Quelques notes sur la modélisation du climat et du transport atmosphérique

Frédéric Hourdin
Laboratoire de Météorologie Dynamique
Laboratoire mixte CNRS/UPMC/ENS/X
Institut Pierre Simon Laplace
hourdin@lmd.jussieu.fr

March 15, 2000

Contents

[1]

[1] **Avertissement:**
Ces notes de cours sont un ramassis de morceaux divers et n'ont donné lieu à aucune relecture sérieuse.
C'est mieux que rien... peut-être...
D'autre part, l'état français étant incapable de promouvoir des logiciels alternatifs à microsoft (notamment sour Linux), je n'ai pas à ma disposition de correcteur orthographique digne de ce nom.
Ca ce voit, non?

Chapter 1

Modèle d'équilibre 1D radiatif convectif

Dans cette première partie, on s'intéresse à la modélisation de la structure thermique verticale d'une atmosphère au repos.

En première approximation, la structure thermique verticale d'une atmosphère planétaire peut s'interpéter à partir de considérations radiatives.

Pour les planètes telluriques comme Mars ou la terre, relativement transparentes au rayonnement solaire, la surface chauffée directement par le soleil chauffe ensuite de proche en proche les couches d'atmosphère situées au-dessus. L'opacité de l'atmosphère limite l'évacuation de l'énergie dégagée par la surface; c'est l'effet de serre. Si cette opacité devient trop grande, les gradients verticaux de température deviennent trop important (air très chaud sous de l'air froid) et l'atmosphère devient instable. C'est la convection.

Sur les planètes géantes, comme Saturne ou Jupiter, le flux à évacuer vers l'extérieur est renforcé d'un flux interne lié au refroidissement du noyeau de la planète.

C'est ce système physique que nous présentons ici.

Ce premier chapitre en outre permet d'introduire quelques éléments essentiels de la physique atmsophérique utilisés dans la suite du cours et de mentioner quelques-uns des problèmes posés par l'intégration du transfert radiatif dans un contexte environemental. De nombreux et excellent ouvrages sont consacrés à ce sujet comme ceux de Goody and Yung (1989) ou de Liou (1980).

1.1 L'équilibre hydrostatique et sa stabilité

Equilibre hydrostatique

On dit qu'un élément de fluide est en équilibre hydrostatique si son poids est équlibré par les forces de pression, c'est à dire qu'on a

$$\frac{1}{\rho}\vec{\mathrm{grad}}p + \vec{g} = 0 \tag{1.1}$$

où ρ est la densité de l'air, $1/\rho\vec{\mathrm{grad}}p$ est la densité de force de pression (par unité de masse de fluide) et $\vec{g}$ est la gravité.

L'équilibre hydrostatique prend en fait deux significations:

1. Dans le cas hypothétique d'une atmosphère globalement au repos (c'est à dire quand les dérivées partielles horizontales de la pression sont nulles), cette équation donne la pression en n'importe quel point de la planète et n'importe quelle altitude à partir de la pression en un seul point.

2. Dans le cas des fluides géophysiques en mouvement, l'expérience montre que, en un point donné du globe, et sous réserve de regarder des quantités moyennes sur un domaine horizontal suffisamment grand (par exemple, sur plus de $100km^2$ pour l'atmosphère terrestre), la variation verticale de la pression est régie par l'équilibre hydrostatique.

En intégrant l'équilibre hydrostatique sur une colonne d'air de dimension finie (un cylindre vertical), on trouve simplement que la masse M de la colonne d'air s'écrit $M = S\ (p_b - p_h)/g$ où p_b et p_h sont respectivement les pression en bas et en haut du cylindre.

Cette propriété incite souvent à remplacer la coordonnée verticale par une coordonnée de pression pour décrire les écoulements fluides verticalement en équilibre hydrostatique.

Dans le cas où le gaz est supposé parfait[1]

$$p = \rho RT \tag{1.2}$$

l'équilibre hydrostatique s'écrit

$$\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{g}{RT} \ . \tag{1.3}$$

Ici R est la constante du gaz atmosphérique qui est reliée à la constante universelle des gaz parfaits $R^* = 8.314$ J K^{-1} mole^{-1} par la relation $R = R^*/\mu$ où μ est la masse molaire du gaz, $\mu \sim 29g$ pour l'atmosphère de la terre (composée à 80% d'azote moléculaire N_2 et à 20 % d'oxygène moléculaire O_2. Dans le cas où on néglige les variations verticales de g et où l'atmosphère est en plus supposée isotherme ($T = cste$), cette équation s'intègre pour donner la pression à une altitude z sous la forme

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{zg}{RT}\right) \tag{1.4}$$

où p_0 est la pression à l'altitude $z = 0$. En fait, la formule précédente, calculée avec une température moyenne, donne une bonne approximation de la pression à une altitude z.

Il est commode d'introduire la hauteur d'échelle $H = RT/g$ de la pression: si on s'élève d'une hauteur H dans l'atmosphère, la pression est divisée par un facteur $e \sim 2.7$. Pour l'atmosphère terrestre $250K$ est une bonne température moyenne qui correspond à une échelle de hauteur de $7km$ environ. On en déduit qu'environ 63% de la masse de l'atmosphère est contenue dans les 7 premiers kilomètres, environ 87% dans les 14 premiers et 97% dans les trente premiers.

[1] Cette hypothèse est toujours conservée par la suite.

Stabilité de l'équilibre hydrostatique

L'équilibre des forces ne garantit pas que le système va rester dans son état. Il faut en plus que l'équilibre soit stable (c'est la différence entre une bille posée à la pointe d'un stylo vertical ou au fond d'un bol).

Pour étudier la stabilité de l'équilibre hydrostatique, l'approche la plus simple consiste à regarder le comportement d'une particule de fluide déplacée verticalement à partir de sa position d'équilibre. La première loi de la thermodynamique pour une masse d'air unité s'écrit simplement

$$\delta q = dU - \delta W \tag{1.5}$$

$$= c_v dT + p d\alpha \tag{1.6}$$

où δq est l'échange de chaleur avec le milieu extérieur, dU la variation d'énergie interne, δW le travail des forces de pression, c_v la chaleur massique spécifique à volume constant et $\alpha = 1/\rho$ le volume spécifique de l'air. En différenciant l'équation d'état du gaz $p\alpha = RT$:

$$p d\alpha + \alpha dp = R dT \tag{1.7}$$

et en utilisant la relation $R = c_p - c_v$, l'Eq. 1.5 devient

$$\delta q = c_p dT - \alpha dp \tag{1.8}$$

Si aucun échange de chaleur n'a lieu à travers les parois de la particule fluide ($\delta q = 0$), le mouvement est adiabatique et on obtient la relation suivante

$$\frac{dT}{dp} = \frac{1}{\rho c_p} \tag{1.9}$$

puis, en utilisant à nouveau la loi des gaz parfaits

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{c_p}\frac{dp}{p} \tag{1.10}$$

En introduisant, la constante $\kappa = R/c_p$, cette équation s'intègre facilement sous la forme

$$\ln T = \kappa \ln p + cste \tag{1.11}$$

ou encore

$$T/p^{\kappa} = cte \tag{1.12}$$

La quantité $\theta = T(p_0/p)^{\kappa}$ est appelée **température potentielle** (c'est la température qu'aurait la particule une fois ramenée à la pression de référence p_0 par transformation adiabatique). Une particule qui s'élève dans l'atmosphère (et est donc soumise à une pression de moins en moins forte) voit ainsi sa température diminuer proportionnellement à p^{κ} (on parle de refroidissement adiabatique). Supposons que l'air environnant la particule soit tel que la température décroît avec l'altitude (c'est généralement le cas dans la troposphère terrestre, par exemple). Si la particule en s'élevant devient plus froide et donc plus dense (cf. Eq. 1.2) que l'air qui l'entoure, elle retournera naturellement vers sa position de départ. Si au contraire elle devient moins dense que l'air ambiant, la résultante vers le haut des forces de pression sera plus forte que son poids et l'entraînera vers le haut, loin de sa position de départ. Cette dernière situation, instable, se produit donc dès lors que la température décroît plus vite avec l'altitude que la décroissance calculée par l'Eq. 1.12 ou encore (dit autrement) quand le gradient vertical de température potentiel est négatif.

Dans le cas de la stratification stable (température potentielle croissant avec l'altitude), une particule d'air déplacée vers le haut de façon adiabatique depuis sa position d'équilibre est ramenée vers sa position de départ. Elle rejoint cette position avec une vitesse non nulle et est donc entraînée vers le bas au-delà de cette position. La particule devient alors moins dense que le milieu environnant et est à nouveau entraînée vers le haut. La particule d'air entre en oscillation autour de sa position d'équilibre. On montre que la fréquence de ces oscillations, fréquence de **Brunt-Väisälä** N, est directement reliée au gradient vertical de la température potentielle dans l'atmosphère environnante :

$$N^2 = \frac{g}{\theta}\frac{\partial \theta}{\partial z} \tag{1.13}$$

Importance de l'eau

L'eau joue un rôle fondamental dans ces problèmes de stabilité verticale de l'atmosphère.

D'abord, la vapeur d'eau est le seul constituant qui fasse varier significativement la masse molaire de l'atmosphère dans la troposphère. Cependant cet effet qui modifie notamment la constante des gaz R est relativement mineur.

L'effet le plus important est le dégagement de chaleur latente lors de la condensation de la vapeur d'eau. Par exemple, dans une ascendance d'air saturé, l'air se refroidit limitant considérablement la capacité de l'air à contenir de la vapeur d'eau (via la relation de Clausius-Clapeyron). La vapeur d'eau condense, réchauffant la particule d'air ce qui tend à accroître encore sa flotabilité.

Dans ce premier chapitre sur les modèle 1D on ignorera l'effet de l'eau.

1.2 Une approche simple de l'effet de serre

Emission thermique et température d'équilibre

Tout corps émet un rayonnement (des photons) dont l'intensité et la "couleur" dépendent fortement de la température; c'est pourquoi il est souvent appelé rayonnement thermique. Plus le corps est froid, moins il émet d'énergie et plus il émet dans les grandes longueurs d'ondes. La surface du soleil, avec une température de 5700 K, émet un rayonnent blanc. Une étoile plus chaude émettra un rayonnement décalé vers le violet. Un corps plus froid, en revanche, émettra plus vers le rouge. Sur Terre les corps sont tellement froids que leur rayonnement propre sort du domaine des fréquences perceptibles par l'oeil humain. On parle alors de rayonnement infra-rouge. Mais si on chauffe suffisamment un métal, par exemple, il commencera à émettre un rayonnement rouge, puis

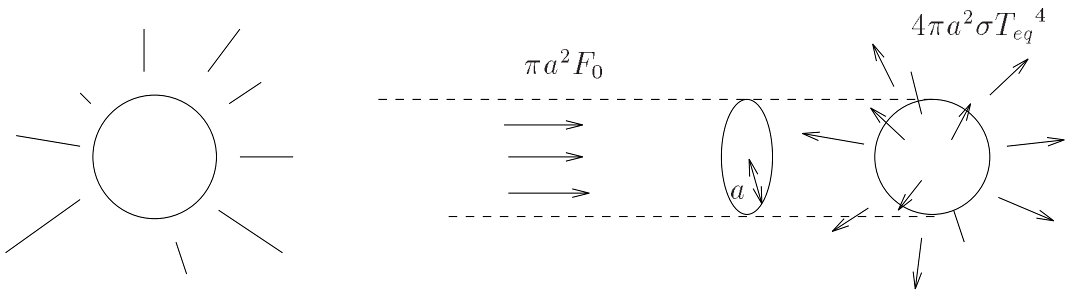


Figure 1.1: Equilibre entre le flux reçu du soleil et le flux réémis par la planète sous forme de rayonnement thermique infrarouge.

blanc pour des températures plus élevées. C'est ce rayonnement, émis par tous les corps, et en particulier par l'atmosphère, qui est mesuré par les détecteurs infra-rouges et permet de voir la nuit.

Plus précisément, quand on regarde un corps "opaque" (en gros un corps qui ne peut pas être traversé de part en part par des photons), il émet généralement une énergie qui est proportionnelle à la puissance quatrième de sa température:

$$F = \sigma T^4 \tag{1.14}$$

Cette émission a reçu le nom d'émission de corps noir [2] mais peut concerner des corps aussi "brillants" que le soleil. $\sigma = 5.670 \times 10^{-8}$ J m^{-2} K^{-4} s^{-1} est connue sous le nom de constante de Stefan-Boltzmann.

Du rayonnement émis par le soleil, il arrive au niveau de la terre un flux $F_0 \sim 1370$ W m^{-2}. La terre intercepte une puissance $\pi a^2 F_0$ où $a = 6400$ km est le rayon de la terre (se reporter à la Fig. 1.1). En fait, une fraction importante (30% environ) du rayonnement reçu par la terre est réfléchie directement vers l'espace par: (1) la diffusion moléculaire qui affecte surtout les hautes fréquences[3], (2) la réflexion sur les nuages et (3) la réflexion sur la surface. Le rapport entre le flux directement réémis vers l'espace et le flux provenant du soleil est appelé albédo planétaire. On le notera A. La terre absorbe donc effectivement une puissance $\pi a^2 (1 - A) F_0$.

La terre réémet un rayonnement thermique égal au produit de la surface de la sphère $4\pi a^2$ par l'émission de corps noir de la surface. La température moyenne d'équilibre de la planète résulte de l'équilibre entre le flux solaire incident et le flux thermique réémis:

$$\sigma T_{eq}{}^4 = \frac{1}{4}(1 - A) F_0 \tag{1.15}$$

[2]Cette appellation de corps noir remonte à la fin du XIXe sciècle quand les scientifiques, et notamment Kirchhoff, ont cherché à comprendre ce rayonnement des objets en s'intéressant au rayonnement contenu dans une cavité fermée isotherme. Kirchhoff a notamment montré que le rayonnement contenu dans une telle cavité devait être isotrope et indépendant du milieu qu'il contenait.

[3]En l'absence d'atmosphère, sur la lune par exemple, le ciel paraît noir même en plein soleil. En fait c'est la diffusion de la lumière provenant du soleil sur les molécules atmosphériques qui rend le ciel lumineux. Cette diffusion est plus efficace pour les courtes longueurs d'onde ce qui explique la couleur bleue du ciel. En même temps, ces photons bleus, soustraits au rayonnement arrivant du soleil, produisent un rougissement de l'apparence du soleil, rougissement d'autant plus grand que la quantité de gaz traversée est grande, par exemple quand le soleil est bas sur l'horizon.

L'application numérique donne une valeur de 255 K pour la température d'équilibre de la terre. Cette température est comprise entre la température à la surface de la terre (~ 285 K en moyenne) et la température à la tropopause, vers 10 km d'altitude (220 K environ).

Pour comprendre les variations verticales de la température, et en particulier le réchauffement de la surface d'une trentaine de degrés par rapport à l'équilibre simple décrit plus haut, il faut s'enfoncer un peu dans les chemins ombragés de la théorie du "transfert radiatif".

Un modèle simpl(e/iste) du transfert radiatif dans l'atmosphère

Si l'atmosphère est relativement transparente pour le rayonnement solaire, elle est en revanche fortement absorbante pour le rayonnement thermique infrarouge.

On va donc se placer dans le cas théorique d'une atmosphère qui laisserait passer jusqu'à la surface la totalité du rayonnement solaire mais absorberait uniquement le rayonnement infrarouge. On va de plus supposer que l'absorption et l'émission de rayonnement infrarouge par l'atmosphère est indépendante de la fréquence considérée (approximation grise).

On se place de plus dans l'approximation dite "plan parallèle" qui revient à négliger la sphéricité de la terre et à considérer localement que toutes les grandeurs ne varient que suivant la direction verticale. Il est alors possible de séparer le rayonnement infrarouge dans l'atmosphère en deux parties, le rayonnement montant, associé à un flux $F^{\uparrow}$ et le rayonnement descendant $F^{\downarrow}$.

Considérons par exemple le rayonnement montant $F^{\uparrow}$. On peut montrer que, après la traversée d'une couche d'atmosphère très fine d'épaisseur δz et à l'altitude z, le flux a diminué, par **absorption atmosphérique**, d'une quantité

$$F^{\uparrow}(z+\delta z) - F^{\uparrow}(z) = -k\rho\delta z F^{\uparrow}(z) \tag{1.16}$$

ce qui revient fondamentalement à dire que l'absorption du rayonnement est proportionnelle à la quantité de matière rencontrée. Dans toute la suite on va supposer que le coefficient k est constant alors qu'il varie en fait suivant la fréquence considérée, la température, la pression et la composition du gaz atmosphérique.

La couche d'atmosphère **émet** également du rayonnement (rayonnement thermique). On peut évaluer cette émission en considérant un corps noir constitué de deux surfaces planes semi-infinies avec une couche de gaz d'épaisseur δz entre les deux. Si les deux surfaces et le gaz sont à la même température, le rayonnement arrivant sur une plaque doit être égal au rayonnement qu'elle émet. L'émission de la couche atmosphérique vers le haut et vers le bas doit donc exactement compenser l'extinction par la couche gazeuse du rayonnement provenant de l'autre surface. L'émission thermique de la couche vaut finalement

$$k\rho\delta z\sigma T^4(z). \tag{1.17}$$

$T(z)$ représentant la température de la couche d'altitude z.

Finalement, la modification du flux montant après la traversée de la couche d'épaisseur δz est donnée par

$$F^{\uparrow}(z+\delta z) - F^{\uparrow}(z) = -k\rho\delta z F^{\uparrow}(z) + k\rho\delta z\sigma T^4(z) \tag{1.18}$$

ou encore
$$\frac{dF^{\uparrow}}{dz} = k\rho\left[\sigma T^4(z) - F^{\uparrow}(z)\right]. \quad (1.19)$$

Deux applications des équations ci-dessus:

1) Absorption pure

Oublions dans un premier temps l'émission par l'atmosphère. On suppose que l'atmosphère reçoit en bas, en $z=0$, un flux $F_0^{\uparrow}$ (par exemple le flux émis par la surface). Dans l'atmosphère, ce flux va décroître sous l'effet de l'absorption suivant l'équation différentielle
$$\frac{1}{F^{\uparrow}}\frac{dF^{\uparrow}}{dz} = -k\rho \quad (1.20)$$
qui admet pour solution
$$F^{\uparrow}(Z) = \alpha \exp\left\{-\int_0^Z k\rho dz\right\}. \quad (1.21)$$
La condition en $z=0$ fournit une solution unique
$$F^{\uparrow}(z) = F_0^{\uparrow}\exp\left\{-k\int_0^Z \rho dz\right\}. \quad (1.22)$$
Noter que l'intégrale sous l'exponentielle est simplement la masse d'atmosphère traversée.

Donc, en l'absence d'émission, le rayonnement décroît exponentiellement en fonction de la quantité de masse traversée.

Si
$$k\int_0^Z \rho dz << 1, \quad (1.23)$$
les photons traversant la couche d'épaisseur Z n'auront qu'une chance très faible d'être absorbés au moins une fois. Au contraire, dans le cas où
$$k\int_0^Z \rho dz >> 1, \quad (1.24)$$
la majorité des photons est absorbée dans la couche ce qui est équivalent à dire que le "libre parcours moyen" des photons est plus petit que l'épaisseur de la couche. La quantité $\tau = k\int \rho dz$ est appelée "profondeur optique".

Dans l'atmosphère terrestre, le coefficient k est typiquement de l'ordre de 2.5×10^{-4} m^2 kg^{-1}. La masse totale de l'atmosphère est de 10^4 kg m^{-2}. Seulement 8% (c'est à dire $\exp(-2.5)$) environ du rayonnement émis par la surface parvient à traverser directement l'atmosphère.

2) Emission atmosphérique

Oublions cette fois-ci la surface de la planète et considérons une atmosphère avec une température constante. Intégrons l'Eq. 1.19 verticalement en supposant que le rayonnement montant est nul en $z=0$. A partir de la solution 1.21 de l'Eq. 1.20, on sait qu'on peut chercher les solutions de l'équation complète 1.19 sous la forme (méthode de la variation de la constante)
$$F^{\uparrow}(Z) = \alpha(Z)\exp\left\{-\int_0^Z k\rho dz\right\} \quad (1.25)$$

ce qui donne après substitution dans l'Eq. 1.19

$$\frac{d\alpha}{dz}(Z) = k\rho\sigma T^4 \exp\left\{\int_0^Z k\rho dz\right\} \tag{1.26}$$

ou encore, puisqu'on a supposé l'atmosphère isotherme,

$$\alpha(Z) = \sigma T^4 \exp\left\{\int_0^Z k\rho dz\right\} + cste. \tag{1.27}$$

La solution de l'Eq. 1.19 s'écrit donc

$$F^{\uparrow}(Z) = \sigma T^4 + cste \times \exp\left\{-\int_0^Z k\rho dz\right\} \tag{1.28}$$

Comme on a supposé que le flux est nul en $z = 0$, on trouve finalement

$$F^{\uparrow}(Z) = \sigma T^4 \times \left[1 - \exp\left\{-\int_0^Z k\rho dz\right\}\right] \tag{1.29}$$

Dans une atmosphère isotherme, ne recevant aucun flux de la surface, le rayonnement croît au fur et à mesure qu'on s'élève pour atteindre la valeur de l'émission de corps noir. Tant qu'on ne considère qu'une épaisseur d'atmosphère relativement fine, pour laquelle la profondeur optique (le terme sous l'exponentiel) est petit devant 1, l'absorption ou l'émission varie proportionnellement à l'épaisseur traversée (on retrouve ce qu'on a supposé au départ).

Au contraire, pour une atmosphère opaque, c'est à dire pour des profondeurs optiques grandes devant l'unité, le rayonnement sortant d'un coté est indépendant du flux entrant à l'autre extrémité et est égal à l'émission de corps noir. Comme précédemment, la transition entre ces deux comportements a lieu quand les photons n'ont presque plus aucune chance de traverser l'atmosphère sans être au moins absorbés une fois.

On peut facilement établir une équation analogue à l'Eq. 1.19 mais pour le flux descendant. En passant à travers une couche d'épaisseur δz, ce flux est diminué par absorption et augmenté par émission thermique:

$$F^{\downarrow}(z - \delta z) - F^{\downarrow}(z) = -k\rho\delta z F^{\downarrow}(z) + k\rho\delta z\sigma T^4 \tag{1.30}$$

soit encore

$$-\frac{dF^{\downarrow}}{dz} = k\rho\left[\sigma T^4 - F^{\downarrow}\right] \tag{1.31}$$

L'équilibre radiatif

Si le flux net $F^{\uparrow} - F^{\downarrow}$ est différent en haut et en bas d'une couche d'atmosphère, cette couche va se refroidir ou se réchauffer suivant

$$\rho\delta z c_p \frac{dT}{dt} = F^{\uparrow}(z) - F^{\downarrow}(z) - F^{\uparrow}(z + \delta z) + F^{\downarrow}(z + \delta z) \tag{1.32}$$

On parle d'équilibre radiatif quand la température n'évolue pas dans le temps, c'est à dire quand le flux net $F^{\uparrow} - F^{\downarrow}$ est indépendant de l'altitude:

$$\frac{d\left(F^{\uparrow} - F^{\downarrow}\right)}{dz} = 0. \tag{1.33}$$

De la même façon, l'équilibre radiatif se traduit pour la surface par l'équilibre des flux:

$$F^{\downarrow}(0) - F^{\uparrow}(0) + (1 - A) F_0/4 = 0. \tag{1.34}$$

On a donc en tout point de l'atmosphère

$$F^{\uparrow} - F^{\downarrow} = (1 - A) F_0/4. \tag{1.35}$$

En ajoutant les Equations 1.31 et 1.19, et en utilisant l'Eq. 1.33, on trouve immédiatement la relation suivante:

$$F^{\uparrow} + F^{\downarrow} = 2\sigma T^4. \tag{1.36}$$

La dérivée verticale de cette relation, en utilisant à nouveau les équations 1.19 et 1.31, donne finalement

$$\frac{d\left(2\sigma T^4\right)}{dz} = -k\rho\left(F^{\uparrow} - F^{\downarrow}\right) = -k\rho\,(1 - A) F_0/4. \tag{1.37}$$

En utilisant l'équation hydrostatique $dp/dz = -\rho g$, on obtient finalement la relation suivante

$$\frac{d\left(2\sigma T^4\right)}{dp} = \frac{k}{g}(1 - A) F_0/4 \tag{1.38}$$

On voit donc que la température (ou T^4) décroît quand on s'élève dans l'atmosphère, et que la variation verticale de σT^4 est proportionnelle à la pression. De plus σT^4 est la moyenne des flux montant et descendant et la différence $F^{\uparrow} - F^{\downarrow}$ est constante et égale à $(1 - A) F_0/4$. Les dérivées par rapport à la pression de $F^{\uparrow}$, $F^{\downarrow}$ et σT^4 sont donc toutes trois égales à $k(1 - A) F_0/(8g)$.

