\right), \end{aligned} \tag{A19}$$

which take into account that in the inner layer $\overline{U}$ scales as $\overline{\delta}$ and $\overline{U} \approx \overline{U}_V$. As in Lott et al. (2020a), three solutions of Equations A18a–A18c are evaluated numerically using a standard Runge–Kutta algorithm with adaptative vertical mesh, the integrations typically starting around $\tilde{z} \approx 5$ initialized by the matching functions and integrated toward the surface.

More specifically, and to ensure the matching with the outer solution, we first evaluate the inner solution $\tilde{\mathrm{W}}_2$, which almost coincides with the matching function $\overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{IM}}$ when $\tilde{Z} \to \infty$; that is, we initialize the integration with

$$\tilde{\mathrm{W}}_2 \underbrace{\approx}_{\tilde{z}\to\infty} \tilde{a}_1(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{1/2-\mathrm{i}\mu} + \tilde{a}_2(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{1/2+\mathrm{i}\mu},$$

$$\text{where} \quad \tilde{a}_1 = \frac{\overline{a}_1}{k}\overline{\delta}^{-1/2-\mathrm{i}\mu}, \quad \tilde{a}_2 = \frac{\overline{a}_2}{k}\overline{\delta}^{-1/2+\mathrm{i}\mu}. \tag{A20}$$

Second, and to permit the satisfying of the three boundary conditions, we also evaluate numerically the two solutions that are exponentially small in the far field; that is, the two solutions $\tilde{\mathrm{W}}_3$ and $\tilde{\mathrm{W}}_4$ with asymptotic behaviours, Equation (A16):

$$\tilde{\mathrm{W}}_3 \underbrace{\approx}_{\tilde{Z}\to\infty} (\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{-(9+2J)/4}\, \mathrm{e}^{-(2/3)\sqrt{\mathrm{i}}(\tilde{z}+\tilde{z}_a)^{3/2}}$$

and

$$\tilde{\mathrm{W}}_4 \underbrace{\approx}_{\tilde{Z}\to\infty} (\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{-(5-2J)/4}\, \mathrm{e}^{-(2/3)\sqrt{\mathrm{i}/2}(\tilde{Z}+\tilde{z}_a)^{3/2}}. \tag{A21}$$

A.1.4 Uniform approximations

Now that we have inner, matching, and outer solutions, we can build uniform approximations out of the three, but all have to be written with the same coordinate. If we take the outer coordinate for instance, the uniform approximation for the vertical velocity of the outgoing solution can be written

$$\overline{\mathbf{W}}_{2\mathrm{U}}(\overline{Z}) = \overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{I}}(\overline{Z}) + \overline{k}\,\overline{\delta}\tilde{\mathrm{W}}_2(\overline{Z}/\overline{\delta}) - \overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{IM}}(\overline{Z}), \tag{A22}$$

whereas the uniform approximations of the viscous solution corresponding to $\tilde{\mathrm{W}}_3$ and $\tilde{\mathrm{W}}_4$ simply consist of writing them using outer coordinates, both functions becoming exponentially small in the outer layer (in this case, outer and matching just coincide):

$$\overline{\mathbf{W}}_{3\mathrm{U}}(\overline{Z}) = \overline{k}\,\overline{\delta}\tilde{\mathrm{W}}_3(\overline{Z}/\overline{\delta}),$$

$$\overline{\mathbf{W}}_{4\mathrm{U}}(\overline{Z}) = \overline{k}\,\overline{\delta}\tilde{\mathrm{W}}_4(\overline{Z}/\overline{\delta}). \tag{A23}$$

A.2 Particular solution

A.2.1 Outer solution ($\overline{z} \gg \overline{\delta}$)

When neglecting the viscous terms in Equations 28a–28d, a particular solution is the linear approximation of the difference between the backgrounds expressed in Cartesian and curved coordinates (for the wind the difference $\overline{U}(\overline{z}) - \overline{U}(\overline{Z})$), yielding

$$\overline{\mathbf{u}}_{\mathrm{Ip}} = \overline{\mathbf{z}}\overline{U}_{\overline{Z}}, \quad \overline{\mathbf{b}}_{\mathrm{Ip}} = \overline{\mathbf{z}}\overline{B}_{\overline{Z}}, \quad \overline{\mathbf{p}}_{\mathrm{Ip}} = \overline{\mathbf{z}}\,\overline{B}(\overline{Z}), \quad \text{and} \quad \overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{Ip}} = -\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{U}\,\overline{\mathbf{z}}. \tag{A24}$$

A.2.2 Matching region

In the matching region, this solution is

$$\overline{\mathbf{u}}_{\mathrm{Mp}} = \overline{\mathbf{z}}, \quad \overline{\mathbf{b}}_{\mathrm{Mp}} = J\overline{\mathbf{z}}, \quad \overline{\mathbf{p}}_{\mathrm{Mp}} = J(\overline{Z}+\overline{z}_a)\overline{\mathbf{z}}, \quad \text{and} \quad \overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{Mp}} = -\mathrm{i}\overline{k}(\overline{Z}+\overline{z}_a)\overline{\mathbf{z}}. \tag{A25}$$

A.2.3 Inner region

In the inner region, we use the scalings in Equations A17 and A19, yielding at leading order

$$\mathrm{i}\tilde{U}\tilde{\mathbf{u}} + \tilde{U}_{\tilde{Z}}\tilde{\mathrm{W}} + \mathrm{i}\tilde{\mathbf{p}} - \partial_{\tilde{Z}}2\tilde{\Lambda}\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}} = \mathrm{i}\overline{B}\overline{h}, \tag{A26a}$$

$$\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{p}} - \tilde{\mathbf{b}} = 0, \tag{A26b}$$

$$\mathrm{i}\tilde{U}\tilde{\mathbf{b}} + \tilde{B}_{\tilde{Z}}\tilde{\mathrm{W}} - \partial_{\tilde{Z}}\tilde{\Lambda}(\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{b}} + J\partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathbf{u}}) = 0, \tag{A26c}$$

$$\mathrm{i}\tilde{\mathbf{u}} + \partial_{\tilde{Z}}\tilde{\mathrm{W}} = 0. \tag{A26d}$$

The particular solution is obtained through numerical integration of Equations A26a–A26d initialized by the particular solution matching the function in Equation (A25). If we call $\tilde{\mathrm{W}}_{\mathrm{Vp}}(\overline{k}, \tilde{Z})$ the solution, a uniform expression of the particular solution can be written

$$\overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{Up}}(\overline{k}, \overline{Z}) = \overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{Ip}}(\overline{k}, \overline{Z}) + \overline{k}\,\overline{\delta}\tilde{\mathrm{W}}_{\mathrm{Vp}}(\overline{k}, \overline{Z}/\overline{\delta}) - \overline{\mathbf{W}}_{\mathrm{Mp}}(\overline{k}, \overline{Z}), \tag{A27}$$

with similar expressions for $\overline{\mathbf{u}}_{\mathrm{Up}}$ and $\overline{\mathbf{b}}_{\mathrm{Up}}$.

A.3 Boundary conditions

We then rewrite the complete flow fields combining linearly the three homogeneous uniform solutions and the particular uniform solution,

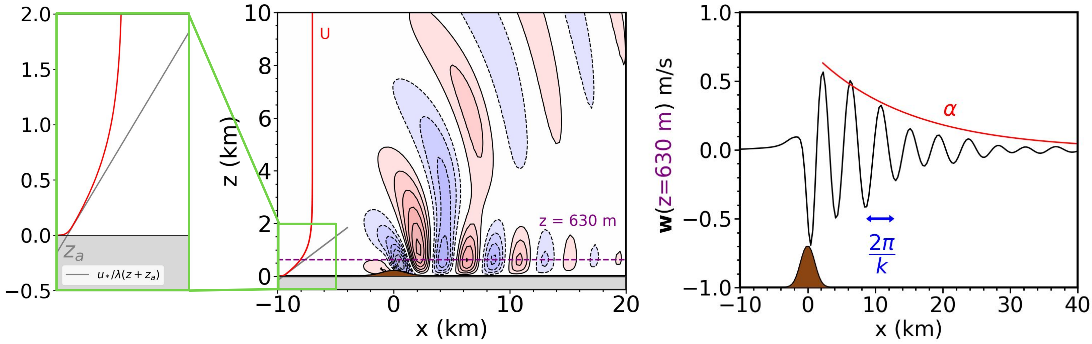
$$\overline{\mathrm{W}}(\overline{X}, \overline{Z}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Big[f_2(\overline{k})\overline{\mathbf{W}}_{2\mathrm{U}}(\overline{k}, \overline{Z}) + f_3(\overline{k})\overline{\mathbf{W}}_{3\mathrm{U}}(\overline{k}, \overline{Z}) + f_4(\overline{k})\overline{\mathbf{W}}_{3\mathrm{U}}(\overline{k}, \overline{Z}) + \overline{\mathbf{W}}_{p\mathrm{U}}(\overline{k}, \overline{Z})\Big]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\overline{k}\,\overline{X}}\, d\overline{k}, \tag{A28}$$

with similar expressions for $\overline{\mathbf{u}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, and $\overline{\mathbf{p}}$. With this notation, the surface conditions in Equation (29) give

$$f_2(\overline{k})\overline{\mathbf{W}}_{2U}(\overline{k},0)+f_3(\overline{k})\overline{\mathbf{W}}_{3U}(\overline{k},0)+f_4(\overline{k})\overline{\mathbf{W}}_{4U}(\overline{k},0)=-\overline{\mathbf{W}}_{Up}(0), \tag{A29}$$

with similar expression for $\overline{\mathbf{u}}$ and $\overline{\mathbf{b}}$. The three relations obtained for each $\overline{k}$ permit one to evaluate the coefficients $f_i(\overline{k})$ and reconstruct the wave field after inverse Fourier transform and interpolation on the rectangular grid.

8.2 Annexe H : Mountain waves developing inside and aloft stably stratified turbulent boundary layers



In this paper, the trapped lee waves that develop when a stratified boundary layer flow passes over a mountain range are analysed using a mixed finite difference theoretical linear model presented in an earlier paper. In this model, turbulence is represented using mixing length theory. The downstream decay rate of the waves trapped in the boundary layer are explained in terms of the absorptive properties of the surface. Strong decay rate are found when the Richardson number in the boundary layer is large and/or when the apparent critical levels for mountain waves are located near below the surface. When surface absorption is very large, there appears modes interacting little with the surface.

Received: 6 December 2023 | Revised: 12 July 2024 | Accepted: 16 July 2024

DOI: 10.1002/qj.4832

Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society

RESEARCH ARTICLE

Mountain waves developing inside and aloft stably stratified turbulent boundary layers

Lucile Pauget[1,2] | **Francois Lott**[1] | **Christophe Millet**[2]

[1]Département des géosciences, Laboratoire de Météorologie Dynamique, Universite PSL, Ecole Normale Supérieure, Paris, France

[2]Commissariat à l'Energie atomique/DAM, Bruyères le Chatel, France

Correspondence
Francois Lott, Laboratoire de Météorologie Dynamique, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, 75231 Paris, France.
Email: flott@lmd.ens.fr

Funding information
VESRI Schmidt Future, Grant/Award Number: Datawave; CEA/ENS Laboratoire de Recherche Conventionné "Yves Rocard", Grant/Award Number: BLOWAVES

Abstract

A linear theory of the trapped mountain waves that develop in a turbulent boundary layer is presented. The theory uses a mixing-length turbulence model based on Monin–Obukhov similarity theory. First, the backward reflection of a stationary gravity wave propagating toward the ground is examined. Three parameters are investigated systematically: the Monin–Obukhov length L_{mo}, the roughness length z_0, and the limit value of the mixing length λ aloft the "inner" layer. The reflection coefficient appears to depend strongly on the Richardson number aloft the inner layer ($J = \lambda/\kappa L_{\text{mo}}$, with κ the von Kármán constant), with the reflection decreasing when the stability J increases. The influence of the roughness and mixing lengths on the reflection is explained in terms of the depth of a "pseudo"-critical level located below the surface, with the reflection decreasing when the depth of the "pseudo"-critical level decreases. The preferential modes of oscillations occurring in the presence of mountain forcing are then analysed, with the decay rate of the trapped waves downstream increasing when the reflection decreases. At a certain point nevertheless, when the absorption is large but the boundary-layer depth deep enough, trapped modes appear that interact little with the surface.

KEYWORDS

neutral and stratified boundary layers, trapped mountain waves, turbulence

1 | INTRODUCTION

An early theory for gravity waves developing in the lee of mountain ranges was proposed by Scorer (1949), who demonstrated that resonant modes can be excited by mountains when the background wind and stratification vary with altitude. More specifically, and in the two-dimensional case, they occur when the Scorer parameter,

$$S(z) = \frac{N^2}{U^2} - \frac{U_{zz}}{U}, \tag{1}$$

decreases with altitude above the surface. Here, N, U, and z are the background buoyancy frequency, the background wind, and the altitude respectively. In this case, all the harmonics with horizontal wave number k that encounter a turning point h_t, where

$$S(h_t(k)) = k^2, \tag{2}$$

are trapped at low levels. A discrete number of them become resonant in the inviscid case, as a result of successive reflections between their turning level and the surface. Whereas Scorer (1949), and more recently Teixeira *et al.* (2013), applied the theory to a two-layer atmosphere, cases with smooth variations of $S(z)$ have also been analysed in numerous studies; for instance, see Durran (1986) or Wurtele *et al.* (1996). Of particular interest to our study is that of Keller (1994), which includes trapped waves with a strong increase of the wind above the surface. Nevertheless, and after Scorer (1949), it has been realized that trapped waves can also appear at a sharp density or wind inversion, in which case the interaction with the surface is not as pronounced as when the waves result from multiple reflections between the surface and turning levels (Sachsperger *et al.*, 2017; Vosper, 2004). In this article, we will see that near-resonant modes that have slight interaction with the surface can also be found when the background atmospheric state varies smoothly in the vertical.

If we now return to the initial theory of Scorer (1949), one of its weaknesses is that it neglects the dissipative effects occurring within the boundary layer, regardless that the variations with altitude of wind and stratification occurring in the boundary layer are potentially ducting trapped lee waves. This neglect of dissipation yields to an overestimate of mountain waves' amplitude, downslope winds, and trapped waves' downstream development, as revealed in modelling studies (Georgelin *et al.*, 1994; Miller & Durran, 1991; Richard *et al.*, 1989). More recently, Jansing *et al.* (2022) and Tian *et al.* (2023) demonstrated that simulations of mountain waves and foehn strongly depend on the boundary-layer parametrizations, parametrizations that are still uncertain in mountainous areas (Goger *et al.*, 2019); see also the review in Serafin *et al.* (2018). For completeness, note that other deficiencies concerning boundary-layer effects over complex terrain are discussed in Tsiringakis *et al.* (2017), Lehner and Rotach (2018), and Vosper *et al.* (2018).

Beyond numerical models, attempts to understand the more fundamental mechanism at work in the interaction between the trapped lee waves and the boundary layer were motivated by observations. During the Mesoscale Alpine Program (Bougeault *et al.*, 2001), Smith *et al.* (2002) noticed that a strong absorption by a near-stagnant surface layer could inhibit the development of trapped waves, despite favourable conditions aloft. In subsequent articles they proposed to analyse systematically the absorptive properties of the surface, illustrating that the combination of reduced winds in the boundary layer and dissipation contribute to the absorption (Smith *et al.*, 2006). They characterized a surface reflection coefficient for waves returning to the surface downstream and related it to the spatial decay rate of trapped waves (referred to as q and α respectively). In short, a small reflection is associated with a strong decay.

Nevertheless, in Smith *et al.* (2006), and also in Jiang *et al.* (2006), frictional effects are represented by a bulk formula with linear Rayleigh drag, which is not extensively used in models. Indeed, the dissipative effects are more often taken into account by introducing turbulence closures based on eddy diffusivity. A fundamental difficulty when using such closures is that the equations have higher order derivatives in the vertical (six compared to two for the inviscid Taylor–Goldstein equation). In the constant eddy viscosity case, Lott (2007) obtained solutions by using asymptotic techniques where the flow is split into an outer region, where viscosity is negligible, and an inner region, where dissipative effects compare to disturbance advection (Jackson & Hunt, 1975). This region has depth varying according to an "inner layer" scale h_i that is distinct from the boundary-layer depth and satisfying

$$kU(h_\mathrm{i}(k)) \approx \frac{\nu'}{h_\mathrm{i}^2}, \tag{3}$$

where ν' is the eddy diffusivity acting on the disturbance produced by the mountain. An important result is that when the Richardson number near the surface,

$$\mathrm{Ri}(z) = \frac{N^2}{U_z^2} \underbrace{\approx}_{z\to 0} J > 0.25, \tag{4}$$

increases, the surface reflection decreases even in the inviscid limit. Furthermore, in the inviscid limit, the reflection is almost total when $J < 0.25$. This condition is similar to the Richardson number instability criterion for continuously stratified inviscid parallel flows (Howard, 1961; Miles, 1961). Elaborating on this further, Lott (2007) showed that the neutral modes of Kelvin–Helmholtz instability (Drazin, 1958) can also correspond to trapped lee waves; see also Soufflet *et al.* (2022).

A limit of the constant eddy viscosity case is that, in reality, turbulent viscosity over a rough surface is more realistically represented using mixing-length theory, the mixing length decreasing when approaching the surface. This introduces other difficulties; for instance, one needs to treat the problem using curvilinear coordinates and recalculate the viscous solutions. To a certain extent, this was accomplished in the past, quite theoretically in Belcher *et al.* (1993), Belcher and Wood (1996), and Hunt *et al.* (1988), and more numerically in Weng *et al.* (1997). However in those articles the trapping of the waves between the surface (or the top of the inner layer) and the turning levels was not fully considered. Specifically, trapped wave dissipation that may occur in atmospheric boundary layers was not captured. In a recent article, Lott *et al.* (2023) derived such a theory (hereinafter referred to as Part I), and focused on the nature of the transition from form drag to wave drag, and from downstream sheltering to upstream blocking. During the transition, which is shown to occur when the Richardson number value aloft the surface layer J is close to 1, it was noticed that trapped waves deeply affect the dynamics. It was also noticed that for small J the turning levels are too close to the surface for trapped modes to emerge, and that for large J the surface absorption is too large for trapped modes to develop horizontally. Lott *et al.* (2023) also describe briefly the sensitivity to the Froude number,

$$F = \frac{U(\infty)}{N(\infty)L}, \tag{5}$$

where L is a characteristic length of the mountain. This number controls the significance of the non-hydrostatic effects (Yu & Teixeira, 2014). The purpose of the present article is to assess these issues further, first by calculating the reflection coefficient and second by trying to relate the flow response to a mountain forcing in terms of this reflection coefficient. As we shall see, the decay rate of the trapped waves is well explained by the absorptive properties of the surface, and their horizontal wave number is quite controlled by the more conventional inviscid trapped wave dynamics.

The plan of the article is as follows. Section 2 recalls aspects of the formalism used in Part I and needed here. Section 3 evaluates the reflection coefficients. Section 4 analyses the response of the flow to an idealized mountain using the full model presented in Part I, with a focus on the spatial decay rate of trapped modes. Section 5 concludes, and the Appendix gives solutions to the homogeneous inviscid problem that were not given in Part I and that are required to evaluate the surface reflection coefficients.

2 | TURBULENCE CLOSURE AND BACKGROUND FLOW PROPERTIES

Although the evaluation of solutions in the presence of a mountain necessitates curved coordinates, they are not needed to calculate surface reflection downstream, so we will lighten the formalism and consider Cartesian coordinates (x, z) in the following. For completeness, we recall here that, as in Part I, the vertical fluxes of horizontal momentum and buoyancy are parametrized by an eddy diffusivity ν based on mixing-length theory:

$$\tau_{xz} = \nu\partial_z u, \quad q_z = \nu\partial_z b, \quad \nu = \Lambda_0^2\left\|\frac{\partial u}{\partial z}\right\|, \tag{6}$$

where u is the zonal wind and $b = -g[(\theta - \theta_s)/\theta_s]$ is the buoyancy, θ is potential temperature, and θ_s is a reference value. For simplicity, we slightly modify the Blackadar formulation for the mixing length (common for neutral flows) but keep the same asymptotes:

$$\Lambda_0 = \lambda \tanh\left(\kappa\frac{z+z_0}{\lambda}\right), \tag{7}$$

where z_0, κ, and λ are the roughness length, the von Kármán constant, and the limit value of the mixing length respectively. The formulation for the mixing length in Equation (7) gives background wind and buoyancy profiles with uniform fluxes:

$$U_V(z) = \frac{u_*}{\kappa}\ln\left[\frac{\sinh\left(\kappa\frac{z+z_0}{\lambda}\right)}{\sinh\left(\kappa\frac{z_0}{\lambda}\right)}\right],$$
$$B_V(z) = \frac{b_*}{\kappa}\ln\left[\frac{\sinh\left(\kappa\frac{z+z_0}{\lambda}\right)}{\sinh\left(\kappa\frac{z_0}{\lambda}\right)}\right], \tag{8}$$

where $u_* = \sqrt{\tau_s/\rho_s}$ is the friction velocity and $b_* = gH_s/(\rho_s c_p u_* \theta_s)$ is the buoyancy scale, with τ_s and H_s the surface stress and heat flux respectively and c_p the air heat capacity per unit mass at constant pressure. The background wind in Equation (8) tends to infinity when $z \to \infty$, which means that the Scorer parameter in Equation (1) goes to zero; all the harmonics are trapped, which is not representative of the real atmosphere. For this reason, we also considered cases where the background wind smoothly becomes constant beyond a boundary-layer depth d, writing

$$U(z) = \frac{u_* d}{\lambda}\tanh\left(\frac{\lambda}{u_* d}U_V(z)\right), \quad B(z) = B_V(z), \tag{9}$$

keeping in mind that U and U_V coincide in the limit $d \to \infty$.

Figure 1a shows the wind profile in Equation (9) for $d = \infty$ and $d = 1$ km and for the same parameter values as in Part I (Lott *et al.*, 2023, fig. 1). When $d = \infty$ the wind shear is almost constant everywhere, whereas it is approximately constant below 300 m typically when $d = 1$ km (see zoomed image in Figure 1b). The zoomed image also shows that near the surface the profiles acquire a logarithmic character, as expected. Figure 1b also shows the location of the inner layer, evaluated for the case where the mountain has a characteristic length $L = 1$ km (i.e., $h_i(1/L)$ according to Equation (3), and anticipating for ν' the values given in Equation (16a).

Figure 1b,c also shows the linear asymptote of U and B when $\lambda \ll z \ll d$, illustrating that

$$\underbrace{U(z) \approx}_{\lambda \ll z \ll d} \frac{u_*(z+z_a)}{\lambda}, \quad \underbrace{B(z) \approx}_{\lambda \ll z} \frac{b_*(z+z_a)}{\lambda}, \tag{10}$$

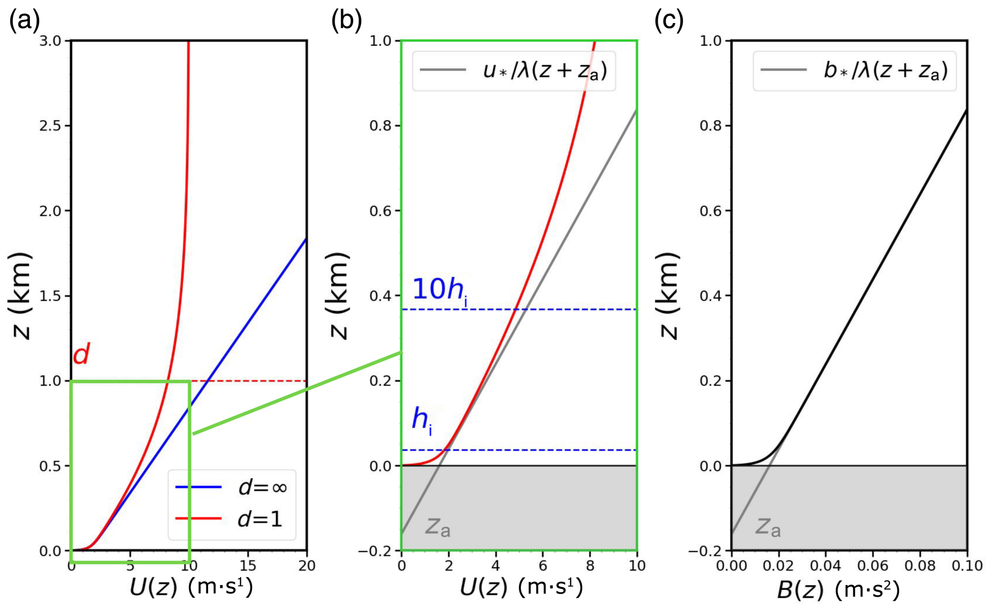


FIGURE 1 Background profiles for $z_0 = 1$ m, $\lambda = 20$ m, $u_* = 0.2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $b_* = 5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $d = 1$ km, $L = 1$ km. (a) Background wind U in the constant shear case (blue), see Equation (8), and the variable shear case (red), see Equation (9). (b) Zoomed image for the wind profile in the boundary layer and in grey its linear asymptote in Equation (10). Also shown are the "critical level" depth z_a and the inner layer scale $h_i(1/L)$. (c) Buoyancy profile and its linear fit. [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

where the parameter

$$z_a = z_0 - \frac{\lambda}{\kappa}\log\left(2\sinh\frac{\kappa z_0}{\lambda}\right). \tag{11}$$

At least in the boundary layer and above the inner layer, Figure 1b,c shows that these asymptotes approximate U and B in Equation (9) quite well. As we shall see, the parameter z_a can be viewed as the critical level depth for the inviscid part of the response.

As indicated in Section 1, an important parameter of the flow is the Richardson number, Equation (4), for the boundary-layer profiles in Equation (9):

$$\mathrm{Ri}(z) = \frac{N^2}{U_z^2} \approx \begin{cases} 0 & \text{for} \quad z \to 0 \\ J = \frac{b_*^\lambda}{u_*^2} = \frac{\lambda}{\kappa L_{mo}} & \text{for} \quad \lambda \ll z \gg d, \\ \infty & \text{for} \quad d \ll z \end{cases} \tag{12}$$

where $N^2 = B_z$ and L_{mo} is the Monin–Obukhov length. Still for the boundary layer flow Equation (9) the Froude number Equation (5) is

$$F = \frac{U(\infty)}{N(\infty)L} = \sqrt{\frac{u_*^2}{b_*\lambda}\frac{d}{L}} = J^{-1/2}\frac{d}{L}. \tag{13}$$

A difficulty is that F changes when J changes. In this article, as we are focused on the absorbing properties of the boundary layer we make the choice to systematically vary the dissipative parameters λ and z_0 and the parameter J, F will in most cases take the two contrasting values $F = 1, \infty$ ($d = \sqrt{J}L, \infty$). In these two cases, the fraction of harmonics that stay trapped compared with the number of harmonics excited by the mountain remains constant when the other parameters change. Note nevertheless that to keep F constant we are forced to increase the shear layer depth d when J increases. J will therefore have two contrasting effects. On the one hand, trapped lee waves will be more attenuated at the surface when J increases but, on the other hand, the ducting region will increase in depth, enabling more modes to develop. We will see that some of them interact little with the surface and can propagate downstream substantially even when surface absorption is large.

3 | LINEAR SOLUTIONS

To analyse the gravity wave absorption at the surface, we use the Boussinesq equations linearized around U and B and evaluate the behaviour of harmonics with wave number $k > 0$; that is, considering disturbance fields under the form

$$(u', w', p', b') = (\mathbf{u}, \mathbf{w}, \rho_s\mathbf{p}, \mathbf{b})\,\mathrm{e}^{ikx}, \tag{14}$$

where u' and w' are horizontal and vertical wind disturbances respectively, p' and b' are disturbances in pressure and buoyancy respectively, and ρ_s is a reference density. In this Fourier space, the equations we solve are

$$ikU\mathbf{u} + \mathbf{w}\partial_z U + ik\mathbf{p} = \partial_z 2\Lambda_0 u_* \partial_z \mathbf{u}, \tag{15a}$$

$$ikU\mathbf{b} + N^2\mathbf{w} = \partial_z\Lambda_0(u_*\partial_z\mathbf{b} + b_*\partial_z\mathbf{u}), \tag{15b}$$

$$ik\mathbf{u} + \partial_z\mathbf{w} = 0, \tag{15d}$$

$$ikU\mathbf{w} + \partial_z\mathbf{p} - \mathbf{b} = 0, \tag{15c}$$

which are the dimensional form of the homogeneous part given in Lott *et al.* (2023, eq. 29), the dissipation being neglected in Equation (15c) consistent with the Prandtl approximation. Also, the dissipative terms in Equations (15a) and (15b) result from the linearizations

$$\Lambda_0^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\| \frac{\partial u}{\partial z} \approx \Lambda_0^2 \left(\frac{dU}{dz} \right)^2 + 2\Lambda_0^2 \left(\frac{dU}{dz} \right) \frac{\partial u'}{\partial z} = u_*^2 + \underbrace{2\Lambda_0 u_*}_{\nu'} \frac{\partial u'}{\partial z}, \tag{16a}$$

$$\Lambda_0^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial z} \right\| \frac{\partial b}{\partial z} \approx u_* b_* + \Lambda_0 (u_* \partial_z b' + b_* \partial_z u'), \tag{16b}$$

respectively.