Comme on a en plus $F^{\downarrow} = 0$ pour $p = 0$, on a

$$F^{\downarrow} = \frac{kp}{g}(1 - A) F_0/8, \tag{1.39}$$

$$\sigma T^4 = \left(1 + \frac{kp}{g}\right)(1 - A) F_0/8, \tag{1.40}$$

et

$$F^{\uparrow} = \left(2 + \frac{kp}{g}\right)(1 - A) F_0/8. \tag{1.41}$$

Les trois courbes correspondantes sont tracées sur la Fig. 1.2 en fonction de la pression.

On avait défini au début de ce chapitre la température d'équilibre de la planète T_{eq} à partir de l'Eq. 1.15. Avec le profil de température d'équilibre calculé ici (Eq. 1.40), on voit que T_{eq} correspond au niveau de pression tel que

$$\frac{kp}{g} = k\int_Z^{\infty} \rho dz = 1 \tag{1.42}$$

où Z est l'altitude correspondant à la pression p. En fait, les photons émis depuis des couches plus profondes n'arrivent pas à s'échapper. **La température d'équilibre T_{eq} est donc égale à la température de l'atmosphère**

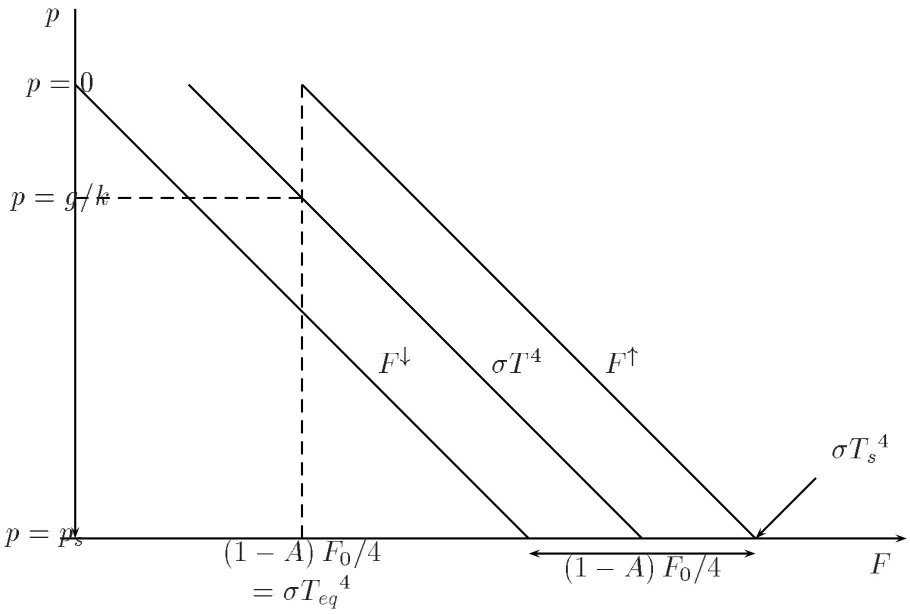


Figure 1.2: Variations verticales, en fonction de la pression, des flux montant, flux descendant et émission de corps noir pour une atmosphère "grise" pour le rayonnement thermique et transparente pour le rayonnement solaire visible.

à l'altitude moyenne d'où les photons s'échappent directement vers l'espace (plus précisément à l'altitude à partir de laquelle les photons émis vers le haut ont une probabilité presque nulle d'être absorbés).

Pour $k = 2.5 \times 10^{-4}$ m^2 kg^{-1}, la température de l'air près de la surface est donnée par l'Eq. 1.40 et vaut

$$\sigma T^4 = \left(1 + \frac{kp_s}{g}\right)(1-A)\,F_0/8 = 3.5\,(1-A)\,F_0/8 = \frac{3.5}{2}\sigma {T_{eq}}^4 \qquad (1.43)$$

d'où on tire finalement $T\,(z=0) = 293$ K. Cette température qui est celle de l'air au-dessus de la surface, est plus froide que celle de la surface proprement dite qui est donnée par l'Eq. 1.41

$$\sigma T_s^4 = F^{\uparrow}\,(p = p_s) = \left(2 + \frac{kp_s}{g}\right)(1-A)\,F_0/8 = \frac{4.5}{2}\sigma T_{eq}^4 \qquad (1.44)$$

soit $T_s \sim 312$ K.

On voit que ce modèle simple d'équilibre radiatif est capable d'expliquer la structure thermique verticale dans la basse atmosphère. A l'altitude d'émission, c'est à dire ici pour $p \sim 4 \times 10^4$ Pa, la température de l'atmosphère est égale à la température d'équilibre de la planète, 255 K. La température croît quand on descend vers la surface, pour atteindre une valeur plus élevée de 38 ou 47 degrés suivant qu'on considère la température de l'air près de la surface ou celle de la surface.

La réalité est bien sûr un peu plus complexe. D'abord, l'absorption atmosphérique n'est pas grise: certaines régions du spectre absorbent beaucoup plus fortement le rayonnement infrarouge. Ces régions sont saturées en photons et les lois simples énoncées précédemment doivent être en partie modifiées. Dans d'autres parties du spectre en revanche, l'atmosphère est presque transparente au rayonnement infrarouge. On parle de fenêtres. De plus, l'absorption directe de rayonnement visible par l'atmosphère n'est pas absolument nulle.

Un traitement complet et réaliste du transfert radiatif requiert en fait l'usage d'ordinateurs puissants. Le résultat est cependant qualitativement proche de celui trouvé ici. La surface est en réalité seulement environ 30 degrés plus chaude que la température d'équilibre de la planète. Les deux tiers de ce réchauffement sont dus à l'absorption et à l'émission thermique par la vapeur d'eau et l'autre tiers essentiellement au gaz carbonique.

La stratification de l'atmosphère terrestre

La stratification verticale d'une atmosphère est étroitement liée à la façon dont le rayonnement est absorbé.

Dans les premiers kilomètres près de la surface, l'atmosphère est essentiellement chauffée par la surface par absorption de rayonnement thermique infrarouge comme on vient de le voir. Dans cette région appelée **troposphère** la température décroît donc avec l'altitude.

Dans cette partie de l'atmosphère où l'air chaud est situé en-dessous de l'air froid, l'équilibre hydrostatique est peu stable vis-à-vis de l'instabilité (instabilité convective) présentée précédemment c'est à dire que le gradient vertical de température potentiele n'est que faiblement positif. Suivant les régions, les saisons ou l'heure de la journée, ce gradient peut même devenir négatif auquel cas la convection se déclenche, mélangeant l'air chaud près de la surface avec l'air froid situé au-dessus.

Dans l'atmosphère terrestre, la convection est modifiée par les changements de phase de l'eau. La condensation de la vapeur d'eau dans un mouvement ascendant par exemple peut réchauffer l'air qui monte et amplifier le mouvement vers le haut. Cette convection humide est un phénomène dominant de la météorologie tropicale. Au niveau de l'**équateur thermique** la convection s'organise en grandes colonnes nuageuses qui peuvent atteindre verticalement une dizaine de kilomètres et produire des précipitations intenses.

Le gradient vertical moyen dans l'atmosphère est essentiellement le résultat des processus radiatifs et du mélange vertical de l'air par la convection sèche ou humide. Il est typiquement de l'ordre de -6.5 K par km dans la troposphère terrestre.

Plus haut dans l'atmosphère, l'absorption directe du rayonnement solaire (surtout ultra-violet) par l'ozone, devient une part dominante du bilan radiatif. Dans cette région, la température croît avec l'altitude. Cette partie de l'atmosphère est donc très fortement stratifiée verticalement d'où son nom de **stratosphère**.

Dans la stratosphère, le brassage vertical de l'air est très difficile. Ceci explique, la forme très plate des nuages qui se développent dans cette région.

La troposphère et la stratosphère sont séparées par une région frontière appelée **tropopause** qui se situe environ à une dizaine de kilomètres au-dessus de la surface.

1.3 Modélisation du transfert radiatif atmosphérique

Présentation générale

Absorption directe du rayonnement solaire. On a vu l'importance du rayonnement thermique pour déterminer la srtucture thermique de l'atmosphère.

La bonne représentation de la répartition verticale de l'absorption du rayonnement est importante également parce qu'elle contrôle en grande partie la stabilité verticale de l'atmosphère qui influe elle même, à la fois sur le développement des ondes planétaires et sur l'efficacité des mélanges verticaux turbulents dans la couche limite planétaire.

Du point de vue du calcul numérique du transfert radiatif, les deux types de rayonnement, thermique et solaire, posent des problèmes différents. Dans le domaine visible, les problèmes les plus importants proviennent de la prise en compte de la diffusion (par les molécules gazeuses, les gouttes dans les nuages ou les aérosols) et de son interaction avec l'absorption. Dans le domaine thermique, il faut tenir compte de l'émission propre de l'atmosphère et de sa forte dépendance en température. Dans les deux cas, le problème majeur est lié au coût numérique du calcul du transfert radiatif qui force à faire un grand nombre d'approximations, celles-ci dépendant souvent de la planète étudiée. Quelques approximations classiques dans les modèles de circulation atmosphérique sont présentées ci-dessous dans les Sections 1.3 pour la partie thermique et 1.3 pour la partie solaire.

Approximations classiques pour le calcul du rayonnement thermique

Le rayonnement thermique étant très isotrope (excepté près de fortes discontinuités de température, près du sol ou à la frontière d'un nuage, par exemple) la diffusion, qui agit uniquement sur la direction de propagation du rayonnement, est généralement négligée dans les calculs de bilan radiatif dans les MCGs.

Les équations du transfert radiatif en atmosphère non diffusante sont brièvement rappelées ci-dessous essentiellement pour introduire les notations utilisées par la suite. Le rayonnement est caractérisé par une intensité spécifique le long d'une direction z (pas nécessairement la verticale dans un premier temps) comme l'intensité du rayonnement émis dans un angle solide $d\Omega$ autour de la direction z, dans l'intervalle de fréquence $d\nu$. Si le rayonnement traverse une couche de gaz d'épaisseur dz, de densité ρ, l'intensité spécifique I_ν du rayonnement est diminuée d'une quantité:

$$dI_\nu = -K_\nu(z)I_\nu(z)\rho dz \tag{1.45}$$

où K_ν est le coefficient d'absorption total du gaz considéré. Sous l'effet de l'absorption seule, l'intensité du rayonnement évolue donc, au cours de la traversée de l'atmosphère, suivant

$$I_\nu(z) = I_\nu(0) \exp\left[-\int_0^z K_\nu(z')\rho dz'\right] \tag{1.46}$$

qui conduit à définir la transmission monochromatique (fraction du rayonnement transmise après la traversée d'une couche d'atmosphère comprise entre z_1 et z_2):

$$tr_\nu(z_1, z_2) = \exp\left[-\int_{z_1}^{z_2} K_\nu(z')\rho dz'\right] \tag{1.47}$$

En équilibre thermodynamique local, l'intensité du rayonnement émis par la couche d'épaisseur dz vaut:

$$K_\nu(z) B_\nu(T(z))\rho dz \tag{1.48}$$

où B_ν est la fonction de Planck:

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2[\exp(h\nu/KT) - 1]} \tag{1.49}$$

Le rayonnement arrivant en un point z_0 de l'atmosphère est la somme de la portion transmise jusqu'à z_0 du rayonnement provenant de l'extérieur (soleil ou surface de la planète) et de la contribution du rayonnement thermique émis par l'atmosphère. Finalement cette intensité peut être mise sous la forme:

$$I_\nu(z_0) = I_\nu(0) tr_\nu(0, z_0) + \int_0^{z_0} K_\nu(z) B_\nu(z) tr_\nu(z, z_0)\rho dz \tag{1.50}$$

ou encore

$$I_\nu(z_0) = I_\nu(0) tr_\nu(0, z_0) + \int_0^{z_0} B_\nu(z) \frac{d}{dz} tr_\nu(z, z_0) dz \tag{1.51}$$

ou encore, après intégration par parties:

$$I_\nu(z) = [I_\nu(0) - B_\nu(0)] tr_\nu(0, z_0) - \int_0^{z_0} tr_\nu(z, z_0) \frac{d}{dz} B_\nu(z) dz \tag{1.52}$$

cette dernière formulation étant souvent utilisée dans les modèles radiatifs. Le calcul du transfert radiatif dans l'atmosphère, à partir de ces équations relativement simples, conduit à une succession d'intégrations.

L'intégration verticale. Simple en théorie, ce calcul doit cependant être effectué avec une précision suffisante pour tenir compte de la très forte non-linéarité du problème de transfert.

L'intégration sur les angles de visée. Les équations 1.51 et 1.52 correspondent à un calcul uni-directionnel. Elle peuvent être appliquées directement dans certains calculs comme celui de l'absorption du rayonnement provenant directement du soleil. Dans d'autres cas, comme celui du rayonnement thermique émis par l'atmosphère, il faut faire une intégration sur les angles. Pour une atmosphère supposée homogène horizontalement (hypothèse plan-parallèle) il suffit de connaître la densité de flux (flux par intervalle de fréquence) traversant une surface horizontale donnée, généralement séparé en une partie ascendante

$$F^{+}=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{1} I(\mu,\phi)\,\mu d\mu d\phi \tag{1.53}$$

et une partie descendante

$$F^{-}=\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{-1} I(\mu,\phi)\,\mu d\mu d\phi \tag{1.54}$$

où ϕ est l'angle azimutal et μ est le cosinus de l'angle zénithal θ (cf. Fig. 1.3).

On introduit généralement alors l'approximation diffuse qui consiste à remplacer les termes du type

$$2\pi F_{\nu}\int_{0}^{1}\mu d\mu \exp\left(-\int K_{\nu}\rho dz\right) \tag{1.55}$$

qui apparaissent lors de l'intégration azimutale par un calcul pour un angle moyen θ_0 (avec $\mu_0=\cos\theta_0$)

$$\pi F_{\nu}\exp\left(-\frac{1}{\mu_0}\int K_{\nu}\rho dz\right) \tag{1.56}$$

Pour une valeur 1.66 du facteur de diffusivité $1/\mu_0$, les erreurs sont en général inférieures à 1.5%. Cette approximation diffuse est systématiquement utilisée dans les MCG. L'Annexe **??** décrit un modèle de transfert radiatif pour la bande à $15\mu m$ du CO_2, développé pour valider le code radiatif du modèle Martien et qui utilise comme seule approximation l'approximation diffuse. Ce modèle prend environ $10h$ CPU sur une station de travail Sun–Spark 2 pour effectuer le calcul du transfert radiatif sur une atmosphère à 60 niveaux.

A ce stade les équations du transfert radiatif se réduisent aux deux équations suivantes relatives au flux montant F_{ν}^{+} et descendant F_{ν}^{-} (tous deux orientés vers le haut)

$$\begin{aligned} F_{\nu}^{+}(z) &= \left[F_{\nu}^{+}(s)-\pi B_{\nu}(T_0)\right]\tau_{\nu}(0,z)+\pi B_{\nu}(T_z) \\ &- \pi\int_{0}^{z}\frac{\partial B_{\nu}(T_{z'})}{\partial z'}\tau_{\nu}(z',z)\,dz' \end{aligned} \tag{1.57}$$

$$\begin{aligned} F_{\nu}^{-}(z) &= \pi B_{\nu}(T_{\infty})\,\tau_{\nu}(z,\infty)-\pi B_{\nu}(T_z) \\ &- \pi\int_{z}^{\infty}\frac{\partial B_{\nu}(T_{z'})}{\partial z'}\tau_{\nu}(z,z')\,dz' \end{aligned} \tag{1.58}$$

On a noté $\tau_{\nu}(z,z')$ la transmission entre les niveaux z et z' définie par

$$\tau_{\nu}(z,z')=\exp\left[-\frac{1}{\mu_0}\int_{z}^{z'}K_{\nu}(z'')\,dz''\right] \tag{1.59}$$

et $F_{\nu}^{+}(s)$ le flux émis par la surface.

Somme sur les raies moléculaires. Au niveau particulaire, l'absorption ou l'émission de rayonnement par la matière (gazeuse par exemple) s'effectue lors de transitions quantiques entre deux niveaux d'énergie. Le coefficient d'absorption monochromatique d'une transition particulière est le produit d'une intensité S et d'un profil de raie $f(\nu)$, $f(\nu)\,d\nu$ représentant la probabilité pour qu'un photon soit absorbé ou émis dans l'intervalle de fréquence $d\nu$ autour de ν. L'intensité d'une transition dépend fortement de la température et la forme de la raie dépend généralement, à la fois de la pression et de la température.

Le coefficient d'absorption monochromatique du gaz atmosphérique est la somme des coefficients d'absorption des différentes raies (indicées par i ci-après) correspondant aux transitions quantiques des différents absorbants (indicés par j):

$$K_\nu(z) = \sum_j n_j(z) \sum_i S_{ij}(T) f_{ij}(T,p,\nu) \tag{1.60}$$

où $n_j(z)$ est la fraction massique du composant j à l'altitude z. Pour fixer les idées, la seule bande à $15\mu m$ du CO_2 contient plusieurs milliers de raies. Les différents paramètres de ces raies sont recensés dans des banques de données spectroscopiques comme la banque GEISA développée au LMD par Alain Chédin, Noëlle Scott et Nicole Husson Chedin et al. (1984); Husson et al. (1986).

Le profil des raies. Dans les problèmes d'absorption du rayonnement par l'atmosphère, la largeur réelle des raies est beaucoup plus importante que leur largeur quantique de base à cause de deux phénomènes capables de déplacer les fréquences des transitions quantiques:

1. les collisions entre molécules qui perturbent les niveaux d'énergie. Le profil de raies correspondant (profil Lorentzien) s'écrit

$$f(\nu) = \frac{\alpha_L}{\pi} \frac{1}{(\nu-\nu_0)^2 + {\alpha_L}^2} \tag{1.61}$$

où la demi-largeur Lorentz α_L croît linéairement avec la pression et décroît avec la température.

2. l'agitation thermique des molécules qui provoque un décalage des fréquences des raies par effet Doppler. Le profil correspondant est donné par

$$f(\nu) = \frac{1}{\alpha_D\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\nu-\nu_0}{\alpha_D}\right)\right] \tag{1.62}$$

avec

$$\alpha_D = (\nu_0/c)(2KT/m)^{1/2} \tag{1.63}$$

(La demie-largeur Doppler est en fait $\alpha_D\sqrt{\ln 2}$).

La profil de Voïgt qui rend compte de la combinaison des deux effets, collisions et agitation thermique, se calcule comme produit de convolution des profils Lorentz et Doppler:

$$f_{\alpha_L,\alpha_D}(\nu) = \pi^{-3/2}(\alpha_L/\alpha_D) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp\left[-(t/\alpha_D)^2\right]}{\left[(\nu-\nu_0)-t\right]^2} dt \tag{1.64}$$

Dans les régions de haute pression comme la troposphère terrestre, l'effet des collisions domine. Le profil exponentiel Doppler, très pointu, peut être assimilé à un dirac vis-à-vis du profil de Lorentz et peut donc être oublié dans le produit de convolution. Sur Mars, au contraire, la largeur Doppler est supérieure à la largeur Lorentz dans presque toute l'atmosphère. Mais du fait de son caractère relativement aplati, le profil Lorentz garde un rôle prépondérant dans les ailes des raies, quelle que soit la pression. Il faut alors utiliser le profil de Voïgt complet.

Intégration de l'absorption le long du trajet optique. Théoriquement, le calcul de la transmission (Equation 1.59) requiert, pour chaque raie moléculaire, une intégration différente entre les altitudes z et z' pour tenir compte de la variation en composition et des dépendances en température et pression des intensités et largeurs de cette raie. Néanmoins, dans le cas simple d'une atmosphère homogène (*i. e.* à composition, pression et température constantes), la transmission se réécrit sous une forme beaucoup plus simple:

$$\tau_\nu\left(z,z'\right)=\exp\left\{-\sum_j n_j \sum_i S_i\left(T\right) f_i\left(T,p,\nu\right)\frac{1}{\mu_0}\int_z^{z'}\rho dz\right\} \tag{1.65}$$

En pratique, on se ramène généralement à cette expression en utilisant des valeurs "moyennes" (sens à définir) de la pression, de la température et de la quantité d'absorbant:

$$\tau_\nu\left(z,z'\right)=\exp\{-S_i(\overline{T})f_i(\overline{T},\overline{p},\nu)\overline{m}/\mu_0\} \tag{1.66}$$

L'intégration en fréquences est vraiment la partie la plus critique du calcul en terme de coût numérique. En effet, pour effectuer un calcul complet, il faut résoudre spectralement chaque raie. Pour la bande à $15\mu m$ du CO_2, la largeur des raies, dans les conditions martiennes, est de l'ordre de 10^{-4} cm^{-1} qu'il faut comparer à la largeur totale de la bande, environ 300 cm^{-1}. Deux solutions s'offrent classiquement pour contourner cette difficulté:

1. l'utilisation de modèles de bandes qui permettent de calculer la transmission de façon approchée et rapide sur un intervalle spectral plus ou moins large (typiquement de l'ordre de quelques cm $^{-1}$);

2. les méthodes dites de k-distribution.

Les modèles de bandes. sont couramment utilisés dans les MCGs et pour les inversions de données satellitaires. L'idée de base est de remplacer l'intégration spectrale par une somme sur un nombre fini, assez petit, d'intervalles spectraux (chaque intervalle étant plus large que chacune des raies). Ceci revient en pratique à remplacer les termes du type

$$\int d\nu \int_0^{z_0}\frac{d}{dz}B_\nu(z)tr_\nu(\mu,z,z_0)dz \tag{1.67}$$

par

$$\sum_n \Delta\nu_n \int_0^{z_0} \left(\frac{dB}{dz}\right)_{\Delta\nu_n} \tau_{\Delta\nu_n}(\mu, z, z_0) dz \tag{1.68}$$

Le second facteur sous l'intégrale est une moyenne de la transmission sur l'intervalle spectral $\Delta\nu_n$

$$t_{\Delta\nu_n}(\mu, z, z_0) = \frac{1}{\Delta\nu_n} \int_{\Delta\nu_n} tr_\nu(\mu, z, z_0) d\nu \tag{1.69}$$

appelée *transmissivité*. A ce point, on a simplement reporté la difficulté sur le calcul de la transmissivité (qui comprend, outre l'intégrale en fréquence, une somme sur les raies moléculaires et une intégration le long du trajet optique). Les modèles de bandes offrent des solutions simples pour ce calcul, basées sur des développements théoriques exposés brièvement ci-dessous.