3.1 | Outer solution

The scale analysis of the various terms in Equations (15a)–(15d) have been done systematically in Part I and for the case where the limit value of the mixing length is much smaller than the characteristic horizontal scale of the waves $\lambda \ll L$. In this case it was shown that all dissipative terms on the right-hand side of Equations (15a) and (15b) are small and can be neglected at the leading order. This simplification does not allow one to satisfy all the boundary conditions and can only be applied in an "outer region" defined by $z \gg h_i$. After verification that $h_i > \lambda$ in the cases we consider, in this outer region the background wind and stratification can be approximated by

$$U \approx \frac{u_* d}{\lambda} \tanh\left(\frac{z + z_a}{d} \right), \quad N^2 \approx \frac{b_*}{\lambda}. \tag{17}$$

With these simplified forms, the "outer solutions" in the constant shear case $d = \infty$ are expressed in terms of Hankel functions whereas in the variable shear case the solutions are expressed in terms of hypergeometric functions, all of them exhibiting a critical level at $-z_a$ (i.e., below the surface; see Appendix for details). What is important is that in all cases we can use analytical solutions with asymptotic behaviours:

$$\mathbf{w}_I(z) \underbrace{\approx}_{z/L \to \infty} e^{-m(z+z_a)}, \mathbf{w}_D(z) \underbrace{\approx}_{z/L \to \infty} e^{+m(z+z_a)}, \tag{18a}$$

$$\mathbf{w}_I(z) \underbrace{\approx}_{z/L \to 0} a_1 (z + z_a)^{1/2 + i\mu} + a_2 (z + z_a)^{1/2 - i\mu},$$

$$\mathbf{w}_D(z) \underbrace{\approx}_{z/L \to 0} a_3 (z + z_a)^{1/2 + i\mu} + a_4 (z + z_a)^{1/2 - i\mu}, \tag{18b}$$

with more details in the Appendix. In Equations (18a) and (18b),

$$m = \sqrt{|k^2 - F^{-2} L^{-2}|} \quad \text{and} \quad \mu = \sqrt{\left| J - \frac{1}{4} \right|} \tag{19}$$

respectively, μ being changed to $i\mu$ when $J < 1/4$ and m to $-im$ when $k^2 < F^{-2} L^{-2}$. With these conventions, $\mathbf{w}_I$ exponentially decays as z increases or is an upward-propagating wave when m is imaginary, whereas $\mathbf{w}_D$ grows as z increases or is a downward-propagating gravity wave.

As we shall see, and to calculate surface reflections when $J < 0.25$, we will need to analyse the outer solutions in the far field and in the variable shear case rather than just above the inner layer. In this case, and to "deactivate" the ducting region, we will use hydrostatic solutions. In the outer region this is simply done by changing m in Equation (19) by

$$m = -\frac{i}{FL}; \tag{20}$$

there are no turning levels and trapped harmonics. For completeness, note that the hydrostatic approximation is always made in the very thin inner region.

3.2 | Inner solution

To find solutions that match the outer solution and satisfy the three surface boundary conditions on the wind $(\mathbf{u}, \mathbf{w})$ and buoyancy $\mathbf{b}$, we evaluated four solutions of the inner equations numerically in Part I. Note, nevertheless, that for mathematical convenience, the inner equations we derive do not use vertical distances scaled by the inner scale h_i but by the scale

$$\delta(k) = \left(\frac{\lambda^2}{k} \right)^{1/3}. \tag{21}$$

We have verified that in all cases we analyse the two scales compare in amplitude, h_i always being one to three times smaller than δ (see Table 1). Beyond this technical issue, the most important result is that, near aloft the inner layer, the background wind shear is almost constant and the four inner solutions needed have asymptotic behaviour:

$$\mathbf{w}_{\nu 1} \underbrace{\approx}_{z/\delta \to \infty} (z + z_a)^{1/2 - i\mu},$$

$$\mathbf{w}_{\nu 2} \underbrace{\approx}_{z/\delta \to \infty} (z + z_a)^{1/2 + i\mu}, \tag{22a}$$

$$\mathbf{w}_{\nu 3} \underbrace{\approx}_{z/\delta \to \infty} (z + z_a)^{-(9+2J)/4} \, e^{-(2/3)\sqrt{i}[(z+z_a)/\delta]^{3/2}},$$

$$\mathbf{w}_{\nu 4} \underbrace{\approx}_{z/\delta \to \infty} (z + z_a)^{-(5-2J)/4} \, e^{-(2/3)\sqrt{i/2}[(z+z_a)/\delta]^{3/2}}. \tag{22a}$$

TABLE 1 Values of z_a and of $h_i(1/L)$ $(\delta(1/L))$ for different values of λ and z_0; see Equations (11), (3), with ν' in Equation (16a), and (21).

	z_a			$h_i(1/L)$ $(\delta(1/L))$		
	$z_o = 0.5\,m$	$z_o = 1\,m$	$z_o = 2\,m$	$z_o = 0.5\,m$	$z_o = 1\,m$	$z_o = 2\,m$
$\lambda = 5\,m$	32	24	16	22 (29)	23 (29)	24 (29)
$\lambda = 20\,m$	196	162	128	36 (73)	40 (73)	43 (73)
$\lambda = 50\,m$	604	518	432	50 (135)	52 (135)	57 (135)

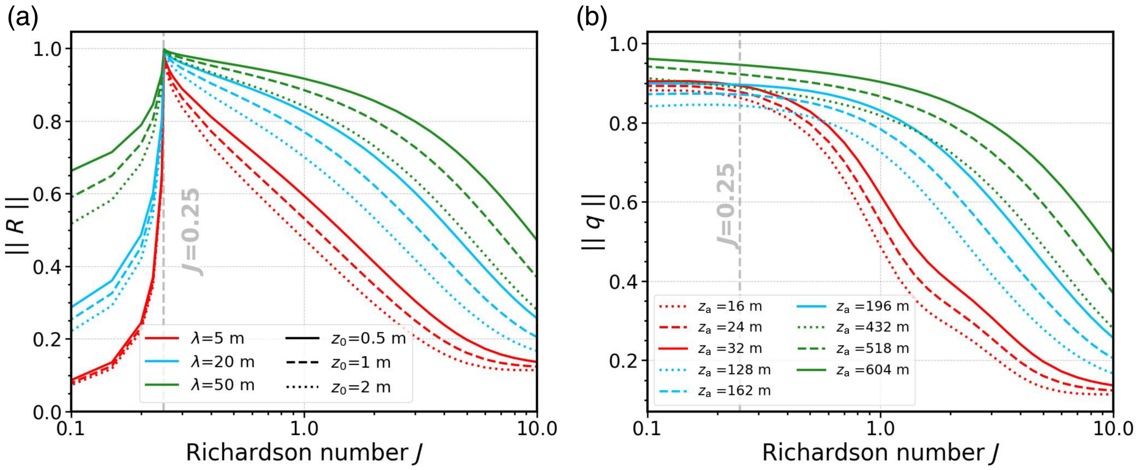


FIGURE 2 Surface reflection coefficient: (a) aloft the inner layer; (b) in the far field in the hydrostatic variable shear case with $F = 1$. Also, in (b) the values of the "critical level depth" z_a are given in place of the λ and z_0 given in (a). [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

The interest here is that when $J > 0.25$ we know from Booker and Bretherton (1967) that the asymptotic behaviour of $\mathbf{w}_{\nu1}$ in Equation (22a) corresponds to that of a downward-propagating wave and that of $\mathbf{w}_{\nu2}$ to an upward-propagating wave (in the convention $k > 0$). When $J < 0.25$, the two solutions need to be combined to build vertically propagating disturbances, which complicates the analysis (see next section). Finally, $\mathbf{w}_{\nu3}$ and $\mathbf{w}_{\nu4}$ decay exponentially when z increases; they are entirely "dissipative" solutions, as indicated by their exponential decay rate scaled by the inner layer scale δ.

4 | ABSORPTION BY THE SURFACE LAYER

The absorbing properties of the surface can be estimated using the solution above the inner layer. Following Lott (2007), the solution can be expressed as the superposition of the four viscous solutions with asymptotic behaviour given in Equations (22a) and (22b); that is,

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\nu1} + R\mathbf{w}_{\nu2} + c\mathbf{w}_{\nu3} + d\mathbf{w}_{\nu4}, \tag{23}$$

with similar expressions for the horizontal wind and buoyancy. From the numerical integration of the four viscous solutions to the surface described in Part I we then evaluate the coefficients R, c, and d so as to satisfy the three surface boundary conditions,

$$\mathbf{w}(z = 0) = \mathbf{u}(z = 0) = \mathbf{b}(z = 0) = 0, \tag{24}$$

while imposing the "unit" amplitude upward-propagating solution $\mathbf{w}_{\nu1}$; see Equation (23).

Figure 2a shows the amplitude of the reflection R for different roughness length z_0 and mixing length λ as a function of J and for the dominant wave number $k = 1/L = 10^{-3}\,\mathrm{m}^{-1}$. When $J > 0.25$, we see that this coefficient decreases with stability, which is consistent with the fact that solutions with larger μ oscillate more rapidly in the vertical when J increases and are therefore more absorbed. This behaviour is illustrated in Figure 3: for a given and quite small z_a, the inviscid solution (black curves) oscillates much more when J is large, at least in the region where dissipative effects start to be significant (region arbitrarily placed below $5h_\mathrm{i}$ here).

We can also notice that the reflection coefficient decreases with the roughness length, consistently with the fact that enhanced roughness length leads to more dissipation. This has been shown and quantified by Jiang *et al.* (2006) in a simple model of wave reflection. Quite surprisingly nevertheless, one also sees that absorption decreases (R increases) when the limit value of the mixing length λ increases, as if more dissipation results in

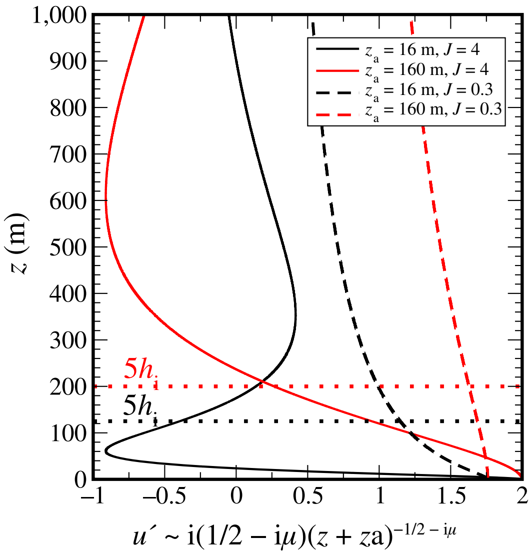


FIGURE 3 Schematic representation of the horizontal velocity field associated with the Booker and Bretherton (1967) downward solutions $\mathbf{u}_1 = \frac{i}{k}(1/2 - \mathrm{i}\mu)(z + z_a)^{-1/2-\mathrm{i}\mu}$ for $z_a = 16$ m, 162 m, and $J = 0.3, 4$. Only the real part is shown for conciseness. [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

less absorption. To interpret this, one needs to recall that the oscillatory behaviour in the solutions $\mathbf{w}_{v1}$ and $\mathbf{w}_{v2}$ is more pronounced near the surface when the apparent critical depth is not too large—z_a in Equation (11). As shown in Table 1, this depth decreases when z_0 increases but increases when λ increases, which explains the absorbing behaviour seen in Figure 2a. Again, the fact that absorption becomes less sensitive to J when z_a is large is also illustrated by the red curves in Figure 3: when $z_a = 162$ m, the differences in oscillatory behaviour between $J = 0.3$ and $J = 4$ are not as pronounced when z_a is smaller. Accordingly, the decrease in reflection when J increases is therefore less pronounced (compare the dashed blue and red dot curves in Figure 2). Finally, it is important to notice that $|R|$ is not sensitive to the choice of k because the inner equations we solved in Part I become independent of k when inner variables are used. This of course stays true in the limit of validity of our analysis; that is, when

$$\lambda < \delta(k) < d. \tag{25}$$

The results for $|R|$ when $J < 0.25$ are more problematic to interpret, because in this case $\mathbf{w}_{v1}$ and $\mathbf{w}_{v2}$ in Equation (23) cannot be associated with downward and upward gravity waves. To circumvent this difficulty one needs to look further aloft; for instance, where the wind becomes constant in the variable shear case. There, as the two solutions $\mathbf{w}_\mathrm{D}$ and $\mathbf{w}_\mathrm{I}$ in Equation (18a) only represent downward- and upward-propagating waves when m is imaginary, we make the hydrostatic approximation to ensure that this is always the case; see Equation (20). With this approximation, the harmonics are no longer trapped and we can analyse the wave reflection in $z \to \infty$ by writing the solution in the outer region in the form

$$\mathbf{w} = U_\mathrm{p}\mathbf{w}_\mathrm{I} + D_\mathrm{o}\mathbf{w}_\mathrm{D} \underbrace{\approx}_{z\to 0} (U_\mathrm{p}a_1 + D_\mathrm{o}a_3)(z+z_\mathrm{a})^{1/2+\mathrm{i}\mu} + (U_\mathrm{p}a_2 + D_\mathrm{o}a_4)(z+z_\mathrm{a})^{1/2-\mathrm{i}\mu}, \tag{26}$$

the matching with the inner solution being done by neglecting the viscous solutions in Equation (23) that are exponentially small when $z/\delta \to \infty$. This yields the total reflection coefficient:

$$q = \frac{U_\mathrm{p}}{D_\mathrm{o}} = \frac{a_4 - a_3 R}{a_2 - a_1 R}. \tag{27}$$

As shown in Figure 2b, when $F = 1$ ($d = \sqrt{J}L$), the amplitude of this coefficient $|q|$ behaves almost as $|R|$ when $J > 0.25$ and becomes near 1 (near total reflection) when $J < 0.25$. Again, as in the outer layer the hydrostatic solutions are such that the a_is do not depend on k and as $|R|$ does not depend on k, $|q|$ does not vary much with k either. There is nevertheless a weak sensitivity: keeping values in the range $0.5/L < k < 2L$ we found that slightly more absorption occurs when k decrease, i.e. when the inner layer h_i get closer from the boundary layer depth d (not shown).

This interpretation that the surface reflection is near 1 when $J < 0.25$ nevertheless has a limit. Indeed, the coefficient q is more than a surface reflection coefficient since partial reflections of the incident wave can occur where the wind curvature is large (around $z = d$ and even in the hydrostatic case because the Scorer parameter varies there). We verified that these partial reflections have small qualitative impacts by making sensitivity tests of our results to the Froude number F (and hence d, not shown). This weak sensitivities to the curvature around d probably follows that the tanh function used to stop the infinite growth with altitude of the boundary-layer wind U_v in Equation (9) is very smooth. This tanh profile was chosen in Lott (2007) to minimize these partial reflections. It permits to say with confidence that the amplitude of the hydrostatic approximation of q essentially measures surface reflection.

5 | TRAPPED LEE WAVE DEVELOPMENT

To determine the manner in which the trapped waves change as flow stability and dissipations change, we next use the model presented in Part I and where the mountain is represented by a two-dimensional Gaussian ridge of characteristic horizontal length L:

$$h(x) = H\, e^{-x^2/2L^2}, \tag{28}$$

where H is the maximum mountain height. The ratio $S = H/L$ is fixed to 0.2 keeping $L = 1$ km. With these parameters, the Gaussian mountain forces harmonics with dominant wave number around $k = 1\,\text{km}^{-1}$. In this model where disturbances come from the surface, and in contrast with the previous section, we recall that each of the harmonics $\mathbf{w}(k,z)$ varies in the vertical and when $z \gg d$ according to

$$e^{-m(z+z_a)}$$

where

$$m = \begin{cases} -\mathrm{i}\sqrt{F^{-2}L^{-2} - k^2} & \text{for } k < k_c = (FL)^{-1} \\ \sqrt{k^2 - F^{-2}L^{-2}} & \text{for } k > k_c \end{cases}, \tag{29}$$

where k_c is the cut-off wave number separating trapped and freely propagating harmonics.

5.1 | Wave field

The vertical velocity fields are plotted in Figure 4 for different values of the Richardson number J and for $z_0 = 1$ m and $\lambda = 20$ m. Figure 4a–f shows the wave field for the constant shear case; that is, for $F = \infty$, and thus $m = k$; see Equation (29). The wave fields obtained with the variable shear ($F = 1$) are sketched in Figure 4g–l.

When $F = \infty$, Figure 4a–f shows that the wave field decreases rapidly with altitude, as a result of the presence of turning heights (and hence real m values) for each wave number. For small J, these turning heights $h_t(k)$ in Equation (2) are close to the surface compared with the horizontal scale (i.e., $h_t(1/L)/L < 1$), whereas they are quite far for large J. Accordingly, and for small J, the trapping region is too narrow vertically compared with the horizontal scale of the waves and trapped modes do not emerge, as Figure 4a,b shows. Some signal downstream of the mountain starts to appear at $J = 1$ (Figure 4c), downstream decaying trapped waves dominating the response for $J > 1$. For $J = 2$, we observe one dominant mode confined at low level and substantially decaying downstream (Figure 4d), whereas two modes coexist for $J = 3.5$ (Figure 4e): the longest mode appears at higher altitude than for smaller J, whereas the second much shorter mode emerges from the lower part of the flow, immediately downstream of the mountain and confined near the surface. Note that for $J = 4.5$ this low-level mode is extremely attenuated, consistent with the fact that the surface is strongly absorbing. The fact that the responses present multiple modes and that the dominant one is confined near the surface for small J and developing higher for larger J values is studied further in Section 5.2.

When $F = 1$, Figure 4g–l shows that an important feature of the wave field arises from the harmonics that do not encounter a turning altitude (i.e., for which we have $k < k_c$). These harmonics are free to propagate in the far field and combine to form a system of upward-propagating waves. When $J = 0.2$, in Figure 4g this far-field component dominates aloft; there is very small downstream signal at low level (somehow reminiscent of the very small low-level signal in the constant shear case in Figure 4a). As when $F = \infty$ in Figure 4a, the turning levels are too close to the surface for trapped modes to emerge. Low-level trapped waves become more substantial when J increases (Figure 4h–j) due to the fact that the ducting region thickens. Interestingly, for $J = 0.5$, the trapped wave merges with the system of upward-propagating waves above the mountain. As we shall see in the next section, this occurs because the dominant trapped mode that first arises when J increases has horizontal wave number near the "cut-off" value separating trapped and propagating harmonics; $k \approx k_c = 1/(FL)$—see Equation (29). As J increases further, the wave signal near the surface becomes distinct from that in the far field. It also decays downstream faster when J increases from $J = 1$ to $J = 2$ (see Figure 4i,j below $z = 2$ km). This low-level signal becomes very small for $J = 3.5$ (Figure 4k); we presume that in this case the surface absorption is too large for low-level trapped modes to develop downstream. For even larger J in Figure 4l, and similar to the case with $F = \infty$ in Figure 4j, a second mode emerges above the first one that is no longer confined near the surface but quite significant and much less attenuated.

5.2 | Trapped waves

The downstream evolution of dissipated trapped mountain waves can be characterized using a description in terms of the wave packet of the complex wave number (Teixeira and Argaín, 2022). To follow this approach in a diagnostic context we will use surrogates of the form

$$\mathbf{w}_S = A\, e^{ikx - \alpha x}, \tag{30}$$

where the amplitude A is complex, α denotes the downstream decay rate, and k is the horizontal wave number. To evaluate α and k, we minimize the misfit between $\mathbf{w}(x, z_{max})$ and the surrogate, where z_{max} is the altitude at which the trapped waves present a relative maximum in the amplitude of $\mathbf{w}$. This altitude is obtained by averaging between $5\,\text{km} < x < 40\,\text{km}$ the envelope of w obtained by combining w and its Hilbert transform in the horizontal direction (see Figure 5a). The parameters α and

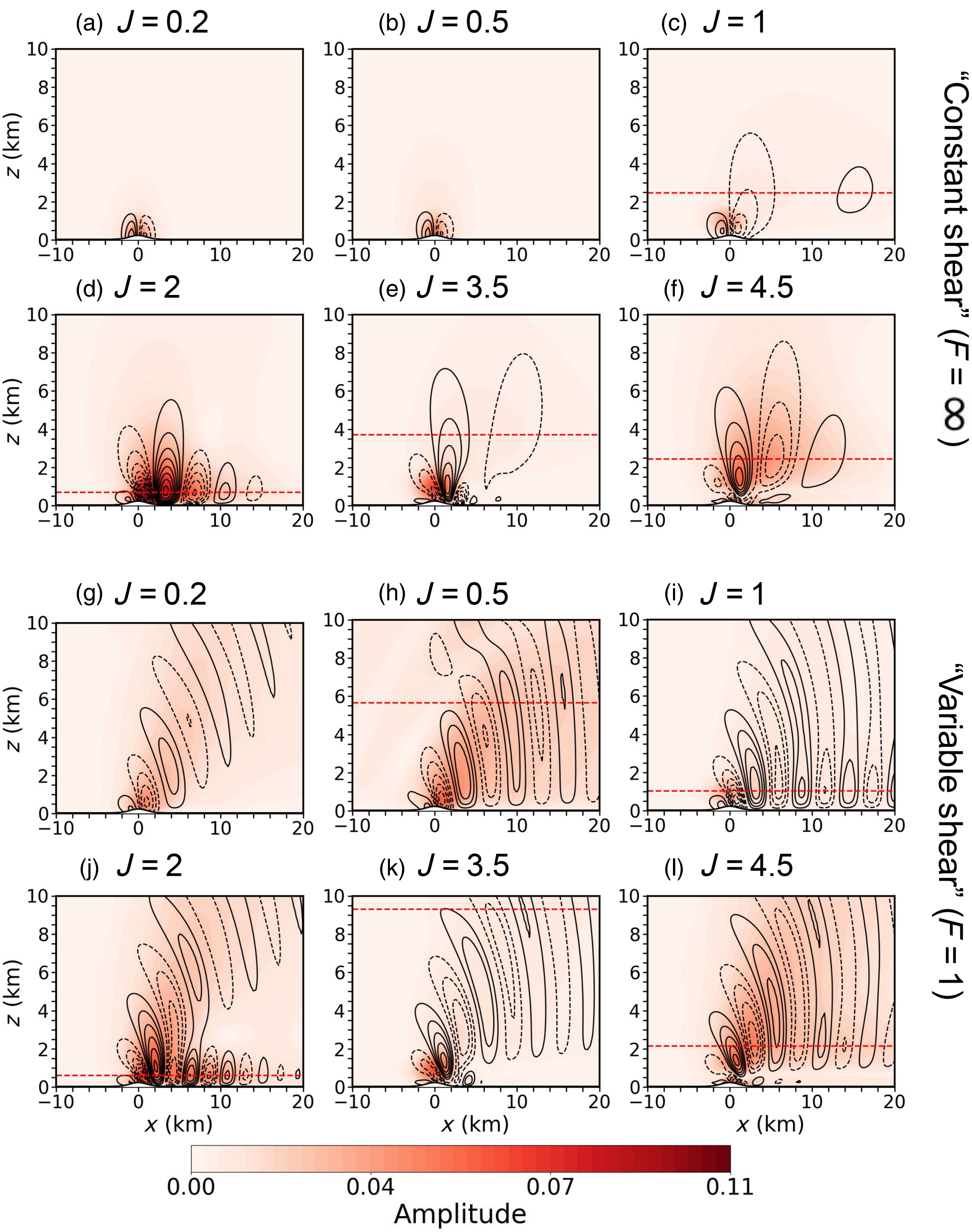


FIGURE 4 Vertical velocity fields $w(x, z)$ for a roughness length $z_0 = 1$ m and a mixing length $\lambda = 20$ m ($z_a = 162$ m): (a)–(f) for the "constant shear case" ($F = \infty$); (g)–(l) for the "variable shear case" with $F = 1$. Between panels in each two case only varies the Richardson number J. In all panels, the contour interval is fixed to 0.01 m·s^{-1} and the colour represents the amplitude of w. The red dashed lines give the altitude where the characteristics of the dominant trapped waves are extracted (see Section 5.2). [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

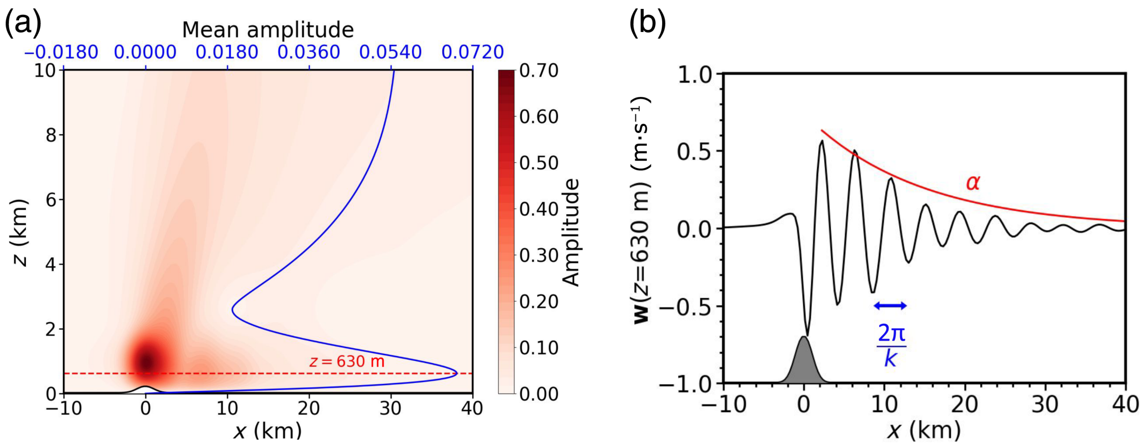


FIGURE 5 Extraction of α and k for $z_a = 162$ m and $J = 2$. (a) Amplitude of the vertical velocity perturbations obtained by combining w and its Hilbert transform (colours), amplitude averaged between $x = 5$ km and $x = 40$ km (blue) and altitude z_{max} of the corresponding maximum amplitude (red). (b) Vertical velocity w at z_{max} and mountain (grey). [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

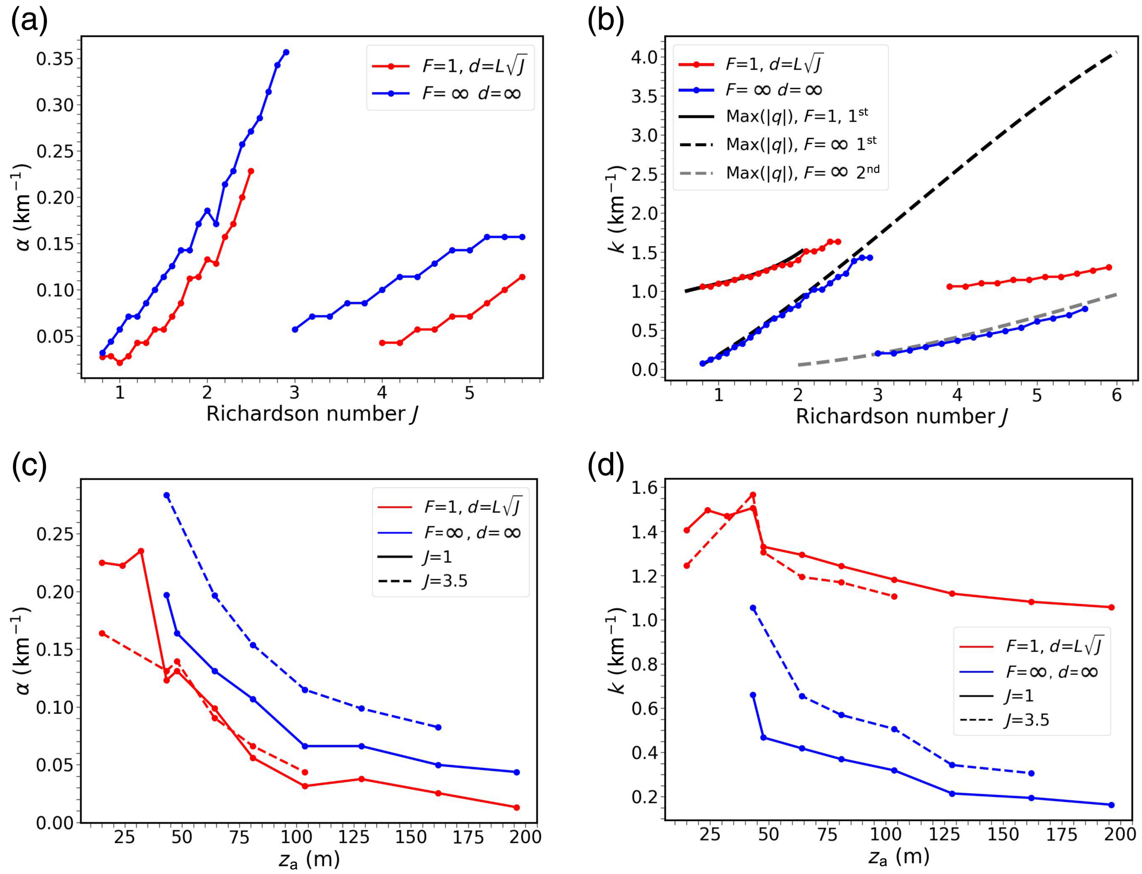


FIGURE 6 (a, c) Spatial decay rate α and (b, d) wave number k extracted from the model: (a, b) for $z_a = 162$ m and as a function of the Richardson number J; (c, d) for two values of J and as a function of the critical level depth z_a. The thin solid lines with dots give the results obtained from the minimization problem when the Froude number $F = \infty$ (blue) and $F = 1$ (red). The thick solid lines in shades of grey in (b) give the first two modes from the maxima of $|q(k)|$ and for k increasing beyond $k_c = 1/(FL)$; that is, $k_c = 0$ when $F = \infty$ and $k_c = 1\,\mathrm{km}^{-1}$ when $F = 1$. [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

k are finally estimated by minimizing the square distance between $\mathbf{w}$ and $\mathbf{w}_S$ at z_{max}; Figure 5b illustrates the values obtained when $J = 2$ and $z_a = 162$ m ($\lambda = 20$ m, $z_0 = 1$ m).