Les modèles statistiques de bandes La transmission monochromatique de deux raies se calcule simplement comme le produit des transmissions de chacune des raies. Cette propriété peut en fait être étendue aux transmissions sur un intervalle spectral fini $\Delta\nu$, dans le cas où les positions des centres de ces raies sont réparties aléatoirement. Pour une raie individuelle, on définit la fonction de transmission par

$$\tau^i_{\Delta\nu} = \frac{1}{\Delta\nu} \int \exp\left(-S_i f_\nu u\right) d\nu \tag{1.70}$$

En supposant que les raies ont leur support compris dans $\Delta\nu$ et en introduisant la largeur équivalente [4]

$$W_i = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 - \exp\left(-S_i f_\nu u\right)\right] d\nu \tag{1.71}$$

la fonction de transmission d'une raie devient

$$\tau^i_{\Delta\nu} = 1 - \frac{W_i}{\Delta\nu} \tag{1.72}$$

et peut être développée asymptotiquement pour les grandes valeurs de $\Delta\nu$ en

$$\tau^i_{\Delta\nu} \sim \exp\left(-\frac{W_i}{\Delta\nu}\right) \tag{1.73}$$

La transmission totale par les N raies, produit des transmissions individuelles des raies, s'écrit alors:

$$\tau_{\Delta\nu} = \exp\left(-\frac{1}{\Delta\nu}\sum W_i\right) \tag{1.74}$$

Dans la limite de l'absorption faible ($Su/\pi\alpha_L << 1$) la largeur équivalente d'une raie prend la forme simple $W_i = S_i u/\Delta\nu$ et dans le cas opposé de l'approximation forte, pour laquelle on suppose que toutes les raies sont saturées ($Su/\pi\alpha_L >> 1$), elle s'écrit simplement $W_i = 2\sqrt{\alpha_{Li} S_i u}/\Delta\nu$. Pour ces deux

[4] La largeur équivalente d'une raie W est la largeur qu'aurait une raie absorbant la même fraction du rayonnement que la raie considérée mais absorbant complètement sur un intervalle spectral de largeur W et pas du tout en dehors de cet intervalle.

cas extrêmes, la transmission totale se calcule facilement; malheureusement, ces deux approximations ne sont généralement pas utilisables directement pour les calculs atmosphériques. Si au lieu des intensités individuelles de chaque raie, on se donne une distribution continue, $P(S)\,dS$, la transmission se calcule en remplaçant les moyennes $1/N\sum_N$ par des intégrales $\int P(S)\,dS$, ce qui donne

$$\tau_{\Delta\nu} = exp\left\{-\frac{N}{\Delta\nu}\int_0^{+\infty} P(S)\,dS\int_{-\infty}^{+\infty}\left[1-exp\left(-Sf_\nu u\right)\right]d\nu\right\} \tag{1.75}$$

Ceci permet d'obtenir une forme analytique de la transmission pour des fonctions de distribution suffisamment simples. Le premier modèle de ce type a été développé par Goody Goody (1952) en utilisant une distribution de type Poisson ($P(S) = 1/k\exp(-S/k)$) et un profil Lorentzien pour les raies, auquel cas la transmission s'écrit simplement

$$\tau_{\Delta\nu} = \exp\left[-\frac{Nku}{\Delta\nu}\left(1+\frac{ku}{\pi\alpha_L}\right)^{-1/2}\right] \tag{1.76}$$

Les valeurs des paramètres $(Nk)/\Delta\nu$ et $k/(\pi\alpha_L)$ sont déterminées de façon à retrouver le comportement décrit précédemment pour les limites faible et forte de l'absorption, c'est à dire en résolvant

$$\frac{k}{\delta} = \frac{\sum S_i}{\Delta\nu} \tag{1.77}$$

et

$$\frac{\sqrt{k\pi\alpha_L}}{\delta} = \frac{2\sum\sqrt{\alpha_{Li}S_i}}{\Delta\nu} \tag{1.78}$$

respectivement. Ce modèle très simple donne en général de très bons résultats pour les calculs atmosphériques en utilisant des intervalles spectraux d'environ 5 cm^{-1}. D'autres modèles plus complexes, mais basés sur le même principe, ont été développés en utilisant des distributions plus sophistiquées de l'intensité des raies Malkmus (1967); Crisp et al. (1986); Zhu (1989) ou en prenant en compte l'élargissement des raies par effet Doppler Fels (1979); Zhu (1988). Plusieurs de ces formulations ont été testées et utilisées dans le cadre du développement du code radiatif pour Mars Hourdin (1992) (voir Chapitre **??**).

Dépendance en température. La transmission dépend donc de deux paramètres par exemple $\sum S_i$ et $\sum\sqrt{S_i\alpha_{Li}}$, calculés à partir des banques de données spectroscopiques. Ces deux quantités dépendent fortement de la température. Rodgers et Walshaw Rodgers and Walshaw (1966) ont montré que les fonctions

$$\phi(T) = \frac{\sum S_i(T)}{\sum S_i(T_0)} \tag{1.79}$$

et

$$\psi(T) = \frac{\sum\sqrt{S_i(T)\,\alpha_{Li}(T)}}{\sum\sqrt{S_i(T_0)\,\alpha_{Li}(T_0)}} \tag{1.80}$$

(où T_0 est une température fixée, de préférence une température moyenne de l'atmosphère considérée) peuvent être approximées sans trop d'erreur sous la forme

$$\phi\,(\text{ ou }\psi)\,(T) = \exp\left[a\,(T-T_0) + b\,(T-T_0)^2\right] \tag{1.81}$$

En pratique, les coefficients a et b peuvent se calculer simplement à partir des valeurs de $\sum S_i$ et $\sum \sqrt{S_i \alpha_{Li}}$ pour trois températures régulièrement espacées, T_0 et $T_0 \pm \Delta T$.

Dépendance en pression et l'approximation à deux paramètres. Reste à prendre en compte la dépendance linéaire en pression de la largeur Lorentz des raies. L'approximation à deux paramètres, introduite parallèlement par Curtis Curtis (1952) et Godson Godson (1953), consiste à utiliser deux valeurs différentes de la quantité d'absorbant

$$\bar{u}\,(z,z') = \int_z^{z'} \phi\,(T)\,\rho dz" \tag{1.82}$$

dans le terme associé à $\sum S_i$ et

$$\bar{up}\,(z,z') = \int_z^{z'} \psi\,(T)\,\frac{p}{p_{std}}\rho dz" \tag{1.83}$$

correspondant à la dépendance en pression et température de $\sum \sqrt{S_i \alpha_{Li}}$ (p_{std} est la pression standard à laquelle sont calculées les largeurs Lorentz des raies). Le modèle de Goody se réécrit alors

$$\tau_{\Delta\nu} = \exp\left[-\frac{Nk\bar{u}}{\Delta\nu}\left(1+\frac{k\bar{u}}{\bar{up}\pi\alpha_L}\right)^{-1/2}\right] \tag{1.84}$$

Modèles à bandes larges. Les modèles statistiques de bandes sont très précis à condition d'être utilisés sur des intervalles spectraux suffisamment étroits, c'est à dire qu'il faut typiquement couvrir l'ensemble du spectre infra-rouge avec quelques centaines d'intervalles. Dans les MCGs, on ne peut se permettre d'utiliser plus d'une dizaine d'intervalles. Le code développé par Jean–Jacques Morcrette et utilisé au CEPMMT utilise par exemple six intervalles et occupe à lui seul environ un tiers du temps CPU des simulations. Sur des intervalles aussi larges, les développements théoriques présentés ci-dessus ne sont plus applicables. Les transmissivités sont alors calculées en utilisant des fonctions plus ou moins *ad hoc*, souvent choisies à partir de critères physiques. D'autre part, pour des intervalles spectraux aussi larges, la fonction de Planck ne peut plus être considérée comme constante et il faut, en plus des diverses dépendances en pression et température de la transmission présentées plus haut, ajouter une dépendance en température liée à la pondération de la transmission par la fonction de Planck. Le code de transfert du rayonnement thermique dans l'atmosphère de Mars est un modèle à bandes larges adapté de celui de Jean–Jacques Morcrette. A l'extrême les transmissivités bandes larges peuvent être étendues à tout le spectre thermique en utilisant la fonction de Planck intégrée σT^4. On parle alors de *méthode d'émissivité*. Cette approche simple a été suivie pour le modèle à 20 paramètres.

La méthode dite de k–distribution. Le calcul monochromatique du transfert radiatif est considérablement simplifié du fait que la transmission de deux couches adjacentes, quelles que soient leurs épaisseurs, est égale au produit de la transmission des deux couches. Il suffit donc de calculer les transmissions individuelles de chaque couche, soit N calculs pour une atmosphère discrétisée verticalement en N couches. Dans les modèles de bandes, les transmissions, calculées sur un intervalle de largeur fini, ne sont plus multiplicatives, à cause des effets de saturation. Il faut alors calculer la matrice $N \times N$ des transmissivités entre tous les couples de couches.

La méthode de la $k-distribution$ est une alternative aux modèles de bandes permettant d'utiliser la propriété multiplicative des transmissions monochromatiques. Elle consiste à calculer, pour un intervalle spectral, la fraction $f\left(k\right)dk$ pour laquelle le coefficient d'absorption est compris dans une fenêtre de largeur dk autour de k, ce qui revient à écrire la transmission sous la forme

$$\tau_{\Delta\nu} = \int_0^{\infty} f\left(k\right) e^{-ku} dk \tag{1.85}$$

ou sous une forme discrétisée

$$\tau_{\Delta\nu} = \sum_l w_l e^{-k_l u} \tag{1.86}$$

Le calcul du transfert peut alors être effectué de façon monochromatique pour chaque valeur de k. De nombreuses méthodes ont été développées pour calculer la fonction $f\left(k\right)$. A partir des modèles statistiques de bandes, par exemple, et pour certaines fonctions particulières $P\left(S\right)$, f qui est la transformée inverse de Laplace de la fonction $\tau_{\Delta\nu}\left(u\right)$ peut être calculée analytiquement. La justification de l'utilisation de la $k - distribution$ pour des trajets optiques inhomogènes demande un peu plus de travail; on parle alors de méthode des *k-corrélés.* Ces méthodes et leurs justifications sont présentées dans de nombreux ouvrages Goody and Yung (1989). La méthode de la k–distribution est de plus particulièrement intéressante dans le cas du rayonnement solaire car elle permet de rendre compte facilement de l'interaction entre diffusion et absorption moléculaire. En contre partie, le traitement devient assez lourd quand il faut prendre en compte la superposition de plusieurs bandes moléculaires. Il faut alors effectuer un calcul complet pour chaque couple de coefficients k utilisés pour chacune des distributions. Le calcul correspondant est beaucoup plus simple pour les modèles de bandes puisque la transmissivité totale pour deux bandes différentes est égal au produit des transmissivités de chacune d'elles, sous réserve que les distributions spectrales des raies ne soient pas corrélées.

Le modèle de transfert radiatif dans l'atmosphère de Titan développé par McKay*et al.* McKay et al. (1989) est basé sur une approche du type $k - distribution$.

Absorption et diffusion du rayonnement solaire

Les difficultés principales soulevées par le calcul du transfert radiatif, dans le domaine des courtes longueurs d'ondes, concernent le calcul de la diffusion (par

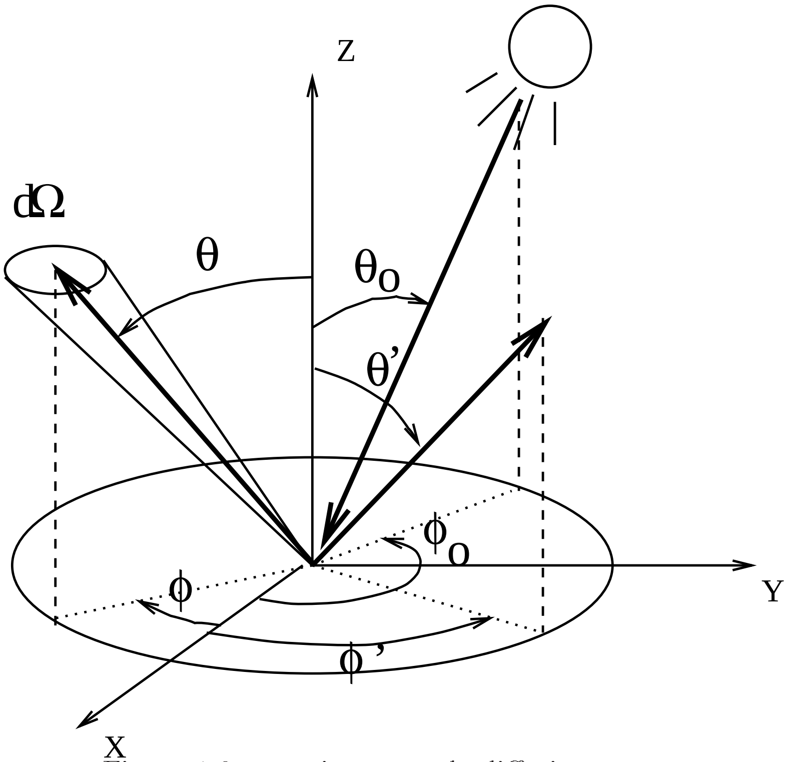


Figure 1.3: notations pour la diffusion

les aérosols, les nuages ou les molécules) et de son interaction avec l'absorption. La fonction source intervenant dans le calcul de l'intensité spécifique, le long d'une direction donnée, est la somme 1) de la partie du rayonnement solaire incident diffusée dans cette direction, 2) de la diffusion du rayonnement diffus provenant lui même de diffusions antérieures (diffusion multiple). Avec les notations présentées sur la Fig. 1.3, en utilisant comme variable verticale, la profondeur optique calculée verticalement depuis le haut de l'atmosphère $\tau = \int_z^\infty k\rho dz$ et, enfin, en introduisant l'albédo de diffusion simple[5] $\tilde{\omega}$ et la fonction de phase[6] $P(\mu, \phi, \mu', \phi')$, l'équation du transfert radiatif monochromatique s'écrit

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu, \phi)}{d\tau} = I(\tau, \mu, \phi) - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu', \phi') P(\mu, \phi, \mu', \phi') d\mu' d\phi' - \frac{\tilde{\omega}}{4\pi} \pi F_0 P(\mu, \phi, -\mu_0, \phi_0) e^{-\frac{\tau}{\mu_0}} \quad (1.87)$$

où le cosinus de l'angle θ est noté μ.

Comme dans le cas du rayonnement thermique, il suffit en fait, pour calculer le chauffage de l'atmosphère, de connaître les densités de flux montante (Eq. 1.53) et descendante (Eq. 1.54). Or, dans le cas où la fonction de phase

[5] L'albédo de diffusion simple se définit comme la fraction de l'extinction due à la diffusion ou encore comme le rapport entre la section efficace de diffusion et la somme des sections efficaces d'absorption et de diffusion

[6] La fonction de phase $P(\mu, \phi, \mu', \phi')$ est la probabilité pour qu'un photon arrivant de la direction (μ, ϕ) soit diffusé dans la direction (μ', ϕ').

ne dépend que de l'angle de diffusion $\Theta = (\theta, \phi; \theta', \phi')$ Chandrasekar a montré Chandrasekhar (1960) que la moyenne azimutale de la fonction de phase

$$p(\mu, \mu') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(\mu, \phi, \mu', \phi') \, d\phi' \tag{1.88}$$

pouvait s'écrire sous la forme

$$p(\mu, \mu') = 2\pi \sum_{l=0}^{N} \alpha_l P_l(\mu) P_l(\mu') \tag{1.89}$$

où P_l est le polynôme de Legendre d'ordre l et où les α_l sont les coefficients du développement de la fonction de phase en série de Legendre, $P(\Theta) = \sum_{l=0}^{N} \alpha_l P_l(\cos\theta)$. En introduisant alors l'intégrale azimutale de l'intensité spécifique

$$I(\tau, \mu) = \int_0^{2\pi} I(\tau, \mu, \phi) \, d\phi \tag{1.90}$$

la moyenne azimutale de l'Eq. 1.87 se réécrit sous la forme

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - \frac{\tilde{\omega}}{2} \int_{-1}^{+1} I(\tau, \mu') \, p(\mu, \mu') \, d\mu' - \frac{\tilde{\omega}}{2} \pi F_0 p(\mu, -\mu_0) \tag{1.91}$$

Les ordonnées discrètes. La méthode la plus élégante pour résoudre l'Eq. 1.91 consiste à décomposer l'intégrale sur μ en utilisant une quadrature de Gauss, ce qui revient finalement à remplacer le calcul de la diffusion sur des angles zénithaux continus en un calcul discret sur un nombre fini $2n$ de valeurs de μ, $\mu = \pm\mu_j$, $j = 1, ..., n$ (la méthode de Gauss correspondant à un choix particulier des valeurs discrètes de μ et des poids associés pour le calcul des intégrales). La résolution de l'équation de transfert se ramène alors à la résolution d'un système linéaire à $2n$ équations du type

$$\frac{dI^+(\tau)}{d\tau} = M^+ I^+(\tau) + M^- I^-(\tau) - \sigma^+(\tau) \tag{1.92}$$

$$\frac{dI^-(\tau)}{d\tau} = -M^- I^+(\tau) - M^+ I^-(\tau) - \sigma^+(\tau) \tag{1.93}$$

où le $I^{\pm}(\tau)$ et $\sigma^{\pm}(\tau)$ sont les vecteurs correspondants à l'intensité et à la fonction source:

$$I^{\pm}(\tau) = [I(\tau, \pm\mu_j)]_{j=1,...,n} \tag{1.94}$$

$$\sigma^{\pm}(\tau) = \left[\pm \frac{\sigma(\tau, \pm\mu_j)}{\mu_j}\right]_{j=1,...,n} \tag{1.95}$$

avec

$$\sigma(\tau, \mu) = \frac{\tilde{\omega}}{2} \pi F_0 p(\mu, -\mu_0) \tag{1.96}$$

et où les matrices $M^{\pm}$ dépendent de la valeur de l'albédo de diffusion simple, des valeurs discrètes de la fonction de phase moyenne (Eq. 1.89) et des poids de Gauss. Dans le cas d'une atmosphère homogène, où les matrices $M^{\pm}$ ne dépendent pas de τ, le système se résout facilement en cherchant des solutions du type $I^{\pm} = g^{\pm} e^{-k\tau}$ pour le système homogène associé; le calcul des valeurs de k se ramène alors à un calcul de valeurs propres.

Les méthodes à deux flux. Les méthodes généralement utilisées dans les MCGs se contentent d'utiliser une direction pour le rayonnement diffus descendant et une pour le rayonnement montant, comme dans la partie thermique présentée plus haut. Ces méthodes peuvent être introduites formellement, à partir de la présentation générale des équations de diffusion, comme la simplification maximum où on utilise pour l'intégrale dans l'Eq. 1.91 une quadrature de Gauss à deux points. Une autre façon consiste à supposer que l'intensité spécifique du rayonnement peut se décomposer sous la forme

$$I(\tau,\mu) = I_0\tau + \mu I_1(\tau) \tag{1.97}$$

(approximation d'Eddington). Il est alors possible d'effectuer l'intégration sur l'angle zénithal de l'Eq. 1.91. Cependant, l'utilisation directe de cette méthode produit des erreurs importantes pour des fonctions de phases très anisotropes. Une correction classique, connue sous le nom de méthode *delta-Eddington* et introduite par Joseph *et al.* Joseph et al. (1976), consiste à considérer la portion diffusée dans la pointe avant de la fonction de phase comme transmise en utilisant une fonction de phase modifiée

$$P'(\Theta) = 2f\delta_{1,\cos\Theta} + (1-f)\left(1+3g'\cos\Theta\right) \tag{1.98}$$

où la fraction f du rayonnement diffusée vers l'avant est généralement fixée à $f = g^2$ avec $g' = g/(1+g)$ où g est le facteur d'asymétrie de la fonction de phase originale

$$g = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} P(\cos\Theta)\cos\Theta d\cos\Theta \tag{1.99}$$

Certains auteurs Meador and Weaver (1980); Zdunkowski et al. (1980) ont montré que ces différentes méthodes peuvent se ramener à une formulation commune:

$$\begin{aligned}
\frac{dF^+}{d\tau} &= \gamma_1 F^+ - \gamma_2 F^- \frac{\gamma_3 S(\tau)}{\mu_0} \\
\frac{dF^-}{d\tau} &= \gamma_2 F^+ - \gamma_1 F^- \frac{\gamma_4 S(\tau)}{\mu_0} \\
\frac{dS}{d\tau} &= -\frac{\gamma_5 S}{d\tau}
\end{aligned} \tag{1.100}$$

où la densité de flux montante (resp. descendante) F^+ (resp. F^-) est définie par l'Eq. 1.53 (resp. Eq. 1.54) et où S est le flux incident solaire. Les différentes méthodes à deux flux se distinguent seulement par la façon de relier les constantes γ_i aux paramètres optiques $\tilde{\omega}$ et g et l'incidence solaire μ_0.

Pour une couche d'atmosphère supposée homogène, le système précédent peut se résoudre (en commençant par chercher des solutions de la forme $F^\pm = f^\pm e^{-k\tau}$ pour le système homogène en F^+ et F^-). Si on note par l'indice $_b$ (resp. $_h$) les valeurs des flux en bas (resp. en haut) de la couche, les valeurs de (S_b, F_b^-, F_h^+) se déduisent alors des valeurs de (S_h, F_h^-, F_b^+) par une relation linéaire dont les coefficients dépendent des coefficients γ_i, de l'épaisseur de la couche $\delta\tau$ et de μ_0 Geleyn and Hollingswortha (1979). Pour une atmosphère à N couches, on obtient ainsi $3N$ relations reliant les $3(N+1)$ flux aux bords des couches, les relations manquantes étant fournies par les conditions aux limites.

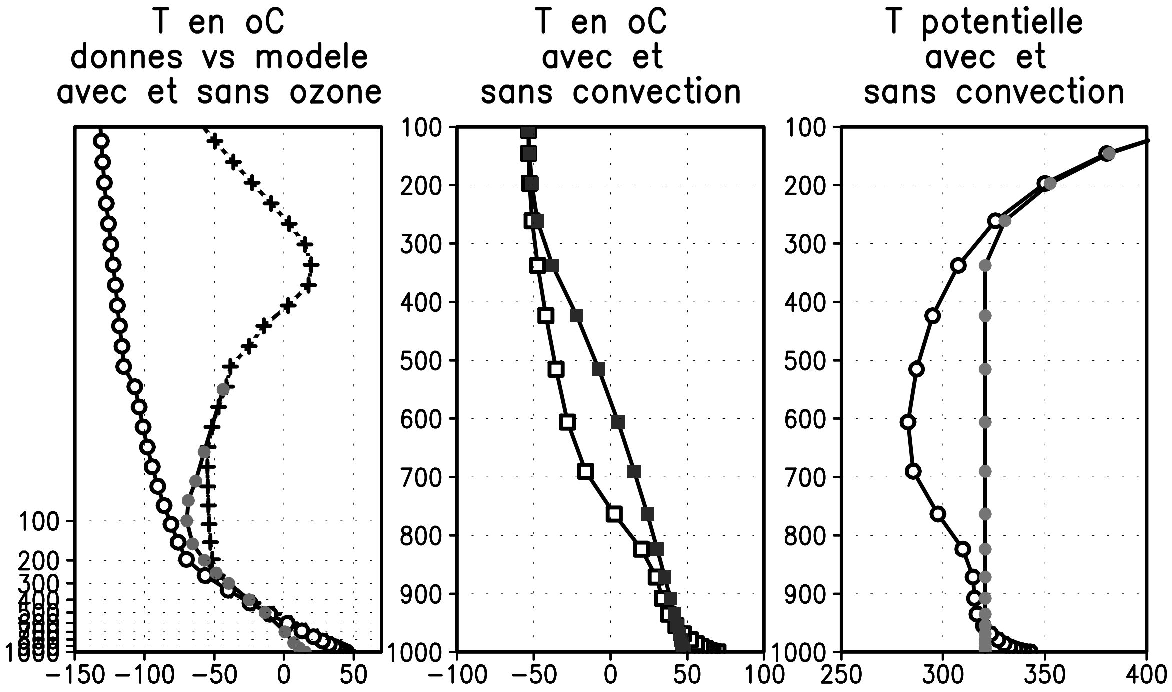


Figure 1.4: Résultat de simulation radiative/convective avec ou sans ozone et avec ou sans convection. Le modèle est intégré pendant 100 jours.

Interaction avec l'absorption moléculaire. Reste à traiter l'interaction entre absorption et diffusion. La méthode la plus directe consiste à effectuer des calculs monochromatiques en utilisant la méthode de k–distribution pour calculer les transmissions moléculaires. Les modèles de bandes ne sont pas, en revanche, directement utilisables puisque, du fait de la diffusion, la quantité totale d'absorbant rencontrée par les photons entre deux niveaux atmosphériques n'est pas connue. Le problème peut être contourné en calculant la probabilité $p\,(u)\,du$ pour qu'un photon contribuant au flux $F_c^{\pm}$ dans le cas conservatif (sans absorption) ait parcouru un chemin optique compris dans un intervalle de largeur du autour de u. Le flux est alors calculé en utilisant la transmissivité $\tau_{\Delta nu}\,(u)$ comme

$$F_{\Delta\nu} = F_c \int_0^{\infty} p\,(u)\,\tau_{\Delta\nu}\,(u)\,du \tag{1.101}$$

Cette méthode, dite de distribution des chemins optiques, permet souvent de restituer correctement les flux sans avoir besoin de calculer précisément la fonction $p\,(u)$ Geleyn and Hollingswortha (1979); Fouquart and Bonnel (1980). Cette méthode est utilisée dans le schéma développé par Fouquart Fouquart and Bonnel (1980) qui a été adapté aux conditions martiennes.

1.4 Résultat 1D de modèles radiatif/convectif

On présente ici des résultats d'un modèle radiatif-convectif de l'atmosphère terrestre. On né2glige l'effet des nuages et la vapeur d'eau est fixée.

Cet équilibre est obtenu comme solution finale (après 100 jours d'intégration et un pas de 10 minutes) d'un modèle d'évolution où la température de surface T_s évolue sous l'effet du flux radiatif à la surface sous la forme

$$\frac{\partial T_s}{\partial t} = \frac{1}{C_s} F_s \tag{1.102}$$

Les températures dans l'atmosphères sont évaluées à partir de la divergence du flux radiatif

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{g}{c_p} \frac{\partial F}{\partial p} \tag{1.103}$$

La convection est prise en compte en empêchant le gradiant de température potentiel de devenir négatif. Si un tel gradient négatif est détecté, on mélange θ avec les couches tout en conservant l'énergie totale sur la région mélangée.

Le code radiatif est un code très complèt, utilisé à la fois dans le modèle du Centre Européen pour les Prévisions Météorologiques à Moyen Terme que dans le modèle climatique du LMD. Il comprend pour la partie solaire l'absorption par l'ozone , la diffusion de Rayleigh et les nuages. Dans les calculs présentés ici, les nuages ne sont pas présents. La méthode d'intégration verticale est la méthode "à deux flux" rapidement évoquée plus haut.

La partie thermique tient compte bien-sûr de la vapeur d'eau et du dioxyde de crabone mais également de gaz comme le méthane. La diffusion est négligée dans la partie tehrmique qui utilise l'angle diffus moyen. L'intégration spectrale est faite en 5 grandes bandes dans lesquelles les transissions sont fitées par rapport à des calculs plus précis.

Les résultats sont présentés sur la Fig. 1.5.

Sur la Fig. **??**, on montre le resultat d'une simulation où un a fixé le taux de CO_2 à 350ppm et l'humidité reltive à 0.3 en début de simulation.

On montre deux simulations oô un a doublé la quantité de CO_2. Dans la première, l'humidité spécifique de l'atmosphère est gardée à son profile initial (pas de rétroaction vapeur d'eau). Dans la seconde, c'est l'humidité relative qui est fixée.

Le panneau de droite présente l'effet du doublement de CO_2 avec et sans "rétroaction vapeur d'eau".

Sur la figure Fig. 1.6, on présente un calcul du même genre mais pour Mars (atmosphère de CO_2 avec une quantité importante de poussières).

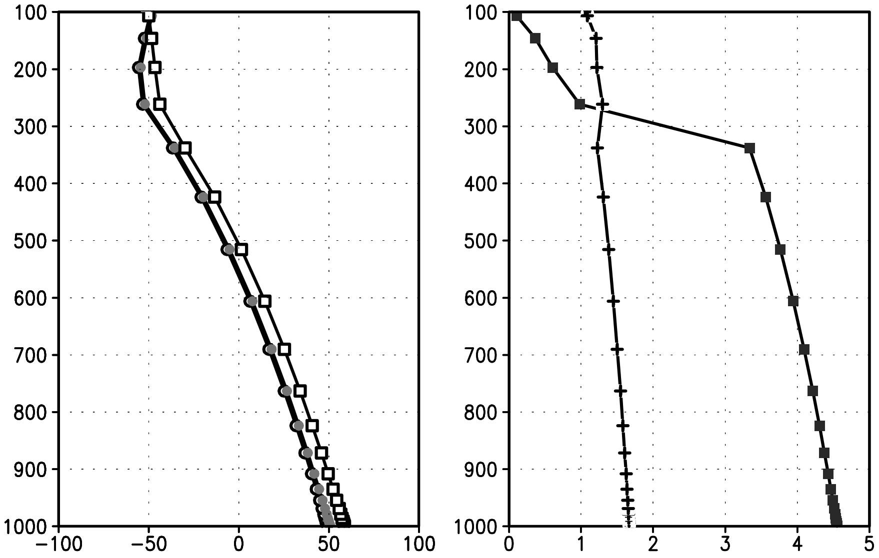


Figure 1.5: Résultat de simulation radiative/convective intégré pendant 100 jours.

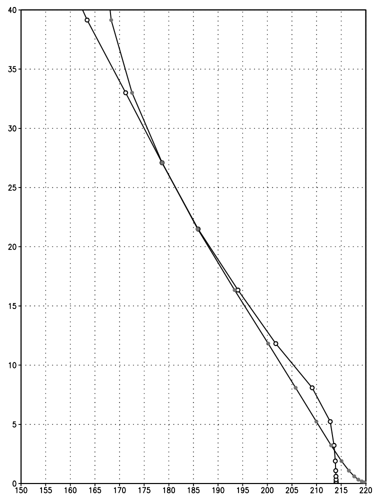


Figure 1.6: Calcul radiatif convectif sur Mars. Modèle du LMD. Comparaison avec un profil typique reconstitué à partir des mesures effectuées lors de la descente des sondes Viking en 1976.

Chapter 2

Modèles de circulation grande échelle: les équations primitives de la météorologie

Dans le premier chapitre, on a étudié l'atmosphère en équilibre radiatif, sous l'effet par exemple de l'ensoleillement moyen. En fait, les dispartités régionales de l'ensoleillement sont le forçage initial de la circulation atmosphérique à grande échelle.

On présente ici les base de la modélisation de cette circulation générale atmosphérique.

On présente notamment les équations primitives de la météorologie qui sont à la base de la plupart des codes numériques utilisés aussi bien pour la prévision météorologique que pour l'étude du climat.

Il existe un certain nombre d'ouvrages de références sur le sujet. On retiendra notamment Holton (1992).

2.1 L'équation fondamentale de la dynamique

On a introduit dans le premier chapitre deux forces fondamentales qui s'exercent sur une particule fluide, l'attraction gravitationnelle et la pression. On s'intéressait dans ce chapitre à une atmosphère statique. Si l'atmosphère est en mouvement, les particules subissent une force supplémentaire: la friction avec les particules voisines ou viscosité moléculaire. Dans le présent chapitre, on conservera pour mémoire cette force Fr mais sans entrer dans le détail de sa formulation.

Si on se place dans un référentiel Galiléen (par exemple un référentiel fixe par rapport aux étoiles) l'équation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{g}^* - \frac{\vec{\nabla} p}{\rho} + Fr \tag{2.1}$$

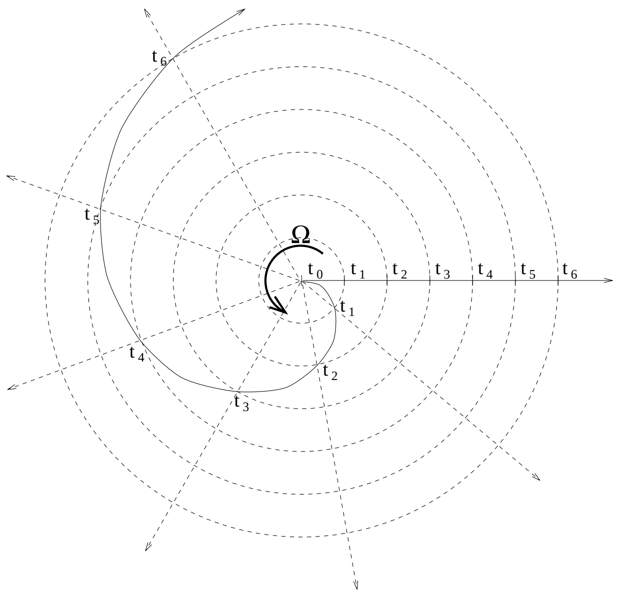


Figure 2.1: Mouvement d'une bille lancée du pôle nord avec une vitesse non nulle vu dans un repère lié à la terre. Les droites en pointillé représentent les positions successives, vues depuis le repère tournant, de la droite suivie par la bille.

2.2 Passage en référentiel tournant

Pour un observateur à la surface de la terre, on l'a déjà dit, les mouvements atmosphériques paraissent soumis à des forces supplémentaires dues au fait que la terre est en rotation.

2.2.1 Un exemple de plus ...

Considérons le cas d'une bille lancée avec une vitesse initiale non nulle depuis le pôle nord. Dans un référentiel absolu, cette bille se déplace en ligne droite à une vitesse constante (la gravité qui est perpandiculaire à la surface ne modifie pas la trajectoire). Vue dans un repère lié à la terre (et en assimilant localement près du pôle la terre à un disque en rotation), on peut facilement construire sur un graphique (Fig. 2.1) la trajectoire de la bille. Cette trajectoire est incurvée vers la droite et la particule semble accélérer (le module de sa vitesse devient de plus en plus grand) par rapport à la surface de la terre.

2.2.2 Un petit rappel...

Regardons le mouvement d'une particule décrivant un cercle autour d'un axe $(O, \vec{k})$ à une vitesse angulaire constante Ω (se reporter à la Fig. 2.2). La vitesse de la particule est définie comme la dérivée du vecteur position $O\vec{M}$

$$\vec{U} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{OM\,(\vec{t} + \delta t) - O\vec{M}\,(t)}{\delta t} \tag{2.2}$$

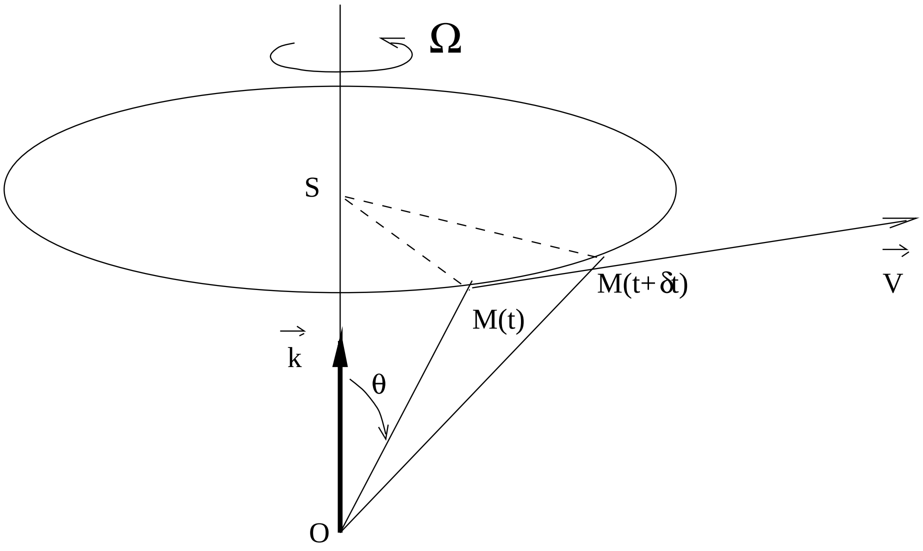


Figure 2.2: Vitesse d'un point décrivant un cercle autour d'un axe $(O, \vec{k})$ à une vitesse angulaire constante Ω.

Si on regarde la direction du vecteur, on voit qu'elle est portée par la tangente à la trajectoire de la particule. La distance $M(t)\,M(t+\delta t)$ est d'autre part à peu près égale à $\Omega \delta t SM = \Omega \delta t\ OM \sin\theta$. Le module du vecteur vitesse est donc $U = \Omega\ OM \sin\theta$. Finalement le vecteur vitesse est simplement le produit vectoriel

$$\frac{dO\vec{M}}{dt} = \Omega\ \vec{k} \wedge O\vec{M} \tag{2.3}$$

ou, en introduisant le vecteur rotation $\vec{\Omega} = \Omega \vec{k}$,

$$\frac{dO\vec{M}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge O\vec{M} \tag{2.4}$$

2.2.3 La vitesse dans le référentiel tournant

On va noter avec un indice $_a$ les dérivées évaluées dans le repère absolu (Galiléen) et avec un indice $_r$, les dérivées calculées dans un repère lié à la terre. On va prendre dans le référentiel lié à la terre un repère défini par le centre de la terre O et trois vecteurs $\vec{i_n}$, avec $n = 1, 2, 3$.

Pour chacun de ces vecteurs on a

$$\left(\frac{d\vec{i_n}}{dt}\right)_a = \vec{\Omega} \wedge \vec{i_n} \tag{2.5}$$

Prenons maintenant un point en mouvement M défini par ses coordonnées x_1, x_2 et x_3 dans le repère $(0, \vec{i_1}, \vec{i_2}, \vec{i_3})$.

On peut facilement relier les vitesses de la particule M dans les référentiels absolu et relatif

$$\left(\frac{dO\vec{M}}{dt}\right)_a = \left[\frac{d\left(x_1\vec{i_1} + x_2\vec{i_2} + x_3\vec{i_3}\right)}{dt}\right]_a$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{dx_1}{dt}\vec{i_1} + \frac{dx_2}{dt}\vec{i_2} + \frac{dx_3}{dt}\vec{i_3} + x_1\left(\frac{\partial\vec{i_1}}{\partial t}\right)_a + x_2\left(\frac{\partial\vec{i_2}}{\partial t}\right)_a + x_3\left(\frac{\partial\vec{i_3}}{\partial t}\right)_a \\
&= \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_r + \vec{\Omega}\wedge\left(x_1\vec{i_1} + x_2\vec{i_2} + x_3\vec{i_3}\right) \qquad (2.6)
\end{aligned}
$$

Les vitesses absolue $\vec{U}_a$ et relative $\vec{U}_r$ sont finalement reliées par la formule

$$
\vec{U}_a = \vec{U}_r + \vec{\Omega}\wedge O\vec{M} \qquad (2.7)
$$

ce qui se traduit en français en disant que la vitesse absolue de la particule est la somme de sa vitesse relative et de la vitesse d'entraînement par la planète.

2.2.4 L'accélération dans le référentiel tournant

Pour l'accélération, le calcul n'est pas plus compliqué

$$
\left(\frac{d^2O\vec{M}}{dt^2}\right)_a = \sum_{n=1}^{3}\left[\frac{d^2\left(x_n\vec{i_n}\right)}{dt^2}\right]_a \qquad (2.8)
$$

$$
= \sum_{n=1}^{3}\left[\frac{d^2x_n}{dt^2}\vec{i_n} + 2\frac{dx_n}{dt}\left(\frac{d\vec{i_n}}{dt}\right)_a + x_n\left(\frac{d^2\vec{i_n}}{dt^2}\right)_a\right] \qquad (2.9)
$$

Finalement, les accélérations absolue $\vec{\gamma}_a$ et relative $\vec{\gamma}_r$ sont reliées par la formule

$$
\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + 2\vec{\Omega}\wedge\vec{U}_r + \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge O\vec{M}\right) \qquad (2.10)
$$

faisant intervenir l'accélération de Coriolis $2\vec{\Omega}\wedge\vec{U}_r$ et l'accélération d'entrainement $\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge O\vec{M}\right)$.

2.2.5 Equation du mouvement

L'equation du mouvement s'écrit finalement dans le référentiel relatif

$$
\vec{\gamma}_r = -2\vec{\Omega}\wedge\vec{U}_r - \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge O\vec{M}\right) + \vec{g}^* - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + Fr \qquad (2.11)
$$

En définissant la gravité comme

$$
\vec{g} = \vec{g}^* - \vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge O\vec{M}\right) \qquad (2.12)
$$

(celle qui donne le poids et la verticale locale), cette équation se réduit à

$$
\vec{\gamma}_r = -2\vec{\Omega}\wedge\vec{U}_r + \vec{g} - \frac{\vec{\nabla}p}{\rho} + Fr \qquad (2.13)
$$

Le passage en référentiel tournant fait donc apparaître en plus de la force centrifuge $-\vec{\Omega}\wedge\left(\vec{\Omega}\wedge O\vec{M}\right)$ prise en compte dans la définition de la gravité, la force de Coriolis $-2\vec{\Omega}\wedge\vec{U}_r$.

Cette force étant perpendiculaire à la trajectoire de la particule dans le référentiel tournant, elle ne change pas le module de la vitesse mais ce contente de dévier la trajectoire, vers la droite dans l'hémisphère nord et vers la gauche dans l'hémisphère sud.

2.3 Passage aux coordonnées sphériques

Pour pouvoir traiter ces équations, il faut passer d'une représentation vectorielle à des équations portant sur les coordonnées des vecteurs. On utilise naturellement les coordonnées sphériques (Fig. 2.3).

Les composantes de la vitesse en fonction des coordonnées sphériques sont:

$$u = a\cos\phi\frac{d\lambda}{dt}, \quad v = a\frac{d\phi}{dt} \quad \text{et} \quad w = \frac{dz}{dt}. \tag{2.14}$$

Pour les composantes de l'accélération, les choses se compliquent un peu. On oublie à partir de maintenant l'indice $_r$ quand on parle de quantités calculées par rapport au référentiel tournant. La dérivée Lagrangienne de la vitesse, c'est à dire la dérivée temporelle calculée en suivant la particule de fluide, prend en compte non seulement les variations dans le temps des coordonnées u, v et w mais aussi les variations des vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ liées au déplacement de la particule:

$$\frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k} + u\frac{d\vec{i}}{dt} + v\frac{d\vec{j}}{dt} + w\frac{d\vec{k}}{dt}. \tag{2.15}$$

On peut trouver assez facilement les dérivées Lagrangiennes des vecteurs de base:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{u}{a\cos\phi}\left(\vec{j}\sin\phi - \vec{k}\cos\phi\right) \tag{2.16}$$

$$\frac{d\vec{j}}{dt} = -\frac{u\tan\phi}{a}\vec{i} - \frac{v}{a}\vec{k} \tag{2.17}$$

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{i}\frac{u}{a} + \vec{j}\frac{v}{a} \tag{2.18}$$

d'où finalement les composantes de l'accélération

$$\vec{\gamma} = \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} - \frac{uv\tan\phi}{a} + \frac{uw}{a} \\ \frac{dv}{dt} + \frac{u^2\tan\phi}{a} + \frac{wu}{a} \\ \frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{a} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

On peut calculer également les composantes de la force de Coriolis

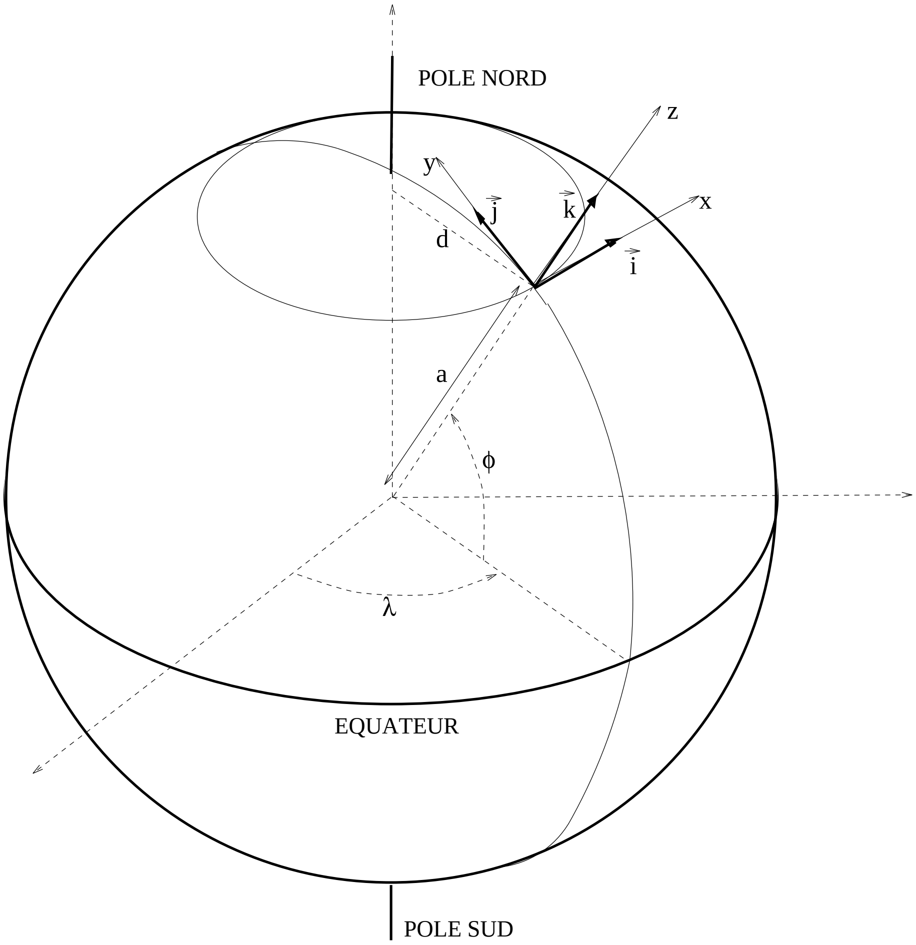
$$-2\vec{\Omega} \wedge \vec{U} = -2\begin{pmatrix} 0 \\ \Omega\cos\phi \\ \Omega\sin\phi \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2\Omega\left(v\sin\phi - w\cos\phi\right) \\ -2\Omega u\sin\phi \\ 2\Omega u\cos\phi \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

Finalement, les trois composantes de l'équation du mouvement s'écrivent

$$\frac{du}{dt} - \frac{uv\tan\phi}{a} + \frac{uw}{a} = 2\Omega\left(v\sin\phi - w\cos\phi\right) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + Fr_x \tag{2.21}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{u^2\tan\phi}{a} + \frac{wu}{a} = -2\Omega u\sin\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + Fr_y \tag{2.22}$$

$$\frac{dw}{dt} - \frac{u^2+v^2}{a} = 2\Omega u\cos\phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + Fr_z - g \tag{2.23}$$



$u = a\cos\phi\frac{d\lambda}{dt}$
$v = a\frac{d\phi}{dt}$
$w = \frac{dz}{dt}$

On fait classiquement les deux approximations suivantes:
• Terre sphérique
• $z << a$
(couche mince)

a est le rayon planétaire

Figure 2.3: Coordonnées sphériques.