Figure 6 shows how the decay rate α and the wave number k are affected by the Richardson number J and the critical level depth z_a. For a fixed $z_a = 162$ m, the decay

Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society RMetS

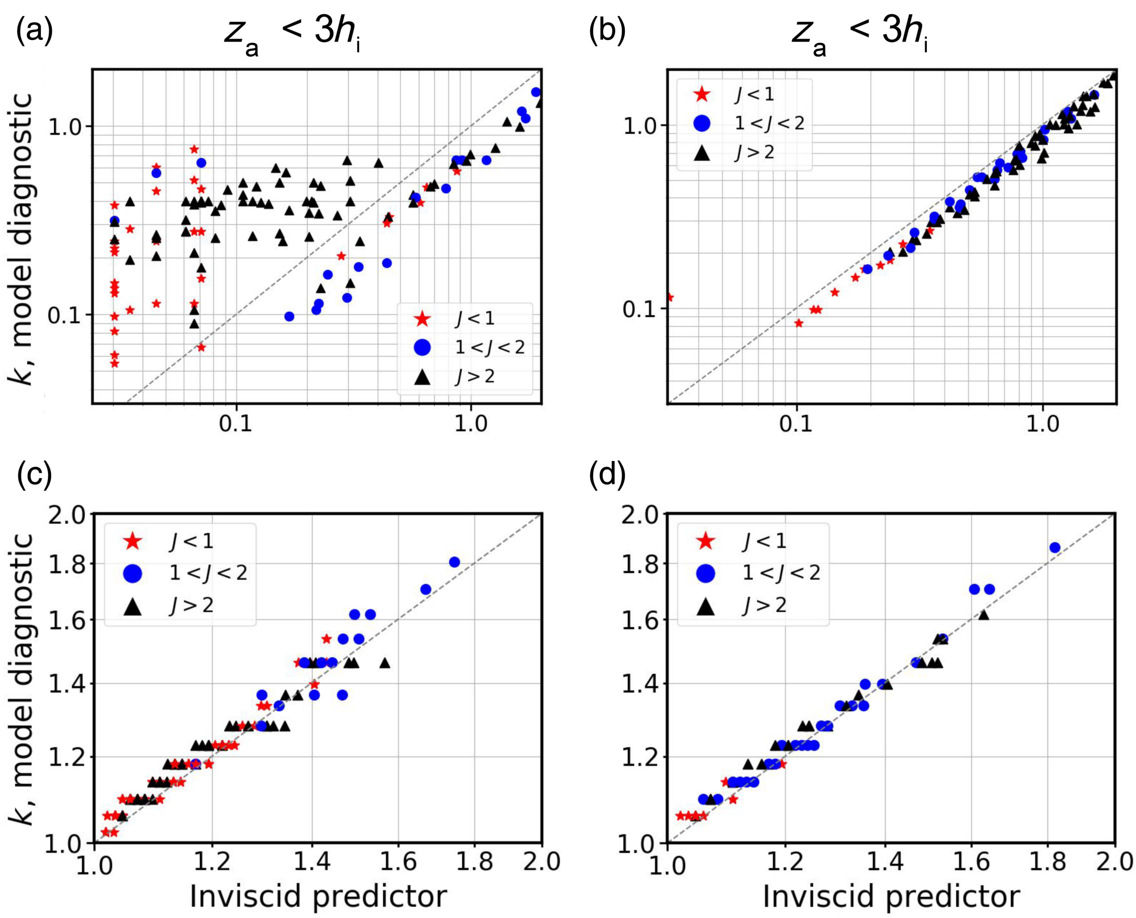


FIGURE 7 Wave numbers evaluated with the full dissipative theories as a function of the wave numbers predicted by the inviscid theory: (a, b) constant shear case, $d = \infty$; (c, d) variable shear case, $d = \sqrt{J}L$. On the left (right) are cases with critical level near (far) below the surface (i.e., $z_a < 3h_i$ and $z_a > 3h_i$ respectively). [Colour figure can be viewed at wileyonlinelibrary.com]

rate in Figure 6a tends to increase with J consistent with the fact that the waves are more absorbed by the surface (see Figure 2b). Nevertheless, the approach for tracking the low-level wave properties produces a jump for $k(J)$ and $\alpha(J)$ as J increases. This behaviour is related to the coexistence of two damped modes; and indeed, when the transition occurs, the pair (k, α) that minimizes $\mathbf{w} - \mathbf{w}_S$ captures the wave that is less absorbed. In general, the less absorbed wave is that which is less confined at low level. This upper level trapped wave is clearly apparent when $J = 4.5$ in both the constant shear and variable shear cases in Figure 4f,l. This is in contrast with the cases at lower J, where the lower level trapped wave is dominant (for $J = 2$, see Figure 4d,l). Note that after the jump in α the decay rate continues to increase when J increases, but the increase is less pronounced because for such waves the interaction with the surface is not as strong. Note also that the decay rates are more pronounced in the constant shear cases ($F = \infty$) then when $F = 1$, again because the waves are more confined and return faster to the surface, where they are absorbed. Note also that in the cases with $F = \infty$ the dominant modes often have smaller k values than in the variable shear case, which simply follows that waves with $k < 1/L$ cannot be trapped when $F = 1$. Similarly, Figure 6c,d shows α and k and as functions of z_a for fixed values of J. It is interesting to emphasize here that, for a given J, the damping rate is larger for small z_a as a result of more dissipation in the lower layer. This is consistent with the results of Section 4 showing that waves are more absorbed when the critical level is near below the surface (z_a small).

Some prediction of the preferred wave numbers can also be obtained using the reflection coefficient resonances; that is, from $|q(k)|$ in Equation (27) but without making the hydrostatic approximation: for trapped waves and when $|q(k)|$ presents a maximum when k varies beyond the cut-off wave number—$k_c = 1/(FL)$; see Equation (29)—the exponentially decaying inviscid solution—$\mathbf{w}_I$ in Equation (18a)—largely dominates the exponentially growing one—$\mathbf{w}_D$. As the Richardson number at the surface $\mathrm{Ri}(z = 0) = 0$, we follow Lott (2007) and assume that the resonance that corresponds to trapped waves is that occurring near the cut-off wave number ($k_c = 0$ in the constant shear case and $k_c = 1\,\mathrm{km}^{-1}$ in the variable shear case). In the following, we therefore only keep the first trapped wave modes with values of k larger than the cut-off wave number and giving maxima in $|q(k)|$. Figure 6b shows that in the constant shear case there is good agreement between the first two modes obtained from the resonances of $|q|$ and the mode captured using the model. In this case, when multiple modes are possible, the diagnostics from the model presented before capture the mode with smaller wave number k since it is less confined near the surface. In the variable shear case, we find some correspondence as well, at least when $J < 3$ and for the first maximum of $|q|$, but proliferation of adjacent resonances in $|q|$ when J is larger make the correspondence less straightforward (not shown).

5.3 | Agreement with the inviscid theory

Figure 6b,d also shows that the dominant wave number of the trapped modes has a tendency to increase when J increases and to decrease when z_a increases. To a large extent this is more related to inviscid dynamics than to dissipations. To establish this, we next ask ourselves if the much simpler inviscid theories developed in the past stay valid. For this purpose, we consider solutions to the inviscid Taylor–Goldstein equation taking for incident flow, Equation (17). For such flow where the surface "log"-layer is absent, the potentially resonant inviscid solutions for $F = \infty$ and $F = 1$ are given by the $\mathbf{w}_I$ in Equations (A.3a) and (B.2a) respectively and for wave numbers k such that $\mathbf{w}_I(k, z = 0) = 0$.

Figure 7a,b plots the wave numbers extracted from the full dissipative theories as a function of the wave numbers predicted by the inviscid theory and in the constant shear case ($F = 0$). In these two plots all the parameters of interest are changed (z_0, λ, J) but we managed to distinguish two quite separate regimes. In Figure 7a the depth of the critical level $z_a < 3h_i$, and in Figure 7b $z_a > 3h_i$. It therefore shows that the inviscid theory is quite right when the critical level is far below the surface compared with the inner layer depth, but it fails when it is quite near. The same comparison in the variable shear case ($F = 1$) in Figure 7c,d delivers about the same message except maybe that the inviscid predictor is more accurate than in the constant shear case since the inviscid predictor works quite well when z_a is quite near below the surface (compare Figure 7a,c).

6 | SUMMARY

The purpose of this article is to analyse the trapped waves that can occur when a turbulent boundary layer interacts with a low mountain ridge. We use for that a linear theory developed in a companion article (Part I), and where turbulence is represented by a viscosity whose amplitude varies according to mixing-length theory. We are aware that such a theory oversimplifies the interaction between turbulence and the obstacle; for instance, it neglects the impact of the disturbance on the mixing length, or the dependence of the mixing length on flow stability. It also neglects that the disturbances produce turbulence in the outer part of the flow; that is, that turbulence and dissipative effects penetrate in the outer layer. Much more fundamentally it also neglects that, at the horizontal scales we analyse, the turbulent eddies can backscatter on the large scale, an effect that is entirely absent when representing turbulence with eddy viscosity; see Sun *et al.* (2015). This being said, we believe that our theory stays more realistic than the theories developed so far to describe the interaction between mountains and boundary layers (Lott *et al.*, 2020a; Smith *et al.*, 2002). Also, the closure we analyse is somehow representative of the turbulence closures adopted in the atmospheric mesoscale models that are used to do large-eddy simulations in mountainous areas (Doyle *et al.*, 2011). In this respect, our theory could help interpreting what occurs in these models.

The first message is that near the surface the undisturbed boundary-layer flow has null Richardson number by construction and is less absorptive than in the constant viscosity case analysed for instance in Lott (2007)—compare Figure 2a,b with Lott (2007, figs 2, 3) respectively. We interpret this by the fact that the surface critical-level absorption at work in Lott (2007) is less effective because the critical level migrates below the surface in the cases considered here. As an illustration, we find that absorptions only compare with those in Lott (2007) when the critical level depth z_a is small. We also find that this depth is large and absorption is small when the limit value of the mixing length is large, as if more dissipation resulted in less absorption! This is because, at fixed roughness length, increasing λ yields a larger critical level depth z_a. Owing to the central role of this parameter, we could suggest to diagnose it in practice; for instance, by fitting a linear function to the boundary-layer winds above the surface layer and identify at which depth this function is null below the surface. We also found that absorption increases with the Richardson number value of the background flow in the boundary layer, and this occurs because more oscillatory behaviours near the surface result in more absorption, as in Lott (2007).

We next relate the absorptive properties of the inner layer to the decay rate of the trapped waves downstream and found that they are indeed well related. We also found that the trapped waves often have horizontal wave numbers quite near the cut-off value $\sqrt{N(\infty)}/U(\infty)$, a behaviour we also found when the Richardson number at the surface is null in Lott (2007), as is always the case here. For quite large Richardson numbers aloft the inner layer J, which are cases where the surface absorption is strong, the analysis also reveals the presence of gravity waves propagating downstream. Their decay rate is quite small despite the fact that the surface is supposedly absorbing them substantially. This new class of waves is characterized by the fact that they have small amplitude near the surface and large amplitude at the boundary-layer height and above. As these waves appear when J is quite large, the fact that the ducting region depth becomes quite large is presumably central. Indeed, they are reflected back toward the surface at turning points much higher than when J is small, and we can presume that they reach the surface at much larger distance downstream than when J is smaller. These waves are therefore absorbed at the surface at a much longer distance from the obstacle than those that stay confined near the surface.

We have also tried to test if the more classical inviscid theories can still be applied to predict trapped waves, and when considering boundary-layer flow without surface "log"-layer. We found that it is generally the case, at least for predicting the horizontal wave numbers. Some discrepancies can nevertheless appear when dissipations are large, which in our case means that the critical level depth z_a is small.

FUNDING INFORMATION

VESRI Schmidt future, project Datawave; CEA/ENS Laboratoire de Recherche Conventionné "Yves Rocard", project BLOWAVES.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

The theoretical model used to support the findings of this study is available from the corresponding author upon request.

ORCID

Francois Lott https://orcid.org/0000-0003-2126-5510

REFERENCES

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (1964) *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, New-York: Dover Publications, Inc.

Belcher, S.E., Newley, T.M.J. & Hunt, J.C.R. (1993) The drag on an undulating surface induced by the flow of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 249, 557–596.

Belcher, S.E. & Wood, N. (1996) Form and wave drag due to stably stratified turbulent flow over low ridges. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 122, 863–902.

Booker, J.R. & Bretherton, F.P. (1967) The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 27, 102–109.

Bougeault, P., Binder, P., Buzzi, A., Dirks, R., Houze, R., Kuettner, J. et al. (2001) The map special observing period. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 82, 433–462.

Doyle, J.D., Gaberšek, S., Jiang, Q., Bernardet, L., Brown, J.M., Dörnbrack, A. et al. (2011) An intercomparison of t-rex mountain-wave simulations and implications for mesoscale predictability. *Monthly Weather Review*, 139, 2811–2831.

Drazin, P.G. (1958) The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid. *Journal of Fluid Mechanics*, 4, 214–224.

Durran, D.R. (1986) Another look at downslope windstorms. Part I: The development of analogs to supercritical flow in an infinitely deep, continuously stratified fluid. *Journal of Atmospheric Sciences*, 43, 2527–2543. Available from: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/43/21/1520-0469_1986_043_2527_aladwp_2_0_co_2.xml

Georgelin, M., Richard, E., Petitdidier, M. & Druilhet, A. (1994) Impact of subgrid-scale orography parameterization on the simulation of orographic flows. *Monthly Weather Review*, 122, 1509–1522. Available from: https://journals.ametsoc.org/view/journals/mwre/122/7/1520-0493_1994_122_1509_iossop_2_0_co_2.xml

Goger, B., Rotach, M.W., Gohm, A., Stiperski, I., Fuhrer, O. & de Morsier, G. (2019) A new horizontal length scale for a three-dimensional turbulence parameterization in mesoscale atmospheric modeling over highly complex terrain. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 58, 2087–2102.

Howard, L.N. (1961) Note on a paper of john w miles. *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 509–512.

Hunt, J.C.R., Richards, K.J. & Brighton, P.W.M. (1988) Stably stratified shear flow over low hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 114, 859–886.

Jackson, P.S. & Hunt, J.C.R. (1975) Turbulent wind flow over low hill. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 101, 929–955.

Jansing, L., Papritz, L., Dürr, B., Gerstgrasser, D. & Sprenger, M. (2022) Classification of alpine south Foehn based on 5 years of kilometre-scale analysis data. *Weather and Climate Dynamics*, 3, 1113–1138.

Jiang, Q., Doyle, J.D. & Smith, R.B. (2006) Interaction between trapped waves and boundary layers. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 63, 617–633.

Keller, T.L. (1994) Implications of the hydrostatic assumption on atmospheric gravity waves. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 51, 1915–1929.

Lehner, M. & Rotach, M.W. (2018) Current challenges in understanding and predicting transport and exchange in the atmosphere over mountainous terrain. *Atmosphere*, 9(7), 276. Available from: https://www.mdpi.com/2073-4433/9/7/276

Lott, F. (2007) The reflection of a stationary gravity wave by a viscous boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 139, 3363–3371.

Lott, F., Beljaars, A., Pauget, L. & Deremble, B. (2023) Neutral and stratified turbulent boundary layer flow over low mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 150(758), 195–212. Available from: https://doi.org/10.1002/qj.4591.

Lott, F., Deremble, B. & Soufflet, C. (2020a) Mountain waves produced by a stratified boundary layer flow. part i: Hydrostatic case. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 77, 1683–1697.

Lott, F., Deremble, B. and Soufflet, C. (2020b) Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer.

part ii: Form drag, wave drag, and transition from downstream sheltering to upstream blocking. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 78, 1683–1697.
Lott, F., Kelder, H. & Teitelbaum, H. (1992) A transition from Kelvin–Helmholtz instabilities to propagating wave instabilities. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, 4, 1990–1997.
Miles, J.W. (1961) On the stability of heterogeneous shear flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 10, 496–508.
Miller, P.P. & Durran, D.R. (1991) On the sensitivity of downslope windstorms to the asymmetry of the mountain profile. *Journal of Atmospheric Sciences*, 48, 1457–1473. Available from: https://journals.ametsoc.org/view/journals/atsc/48/12/1520-0469_1991_048_1457_otsodw_2_0_co_2.xml
Richard, E., Mascart, P. & Nickerson, E.C. (1989) The role of surface friction in downslope windstorms. *Journal of Applied Meteorology*, 28, 241–251.
Sachsperger, J., Serafin, S., Grubišić, V., Stiperski, I. & Paci, A. (2017) The amplitude of lee waves on the boundary-layer inversion. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143, 27–36.
Scorer, R.S. (1949) Theory of waves in the lee of mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 75, 41–56.
Serafin, S., Adler, B., Cuxart, J., De Wekker, S.F.J., Gohm, A., Grisogono, B. et al. (2018) Exchange processes in the atmospheric boundary layer over mountainous terrain. *Atmosphere*, 9(3), 102. Available from: https://doi.org/10.3390/atmos9030102
Smith, R.B., Jiang, Q. & Doyle, J.D. (2006) A theory of gravity wave absorption by a boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 63, 774–781.
Smith, R.B., Skubis, S., Doyle, J.D., Broad, A.S., Kiemle, C. & Volkert, H. (2002) Mountain waves over the mont blanc: Influence of a stagnant boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 59, 2073–2092.
Soufflet, C., Lott, F. and Deremble, B. (2022) Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer. Part iii: Trapped lee waves and horizontal momentum transport. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 79, 1601–01614.
Sun, J., Nappo, C.J., Mahrt, L., Belušić, D., Grisogono, B., Stauffer, D.R. et al. (2015) Review of wave-turbulence interactions in the stable atmospheric boundary layer. *Reviews of Geophysics*, 53, 956–993.
Teixeira, M.A.C. & Argaín, J.L. (2022) The drag exerted by weakly dissipative trapped lee waves on the atmosphere: Application to scorer's two-layer model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 148, 3211–3230.
Teixeira, M.A.C., Argaín, J.L. & Miranda, P.M.A. (2013) Drag produced by trapped lee waves and propagating mountain waves in a two-layer atmosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 139, 964–981. Available from: https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.2008
Tian, Y., Duarte, J.Q. & Schmidli, J. (2023) A station-based evaluation of near-surface south foehn evolution in cosmo-1. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 150, 290–317.
Tsiringakis, A., Steeneveld, G.J. & Holtslag, A.A.M. (2017) Small-scale orographic gravity wave drag in stable boundary layers and its impact on synoptic systems and near-surface meteorology. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143, 1504–1516. Available from: https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/qj.3021
Vosper, S.B. (2004) Inversion effects on mountain lee waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130, 1723–1748. Available from: https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1256/qj.03.63
Vosper, S.B., Ross, A.N., Renfrew, I.A., Sheridan, P., Elvidge, A.D. & Grubišić, V. (2018) Current challenges in orographic flow dynamics: Turbulent exchange due to low-level gravity-wave processes. *Atmosphere*, 9(9), 361. https://www.mdpi.com/2073-4433/9/9/361
Weng, W., Chan, L., Taylor, P. & Xu, D. (1997) Modelling stably stratified boundary-layer flow over low hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123, 1841–1866.
Wurtele, M.G., Sharman, R.D. & Datta, A. (1996) Atmospheric lee waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28, 429–476.
Yu, C.L. & Teixeira, M.A.C. (2014) Impact of non-hydrostatic effects and trapped lee waves on mountain wave drag in directionally sheared flow. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 141, 1572–1585.

How to cite this article: Pauget, L., Lott, F. & Millet, C. (2024) Mountain waves developing inside and aloft stably stratified turbulent boundary layers. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 1–15. Available from: https://doi.org/10.1002/qj.4832

APPENDIX A. OUTER SOLUTIONS IN THE CONSTANT SHEAR CASE

In the outer region, the solutions are the inviscid solutions of the Taylor–Goldstein equation,

$$\frac{d^2\mathbf{w}}{dz^2} + \left(\frac{N^2}{U^2} - \frac{U_{zz}}{U} - k^2\right)\mathbf{w} = 0, \tag{A.1}$$

which in the constant shear case approximates to the Bessel equation:

$$\frac{d^2\mathbf{w}}{dz^2} + \left[\frac{J}{(z+z_a)^2} - k^2\right]w = 0. \tag{A.2}$$

A solution in terms of the Hankel function and for exponentially decaying disturbances in the far field is developed in Lott *et al.* (2020b); it is extended here to include exponentially growing solutions, and when $k > 0$ is written

$$\mathbf{w}_I = i\sqrt{\frac{\pi k(z+z_a)}{2}} \times e^{-\mu\pi/2} H^{(1)}_{i\mu}[ik(z+z_a)] \underbrace{\approx}_{z\to\infty} e^{-k(z+z_a)}, \tag{A.3a}$$

$$\mathbf{w}_D = \sqrt{\frac{\pi k(z+z_a)}{2}} \times e^{+\mu\pi/2} H^{(2)}_{i\mu}[ik(z+z_a)] \underbrace{\approx}_{z\to\infty} e^{+k(z+z_a)}, \tag{A.3b}$$

where μ is given in Equation (19). In the far field, the asymptotic behaviours of Equations (A.3a) and (A.3b) are as in Equations (18a) and (18b), keeping in mind that $m = k$ in Equation (19) when $d = \infty$. Near the surface, Equations (A.3a) and (A.3b) are as Equations (18a) and (18b) as well—see Abramowitz and Stegun (1964, eqs 9.1.3, 9.1.4, 9.1.7)—and by taking

$$a_1 = \frac{-\mathrm{i}\sqrt{\pi}}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(1-\mathrm{i}\mu)}\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2-\mathrm{i}\mu},$$
$$a_2 = a_1^*, \tag{A.4a}$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{\mu\pi}}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(1-\mathrm{i}\mu)}\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2-\mathrm{i}\mu},$$
$$a_4 = -\frac{\sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\mu\pi}}{\sinh(\mu\pi)\Gamma(1+\mathrm{i}\mu)}\left(\frac{k}{2}\right)^{1/2+\mathrm{i}\mu}. \tag{A.4b}$$

APPENDIX B. OUTER SOLUTIONS IN THE VARIABLE SHEAR CASE

In the variable shear case, $d \neq \infty$, the solution for upward-propagating waves was developed in Soufflet *et al.* (2022, app), and the calculation is extended again here to include downward-propagating waves. More precisely, and when taking $r = \tanh^2[(z+z_\mathrm{a})/d]$, the Taylor–Goldstein equation, Equation (A.1), becomes eq. A1 in Soufflet *et al.* (2022), where there it is transformed into a hypergeometric equation when accounting for the change of variable:

$$\mathbf{w} = r^{1/4+\mathrm{i}\mu/2}(1-r)^{-md/2}W, \tag{B.1}$$

where μ and m are in Equation (19) again—see also Lott *et al.* (1992, eq. 8). Two inviscid solutions are as follows:

$$\mathbf{w}_\mathrm{I} = 2^{-md}r^{1/4+\mathrm{i}\mu/2}(1-r)^{-md/2}W_{2(1)} \underbrace{\approx}_{z\to\infty} \mathrm{e}^{-m(z+z_\mathrm{a})} \tag{B.2a}$$

$$\mathbf{w}_\mathrm{D} = 2^{+md}r^{1/4+\mathrm{i}\mu/2}(1-r)^{-md/2}W_{1(1)} \underbrace{\approx}_{z\to\infty} \mathrm{e}^{+m(z+z_\mathrm{a})}, \tag{B.2b}$$

where $\mathbf{w}_\mathrm{I}$ and $\mathbf{w}_\mathrm{D}$ are unique-amplitude waves propagating upward and downward respectively when m is imaginary. The solutions $W_{1(1)}$ and $W_{2(1)}$ are expressed with the hypergeometric function F:

$$W_{1(1)} = r^{-\mathrm{i}\mu} \times F\left(-\frac{1}{4}-\frac{\mathrm{i}\mu}{2}-\frac{md}{2}, \frac{5}{4}-\frac{\mathrm{i}\mu}{2}-\frac{md}{2}; 1-md; 1-r\right), \tag{B.3a}$$

$$W_{2(1)} = (1-r)^{md} \times F\left(\frac{\mathrm{i}\mu}{2}+\frac{5}{4}+\frac{md}{2}, \frac{\mathrm{i}\mu}{2}-\frac{1}{4}+\frac{md}{2}; 1+md; 1-r\right). \tag{B.3b}$$

Then, to evaluate the solution near the surface, we use Abramowitz and Stegun (1964, eq. 15.3.6) to link $W_{1(1)}$, $W_{2(1)}$, $W_{1(0)}$, and $W_{2(0)}$ with the help of A_1, A_2, A_3, and A_4 calculated in Soufflet *et al.* (2022, app):

$$W_{1(0)} = A_1W_{1(1)} + A_3W_{2(1)},$$
$$W_{2(0)} = A_2W_{1(1)} + A_4W_{2(1)}. \tag{B.4}$$

That leads to a total solution (combination of upward- and downward-propagating waves):

$$D_\mathrm{o}\mathbf{w}_\mathrm{D} + U_\mathrm{p}\mathbf{w}_\mathrm{I} = r^{\alpha_1}(1-r)^{\gamma_1}[D_\mathrm{o}(a_4\mathbf{w}_{1(0)} + a_3\mathbf{w}_{2(0)}) + U_\mathrm{p}(a_2\mathbf{w}_{1(0)} + a_1\mathbf{w}_{2(0)})], \tag{B.5}$$

where $\mathbf{w}_{1(0)}$ ($\mathbf{w}_{2(0)}$) is related to $W_{1(0)}$ ($W_{2(0)}$) by using Equation (B.1) and

$$a_j = \begin{cases} (-1)^{j-1}\dfrac{2^{-md}A_j}{A_1A_4 - A_3A_2}d^{-1/2+(-1)^{j-1}\mathrm{i}\mu} & \text{for } j = 1, 2, \\ (-1)^{j}\dfrac{2^{md}A_j}{A_1A_4 - A_3A_2}d^{-1/2+(-1)^{j-1}\mathrm{i}\mu} & \text{for } j = 3, 4. \end{cases} \tag{B.6}$$

Bibliographie

Abatzoglou, J. T., Kolden, C. A., Williams, A. P., Sadegh, M., Balch, J. K., and Hall, A. (2023). Downslope wind-driven fires in the western united states. *Earth's Future*, 11(5) :e2022EF003471. e2022EF003471 2022EF003471.

Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1964). *Handbook of mathematical functions : with formulas, graphs, and mathematical tables*, volume 55. Courier Corporation.

Alexander, M. and Rosenlof, K. (1996). Nonstationary gravity wave forcing of the stratospheric zonal mean wind. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 101.

Alexander, M. J. and Holton, J. R. (2004). On the spectrum of vertically propagating gravity waves generated by a transient heat source. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 4(4) :923–932.

Amezcua, J. and Barton, Z. (2021). Assimilating atmospheric infrasound data to constrain atmospheric winds in a two-dimensional grid. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 147(740) :3530–3554.

Amezcua, J., Näsholm, S. P., Blixt, E. M., and Charlton-Perez, A. J. (2020). Assimilation of atmospheric infrasound data to constrain tropospheric and stratospheric winds. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 146(731) :2634–2653.

Arrowsmith, S. J., Marcillo, O., and Drob, D. P. (2013). A framework for estimating stratospheric wind speeds from unknown sources and application to the 2010 december 25 bolide. *Geophysical Journal International*, 195(1) :491–503.

Assink, J., Waxler, R., and Drob, D. (2012). On the sensitivity of infrasonic traveltimes in the equatorial region to the atmospheric tides. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 117(D1).

Assink, J., Waxler, R., Frazier, W., and Lonzaga, J. (2013). The estimation of upper atmospheric wind model updates from infrasound data. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 118(19) :10–707.

Assink, J., Waxler, R., and Velea, D. (2017). A wide-angle high mach number modal expansion for infrasound propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 141(3) :1781–1792.

Balachandran, N. K., Donn, W. L., and Rind, D. H. (1977). Concorde sonic booms as an atmospheric probe. *Science*, 197(4298) :47–49.

Baldwin, M. P., Gray, L. J., Dunkerton, T. J., Hamilton, K., Haynes, P. H., Randel, W. J., Holton, J. R., Alexander, M. J., Hirota, I., Horinouchi, T., Jones, D. B. A., Kinnersley, J. S., Marquardt, C., Sato, K., and Takahashi, M. (2001). The quasi-biennial oscillation. *Reviews of Geophysics*, 39(2) :179–229.

Banta, R. M., Berri, G., Blumen, W., Carruthers, D. J., Dalu, G., Durran, D. R., Egger, J., Garratt, J., Hanna, S. R., Hunt, J., et al. (1990). Mountain waves and downslope winds. *Atmospheric processes over complex terrain*, pages 59–81.

Belcher, S. E., Newley, T. M. J., and Hunt, J. C. R. (1993). The drag on an undulating surface induced by the flow of a turbulent boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics*, 249 :557–596.

Belcher, S. E. and Wood, N. (1996). Form and wave drag due to stably stratified turbulent flow over low ridges. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 122 :863–902.

Beljaars, A., Brown, A., and Wood, N. (2006). A new parametrization of turbulent orographic form drag. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130 :1327 – 1347.

Bertin, M., Millet, C., and Bouche, D. (2014). A low-order reduced model for the long range propagation of infrasound in the atmosphere.

Blackadar, A. K. (1962). The vertical distribution of wind and turbulent exchange in a neutral atmosphere. *Journal of Geophysical Research (1896-1977)*, 67(8) :3095–3102.

Blixt, E. M., Näsholm, S. P., Gibbons, S. J., Evers, L. G., Charlton-Perez, A. J., Orsolini, Y. J., and Kværna, T. (2019). Estimating tropospheric and stratospheric winds using infrasound from explosions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 146(2) :973–982.

Blom, P. and Waxler, R. (2021). Characteristics of thermospheric infrasound predicted using ray tracing and weakly non-linear waveform analyses. *JOURNAL OF THE ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA*, 149(5) :3174–3188.

Booker, J. R. and Bretherton, F. P. (1967). The critical layer for internal gravity waves in a shear flow. *J. Fluid Mech.*, 27 :102–109.

Bougeault, P., Binder, P., Buzzi, A., Dirks, R., Houze, R., Kuettner, J., Smith, R. B., Steinacker, R., and Volkert, H. (2001). The map special observing period. *Bulletin of the American Meteorological Society*, 82(3) :433–462.

Brekhovskikh, L. M. and Godin, O. A. (2012). *Acoustics of layered media I : Plane and quasi-plane waves*, volume 5. Springer Science & Business Media.

Bretherton, C. (1988). Group velocity and the linear response of stratified fluids to internal heat or mass sources. *Journal of Atmospheric Sciences*, 45(1) :81 – 94.

Campus, P. and Christie, D. (2009). Worldwide observations of infrasonic waves. *Infrasound monitoring for atmospheric studies*, pages 185–234.

Carruthers, D. J. and Hunt, J. C. R. (1990). *Fluid Mechanics of Airflow over Hills : Turbulence, Fluxes, and Waves in the Boundary Layer*, pages 83–107. American Meteorological Society, Boston, MA.

Ceranna, L., Le Pichon, A., Green, D., and Mialle, P. (2009). The buncefield explosion : a benchmark for infrasound analysis across central europe. *Geophysical Journal International*, 177(2) :491–508.