$U \simeq 10$ m s^{-1}	vitesse horizontale
$W \simeq 1$ cm s^{-1}	vitesse verticale
$L \simeq 10^6$ m	longueur caractéristique horizontale
$H \simeq 10^4$ m	hauteur d'échelle
$P \simeq 10^5$ Pa	Pression de référence
$\rho \simeq 1$ kg m^{-3}	densité de l'air
$\delta p/\rho \simeq 10^3$ m^2 s^{-2}	
$L/U \simeq 10^5$ s	Temps caractéristique

Table 2.1: Ordre de grandeurs des champs atmosphériques "grande échelle".

2.4 Description Eulérienne

Les équations précédentes contiennent encore les dérivées Lagrangiennes des composantes du vent calculées en suivant la trajectoire des particules. Pour traiter l'équation du mouvement, et notamment pour la faire rentrer sur un ordinateur, il est généralement nécessaire de passer à une description **Eulérienne** dans laquelle on calcule l'évolution temporelle des différentes variables en des points fixes de l'atmosphère. Pour les équations précédentes, le passage de la représentation Lagrangienne à la représentation Eulérienne revient simplement à remplacer les dérivées temporelles des composantes du vent (u, v, w) en utilisant pour chacune d'elle la relation

$$\begin{aligned}\frac{dq}{dt} &= \frac{\partial q}{\partial t} + u\frac{\partial q}{\partial x} + v\frac{\partial q}{\partial y} + w\frac{\partial q}{\partial z} \\ &= \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{u}{a\cos\phi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{v}{a}\frac{\partial q}{\partial\phi} + w\frac{\partial q}{\partial z}\end{aligned}$$

2.5 Ordre de grandeur des différents termes dans l'équation du mouvement

On néglige ici d'office les termes de friction.

On peut évaluer l'ordre de grandeur des différents termes dans ces équations pour les écoulements de grande échelle sur la Terre à partir de valeurs moyennes des différentes quantités (cf. Table 2.1). L'échelle de distance typique pour les cellules de Hadley ou les perturbations transitoires dans les moyennes latitudes est de l'ordre de $L \sim 10^6$ m. Les vents horizontaux dans la troposphère sont de l'ordre de $U \sim 10$ m s^{-1}. Les variations typiques de la pression sont de l'ordre de 1000 Pa et la densité de l'ordre de 1 d'où $\Delta P/\rho \sim 10^3$ m^{2}s^{-2}. Les vitesses verticales sont typiquement de l'ordre de $W \sim 1$ cm s^{-1}. Enfin le facteur de Coriolis $f = 2\Omega\sin\phi$ est de l'ordre de 10^{-4} s^{-1} dans les moyennes latitudes.

On peut en plus introduire une échelle temporelle $\tau = L/U \sim 10^5$ s.

En utilisant ces valeurs, on trouve que (cf. Table 2.2):

1. La composante verticale de l'équation du mouvement est très largement dominée par l'équilibre hydrostatique entre le gradient de pression et la gravité.

$\frac{du}{dt}$	$-\frac{uv\tan\phi}{a}$	$+\frac{uw}{a}$	$=$	$\boxed{2\Omega\sin\phi v}$	$-2\Omega\sin\phi w\cos\phi$	$\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}}$		$+Fr_x$
$\frac{dv}{dt}$	$+\frac{u^2\tan\phi}{a}$	$+\frac{wu}{a}$	$=$	$\boxed{-2\Omega\sin\phi u}$		$\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}}$		$+Fr_y$
$\frac{U^2}{L}$ 10^{-4}	$\frac{UV}{a}$ 10^{-5}	$\frac{UW}{a}$ 10^{-8}		f_0U 10^{-3}	f_0W 10^{-6}	$\frac{\delta p}{\rho L}$ 10^{-3}		m s^{-2}
$\frac{dw}{dt}$	$-\frac{u^2+v^2}{a}$		$=$	$2\Omega\sin\phi u$		$\boxed{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}}$	$\boxed{-g}$	$+Fr_z$
$\frac{UV}{L}$ 10^{-7}	$\frac{U^2}{a}$ 10^{-5}			f_0U 10^{-3}		$\frac{P}{\rho H}$ 10	g 10	m s^{-2}

$\boxed{\bullet}$ Equilibre géostrophique
$\boxed{\bullet}+\bullet$ Modèle quasi-géostrophique
$\boxed{\bullet}+\bullet+\bullet$ Equations primitives

Table 2.2: Ordre de grandeur des différents termes dans l'équation du mouvement.

2. Les termes en Wf ou WU/a dans les composantes horizontales de l'équation du mouvement sont petits devant tous les autres. Ces termes sont dus aux variations verticales de la géométrie en fonction de la distance au centre de la terre (approximation de couche mince).

3. Le rapport entre les termes dits de courbure (les termes en U^2/a dans les membres de gauche des composantes horizontales de l'équation du mouvement) et la force de Coriolis est de l'ordre de $U/(a\Omega) \sim 10^{-2}$. C'est aussi le rapport entre la vitesse relative des particules et la vitesse d'entraînement par la planète.

4. Les termes d'accélération horizontale sont de l'ordre de U^2/L. Le rapport entre ces termes d'accélération et la force de Coriolis est de l'ordre de

$$R_o = \frac{U}{L\Omega}. \tag{2.24}$$

   R_o est connu sous le nom de **nombre de Rossby**.

5. Enfin, le terme en $2\Omega \cos \phi$ est très petit devant les autres.

2.6 L'équilibre géostrophique

Quand le nombre de Rossby est petit devant 1, c'est le cas pour les écoulements atmosphériques de grande échelle, les termes de gradients horizontaux de pression sont en quasi-équilibre avec la force de Coriolis

$$fv \sim \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2.25}$$

et

$$fu \sim -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2.26}$$

Cet équilibre a un nom: c'est l'**équilibre géostrophique**. R_o est une mesure de la validité de l'équilibre géostrophique. Cet équilibre permet de diagnostiquer les vents à partir de la connaissance du champ de pression. Si on connaît le vent près de la surface, cet équilibre permet de reconstituer complètement le champ de vent, la dérivée verticale du vent étant directement reliée aux gradients horizontaux de température (comme dans le cas du vent thermique présenté précédemment). Dans l'atmosphère terrestre, on a $R_o \sim 0.1 - 0.2$ ce qui veut dire qu'on peut reconstruire le champ de vent à partir du vent thermique avec une précision de l'ordre de 10-20%.

L'équilibre géostrophique est un équilibre entre la force de Coriolis calculée à partir de la vitesse horizontale $\vec{U}_H$ et le gradient horizontal de pression. On peut le résumer sous une forme vectorielle:

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_H + \frac{\vec{\nabla}_H\, p}{\rho} = \vec{0}. \tag{2.27}$$

Si l'équilibre géostrophique est exactement satisfait, le champ de vent est perpendiculaire au vecteur gradient de pression, c'est à dire que les courbes iso-pression sont partout alignées avec le champ de vent.

L'équilibre géostrophique en coordonnées de pression

Regardons la variations de la pression quand on se déplace horizontalement d'une distance dx (x est ici une direction quelconque du plan horizontal) et verticalement d'une distance dz. La variation correspondante de la pression est donnée par

$$dp = \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial z} dz. \tag{2.28}$$

Si on considère maintenant z comme une fonction de p et de x, la dérivée partielle de z par rapport à x est le rapport de dz et dx calculé le long d'une direction $p = cste$ c'est à dire pour $dp = 0$. A partir de l'équation précédente, on trouve donc

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = -\frac{\partial p/\partial x}{\partial p/\partial z}. \tag{2.29}$$

Si on est dans le cadre de l'approximation hydrostatique $\partial p/\partial z = -\rho g$ on trouve

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_p = \frac{1}{\rho g}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{2.30}$$

ou encore, en introduisant le géopotentiel ϕ,

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_p = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}. \tag{2.31}$$

L'équilibre géostrophique peut donc se reformuler en terme d'équilibre entre les gradients de géopotentiel et la force de Coriolis

$$2\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_H + \vec{\nabla}_p \phi = \vec{0}. \tag{2.32}$$

remarque: pour retrouver le vent géostrophique il est bon de connaître l'expression de la composante de $\vec{\Omega}$ suivant la verticale locale ($\Omega \sin\phi$) d'où on tire $\vec{\Omega} \wedge \vec{U}_H = \Omega \sin\phi \, \vec{k} \wedge \vec{U}_H$.

2.7 Equations primitives de la météorologie

Le jeu complet des équations dites "équations primitives de la météorologie" s'écrit:

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} - \frac{uv\tan\phi}{a} &= 2\Omega\sin\phi v - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + F_u \\
\frac{dv}{dt} + \frac{u^2\tan\phi}{a} &= -2\Omega\sin\phi u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + F_v
\end{aligned}$$

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0 \tag{2.33}$$

$$p = \rho R T \tag{2.34}$$

$$\theta = T \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \tag{2.35}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\rho c_p} \mathcal{Q} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \tag{2.36}$$

ou

$$\frac{\partial \rho\theta}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{V} \theta\right) = \frac{1}{c_p} \mathcal{Q} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\kappa} \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\left(\rho \vec{V}\right) = 0 \tag{2.38}$$

Deux types de modèles:

- Les modèles en différences finies.
- Les modèles spectraux (décomposition sur des harmoniques sphériques).

Deux types d'applications:

- Prévisions météorologiques

Grilles fines (50 km)
Initialisation et assimilation d'observations
Simulations courtes (< 15 jours).

- Etude du climat

Grilles plus grossières ($\simeq$ 200 km)
Etat initial "quelquonque"
Simulations longues (1 mois à 1000 ans)

Chapter 3

Une approche simple de la couche limite

Dans tout ce qui précédait, on a supposé que les écoulements atmosphériques de grande échelle étaient non visqueux. Si on compare la viscosité moléculaire (le coefficient de viscosité moléculaire de l'air est de l'ordre de 10^{-5} m^2 s^{-1}) et l'advection de grande échelle, cette approximation est toujours valide. En revanche, notamment près de la surface, la turbulence de petite échelle (des structures de l'ordre de 10-100 m) interagit avec les écoulements de grandes échelles. Si on peut séparer intellectuellement ces deux échelles, on peut considérer que la turbulence va agir comme une viscosité sur les écoulements de grande échelle. On parle alors de **viscosité turbulente**.

On va essayer ici de donner quelques notions de base sur l'interaction entre la turbulence de petite échelle et les écoulements de plus grande échelle.

De nombreux ouvrages traitent rapidement du concept de viscosité turbulente (Holton, 1992; Salby, 1996; Wells, 1997).

Cette approche de la turbulence, largement utilisée dans les modèles de circulation grande échelle, présente de nombreuses limitations. Elle ne permet pas notamment de rendre compte des grandes structures de la couche limite convective (thermiques, rouleaux, etc...). Une vision complète de la couche limite atmosphérique se trouve dans l'ouvrage de Stull (1988).

3.1 Analyse en perturbations

On rappelle que les équations quasigéostrophiques s'écrivent

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.1}$$

avec une équation équivalente pour v.

On doit introduire ici, en plus de l'équation du mouvement, l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = 0 \tag{3.2}$$

L'équation d'évolution de u peut se réécrire sous une forme **flux**:

$$\frac{\partial\left(\rho u\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho uu\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho vu\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho wu\right)}{\partial z}=f\rho v-\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.3}$$

obtenue en additionnant l'Equation 3.1 multipliée par ρ et l'équation 4.5 multipliée par u. Cette équation est analogue à l'équation de bilan de masse décrite plus haut: elle traduit le bilan de quantité de mouvement dans un petit élément de volume.

L'analyse et la modélisation de la turbulence repose sur une décomposition des champs entre une partie "grande échelle" ($L > 10$ km et $\tau > 10$ min) et une partie turbulente (le reste).

Dans la présentation ci-dessous, on va séparer entre évolution lente et fluctuations rapides. On se donne donc une période temporelle Δt (typiquement 10 à 30 minutes en pratique). On note $\overline{q}$ la moyenne de q entre t et $t+\Delta t$ et q' les fluctuations rapides liées à la turbulence de petite échelle. Cette décomposition est connue sous le nom de décomposition de Reynolds.

On suppose de plus, ce qui est vérifié pour l'atmosphère et exact pour un fluide incompressible, que les fluctuations de la densité sont très petites devant les fluctuations des composantes du vent. On va s'intéresser à la moyenne temporelle de l'équation 3.3. Elle fait d'abord apparaître la dérivée temporelle de la quantité de mouvement moyenne $\rho\overline{u}$. Viennent ensuite des termes quadratiques du type $\rho\overline{vu}$. On peut par exemple développer le terme $\overline{vu}$:

$$\overline{vu} = \overline{\overline{v}\overline{u}}+\overline{\overline{v}u'}+\overline{v'\overline{u}}+\overline{v'u'} \tag{3.4}$$

$$= \overline{v}\overline{u}+\overline{v}\overline{u'}+\overline{v'}\overline{u}+\overline{v'u'} \tag{3.5}$$

$$= \overline{v}\overline{u}+\overline{v'u'} \tag{3.6}$$

puisque la moyenne des fluctuations est nulle.

Finalement l'équation du mouvement peut se réécrire:

$$\frac{\partial\left(\rho\overline{u}\right)}{\partial t}+\frac{\partial\left(\rho\overline{u}\overline{u}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\overline{v}\overline{u}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho\overline{w}\overline{u}\right)}{\partial z}=$$

$$f\rho v-\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\left(\rho\overline{u'u'}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\rho\overline{v'u'}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\rho\overline{w'u'}\right)}{\partial z} \tag{3.7}$$

Tous les développements faits précédemment dans le cours s'appliquaient en fait aux composantes moyennes $\overline{u}$, $\overline{v}$ ... En réintroduisant l'équation de continuité et en notant à nouveau u, v ... les champs moyens $\overline{u}$, $\overline{v}$ ..., on obtient l'équation suivante:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.8}$$

$$-\quad\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho\overline{u'u'}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(\rho\overline{v'u'}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\rho\overline{w'u'}\right)}{\partial z}\right]$$

Le nouveau terme dans le membre de droite est à nouveau un bilan de quantité de mouvement mais cette fois il prend en compte uniquement les flux turbulent de quantité de mouvement.

Evidemment, on n'a fait jusque là que reoprter la difficulté sur les termes du second membre.

En pratique, on veut évaluer les termes $\overline{u'v'}$ sans connaitre explicitement les quantités turbulentes u' ou v'.

Les **fermetures turbulentes** ont pour but de relier ces flux turbulents aux variables explicites du modèle ($\overline{u}$, $\overline{v}$ ...).

3.2 Fermeture d'ordre 1 : la longueur de mélange

Une des approches les plus simples de la fermeture turbulente est celle de la longueur de mélange de Prandtl. On imagine que les mouvements turbulents sont caractériser par une longueur typique l.

Intéressons-nous par exemple au transport turbulent de la température potentielle dans une région avec un gradient $\partial\overline{\theta}/\partial z > 0$, par exemple. On suppose aussi pour simplifier que $\overline{w} = 0$ et que les mouvements verticaux sont uniquement turbulents. Si on regarde θ dans une une particule d'air qui descend, elle est statistiquement plus chaude qu'une particule moyenne à la même hauteur puisqu'elle vient d'une région plus chaude. On a donc, pour cette particule qui descend, $\theta' > 0$.

De la même façon, les particules qui montent venant d'une région plus froide, elles sont associées statistiquement à un $\theta' < 0$.

On voit que, dans les deux cas, on a $w'\theta' < 0$, soit un flux de chaleur vers le bas, à contre gradient du champ moyen.

La longueur de mélange est définie par la relation:

$$\theta' = \theta\left(z+l\right) - \theta\left(\theta\right) \sim l\frac{\partial\theta}{\partial z} \tag{3.9}$$

Si on se trouve suffisamment près de la surface, par exemple, le vent moyen, freiné par le frottement sur la surface, croît avec l'altitude. On a donc $u' > 0$ pour une particule qui descend c'est à dire pour $w' > 0$. Pour une particule qui monte, la perturbation au niveau z vaut

$$u' = -u\left(z\right) + u\left(z-l\right) \sim -l\frac{\partial u}{\partial z} \tag{3.10}$$

Finalement, dans les deux cas, on a une corrélation négative entre u' et w': $\overline{w'u'} < 0$.

Dans le cas où u croît vers le haut, on a $\overline{w'u'} < 0$ c'est à dire que la diffusion turbulente transporte de la quantité de mouvement vers le bas.

Finalement, le flux total de quantité de mouvement est du type

$$\rho\overline{w'u'} \sim -2\rho l\overline{|w'|}\frac{\partial u}{\partial z} \tag{3.11}$$

En poussant un peu plus loin le raisonnement, et en supposant que l'atmosphère est neutre vis-à-vis de l'instabilité convective, on peut supposer que la turbulence qui se développe est isotrope. C'est à dire que les perturbations des composantes verticale et horizontale de la vitesse sont du même ordre de grandeur:

$$|w'| \sim |u'| \sim l \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| \sim l \left|\frac{\partial \vec{U}_H}{\partial z}\right| \tag{3.12}$$

De la même façon, on aura pour les corrélation $\overline{u'u'}$ un terme du type

$$\rho\overline{u'u'} = -\rho k \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.13}$$

Mais le gradient vertical du champ moyen u est de l'ordre de U/D, où D est la profondeur de la couche limite (hauteur au-dessus de la surface sur laquelle les champs sont sensiblement affectés par la diffusion verticale turbulente), puisque u est nul au niveau de la surface. En revanche, le gradient horizontal de u est de l'ordre de U/L. On voit donc que le terme de mélange vertical est de loin prépondérant devant les mélanges horizontaux.

Finalement, les équations du mouvement peuvent se réécrire sous la forme

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho k \frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{3.14}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(\rho k \frac{\partial v}{\partial z}\right) \tag{3.15}$$

où le coefficient k, dans le cas où on suppose que l'atmosphère est neutre vis-à-vis de l'instabilité verticale, peut être mis sous la forme

$$k \sim l \left|\frac{\partial \vec{U}_H}{\partial z}\right| \tag{3.16}$$

On voit qu'on a réintroduit dans les équations du mouvement un terme de viscosité qui représente le frottement turbulent des vents sur la surface. En pratique, le coefficient k dépend fortement de l'état moyen de l'atmosphère: d'abord du cisaillement vertical du vent mais également de la stabilité verticale de l'atmosphère (si l'atmosphère est plus stable, les échanges verticaux seront moins efficaces).

On peut définir le nombre d'Eckman turbulent Ek comme le rapport entre le terme de viscosité turbulente et le terme la force de Coriolis. L'ordre de grandeur de la dérivée seconde de u dans la couche limite est U/h^2 où h est la hauteur de la couche limite. On a donc

$$Ek = \frac{k}{fh^2} \tag{3.17}$$

Si on considère que la couche limite s'arrête vers $Ek \sim 0.1$, on trouve, pour une valeur moyenne de $k \sim 5\ \mathrm{m^2s^{-1}}$, $h \sim \sqrt{5 \times 10^5} \sim 6 \times 10^2 m$. En fait la hauteur de la couche limite varie entre quelques dizaines de mètres quand l'atmosphère est très stratifiée et quelques kilomètres en présence de convection.

En fait, le même type de mélange turbulent se produit dans les basses couches de l'atmosphère et sous la surface de l'eau dans la couche mélangée océanique. La connaissance de la diffusion verticale dans ces deux couches limites est essentielle pour comprendre comment le moment cinétique est transféré depuis l'atmosphère vers l'océan. C'est le principal moteur de la circulation océanique en surface.

3.3 Modèles TKE

La longueur de mélange offre une façon simple et intuitive de "fermer" les équations du mouvement. Des modèles plus élaborés peuvent être dérivés en considérant l'évolution de l'énergie cinétique turbulente, TKE (Turbulent Kinetic Energy). L'énergie cinétique turbulent est simplement $e = (u'^2 + v'^2 + w'^2)/2$.

La racine carrée de cette énergie est l'ordre de grandeur de la vitesse mise en jeu dans les mouvements turbulents.

Considérons l'équation moyenne

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \overline{v}\frac{\partial \overline{u}}{\partial y} + \overline{w}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} &= f\overline{v} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} \\ &- \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\left(\rho\overline{u'u'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\rho\overline{v'u'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\rho\overline{w'u'}\right)}{\partial z}\right] \end{aligned} \tag{3.18}$$

et l'équation complète (appliquée au champs complèts contenant à la fois la valeur moyenne et les perturbations):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.19}$$

On voit qu'en soustrayant les deux équations on arrive à une équation d'évolution sur u'. Si on dérive une équation équivalente sur v' et w' (dans le dernier cas, on passe généralement à une description non-hydrostatique plus adaptée aux mouvements de la couche limite), et si on multiplie $\partial u'/\partial t$ par u', $\partial v'/\partial t$ par v', $\partial w'/\partial t$ par w', on obtient en sommant une équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente.

Si on prend un système de coordonnées aligné avec le vent moyen ($v = 0$), si on suppose que les quantités sont homogènes horizontalement, alors l'équation d'évolution de l'énergine cinétique turbulent peut se ramener à (Stull, 1988, cf. par exemple) :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{g}{\theta}\overline{w'\theta'} - \overline{u'v'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \epsilon \tag{3.20}$$

Le premier terme dans le membre de droite est généralement négatif (puit) dans le cas d'une atmosphère stable. Il correspond à l'inibition de la turbulence par les effets de stratification. Il peut devenir une source dans des conditions instables.

Le second terme est généralement une source puisque le flux turbulent de quantité de mouvement $\overline{u'w'}$ est généralement opposé au gradient du vent moyen. Il correspond au fait que les mouvements turbulents tendent à hinomogénéiser le champ de vent (les excursion verticales tubulentes augmentent les valeurs de u' par exemple).

Enfin, le dernier terme, qui peut avoir une forme compliqué et dépend de e, est la disipation de la turbulence (par exemple si on coupe les deux premiers termes).

Normalement, il faut prendre en plus en compte des termes d'advection et de diffusion turbulente de e.

Le rapport entre création de la turbulence par le cisaillement et inhibition par la stratification fait apparaitre le nombre de Ridchardson

$$Ri = \frac{\frac{g}{\theta}\overline{w'\theta'}}{\overline{u'v'}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z}} \tag{3.21}$$

3.4 Modèles non locaux de la couche limite

Cette approche qui conduit à concevoir la turbulence comme une super-viscosité de l'atmosphère est mise en échec dans de nombreux cas. Elle ne prend pas en compte les "grandes structures de la couche limite" (thermiques, rouleaux, etc...). Elle ne permet pas d'expliquer le fait que le profile de température potentielle dans la couche limite soit souvent stable dans une région où le flux turbulent d'énergie est orienté vers le haut. Ces deux remarques sont étroitement liées et nécessitent qu'on développe des paramétrisations spécifiques pour ces grandes structures. Ces paramétrisations sont regroupées sous le qualificatif de "non locales" par opposition aux fermetures en viscosité turbulente.

On notera notamment l'utilisation de "matrices de transiliences" (Stull, 1988) ainsi que l'introduction d'un "contre-gradient" en plus du gradient des variables du modèle avant leur diffusion (Holton, 1992).

Chapter 4

Transport atmosphérique d'espèces traces

Le transport des espèces traces (espèces chimiques et aérosols) par l'atmosphère prend un place grandissante dans l'étide des atmosphères terrestre et planétaires.

On va s'intéresser dans une première partie au transport d'un "traceur" passif (n'affectant pas le fluide atmosphérique), et conservatif.

L'équation du transport pour un traceur de ce type est simplement

$$\frac{dq}{dt} = 0 \tag{4.1}$$

ou

$$\frac{\partial q}{\partial t} + V \vec{\text{grad}} q = 0 \tag{4.2}$$

Dans toute la discussion qui suit, on va supposer le champ de vent V connu.

Il existe des méthodes basée directement sur l'idée de la conservation le long de trajectoires de paticules:

- **Les méthodes lagrangiennes:** elles consistent à "ensemencer" le domaine d'étude (où la région source) avec des particules et à les suivre individuellement. Ces méthodes peuvent être très précises mais il faut généralement utiliser un grand nombre de particules, notamment pour éviter que des trous se créent dans la distribution spatiale de ces particules.