Chunchuzov, I., Kulichkov, S., Perepelkin, V., Popov, O., Firstov, P., Assink, J., and Marchetti, E. (2015). Study of the wind velocity-layered structure in the stratosphere, mesosphere, and lower thermosphere by using infrasound probing of the atmosphere. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 120(17) :8828–8840.

Chunchuzov, I., Kulichkov, S., Popov, O., and Hedlin, M. (2014). Modeling propagation of infrasound signals observed by a dense seismic network. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 135(1) :38–48.

Clark, T. L. (1977). A small-scale dynamic model using a terrain-following coordinate transformation. *Journal of Computational Physics*, 24(2) :186–215.

Clark, T. L., Hauf, T., and Kuettner, J. P. (1986). Convectively forced internal gravity waves : Results from two-dimensional numerical experiments. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 112(474) :899–925.

Clements, C. B., Whiteman, C. D., and Horel, J. D. (2003). Cold-air-pool structure and evolution in a mountain basin : Peter sinks, utah. *Journal of Applied Meteorology*, 42(6) :752 – 768.

Cugnet, D., de la Camara, A., Lott, F., Millet, C., and Ribstein, B. (2019). Non-orographic gravity waves : representation in climate models and effects on infrasound. *Infrasound monitoring for atmospheric studies : Challenges in middle atmosphere dynamics and societal benefits*, pages 827–844.

de Groot-Hedlin, C. (2008). Finite-difference time-domain synthesis of infrasound propagation through an absorbing atmosphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(3) :1430–1441.

de la Cámara, A. and Lott, F. (2015). A parameterization of gravity waves emitted by fronts and jets. *Geophysical Research Letters*, 42(6) :2071–2078.

Del Pino, S., Després, B., Havé, P., Jourdren, H., and Piserchia, P. (2009). 3d finite volume simulation of acoustic waves in the earth atmosphere. *Computers & Fluids*, 38(4) :765–777.

Delclos, C., Blanc, E., Broche, P., Glangeaud, F., and Lacoume, J. (1990). Processing and interpretation of microbarograph signals generated by the explosion of mount st. helens. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 95(D5) :5485–5494.

Dergham, G. and Millet, C. (2013). Range-dependent propagation modeling of infrasound in complex atmospheres. In *43rd AIAA Fluid Dynamics Conference*, page 3209.

Dewan, E. M. and Good, R. E. (1986). Saturation and the “universal” spectrum for vertical profiles of horizontal scalar winds in the atmosphere. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 91(D2) :2742–2748.

Donn, W. L. and Rind, D. (1971). Natural infrasound as an atmospheric probe. *Geophysical Journal International*, 26(1-4) :111–133.

Down, W. L. (1967). Natural infrasound of five seconds period. *Nature*, 215(5109) :1469–1470.

Doyle, J. D., Gaberšek, S., Jiang, Q., Bernardet, L., Brown, J. M., Dörnbrack, A., Filaus, E., Grubišić, V., Kirshbaum, D. J., Knoth, O., Koch, S., Schmidli, J., Stiperski, I., Vosper, S., and Zhong, S. (2011). An intercomparison of t-rex mountain-wave simulations and implications for mesoscale predictability. *Monthly Weather Review*, 139(9) :2811 – 2831.

Drazin, P. G. (1958). The stability of a shear layer in an unbounded heterogeneous inviscid fluid. *J. Fluid Mech.*, 4 :214–224.

Drob, D., Broutman, D., Hedlin, M., Winslow, N., and Gibson, R. (2013). A method for specifying atmospheric gravity wavefields for long-range infrasound propagation calculations. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 118(10) :3933–3943.

Drob, D. P., Emmert, J. T., Crowley, G., Picone, J. M., Shepherd, G. G., Skinner, W., Hays, P., Niciejewski, R. J., Larsen, M., She, C. Y., Meriwether, J. W., Hernandez, G., Jarvis, M. J., Sipler, D. P., Tepley, C. A., O'Brien, M. S., Bowman, J. R., Wu, Q., Murayama, Y., Kawamura, S., Reid, I. M., and Vincent, R. A. (2008). An empirical model of the earth's horizontal wind fields : Hwm07. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 113(A12).

Drob, D. P., Meier, R., Picone, J. M., and Garcés, M. M. (2009). Inversion of infrasound signals for passive atmospheric remote sensing. *Infrasound monitoring for atmospheric studies*, pages 701–731.

Drob, D. P., Picone, J. M., and Garcés, M. (2003). Global morphology of infrasound propagation. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 108(D21).

Dunford, N. and Schwartz, J. (1971). Linear operators ; part i (1967), part ii (1967), part iii.

Durran, D. R. (1986). Another look at downslope windstorms. part i : The development of analogs to supercritical flow in an infinitely deep, continuously stratified fluid. *Journal of Atmospheric Sciences*, 43(21) :2527 – 2543.

Durran, D. R. (1990). Mountain waves and downslope winds.

Dörnbrack, A. and Nappo, C. (1997). A note on the application of linear wave theory at a critical level. *Boundary-Layer Meteorology*, 82 :399–416.

Eckermann, S. D. (2011). Explicitly stochastic parameterization of nonorographic gravity wave drag. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 68(8) :1749 – 1765.

Eckermann, S. D. and Hocking, W. K. (1989). Effect of superposition on measurements of atmospheric gravity waves : A cautionary note and some reinterpretations. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 94(D5) :6333–6339.

Eliassen, A. (1961). On the transfer of energy in stationary mountain waves. *Geofys. Publ.*, 22 :1–23.

Evers, L. G. and Haak, H. W. (2001). Listening to sounds from an exploding meteor and oceanic waves. , 28(1) :41–44.

Fee, D., Garces, M., and Steffke, A. (2010). Infrasound from tungurahua volcano 2006–2008 : Strombolian to plinian eruptive activity. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 193(1-2) :67–81.

Fee, D. and Matoza, R. S. (2013). An overview of volcano infrasound : From hawaiian to plinian, local to global. *Journal of Volcanology and Geothermal Research*, 249 :123–139.

Fricke, J. T., Evers, L. G., Smets, P. S., Wapenaar, K., and Simons, D. (2014). Infrasonic interferometry applied to microbaroms observed at the large aperture infrasound array in the netherlands. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 119(16) :9654–9665.

Gastineau, G., Lott, F., Mignot, J., and Hourdin, F. (2020). Alleviation of an arctic sea ice bias in a coupled model through modifications in the subgrid-scale orographic parameterization. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 12(9) :e2020MS002111.

Georgelin, M., Richard, E., Petitdidier, M., and Druilhet, A. (1994). Impact of subgrid-scale orography parameterization on the simulation of orographic flows. *Monthly Weather Review*, 122(7) :1509 – 1522.

Gibbons, S. J., Kværna, T., and Mykkeltveit, S. (2015). Could the IMS Infrasound Stations Support a Global Network of Small Aperture Seismic Arrays ? *Seismological Research Letters*, 86(4) :1148–1159.

Gibbons, S. J., Kværna, T., Tiira, T., and Kozlovskaya, E. (2020). A benchmark case study for seismic event relative location. *Geophysical Journal International*, 223(2) :1313–1326.

Giovannini, L., Ferrero, E., Karl, T., Rotach, M. W., Staquet, C., Trini Castelli, S., and Zardi, D. (2020). Atmospheric pollutant dispersion over complex terrain : Challenges and needs for improving air quality measurements and modeling. *Atmosphere*, 11(6).

Godin, O. A. (2002). An effective quiescent medium for sound propagating through an inhomogeneous, moving fluid. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(4) :1269–1275.

Goger, B., Rotach, M. W., Gohm, A., Stiperski, I., Fuhrer, O., and de Morsier, G. (2019). A new horizontal length scale for a three-dimensional turbulence parameterization in mesoscale atmospheric modeling over highly complex terrain. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 58(9) :2087 – 2102.

Grant, A. L. M. and Mason, P. J. (1990). Observations of boundary-layer structure over complex terrain. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 116(491) :159–186.

Gregory, D., Shutts, G., and Mitchell, J. (1998). A new gravity-wave-drag scheme incorporating anisotropic orography and low-level wave breaking : Impact upon the climate of the uk meteorological office unified model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 124(546) :463–493.

Hagerty, M. T., Kim, W.-Y., and Martysevich, P. (2002). Infrasound detection of large mining blasts in kazakstan. *Monitoring the Comprehensive Nuclear-Test-Ban Treaty : Data Processing and Infrasound*, pages 1063–1079.

Hedin, A. E., Fleming, E., Manson, A., Schmidlin, F., Avery, S., Clark, R., Franke, S. J., Fraser, G., Tsuda, T., Vial, F., et al. (1996). Empirical wind model for the upper, middle and lower atmosphere. *Journal of atmospheric and terrestrial physics*, 58(13) :1421–1447.

Hedlin, M. A. and Drob, D. P. (2014). Statistical characterization of atmospheric gravity waves by seismoacoustic observations. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 119(9) :5345–5363.

Hertzog, A., Alexander, M., and Plougonven, R. (2012). On the intermittency of gravity wave momentum flux in the stratosphere. *Journal of Atmospheric Sciences*, 69 :1589–.

Hertzog, A., Boccara, G., Vincent, R. A., Vial, F., and Cocquerez, P. (2008). Estimation of gravity wave momentum flux and phase speeds from quasi-lagrangian stratospheric balloon flights. part ii : Results from the vorcore campaign in antarctica. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(10) :3056 – 3070.

Hines, C. O. (1991). The saturation of gravity waves in the middle atmosphere. part ii : Development of doppler-spread theory. *Journal of Atmospheric Sciences*, 48(11) :1361 – 1379.

Holton, J. (1992). *An Introduction to Dynamic Meteorology.*, volume 3rd Edition.

Holton, J. R. and Hakim, G. J. (2013). Chapter 8 - the planetary boundary layer. In Holton, J. R. and Hakim, G. J., editors, *An Introduction to Dynamic Meteorology (Fifth Edition)*, pages 255–277. Academic Press, Boston, fifth edition edition.

Howard, L. N. (1961). Note on a paper of john w miles. *J. Fluid Mech.*, 10 :509–512.

Hunt, J. C. R., Richards, K. J., and Brighton, P. W. M. (1988). Stably stratified shear flow over low hills. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 114 :859–886.

Jackson, P. S. and Hunt, J. C. R. (1975). Turbulent wind flow over low hill. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 101 :929–955.

Jansing, L., Papritz, L., Dürr, B., Gerstgrasser, D., and Sprenger, M. (2022). Classification of alpine south foehn based on 5 years of kilometre-scale analysis data. *Weather and Climate Dynamics*, 3(3) :1113–1138.

Jensen, F. B., Kuperman, W. A., Porter, M. B., Schmidt, H., and Tolstoy, A. (2000). *Computational ocean acoustics*, volume 2000. Springer.

Jiang, Q., Doyle, J. D., and Smith, R. B. (2006). Interaction between trapped waves and boundary layers. *J. Atmos. Sci.*, 63 :617–633.

Kaplan, M. L., Koch, S. E., Lin, Y.-L., Weglarz, R. P., and Rozumalski, R. A. (1997). Numerical simulations of a gravity wave event over ccope. part i : The role of geostrophic adjustment in mesoscale jetlet formation. *Monthly Weather Review*, 125(6) :1185 – 1211.

Keller, T. L. (1994). Implications of the hydrostatic assumption on atmospheric gravity waves. *Journal of the atmospheric sciences*, 51(13) :1915–1929.

Koppel, D. (1964). On the stability of flow of a thermally stratified fluid under the action of gravity. *Journal of Mathematical Physics*, 5(7) :963–982.

Kruse, C. G., Richter, J. H., Alexander, M. J., Bacmeister, J. T., Heale, C., and Wei, J. (2023). *Gravity Wave Drag Parameterizations for Earth's Atmosphere*, chapter 9, pages 229–256. American Geophysical Union (AGU).

Kulichkov, S. (2009). On the prospects for acoustic sounding of the fine structure of the middle atmosphere. *Infrasound monitoring for atmospheric studies*, pages 511–540.

Kulichkov, S., Avilov, K., Bush, G., Popov, O., Raspopov, O., Baryshnikov, A., Velle, D., and Whitaker, R. (2004). On anomalously fast infrasonic arrivals at long distances from surface explosions. *Izvestiya Atmospheric and Oceanic Physics*, 40 :1–9.

Lac, C., Lafore, J.-P., and Redelsperger, J.-L. (2002). Role of gravity waves in triggering deep convection during toga coare. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 59(8) :1293 – 1316.

Lalande, J.-M. (2012). *Caractérisation des vents dans la moyenne atmosphère et basse thermosphère à partir d'observations d'ondes infrasonores.* PhD thesis, École Centrale de Lyon.

Le Pichon, A., Assink, J., Heinrich, P., Blanc, E., Charlton-Perez, A., Lee, C. F., Keckhut, P., Hauchecorne, A., Rüfenacht, R., Kämpfer, N., et al. (2015). Comparison of co-located independent ground-based middle atmospheric wind and temperature measurements with numerical weather prediction models. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 120(16) :8318–8331.

Le Pichon, A., Blanc, E., and Drob, D. (2005a). Probing high-altitude winds using infrasound. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 110(D20).

Le Pichon, A., Blanc, E., Drob, D., Lambotte, S., Dessa, J., Lardy, M., Bani, P., and Vergniolle, S. (2005b). Infrasound monitoring of volcanoes to probe high-altitude winds. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 110(D13).

Le Pichon, A., Blanc, E., and Hauchecorne, A. (2018). *Infrasound monitoring for atmospheric studies : Challenges in middle atmosphere dynamics and societal benefits.* Springer.

Lehner, M. and Rotach, M. W. (2018). Current challenges in understanding and predicting transport and exchange in the atmosphere over mountainous terrain. *Atmosphere*, 9(7).

Leo, L., Thompson, M., Di Sabatino, S., and Fernando, H. (2016). Stratified flow past a hill : Dividing streamline concept revisited. *Boundary-Layer Meteorology*, pages 1–24.

Long, R. R. (1953). Some aspects of the flow of stratified fluids : I. a theoretical investigation. *Tellus*, 5(1) :42–58.

Lott, F. (2007). The reflection of a stationary gravity wave by a viscous boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 139 :3363–3371.

Lott, F., Beljaars, A., Pauget, L., and Deremble, B. (2023). Neutral and stratified turbulent boundary layer flow over low mountains. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*

Lott, F., Deremble, B., and Soufflet, C. (2020a). Mountain waves produced by a stratified boundary layer flow. part i : Hydrostatic case. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 77(5) :1683–1697.

Lott, F., Deremble, B., and Soufflet, C. (2020b). Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer. part ii : Form drag, wave drag, and transition from downstream sheltering to upstream blocking. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 78(4) :1683–1697.

Lott, F., Guez, L., and Maury, P. (2012a). A stochastic parameterization of non-orographic gravity waves : Formalism and impact on the equatorial stratosphere. *Geophysical Research Letters*, 39(6).

Lott, F. and Miller, M. J. (1997). A new subgrid-scale orographic drag parametrization : Its formulation and testing. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123(537) :101–127.

Lott, F., Plougonven, R., and Vanneste, J. (2012b). Gravity waves generated by sheared three-dimensional potential vorticity anomalies. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 69(7) :2134 – 2151.

Lott, F. and Teitelbaum, H. (1992). Nonlinear dissipative critical level interaction in a stratified shear flow : Instabilities and gravity waves. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 66(1-4) :133–167.

Martin, Z., Wang, S., Nie, J., and Sobel, A. (2019). The impact of the qbo on mjo convection in cloud-resolving simulations. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 76(3) :669 – 688.

McCormack, J. P., Harvey, V. L., Randall, C. E., Pedatella, N., Koshin, D., Sato, K., Coy, L., Watanabe, S., Sassi, F., and Holt, L. A. (2021). Intercomparison of middle atmospheric meteorological analyses for the northern hemisphere winter 2009–2010. *Atmospheric Chemistry and Physics*, 21(23) :17577–17605.

McKisic, J. M. (1997). Infrasound and the infrasonic monitoring of atmospheric nuclear explosions : A literature review. final report, 7 september 1995-28 february 1997.

Meroney, R. N., Sandborn, V. A., Bouwmeester, R. J. B., Chien, H. C., and Rider, M. (1978). Sites for wind-power installations : Physical modeling of the influence of hills, ridges and complex terrain on wind speed and turbulence. Part 1 : Executive summary. page 31900.

Miles, J. W. (1961). On the stability of heterogeneous shear flow. *J. Fluid. Mech.*, 10 :496–508.

Miller, D. A. and Sanders, F. (1980). Mesoscale conditions for the severe convection of 3 april 1974 in the east-central united states. *Journal of Atmospheric Sciences*, 37(5) :1041 – 1055.

Miller, P. P. and Durran, D. R. (1991). On the sensitivity of downslope windstorms to the asymmetry of the mountain profile. *Journal of Atmospheric Sciences*, 48(12) :1457 – 1473.

Milton, S. and Wilson, C. (1996). The impact of parameterized subgrid-scale orographic forcing on systematic errors in a global nwp model. *Monthly weather review*, 124(9) :2023–2045.

Mutschlecner, J. P. and Whitaker, R. W. (2005). Infrasound from earthquakes. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 110(D1).

Nappo, C. (2002). An introduction to atmospheric gravity waves. *An introduction to atmospheric gravity waves, Amsterdam : Academic Press, 2002 International geophysics series, vol. 85, ISBN 0125140827.*, 102.

Nicholls, M. E. and Pielke, R. A. (2000). Thermally induced compression waves and gravity waves generated by convective storms. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 57(19) :3251 – 3271.

Okamoto, K., Sato, K., and Akiyoshi, H. (2011). A study on the formation and trend of the brewer-dobson circulation. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 116(D10).

Olson, J. V. and Szuberla, C. A. (2005). Distribution of wave packet sizes in microbarom wave trains observed in alaska. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 117(3) :1032–1037.

Olver, F. W. J. (1974). Asymptotics and special functions. *Academic Press*, page 572pp.

Palmer, T. N., Shutts, G. J., and Swinbank, R. (1986). Alleviation of systematic westerly bias in general circulation and numerical weather prediction models through an orographic gravity wave drag parametrization. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 112 :2056–2066.

Picone, J., Hedin, A., Drob, D. P., and Aikin, A. (2002). Nrlmsise-00 empirical model of the atmosphere : Statistical comparisons and scientific issues. *Journal of Geophysical Research : Space Physics*, 107(A12) :SIA–15.

Pierce, A. (1989). *Acoustics : An Introduction to Its Physical Principles and Applications, chapitre 8*, volume 34.

Pierce, A. D. (1965a). Extension of the method of normal modes to sound propagation in an almost-stratified medium. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 37(1) :19–27.

Pierce, A. D. (1965b). Propagation of acoustic-gravity waves in a temperature-and wind-stratified atmosphere. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 37(2) :218–227.

Pilger, C., Ceranna, L., Ross, J., Vergoz, J., Le Pichon, A., Brachet, N., Blanc, E., Kero, J., Liszka, L., Gibbons, S., Kvaerna, T., Näsholm, S. P., Marchetti, E., Ripepe, M., Smets, P., Evers, L., Ghica, D., Ionescu, C., Sindelarova, T., and Mialle, P. (2018). The european infrasound bulletin. *Pure and Applied Geophysics*, 175.

Plougonven, R. and Teitelbaum, H. (2003). Comparison of a large-scale inertia-gravity wave as seen in the ecmwf analyses and from radiosondes. *Geophysical Research Letters*, 30(18).

Plougonven, R. and Zhang, F. (2014). Internal gravity waves from atmospheric jets and fronts. *Reviews of Geophysics*, 52(1) :33–76.

Plumb, R. A. (2002). Stratospheric transport. *Journal of the Meteorological Society of Japan. Ser. II*, 80(4B) :793–809.

Poulos, G. and Zhong, S. S. (2008). An observational history of small-scale katabatic winds in mid-latitudes. *Geography Compass*, 2(6) :1798–1821.

Raupach, M. and Finnigan, J. (1997). The influence of topography on meteorogical variables and surface-atmosphere interactions. *Journal of Hydrology*, 190(3) :182–213. Aggregate Description of Land-Atmosphere Interactions.

Ribstein, B., Millet, C., Lott, F., and de la Cámara, A. (2022). Can we improve the realism of gravity wave parameterizations by imposing sources at all altitudes in the atmosphere ? *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 14(2) :e2021MS002563. e2021MS002563 2021MS002563.

Richard, E., Mascart, P., and Nickerson, E. C. (1989). The role of surface friction in downslope windstorms. *J. Appl. Meteor.*, 28 :241–251.

Richter, J. H. and Garcia, R. R. (2006). On the forcing of the mesospheric semi-annual oscillation in the whole atmosphere community climate model. *Geophysical Research Letters*, 33(1).

Rotach, M., Andretta, M., Calanca, P., Weigel, A., and Weiss, A. (2008). Boundary-layer characteristics and turbulent exchange mechanism in highly complex terrain. *Acta Geophysica*, 56 :194–219.

Sachsperger, J., Serafin, S., Grubišić, V., I, I. S., and Paci, A. (2017). The amplitude of lee waves on the boundary-layer inversion. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 143 :27–36.

Sandu, I., Bechtold, P., Beljaars, A., Bozzo, A., Pithan, F., Shepherd, T., and Zadra, A. (2015). Impacts of parameterized orographic drag on the northern hemisphere winter circulation. *Journal of Advances in Modeling Earth Systems*, 8.

Schumann, U. and Launder, B. E. (1995). Stochastic backscatter of turbulence energy and scalar variance by random subgrid-scale fluxes. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A : Mathematical and Physical Sciences*, 451(1941) :293–318.

Scorer, R. S. (1949). Theory of waves in the lee of mountains. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 75 :41–56.

Serafin, S., Adler, B., Cuxart, J., De Wekker, S. F. J., Gohm, A., Grisogono, B., Kalthoff, N., Kirshbaum, D. J., Rotach, M. W., Schmidli, J., Stiperski, I., Vecenaj, Z., and Zardi, D. (2018). Exchange processes in the atmospheric boundary layer over mountainous terrain. *Atmosphere*, 9(3).

Sheppard, P. A. (1956). Airflow over mountains. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 82(354) :528–529.

Shutts, G. and Vosper, S. (2011). Stratospheric gravity waves revealed in nwp model forecasts. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 137(655) :303–317.

Smith, R. B. (1979). The influence of mountains on the atmosphere. volume 21 of *Advances in Geophysics*, pages 87–90. Elsevier.

Smith, R. B. (1989). Hydrostatic airflow over mountains. volume 31 of *Advances in Geophysics*, pages 1–41. Elsevier.

Smith, R. B. and Grønås, S. (1993). Stagnation points and bifurcation in 3-d mountain airflow. *Tellus A*, 45(1) :28–43.

Smith, R. B., Jiang, Q., and Doyle, J. D. (2006). A theory of gravity wave absorption by a boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 63 :774—781.

Smith, R. B., Skubis, S., Doyle, J. D., Broad, A. S., Kiemle, C., and Volkert, H. (2002). Mountain waves over the mont blanc : Influence of a stagnant boundary layer. *J. Atmos. Sci.*, 59 :2073–2092.

Smith, S. A., Fritts, D. C., and Vanzandt, T. E. (1987). Evidence for a saturated spectrum of atmospheric gravity waves. *Journal of Atmospheric Sciences*, 44(10) :1404 − 1410.

Soufflet, C., Lott, F., and Deremble, B. (2022). Mountain waves produced by a stratified shear flow with a boundary layer. part iii : Trapped lee waves and horizontal momentum transport. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 79(6) :1601 − 1614.

Stiperski, I. and Rotach, M. W. (2016). On the measurement of turbulence over complex mountainous terrain. *Boundary-Layer Meteorology*, 159(1) :97–121.

Stobie, J. G., Einaudi, F., and Uccellini, L. W. (1983). A case study of gravity waves–convective storms interaction : 9 may 1979. *Journal of Atmospheric Sciences*, 40(12) :2804 − 2830.

Sun, J. (2011). Vertical variations of mixing lengths under neutral and stable conditions during cases-99. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 50(10) :2030–2041.

Sun, J., Nappo, C. J., Mahrt, L., Belušić, D., Grisogono, B., Stauffer, D. R., Pulido, M., Staquet, C., Jiang, Q., Pouquet, A., Yagüe, C., Galperin, B., Smith, R. B., Finnigan, J. J., Mayor, S. D., Svensson, G., Grachev, A. A., and Neff, W. D. (2015). Review of wave-turbulence interactions in the stable atmospheric boundary layer. *Reviews of Geophysics*, 53(3) :956–993.

Sutherland, B. R., Achatz, U., Caulfield, C.-c. P., and Klymak, J. M. (2019). Recent progress in modeling imbalance in the atmosphere and ocean. *Phys. Rev. Fluids*, 4 :010501.

Sutherland, L. C. and Bass, H. E. (2004). Atmospheric absorption in the atmosphere up to 160 km. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(3) :1012–1032.

Talmadge, C., Waxler, R., Kleinert, D., Nava, S., Assink, J., Buchanan, H., Carpenter, B., and Heffington, J. (2010). A large scale infrasound array deployment in the american west. In *AGU Fall Meeting Abstracts*, volume 2010, pages S11A–1923.

Teixeira, M. A. C., Argaín, J. L., and Miranda, P. M. A. (2013). Drag produced by trapped lee waves and propagating mountain waves in a two-layer atmosphere. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 139(673) :964–981.

Tian, Y., Duarte, J. Q., and Schmidli, J. (2023). A station-based evaluation of near-surface south foehn evolution in cosmo-1. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 150(758) :290–317.

Tsiringakis, A., Steeneveld, G. J., and Holtslag, A. A. M. (2017). Small-scale orographic gravity wave drag in stable boundary layers and its impact on synoptic systems and near-surface meteorology. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 143(704) :1504–1516.

Van Zandt, T. (1990). Spectral description of the gravity wave field. *Advances in Space Research*, 10(12) :111–116.

Vera Rodriguez, I., Näsholm, S. P., and Le Pichon, A. (2020). Atmospheric wind and temperature profiles inversion using infrasound : An ensemble model context. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 148(5) :2923–2934.

Vorobeva, E., Assink, J., Espy, P. J., Renkwitz, T., Chunchuzov, I., and Näsholm, S. P. (2023). Probing gravity waves in the middle atmosphere using infrasound from explosions. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 128(13) :e2023JD038725. e2023JD038725 2023JD038725.

Vosper, S. B. (2004). Inversion effects on mountain lee waves. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 130(600) :1723–1748.

Vosper, S. B., Ross, A. N., Renfrew, I. A., Sheridan, P., Elvidge, A. D., and Grubišić, V. (2018). Current challenges in orographic flow dynamics : Turbulent exchange due to low-level gravity-wave processes. *Atmosphere*, 9(9).

Walker, K. T., Shelby, R., Hedlin, M. A., de Groot-Hedlin, C., and Vernon, F. (2011). Western us infrasonic catalog : Illuminating infrasonic hot spots with the usarray. *Journal of Geophysical Research : Solid Earth*, 116(B12).

Waxler, R. (2002). A vertical eigenfunction expansion for the propagation of sound in a downward-refracting atmosphere over a complex impedance plane. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 112(6) :2540–2552.

Waxler, R. (2004). Modal expansions for sound propagation in the nocturnal boundary layer. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 115(4) :1437–1448.

Waxler, R., Evers, L. G., Assink, J., and Blom, P. (2015). The stratospheric arrival pair in infrasound propagation. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 137(4) :1846–1856.

Waxler, R., Gilbert, K. E., and Talmadge, C. (2008). A theoretical treatment of the long range propagation of impulsive signals under strongly ducted nocturnal conditions. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 124(5) :2742–2754.

Weinbrecht, S. and Mason, P. J. (2008). Stochastic backscatter for cloud-resolving models. part i : Implementation and testing in a dry convective boundary layer. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 65(1) :123–139.

Weng, W., Chan, L., Taylor, P., and Xu, D. (1997). Modelling stably stratified boundary-layer flow over low hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 123(543) :1841–1866.

Whiteman, C. D. (1990). *Observations of Thermally Developed Wind Systems in Mountainous Terrain*, pages 5–42. American Meteorological Society, Boston, MA.

Whiteman, C. D. (2000). Clouds and Fogs. In *Mountain Meteorology : Fundamentals and Applications*. Oxford University Press.

Wieringa, J. (1992). Updating the davenport roughness classification. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 41(1) :357–368.

Williams, K. D., van Niekerk, A., Best, M. J., Lock, A. P., Brooke, J. K., Carvalho, M. J., Derbyshire, S. H., Dunstan, T. D., Rumbold, H. S., Sandu, I., and Sexton, D. M. H. (2020). Addressing the causes of large-scale circulation error in the met office unified model. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 146(731) :2597–2613.

Wilson, C. R. (1969). Auroral infrasonic waves. *Journal of Geophysical Research*, 74(7) :1812–1836.

Wilson, C. R. and Nichparenko, S. (1967). Infrasonic waves and auroral activity. *Nature*, 214(5095) :1299–1302.

Wood, N., Brown, A. R., and Hewer, F. E. (2001). Parametrizing the effects of orography on the boundary layer : An alternative to effective roughness lengths. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 127(573) :759–777.

Wood, N. and Mason, P. (1993). The pressure force induced by neutral, turbulent flow over hills. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 119(514) :1233–1267.

Wright, C. J., Osprey, S. M., and Gille, J. C. (2013). Global observations of gravity wave intermittency and its impact on the observed momentum flux morphology. *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, 118(19) :10,980–10,993.

Wurtele, M. G., Sharman, R. D., and Datta, A. (1996). Atmospheric lee waves. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28(1) :429–476.

Young-Joon Kim, S. D. E. and Chun, H. (2003). An overview of the past, present and future of gravity-wave drag parametrization for numerical climate and weather prediction models. *Atmosphere-Ocean*, 41(1) :65–98.

Zhang, S. D., Huang, C., and Yi, F. (2006). Radiosonde observations of vertical wave number spectra for gravity waves in the lower atmosphere over central china. *Annales Geophysicae*, 24(12) :3257–3265.

Zhang, S. D. and Yi, F. (2005). A statistical study of gravity waves from radiosonde observations at wuhan (30° n, 114° e) china. *Annales Geophysicae*, 23(3) :665–673.

RÉSUMÉ

MOTS CLÉS

ABSTRACT

KEYWORDS