- **Les méthodes semi-lagrnagiennes:** On suppose qu'à un pas de temps t donné, q est connu sur une grille. On prédit la valeur sur le même maillage au temps $t + \delta t$ en remontant à t "le long du vent": $q(x, t + \delta t) = q(x - \delta t V, t)$. Le problème est que $q(x - \delta t V, t)$ a peu de chances de se trouver sur le maillage. On intepolle donc cette valeur à partir des valeurs sur le maillage au temps t. Cette méthode évite le problème principal des méthodes lagrangiennes. Sa précision est déterminer par la précision des routines d'interpollation. Les méthodes semi-lagrangiennes ont été très largement utilisées dans la communauté atmosphérique. Elles présentent un défaut important: il est difficile de garantir la conservation de la quantité totale de traceur.

- **L'advection des contours:** Elle consiste à advecter des particules uniquement sur des "iso-niveaux" du champs considéré. Cette dernière méthode, potentiellement très précise, se couple difficilement à d'autres processus (il faut alors calculer l'effet des autres processus sur la topologie des "iso-niveaux).
- **Différences finis:** Il existe également tout un tas de méthodes en différences finies.

Nous présentons ci-dessous aux méthodes en "volumes finis", basées sur la formulation en flux de l'équation de transport:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}\,(\rho V) = 0 \tag{4.3}$$

déduite de la précédente en utilisant l'équation de continuité pour l'air:

$$\frac{\partial \rho q}{\partial t} + \text{div}\,(\rho q V) = 0 \tag{4.4}$$

où ρ est la densité de l'air. integration on the volume of a polyhedron with N faces, leads to the following formulation :

L'intégration de ces relations sur un polyhèdre (volume de contrôle) à N faces conduits aux formulations:

$$\frac{\partial m}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} U_n \tag{4.5}$$

and

$$\frac{\partial q m}{\partial t} = \sum_{n=1}^{N} F_n \tag{4.6}$$

où m est la masse totale d'air dans le polyhèdre, q est la concentration massique moyenne du traceur dans le volume, U_n et F_n sont les flux de masse et flux de traceur vers l'intérieur du polyhèdre pour la face n.

Les formulations en "volumes finis" présentent l'avantage très important qu'elles sont conservative dès que le même flux est utilisé pour les volumes en amont et en aval de l'interface considérée.

A partir d'ici, et en attendant mieux, le texte, extrait d'un article, est en anglais

For the most famous of those schemes, first introduced by Godunov (1959), F is just estimated as the product of U by the value of q in the upstream volume. This simple scheme, sometimes referred to as "upstream scheme", is conservative, positive and monotonic, as well, but very diffusive (for those who are not familiar with those notions, see e. g. Rood, 1987).

To overcome this deficiency of Godunov's scheme, Van Leer (1977) proposed to use for the upstream value of q an extrapolation at the mesh interface computed from a polynomial approximation to the subgrid scale tracer distribution in the upstream volume (Godunov scheme corresponding to the particular case of a zero order polynomial). In fact, two of Van Leer Schemes were introduced later on and independently in the GCM context by Russell and Lerner (1981) – same as Van Leer Scheme III – and Prather (1986) – same as Van Leer Scheme VI –. Van Leer favored scheme III considering scheme VI as too complicated for the gain in accuracy. In the meteorological community at the opposite, Prather's scheme was introduced as an improvement of Russell's scheme and is often taken as a reference.

4.1 1-Dimensional derivation

4.1.1 General description

In one dimension, and after integration over one time step, Eq. 4.5 and Eq. 4.6 just read

$$\delta_t(m)_i = U_{i-1/2} - U_{i+1/2} \tag{4.7}$$

and

$$\delta_t(qm)_i = F_{i-1/2} - F_{i+1/2} \tag{4.8}$$

where indices correspond now to position on the x axis, δ_t represents the finite difference in time, and $U_{i+1/2}$ and $F_{i+1/2}$ are the mass and tracer transfers across the interface $i+1/2$ during one time-step (fluxes integrated in time). $F_{i+1/2}$ can be rewritten as the product of the mass transfer $U_{i+1/2}$ by the mean tracer mixing ratio $\hat{q}_{i+1/2}$ corresponding to the air crossing the interface.

Van Leer's method consists in approximating the sub-grid scale distribution by a polynomial for which $\hat{q}_{i+1/2}$ and hence advection can be computed exactly. The principle and notations are illustrated in Fig. 4.1 for the case of a first order polynomial.

With these notations, the new values of q and m after one time step are simply

$$q_i^* = \left(q_i m_i + U_{i-1/2}\hat{q}_{i-1/2} - U_{i+1/2}\hat{q}_{i+1/2}\right)/m_i^* \tag{4.9}$$

and

$$m_i^* = m_i + U_{i-1/2} - U_{i+1/2} \tag{4.10}$$

For positive values of $U_{i-1/2}$ and $U_{i+1/2}$, Eq. 4.9 can be rewritten as

$$q_i^* = \left[U_{i-1/2}\hat{q}_{i-1/2} + \left(m_i - U_{i+1/2}\right)\hat{q}_i\right]/m_i^* \tag{4.11}$$

where $\hat{q}_i$ is the mean mixing ratio in that part of the air which remains in volume i during the time-step (see Fig. 4.1). With these notations, the Van Leer scheme can be described as the sequence of the two following steps : first, a new distribution $\hat{q}$ (crosses on Fig. 4.1) is defined from distribution q (dots) based on the polynomial approximation; then this new distribution is rearranged among the grid boxes.

A very simple formulation of the **sufficient requirement for monotonicity** proposed by Van Leer (1977) in the general context of a compressible flow

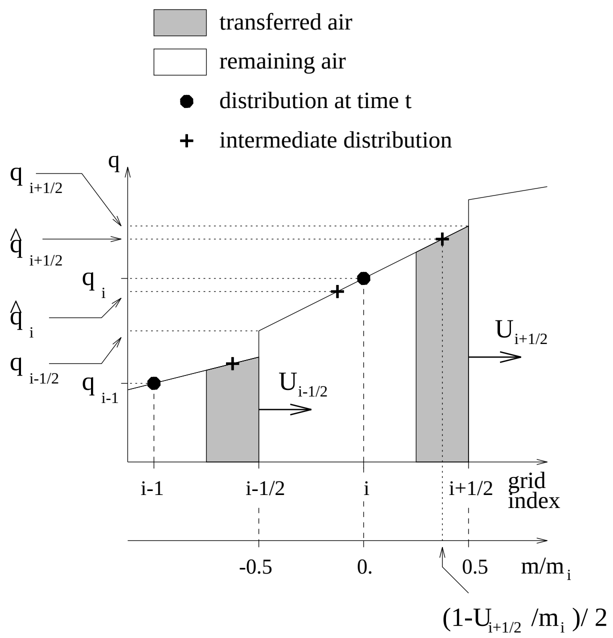


Figure 4.1: General principle of Van Leer finite volume schemes and notations for the present paper illustrated in the case where a first order polynomial is used to approximate the sub-grid scale distribution (see text for details). The vertical axis corresponds to the tracer mixing ratio. The horizontal axis is shown both for grid index and for the mass counted from the center of mesh i and normalized by the mass of this mesh (m_i). The shaded areas correspond to the quantity of tracer which is advected through the mesh interfaces during one time step.

is that $\hat{q}$ **must take its value between the two neighboring q in regions where q is monotonic.**

Suppose to fix ideas that $q_{i-1} \leq q_i \leq q_{i+1}$ and $U \geq 0$. The requirement above is just that

$$q_j \leq \hat{q}_{j+1/2} \leq q_{j+1} \text{ for } j = i-1 \text{ and } j = i \tag{4.12}$$

and that

$$q_{i-1} \leq \hat{q}_i \leq q_i. \tag{4.13}$$

Introducing condition 4.12 in Eq. 4.9 insures that $q_i^* \leq q_{i+1}$ while combination of Eq. 4.11 and conditions 4.12 and 4.13 leads to $q_{i-1} \leq q_i^*$. Finally, we see that the condition given above insures that q_i^* **lies between q_{i-1} and q_i (resp. q_i and q_{i+1}) for $U > 0$ (resp. $U < 0$).** As pointed out by Van Leer (1977), this statement is a sufficient requirement for monotonicity.

With the additional requirement that "$\hat{q}_i = q_i$ (constant value in the mesh) when q_i is an extremum" insures that maxima will not increase, nor minima decrease. This in turn insures **positivity** and prevents from the formation of small scale numerical oscillations coming from the different speeds of advection of the various Fourier components of the tracer field (dispersion, see e.g., Rood, 1987).

With the requirements above, note also the important property that **a uniform tracer distribution is unchanged by advection, and not only for non divergent flows** (replace q_i, $\hat{q}_{i-1/2}$ and $\hat{q}_{i+1/2}$ by a constant value in Eq. 4.9).

Finally, note that in all the derivations above, the time-step is assumed to be small enough so that the mass transfer U is smaller or equal to the mass of the upstream volume. Note also that if U is exactly equal to the mass in the upstream mesh, advection will be computed exactly independently of the polynomial approximation.

4.1.2 First order (Godunov) scheme

A first approximation is to consider the tracer distribution inside the mesh as a constant in which case $\hat{q}$ is just the upstream value of q ($\hat{q}_{i+1/2} = q_i$ if $U_{i+1/2} > 0$ and q_{i+1} otherwise). As already stated, this scheme which was first proposed by Godunov (1959) is computationally very cheap, positive and monotonic, but at the expense of a very large numerical diffusion.

4.1.3 Second order scheme

The next step is to assume that the tracer varies linearly as a function of mass with a slope $(\delta q)_i = q_{i+1/2} - q_{i-1/2}$ where $q_{i\pm1/2}$ are the tracer mixing ratio extrapolated at the mesh boundary (see Fig. 4.1 for illustration).

Then $\hat{q}_{i+1/2}$ is simply given by

$$\hat{q}_{i+1/2} = q_i + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{U_{i+1/2}}{m_i}\right)(\delta q)_i \text{ if } U_{i+1/2} > 0 \tag{4.14}$$

$$= q_{i+1} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{U_{i+1/2}}{m_{i+1}}\right)(\delta q)_{i+1}\text{ , otherwise.} \tag{4.15}$$

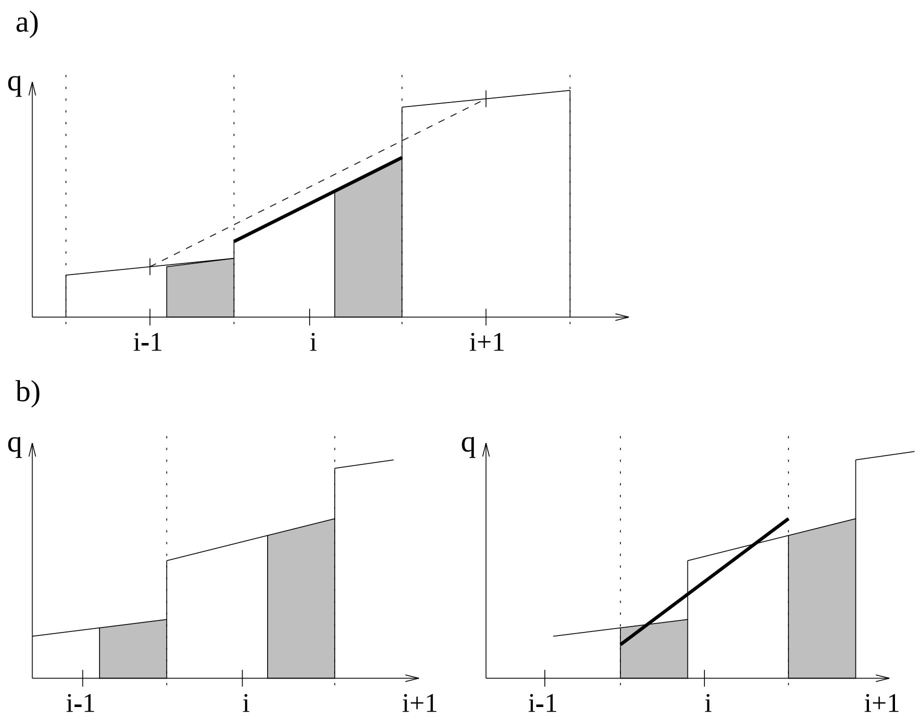


Figure 4.2: 2nd order schemes : estimation of the slope by finite differences for Van Leer I (upper panel) and by least-square fit of the broken line distribution after a one time step integration for the Slopes scheme (see text for details).

Various schemes were proposed by Van Leer (1977, 1979) based on various estimations of (δq) two of which appear to be very attractive, the first one for its low numerical cost and the second one for its accuracy.

In Van Leer scheme I, slopes are just estimated at each time step by finite differences ($\delta q_i = \left(q_{i+1} - q_{i-1}\right)/2$) as illustrated in the upper scheme in Fig. 4.2. This scheme can be seen as a finite-volume version of the Fromm's algorithm From (1968).

In the second scheme, the slope at time step $t + \delta t$ in a given mesh is computed from the broken–line distribution corresponding to the same air mass at time t by conserving the first moment of the distribution. The new slope also corresponds to the linear distribution which minimizes the square root distance with the corresponding distribution at time t. This is illustrated in the lower panels of Fig. 4.2.

This second scheme introduced in a 1-Dimensional context as Scheme III by Van Leer (1977) was published later on by Russell and Lerner (1981)[1] in the more general context of 3-Dimensional advection. It has been used at NASA/GISS for several years in atmospheric transport studies. It is generally referred to as Slopes scheme in the GCM community. This name will be retained hereafter. For a detailed description of the numerical formulation in the 3-

[1]The slope update, eq. (11) in the original Van Leer's paper, is the exact restriction to the 1-Dimensional non-divergent context of eq. (23) from Russell and Lerner (1981).

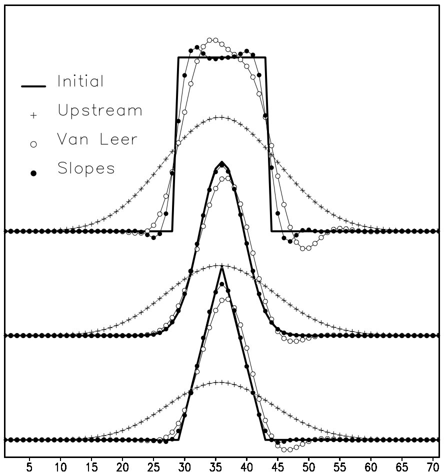


Figure 4.3: Comparison of the second order schemes. This figure gives an example of 1-Dimensional advection on a periodic domain with a constant velocity U and 70 points of three different tracer distributions. The vertical axis is in arbitrary units. Results are shown for time-step 350 and $U/m = 0.2$.

Dimensional divergent context, see Russell and Lerner (1981).

Fig. 4.3 gives an example of the typical behavior of the Godunov, Van Leer I and Slopes schemes in the 1-Dimensional context. The Slopes scheme is of course the most accurate but the main difference is between the very diffusive first order scheme and the two others. However, it clearly appears in the figure that Van Leer I and Slopes schemes are not monotonic (oscillations leading to negative values are especially strong in the case of the square distribution).

4.1.4 Slopes limitation

One of the main interest of the work by Van Leer (1977) is to propose a very simple way of insuring monotonicity. A first way consists in applying directly the constraint given at the end of Section 4.1.1.

For the second order schemes, he also gave the somewhat stronger but simpler requirement that the entire tracer distribution in a given mesh i does not exceed the mean value in the two adjacent boxes and that the slope must be of the same sign of that in the two adjacent boxes (the latter criterion is automatically satisfied for Van Leer Scheme I). This requirement can be formulated as a slope limitation. For Van Leer scheme I, the complete computation of the slope with limitation is simply

$$\begin{aligned}(\delta q)_i = {} & \text{sign}\,(q_{i+1} - q_i) \times \\ & \min\left(\frac{|q_{i+1} - q_{i-1}|}{2}, 2|q_{i+1} - q_i|, 2|q_i - q_{i-1}|\right)\end{aligned} \tag{4.16}$$

if q_i lies in between q_{i-1} and q_{i+1} and 0 otherwise.

The effect of the strong and weak (direct application of Eq. 4.12 and Eq. 4.13) limitations, which correspond respectively to eq. (66) and (74) given by Van Leer

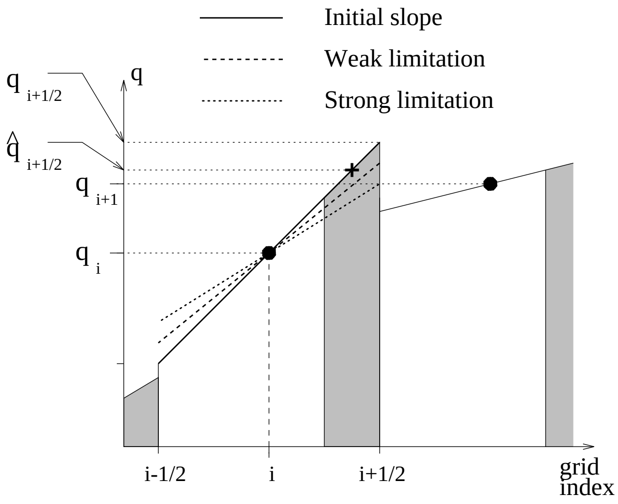


Figure 4.4: An example of slope limitation.

(1977), is illustrated in Fig. 4.4.

A numerical test of the impact of the weak and strong limits is shown in Fig. 4.5. The strong limit significantly alters the accuracy of the Slopes scheme whereas the weak constraint corrects this scheme almost only where oscillations occur, only reducing a little bit the maximum of the Gaussian distribution. For Van Leer Scheme I, the difference between the two limits is small when compared with the difference between the exact and numerical solutions.

A very elegant alternative to Eq. 4.16 is to compute the slope as a geometric average

$$(\delta q)_i = \frac{2\,(q_{i+1} - q_i)\,(q_i - q_{i-1})}{q_{i+1} - q_{i-1}} \tag{4.17}$$

which automatically satisfies the strong requirement. This scheme is slightly more diffusive than direct application of Eq. 4.16 but the gain in time is also weak since this equation is only part of the scheme.

In the following tests we use Eq. 4.16 whereas Allen et al. (1991) retained Eq. 4.17 which makes no real difference.

4.1.5 Third-order scheme

Approximation of the tracer distribution can be refined further by using second order polynomials approximant of the sub-grid scale tracer distribution.

The equivalent to Van Leer I scheme (Van Leer IV in the original paper), just consists in evaluating the polynomial coefficients by finite differences computed on the values of q at the mesh centers. Van Leer did not pay much attention to this scheme which presents the drawback of being equivalent to Van Leer I for $U/m = 0.5$. For small values of U/m however it can be significantly more accurate. As Van Leer I, this scheme presents the advantage of carrying only one variable per mesh. Woodward and Colella (1981) derived an alternative to Van Leer IV with an elaborate non-linear limiting-steepening filter (Woodward and Colella, 1984; Colella and Woodward, 1984, See also,). The resulting "Piecewise

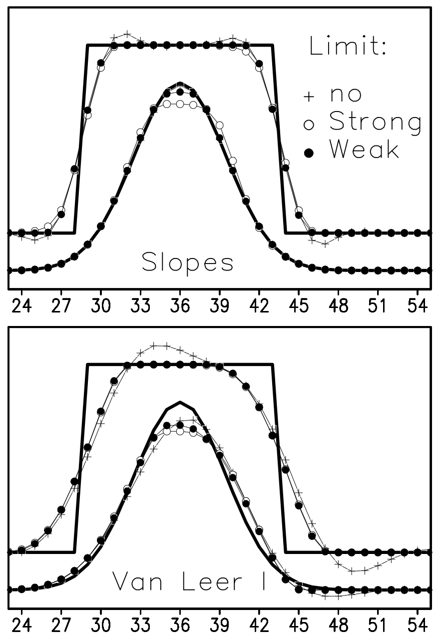


Figure 4.5: Impact of the slope limitation on the Slopes (upper panel) and Van Leer I (lower panel) schemes. The cases with no limits (same as in Fig. 4.3) and weak and strong limits (see text for details) are shown for the square and Gaussian distributions.

Parabolic Method" has been applied for meteorological modeling by Carpenter et al. (1990) and Lin and Rood (1996). For the present paper, we only test the scheme originally derived by Van Leer.

The equivalent to Van Leer scheme III is a scheme in which first and second order moments are conserved during advection. This scheme (scheme VI from Van Leer, 1977) was introduced in the GCM community by Prather (1986). Prather's scheme is of course much more accurate than the previous schemes (see the next section). However, limits are still required in order to completely avoid spurious numerical oscillations.

4.2 Implementation in the GCM

4.2.1 The LMD-Z GCM

The model used for this study is derived from the LMD GCM first described by Sadourny and Laval (1984). In addition to several significant modifications in the "physical package" through time, the model has been recently recoded in a more organized and flexible manner. It includes in particular a zooming capability : longitudes and latitudes are fixed arbitrarily at the beginning of a simulation. The GCM is briefly described below.

Root mean square error

Figure 4.6: 1D comparisons of the different schemes.
$\bullet$: reference with 70 meshes, regular grid and 1 full revolution.
$\star$: finer grid (140 meshes).
$_4$: 4 full revolutions (with 70 meshes).
$_s$: stretched grid (1 revolution, 70 meshes).
The reference case ($\bullet$) corresponds to Fig. 4.3 with the same three tracer distributions (Gaussian, Triangle and Square). As for Fig. 4.3, the values of the tracer field lie between 0 and 1. The Courant number, U/m, is 0.1 so that one full revolution corresponds to 700 time-steps. For the stretched grid, there is a factor 4 between the smallest and largest mesh. The largest and smallest meshes are for point 18 and 52 respectively with the initial distribution being centered at point 35.

Dynamics

The dynamical part of the code is based on a finite-difference formulation of the primitive equations of meteorology developed by R. Sadourny (see e. g. Sadourny and Laval, 1984) and coded by P. Le Van. The dynamical equations are discretized on a staggered latitude-longitude Arakawa C-grid (see e. g. Kasahara, 1977) . The C-grid is in fact a node-centered finite volume grid : the scalar variables are defined at the center of meshes whereas wind components are defined at mesh interfaces.

Note that this dynamical code has been widely used not only for Earth but also for the numerical simulation of the general circulation of other planetary atmospheres, in particular for Mars (Hourdin et al., 1993, 1995a) and Titan (Hourdin et al., 1995b).

Physical parameterizations

The physical package used for the present study is very close to that described by Le Treut et al. (1994). The radiation scheme is the same as used in the model of European Centre for Medium-Range Weather Forecasts (ECMWF) : the solar part is a refined version of the scheme developed by Fouquart and Bonnel (1980) and the thermal infra-red part is due to Morcrette et al. (1986). Condensation is parameterized separately for convective and non-convective clouds. Convection is parameterized using in sequence a moist adiabatic adjustment and a modified version of the Kuo (1965) algorithm. A prognostic equation for cloud water is included (Le Treut and Li, 1991). The large scale transport of vapor and liquid water is taken into account with Godunov scheme on the horizontal and a second order centered scheme with a special treatment of negative concentrations on the vertical. The planetary boundary layer scheme is based on a second order closure model. In this version of the model, the surface conditions over land are treated using a simple bucket parameterization for moisture and a single layer for heat and moisture. Note also that diurnal cycle is not included.

The realism of the climate simulated by this revised version of the model has been carefully checked with respect to that of the previous version presented for instance by Harzallah and Sadourny (1994).

4.2.2 Implementation

The numerical implementation of finite volume schemes is particularly easy in the LMD GCM since mass fluxes are already defined at the mesh interfaces (C-grid) and used to solve the continuity equations which guaranties a complete consistency between tracer and mass advection.

Time splitting

The adaptation to 3-Dimensional grid is based on time splitting : advection is done sequentially in the 3 directions. This approach has already been used successfully for finite volume schemes (Van Leer, 1979; Allen et al., 1991; Russell and Lerner, 1981; Prather, 1986).

Here we adopt the sequence proposed by Russell and Lerner (1981) :

Direction	time step
X	$\delta t/2$
Y	$\delta t/2$
Z	δt
Y	$\delta t/2$
X	$\delta t/2$

For each step, the values of both mass and tracer mixing ratio are updated following Eq. 4.10 and Eq. 4.9.

Note that as for 1-Dimensional advection, a uniform tracer field is unchanged by this sequence of operations, independently of the divergent character of the wind field. This important property is apparently not satisfied for all kind of time-splitting implementations (see the discussion by Lin and Rood, 1996).

Advection over more than one mesh in one time-step

The refinement of the longitudinal discretization near the poles for longitude-latitude grids requires smaller and smaller time steps if one wants to satisfy the criterion that $U < m$. One possibility is to use an additional time splitting in the x direction near the pole (see e. g. Allen et al., 1991).

Here, we use the fact that advection can be computed exactly if the mass transfer U is exactly equal to the mass of the upstream mesh. For $U_{i+1/2} > 0$ to fix idea, and if $m_i < U_{i+1/2} < m_i + m_{i-1}$ (which means that all the air of mesh i passes through interface $i + 1/2$ in one time-step) then the flux F_i is the sum of the tracer amount in the upstream box $m_i q_i$ and of the tracer advected form the mesh $i-1$ with a mass flux $U_{i+1/2} - m_i$. More generally, for

$$\sum_{j=i-n+1}^{i} m_j < U_{i+1/2} \leq \sum_{j=i-n}^{i} m_j \tag{4.18}$$

we use

$$
\begin{aligned}
F_{i+1/2} = & \sum_{j=i-n+1}^{i} m_j q_j \\
& + \left(U_{i+1/2} - \sum_{j=i-n+1}^{i} m_j \right) \hat{q}_{i-n+1/2}
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

with

$$
\begin{aligned}
\hat{q}_{i-n+1/2} = & q_{i-n} \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{U_{i+1/2} - \sum_{j=i-n+1}^{i} m_j}{m_{i-n}} \right) (\delta q)_i
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

This approach is analogous to the flux-form Semi-Lagrangian method proposed by Lin and Rood (1996) except that we conserve the semi-Lagrangian approach in the x direction only to treat the problem of longitudinal grid refinement near the poles. For the basic resolution of the LMD GCM, with a grid of about 100 000 points and a time step of 15 min for advection, the condition $n > 1$ is encountered about several tens of times per time step which makes the cost negligible.

Polar discretization

In the LMD GCM, the poles correspond to a mesh center, the horizontal mesh being twice smaller than current meshes in the meridional direction. The model uses a unique value of the mass and other scalar fields at the pole and the time evolution of the mass is computed from the integrated meridional mass fluxes over all the meshes around the pole.

The same scheme is retained for the tracer advection. However, no way of insuring strict monotonicity at the pole was found except by using zero slopes. Thus the scheme retained for polar points is equivalent to Godunov's.

A numerical test of the solid rotation advection of a cosine distribution through the poles is shown in Fig. 4.7. The lower panels show the results of the advection after one full revolution along a meridian (for the exact solution it also corresponds to the initial distribution). The shape of the advection with Van Leer scheme I is elongated in the y direction because of the numerical diffusion along the flow. At the same resolution, Prather's scheme is of course less diffusive but the shape of the iso-lines is slightly affected by the transpolar advection. The last panels on the right show an application of Van Leer scheme I with a much larger time-step for which the shifting number (Eq. 4.18) reaches a value of $n = 8$ at some points (case b). Note that the results are somewhat better than on the other Van Leer test (case a) because of the smaller number of time steps (160 against 16000 for the other cases).

4.3 Numerical tests

This section presents a series of numerical tests performed with the Godunov, Van Leer I, Slopes and Prather's schemes. For the Van Leer scheme, we use the

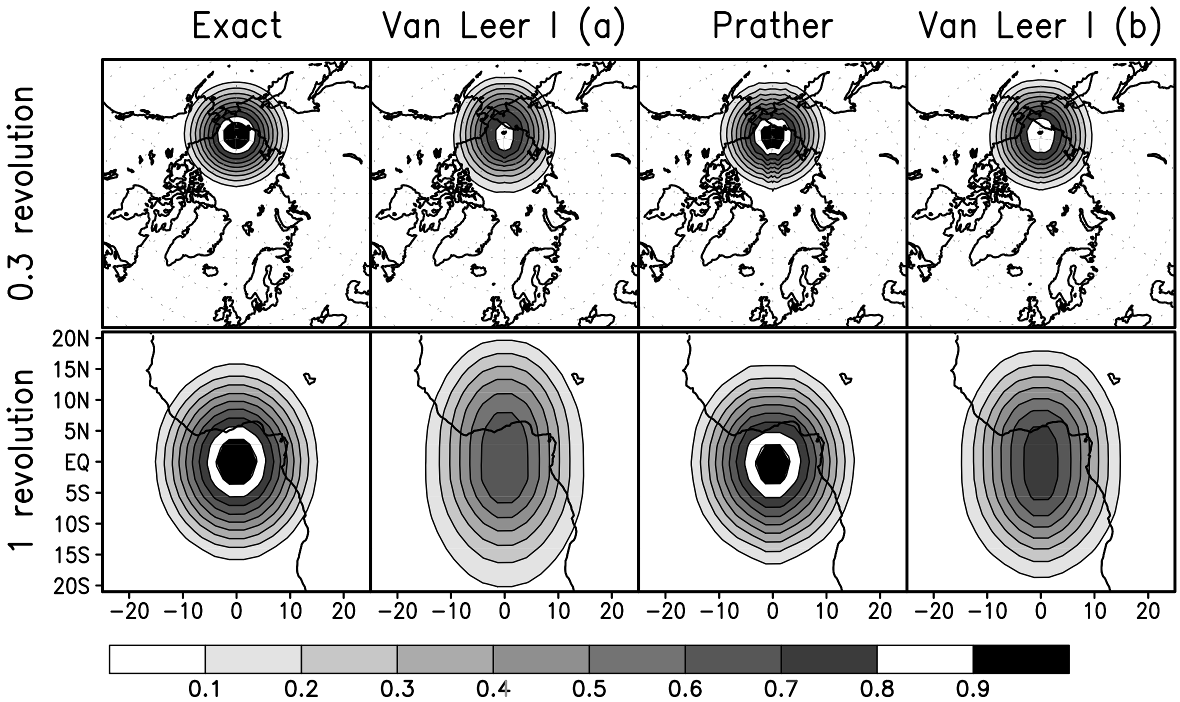


Figure 4.7: Numerical test of transpolar advection. Following Williamson and Rasch (1989) and Allen et al. (1991) the initial tracer distribution is given by $q(\lambda, \phi) = (1 + \cos[\min(r[\lambda, \phi]/R, 1)])/2$ with $r = \arccos(\cos\lambda\cos\phi)$ and $R = 7 \times (2\pi)/128$. The discretization is based on a 128×64 grid. We show from the left to right, the exact advection result, a Van Leer I test with 16000 time-steps for a full rotation, a Prather's test with the same characteristics and a Van Leer I simulation with only 160 time-steps. The lower panels correspond to a complete rotation (it is also the initial condition for the exact advection). The upper panels show the tracer distribution just after the first trans-polar crossing.

strong limit to insure monotonicity and positivity. For the Russell and Prather's scheme, only positivity is insured by limiting fluxes following Prather (1986). The Prather's and Slopes schemes were originally optimized and interfaced for the LMD model by Pascal Simon and Christophe Genthon.

We first derive an estimation of the numerical cost of the various schemes in order to compare their accuracy at a constant numerical cost. We then present a series of numerical experiments including 2D advection with an analytical wind field, tests of advection of an idealized tracer with the GCM winds, and a more realistic test on the Radon cycle.

4.3.1 Numerical cost of the various schemes

For practical purposes, the interesting question about accuracy is : "What is gained or lost at a constant numerical cost when changing the advection algorithm?". Since our goal is 3D advection in a GCM, we must first have an idea of how the different algorithms compare in terms of numerical cost in this particular context.

The easiest and most rigorous comparison is that of storage requirements (note that for chemical applications for instance, this issue may dominate the problem of CPU, at least for short term simulations). Godunov, Van Leer I and Van Leer IV schemes only need the storage of one value (the mean mixing ratio) per mesh. The Slopes scheme requires the storage of the first order moment in each direction which means 4 times more. Finally, Prather's scheme requires the additional storage of the 3 second order moments in each direction and the 3 cross derivatives which makes a total of 10 variables for each grid point.

The comparison in terms of CPU is less straightforward. Simulations on SUN Ultra workstations and on a CRAY-90 show that there is typically a factor 2 between Slopes and Van Leer I and between Prather and Slopes.

The main difference on vector machines is that you gain in running models on a finer grid. So there is a larger advantage for using lower order schemes on a finer grid. For the tests presented hereafter, run on a CRAY-90, Slopes had exactly the same cost for a 60x43 horizontal grid as Van Leer I for 120x85.

Finally, if playing with the horizontal resolution only, a doubling of resolution in each horizontal direction for Van Leer scheme I makes it equivalent to Slopes schemes in terms of storage and similar in terms of CPU on vector machines. The Slopes scheme in double resolution is also similar to Prather's for both CPU and storage. The doubling in each of the three directions makes Van Leer Scheme more similar to Prather's. Scalar machines are more favorable to higher order codes in terms of CPU.

4.3.2 2-Dimensional tests

We first present a test of horizontal advection with a simple analytical wind field for which the advection can also be computed analytically. For a non diverging horizontal flow in the longitude-latitude (λ, ϕ) reference frame, the zonal (u) and meridional (v) wind components satisfy the following relation:

$$\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial v \cos\phi}{\partial \phi} = 0 \tag{4.21}$$

The analytical wind field used for advection is derived from the following potential

$$\Psi = aU_0 \cos^2\frac{\lambda}{2}\cos^2\phi \tag{4.22}$$

(where U_0 is a normalizing velocity and a the planetary radius) as

$$u = \frac{1}{a}\frac{\partial \Psi}{\partial \phi} = -2U_0 \cos\phi \sin\phi \cos^2\frac{\lambda}{2} \tag{4.23}$$

$$v = \frac{1}{a\cos\phi}\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = -U_0 \cos\phi \cos\frac{\lambda}{2}\sin\frac{\lambda}{2} \tag{4.24}$$

Following a trajectory (constant value of Ψ) the meridional velocity $v = a\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ can be rewritten by combining Eq. 4.22 and Eq. 4.24 as

$$a\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t = -\sqrt{\Psi U_0/a}\ \mathrm{sign}\lambda\sqrt{1-\cos^2(\lambda/2)} \tag{4.25}$$

By introducing $\alpha = \sqrt{\Psi U_0/a^3}$ and after replacing $\cos^2(\lambda/2)$ according to Eq. 4.22, this equation can be integrated as

$$\begin{aligned} -\alpha\int \mathrm{sign}\lambda \mathrm{d}t &= \int \frac{\cos\phi \mathrm{d}\phi}{\sqrt{\cos^2\phi - \Psi/(aU_0)}} \\ &= \left[\arcsin\left(\frac{\sin\phi}{\sqrt{1-\Psi/(aU_0)}}\right)\right] \end{aligned} \tag{4.26}$$

The trajectories correspond to iso-values of Ψ. The time law is that given above. The time taken by an air parcel to come back to its original position is $2\pi/\alpha = 2\pi a/(U_0 \cos\phi \cos\lambda/2)$. This period it shorter at the center of the domain and infinite on the boundaries.

For the numerical tests, the time step was chosen small enough to avoid the problem of near polar advection for the Prather's and Slopes schemes for which the special treatment in longitude described above is not implemented. In practice, the length of the simulation was fixed in order to have a full rotation at the center of the domain. The total number of time-steps is 4000, 6000 and 12000 for increasing resolutions. Note that a change of time step modifies the accuracy of the results but much less than a change of resolution.

The winds are shown in the upper left corner in Fig. 4.8 with an arbitrary scale as well as the initial distribution chosen for numerical tests : a Gaussian in longitude independent of latitude. The two panels on the right show successive distributions computed analytically from the formula above. The air rotates faster near the center of the figure than close to the boundary which produces a spiral.

The very accurate reconstruction of the fine central filament (values larger than 0.9) by the Prather's scheme for the full resolution is of course very impressive. However, the Slopes scheme does as well or even somewhat better for

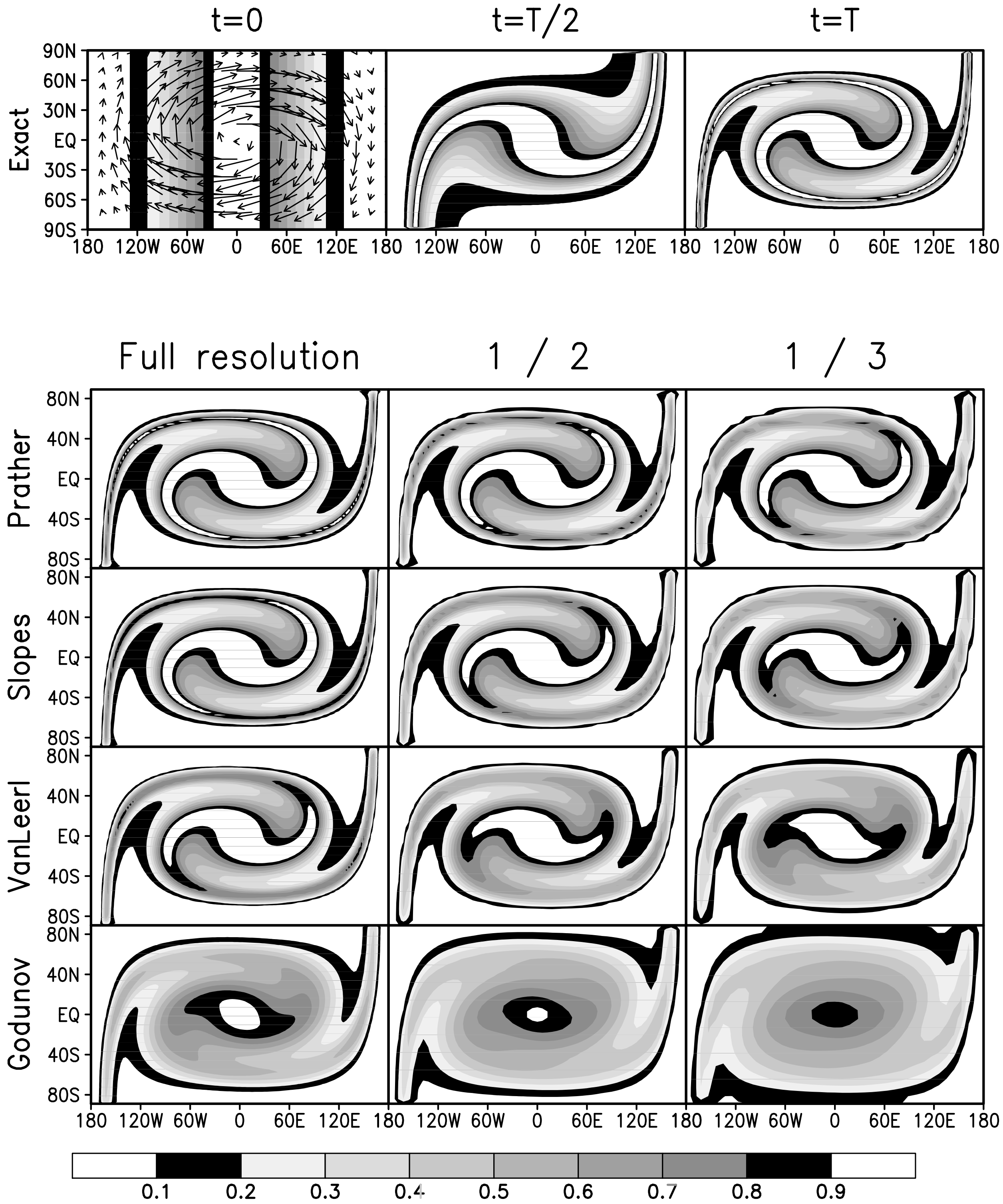


Figure 4.8: Test of horizontal advection with an analytical wind field. The initial tracer distribution is a Gaussian function of latitude only. The upper panel shows the tracer distribution at time zero, and at time $T/2$ and T as computed with the analytical solution. The lower panel shows the results at time T the result of advection with the different transport schemes for various resolutions (full resolution with 120×60 points, 1/2 with 60×30 and 1/3 with 40×20 in longitude-latitude.

the full resolution than Prather's scheme in half resolution. Same thing between Van Leer scheme I on the full grid and the slope scheme in low resolution.

So, for the impact of changing the resolution in two directions only, Van Leer scheme I is somewhat better than Slopes and Slopes better than Prather's at least in terms of storage to cost ratio. When changing the resolution in the three directions, the comparison must be made between the high and intermediate resolution with a significant advantage for Prather's with respect to Slopes or Slopes with respect to Van Leer I.

Note also the large difference in performance between the Godunov scheme and Van Leer I despite of their equivalent storage requirement.

4.3.3 GCM simulations with an idealized tracer

Here we present some experiments performed with an idealized tracer, assumed to be emitted on continents only, with the same source functions everywhere and no vertical variation. In addition to its resemblance to known trace species such as radon, this allows to have very different spatial scales for the source depending on the region on the globe. The tracer is destroyed exponentially with a time constant of 10 days. Those simulations are also idealized in the sense that the effect of sub-grid scale processes (convection, turbulent mixing in the planetary boundary layer) on the tracer distribution are not accounted for.

The GCM simulation is performed on a regular horizontal grid with 120 points in longitude and 85 in latitude and 20 layers on the vertical.

In order to compare the various schemes with different numerical resolutions but exactly the same wind field, the advection schemes were run, either at the full model resolution, or at resolution 1/2 or at resolution 1/3, but in a unique GCM experiment.

To run one of the schemes at resolution 1/2 for instance, the meshes are gathered horizontally four by four (two by two in each horizontal direction) as illustrated in Fig. 4.9. The horizontal mass flux at an interface is just the sum (in the x direction for V and in the y direction for U) of two consecutive GCM mass fluxes taken from the full grid and the vertical mass fluxes are summed four by four.

The simulation has been run on 40 days starting on 1st of july 1988. Sea Surface temperatures were taken from AMIP. The model was initialized with the ECMWF analysis.

Fig. 4.10 shows the tracer field at 500 mbar, as simulated with the various schemes and various resolutions at day 33. Although the tracer field is dominated by the continent-ocean contrasts in the source term, it clearly shows regions of advection of marine air on continents and vice versa. This particular date was chosen because of the very nice filament of continental air exported from south America over south atlantic.

Once again, the more expensive schemes are more accurate, but, for a fixed numerical cost, at least in terms of storage, the results are very similar for the various schemes.

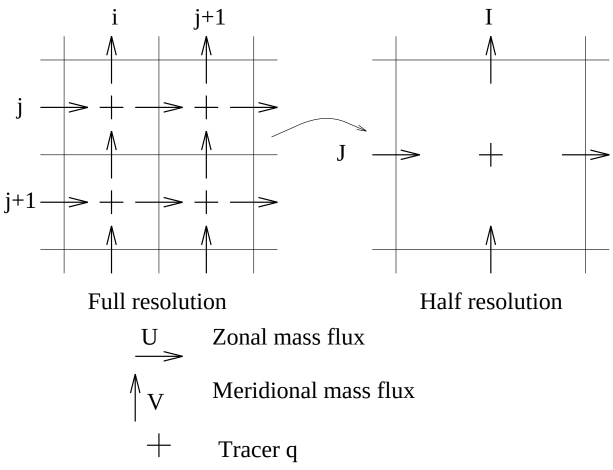


Figure 4.9: Illustration of the mesh gathering

A quantitative comparison is shown in Fig. 4.11, which displays the time evolution of the root mean square error computed with respect to Prather's results considered as the reference. The left panel shows the time evolution of the root-mean square error computed by considering Prather's advection in full resolution as a reference. The curves for Slopes at half resolution and Van Leer I are almost superimposed which means that, when looking at the results at a 60×43 resolution, the results of the slopes advection are identical to the results of the 120×85 advection with Van Leer I for an equivalent storage requirement.

On the right panel, errors are computed on the finest grid. The error for Van Leer scheme I are slightly larger than on the left panel but by less than a factor 2, which means that Van leer scheme I succeeds in catching part of the structure at the grid scale. The errors are much larger for the schemes computed on a coarser grid. Of course, this error could be significantly decreased by reconstructing the distribution of the finest grid using the higher order moments for the Slopes and Prather's schemes. However, this figure gives an idea of what is probably lost by using Prather's or Slopes scheme on a coarser grid and not being able to correctly treat the higher order moments, for instance in strongly nonlinear processes such as chemical reactions.

Finally, note that Van Leer IV does not give results much more accurate than Van Leer I.

4.3.4 Simulation of the radon cycle

Radon is very appropriate to test and compare the performances of transport and mixing in GCMs (see e. g. Genthon and Armengaud, 1995; Prather, 1993; Jacob and Prather, 1990). ^{222}Rn is a chemically inert natural gas, and its only significant sink is radioactive decay with a period ($t_{1/2} = 3.8$ days) typical of the life time of tropospheric aerosols. ^{222}Rn is produced mostly in soils by the decay of ubiquitous ^{238}U. It is exhaled at the surface of continents by exchange between the soil pores and the surface air (Lambert et al., 1982; Dörr, 1984; Dörr and Munnick, 1990).

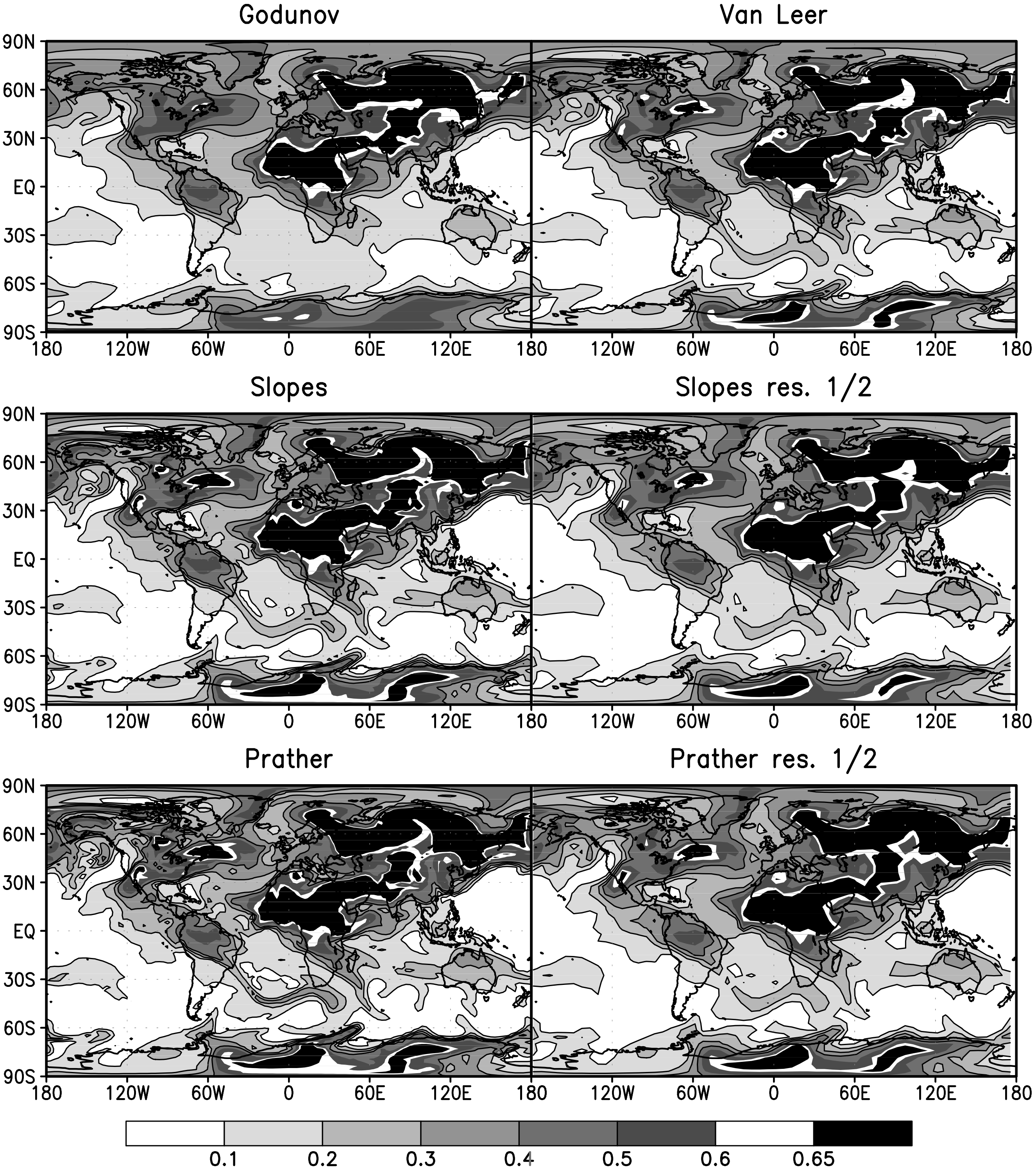


Figure 4.10: Advection of an idealized tracer with continental sources in a GCM simulation performed with 120 longitudes by 85 latitudes and 20 vertical layers. "Res. 1/2" means that the meshes have been gathered horizontally 2 by 2 (resp. 3 by 3) in each horizontal direction for computing advection. The tracer field is plotted after 20 days at 500 mbar.

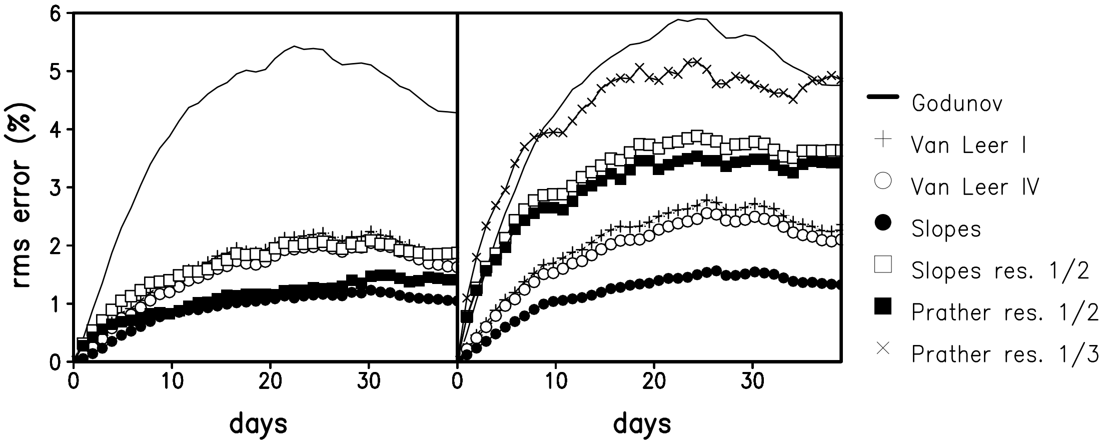


Figure 4.11: Time evolutions on the 40 days of integration of the root mean square error computed with respect to Prather's advection at full GCM resolution at 500 mbar. Left panels show errors computed on the full grid. Panel on the right shows errors on the mean tracer mixing ratio as computed on the half resolution grid.

A previous experiment with the LMD GCM gave broadly good results for the global ^{222}Rn distribution (Genthon and Armengaud, 1995). For this first work we used the Slopes scheme for large scale advection. The idea here consists in redoing merely the same experiment but with Van Leer scheme I.

Models characteristics

Three simulations are presented in this section.

The first one (Simulation A) is taken from Genthon and Armengaud (1995) and was performed with the so-called "cycle5" version of the old LMD GCM (see e. g. Harzallah and Sadourny, 1994, for the general performance of this version). In this work, the Slopes scheme was used for radon advection and the parameterization of convection was that described previously for the standard version of the LMD-Z model : the moist convective adjustment by Manabe et al. (1965) and a modified version of Kuo (1965) were applied sequentially. Implementation of tracer transport for this simulation is described in details in section 2.1 of Genthon and Armengaud (1995).

The two other simulations use the new LMD-Z model as described previously with Van Leer scheme I (simulation A) and Godunov's scheme (simulation B) for advection of radon. Because it is very difficult to represent properly the tracer flux with the so-called "Manabe-Kuo" convection scheme cited above, the choice was made to introduce the Tiedtke (1989) scheme in the tracer version of the LMD-Z model.

The Tiedtke scheme belongs to the category of "mass flux schemes". It attempts to parameterize explicitly the upward and downward fluxes in the convective tower as well as the induced motions in the environmental air (Tiedtke, 1989). Only one convective tower is considered where the entrainment and detrainment between the cloud tower and the environment can take place at any level between the free convection level and the free sinking level. The free sinking level is of course lowered by the entrainment and detrainment processes. The convection closure is based on the large-scale moisture convergence. The transport of tracer has been included in Tiedtke scheme following that of water vapor. With this last choice, we are able to predict explicitly the tracer mixing ratio in updrafts and downdrafts in the convective tower. A more complete description of the tracer parameterization in this convective scheme will be given in a forthcoming paper by Armengaud et al..

The main characteristics of the three simulations are summarized in Table 4.1.

From Genthon and Armengaud (1995), we keep the results of a simulation which uses the Slopes scheme and the soil temperature control. It means that the soil-atmosphere exchange of radon is prevented where and when the soil temperature is below 0 °C (Simulation LMD2 in Genthon and Armengaud, 1995).

For the three simulations, the horizontal grid is the standard constant area grid of LMD "cycle 5" with 64 points regularly spaced in longitude and 50 points regularly spaced in sine of latitude.

Case	*GCM*	*Advection*	*Convection*
A	LMD"cycle5"	Slopes	Manabe-Kuo
B	LMDZ	Vanleer I	Tiedtke
C	LMDZ	Godunov	Tiedtke

Table 4.1: Summary of the simulations

The tracer models for each case A, B and C are integrated over 27 months. To account for model spin-up, the first three months are ignored in the results presented below.

Results

Fig. 4.12 shows the global distribution of ^{222}Rn in the first layer for the three cases. A very strong similarity between cases A and B is observed. Above continents the weak difference observed in South America or in Africa can be attributed to the use of different convections schemes. Above the oceans the shapes of the ^{222}Rn isolines are pretty much the same in experiments A and B. Sharp gradients in the surface concentrations of ^{222}Rn are usually observed close to the coasts (Lambert et al., 1982, henceforth L82). These sharp gradients, already well represented with the slopes scheme (A), are equally well reproduced with the Van Leer I scheme (B). The discrepancy between these two cases observed over North Atlantic Ocean and Arctic Ocean are not significant due to the very coarse latitudinal resolution with a constant-area grid in this region.

Case C shows much weaker gradients in South Atlantic and off the North-West American coast. The diffusive effect of the Godunov scheme is indeed obvious on the lower panel of Fig. 4.12. Isolines 2.5 and 5 pCi/m^3 are much further away from the coasts than in the cases A and B.

Source	*Region A*	*Region B*
L82 (observations)	5	1
	(3-10)	(0.5-1.8)
CASE A (Slopes)	4.6	2.7
	(0.2-31)	(0.2-34)
CASE B (VanLeer)	5.2	2.9
	(0.4-35)	(0.3-25)
CASE A (Godunov)	9.2	4.5
	(0.6-65)	(0.5-40)

Table 4.2: Simulated mean ^{222}Rn Surface Concentrations compared with observations by Lambert et al. (1982, L82). Numbers in parentheses indicate the spatial variability about the mean. Region A: Atlantic and Indian Oceans north of 20°N plus Pacific Ocean north of equator. Region B: other oceanic regions.

Simulations versus observations

Cases A and B are in good agreement with the Larson's and Lambert's measurements over the Atlantic and Pacific Oceans in general. ^{222}Rn concentrations off the West Coast of the United States are lower than off the East Coast. The more southerly the crossing of the North Atlantic, the lower the radon (Larson, 1978; Larson et al., 1979; Larson and Bressan, 1980; Hoppel et al., 1990). The same 3 to 5 pCi/m^3 of radon is also found in maritime air fairly close to the West coast of North America (Larson et al., 1979; Larson and Bressan, 1980; Hoppel et al., 1984, 1985, 1990). In general, discrepancies with observed values are more important in case C for these typical oceanic regions. This can be confirmed with the analysis of Table 4.2 which presents averaged ^{222}Rn surface concentrations for two oceanic regions, according to L82 : region A is defined by Atlantic and Indian Oceans north of 20 °N plus Pacific Ocean north of equator; region B is defined by the other oceanic regions. Case A and B are very close to each other, both for the mean and the variability whereas case C gives values about twice as large, due to a larger numerical diffusion.

Over region A, the mean values for case A and B are in very good agreement with L82 whereas, over region B, even case A and B overestimate the surface radon concentrations. This discrepancy can be related to the large difference between our simulations and data sets in the South Atlantic Ocean off Argentina where observations give 1 pCi/m^3 or less against 2 to 20 pCi/m^3 for the simulations. A Larson's hypothesis would attribute this low radon over South Atlantic to very low radon concentrations in the surface soil of Argentina (Larson and Bressan, 1980).

A complete description of the representation of the radon cycle in the new LMD-Z model will be given in a forthcoming publication.

4.4 Remarques pour conclure

Les schémas en volumes finis conduisent facilement à des mise en oeuvre tri-dimensionelles qui satisfont des propriétés essentielles du transport comme

- La conservation de la quantité totale de traceur.
- La monotonie.
- La non création d'extrema d'origine numérique (d'où la positivité).
- La non modification d'une distribution constante de traceurs.

En pratique, on constate que les schémas plus sophistiqués se comportent mieux, mais au pris d'un coût numérique additionnel du même ordre que celui qu'aurait entrainé l'utilisation d'une grille plus fine.

A noter qu'il se peut que les schémas deviennent à partir d'un certain stade moins diffusifs que l'atmosphère elle-même.

Pour finir, il faut noter que nous avons présenté ici les schémas dérivés à l'origine par Van Leer. Exactement dans le même esprit, il existe actuellement un schéma qui semble supérieur à cout numérique égale (en tous cas en termes de stokages) à ces schémas d'origine: il s'agit du schéma dit PPM (Piece Wise Parabolic Method) développée à l'origine par Woodward and Colella (1981) (cf., Woodward and Colella, 1984; Colella and Woodward, 1984; Carpenter et al., 1990; Lin and Rood, 1996).

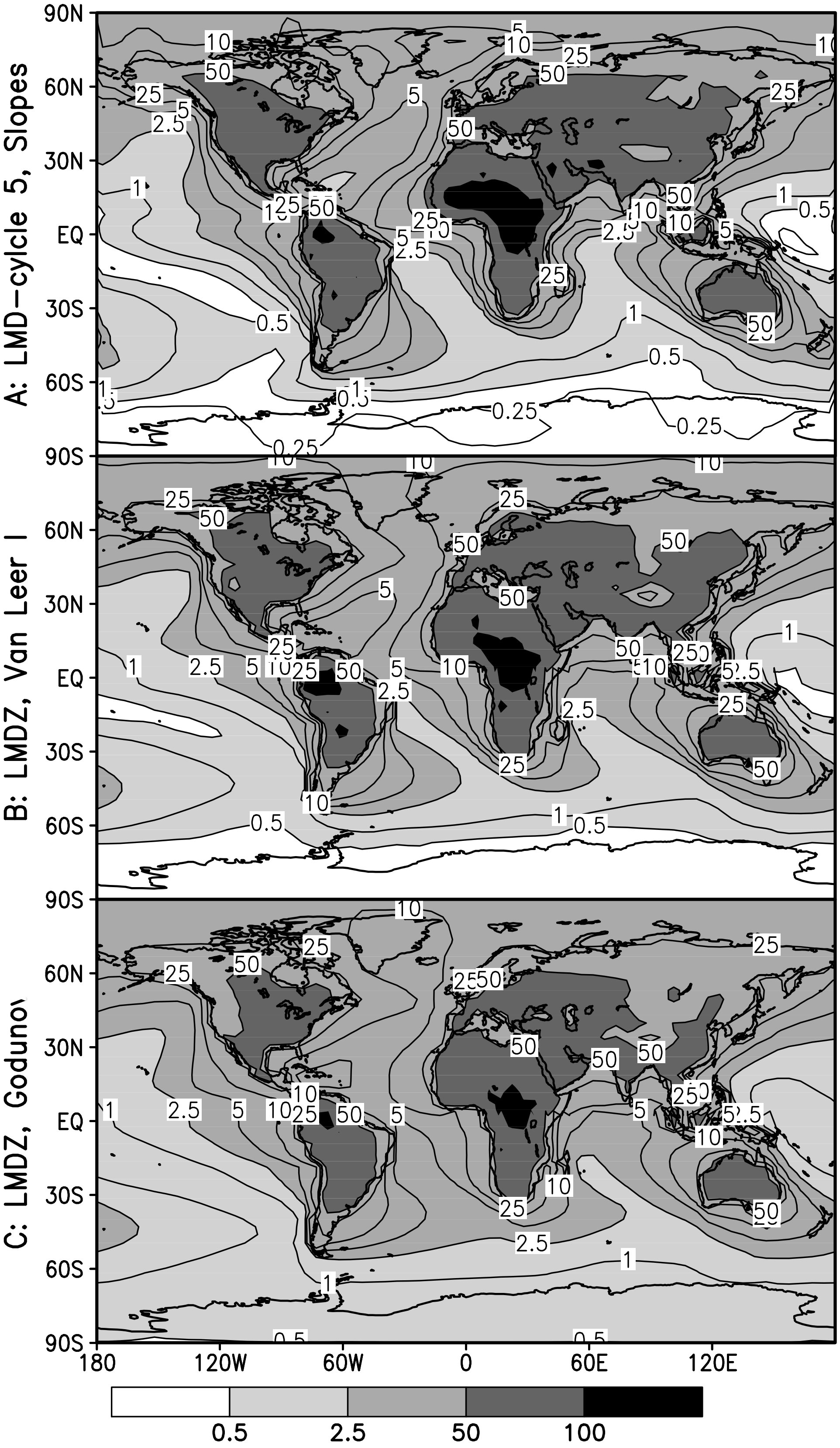


Figure 4.12: 2-year means of the distribution of ^{222}Rn in the first model layer with the LMD-cycle 5 GCM (A : Slopes scheme). and the LMDZ GCM (B : Van Leer I and C : Godunov). Soil control temperature and same resolution in all cases.

Chapter 5

Transport Inverse

Les problèmes d'inversion prennent une place grandissante dans l'étude de la pollution et de la composition de l'atmosphère, C'est le cas par exemple pour la détermination de sources de pollution ou pour la définition, l'évaluation ou l'exploitation de réseaux de surveillance de l'environnement et plus généralement pour l'inversion de mesures relatives à la composition de l'atmosphère.

Il existe des méthodes systématiques pour traiter ce type de problèmes inverse. En ce qui concerne le transport d'espèces traces, un alternative consiste à remonter dans le temps le long des "trajectoires" atmosphériques pour déterminer l'origine des masses d'air.

de nombreux auteurs ont notamment utilisé le concept de rétro-trajectoires lagrangiennes pour identifier l'origine de masses d'air (Hess et al., 1996; Merrill, 1994; Ramonet et al., 1996) : on remonte dans le temps le long de la trajectoire d'une particule émise au niveau d'une cible (détecteur d'un réseau de surveillance, lieu soumis à un apport de pollution, ...). Cette symétrie du transport atmosphérique est en fait très générale et s'étend aussi bien à des processus diffusifs comme le mélange turbulent qu'à une représentation eulérienne du transport ce qui permet d'obtenir une inversion complète et quantitative du transport.

On montre les fondement de cette approche, des exemple d'applcation et le lien avec les équations adjointes.

5.1 Fondements théoriques

Dans ce qui suit, les vents et champs de masse atmosphériques sont supposés connus et seule nous intéresse l'inversion du transport des espèces traces. Nous nous restreignons dans un premier temps au problème suivant :
1. La Source est idéalisée comme le mélange instantanné d'une quantité q (en kg ou nombre de particules) de traceur dans un volume S au temps t_s.
2. La Détection est elle aussi instantannée et correspond à la mesure de la concentration massique (par unité de masse d'air) moyenne de traceur dans un volume D au temps t_d.
3. Le traceur est passif (il suit le fluide sans l'affecter) et conservatif.

Sous ces conditions, la mesure définie plus haut est simplement le produit de q par un taux d'échange de masse d'air $\chi(S, t_s, D, t_d)$ défini comme le rapport entre la masse d'air échangée entre la source et le détecteur et le produit $\mathcal{M}(S, t_s)\mathcal{M}(D, t_d)$ où $\mathcal{M}(\mathcal{V}, t)$ est la masse d'air contenue dans le volume $\mathcal{V}$ au temps t:

$$\chi(S, t_s, D, t_d) = \frac{\mathcal{M}^{ex}(S, t_s, D, t_d)}{\mathcal{M}(S, t_s)\mathcal{M}(D, t_d)} \tag{5.1}$$

Ce coefficient est encore la concentration massique (en kg^{-1}) moyenne en D à t_d obtenue avec le même transport atmosphérique en injectant une quantité de traceur sans dimension $q = 1$ en S à t_s.

La réciprocité du transport atmosphérique peut s'énoncer comme suit : le coefficient d'échange $\chi(S, t_s, D, t_d)$ est aussi bien la concentration moyenne en S à t_s si la quantité $q = 1$ est injectée en D à t_d et si le sens du temps est inversé dans les équations du transport.

D'un point de vue mathématique, on peut écrire $\chi(S, t_s, D, t_d) = \bar{\xi}_{S,t_s}^{D,t_d} = \bar{\xi^*}_{D,t_d}^{S,t_s}$ où $\bar{}^{\mathcal{V},t}$ est la moyenne dans le volume $\mathcal{V}$ au temps t, et ξ_{S,t_s} et ${\xi^*}_{D,t_d}$ sont solutions des équations suivantes :

$$\frac{\partial \xi_{S,t_s}(\vec{x}, t)}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\mathrm{grad}}\ \xi_{S,t_s}(\vec{x}, t) = \sigma_{S,t_s}(\vec{x}, t) \tag{5.2}$$

pour le transport direct et

$$-\frac{\partial {\xi^*}_{D,t_d}(\vec{x}, t)}{\partial t} - \vec{V}.\vec{\mathrm{grad}}\ {\xi^*}_{D,t_d}(\vec{x}, t) = \sigma_{D,t_d}(\vec{x}, t) \tag{5.3}$$

pour le retro-transport. $\vec{V}$ est le champ de vent et $\sigma_{\mathcal{V},\tau}(\vec{x}, t)$ vaut $\delta(t-\tau)/\mathcal{M}(\mathcal{V}, \tau)$ pour $\vec{x}$ dans le volume $\mathcal{V}$ (δ est un dirac) et 0 en dehors de $\mathcal{V}$. ${\xi^*}_{D,t_d}(\vec{x}, t)$ s'interprète comme la concentration de l'air qui va se rassembler dans D at t_d.

Cette symétrie se généralise donc au-delà des habituels calculs de rétro-trajectoires lagrangiennes. Pour les calculs numériques, elle s'applique aussi bien à une représentation eulérienne qu'aux paramétrisations des mouvements d'échelles inférieures à la résolution spatiale du modèle. Remarquons que le caractère généralement diffusif de ces paramétrisations du mélange sous-maille est conservé dans le monde inverse (de la même façon que la dispersion atmosphérique tend a disperser les trajectoires lagrangiennes aussi bien vers le futur que vers le passé). La paramétrisation du mélange dans la couche limite planétaire représente par exemple le transport par les fluctuations du vent vertical. Si ces fluctuations sont symétriques, on doit utiliser exactement le même opérateur, avec le même signe, pour le transport direct et inverse.

5.2 Illustrations numériques

Nous présentons ici un test numérique du principe de réciprocité. Nous montrons comment des mesures de la composition atmosphérique peuvent être restituées de façon équivalente par un calcul direct ou inverse. Nous choisissons pour illustration les observations de la première expérience de la campagne européenne ETEX. Cette campagne était destinée à évaluer les performances des

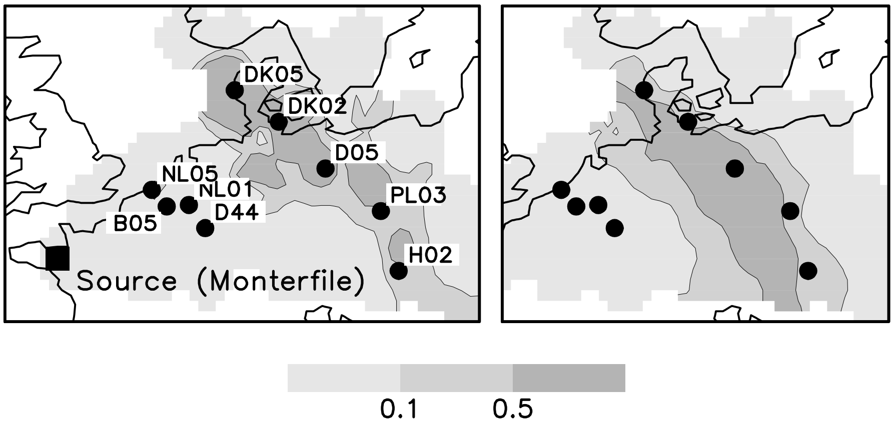


Figure 5.1: Expérience ETEX-1. Concentrations de PMCH (en ng/m^3) observées (à gauche) et simulées (à droite) à $t_0 + 48$ h. Les cartes sont reconstituées à partir des valeurs aux sations avec l'approche de Cressman (1959). Pour la simulation, les données sont simplement les valeurs moyenne dans la maille dans laquelle se trouve la station.

modèles de transport aux échelles continentales (Graziani et al., 1996; Van Dop and Nodop, 1998). Le 23 octobre 1994, 340 kg de Perfluoro-Methyl-Cyclo-Hexane (PMCH), un gaz non soluble, furent émis en continu pendant 12 heures à partir de 16 h (t_0) du sommet d'une tour de 84 m située à Monterfile, à 30 km de Rennes. La situation météorologique correspondait à un flux d'ouest à sud-ouest intense et maintenu sur plusieurs jours.

Les simulations sont effectuées avec la version "transport" du modèle de circulation générale du Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS, LMD-ZT (Hourdin and Armengaud, 1999). Le modèle est d'abord utilisé pour effectuer une simulation météorologique de 4 jours avec un terme de relaxation vers les analyses météorologiques du Centre Européen pour les Prévisions Météorologiques à Moyen Terme (constante de temps de 5 heures). La grille est "zoomée" pour atteindre une résolution moyenne d'environ 150 km sur l'Europe. Les vents grande échelle et les coefficients de mélange turbulent sont archivés après moyenne temporelle avec un échantillonage de 3 heures sur toute la durée de l'expérience. Le modèle de transport (turbulent et grande échelle) est alors utilisé seul, en mode direct ou inverse, en relisant ces archives.

La Fig. 5.1 montre les concentrations de PMCH observées et simulées à t_0+48 h. La Fig. 5.2 montre l'évolution temporelle des mêmes concentrations à 9 stations ETEX ainsi que les valeurs des "Figure of Merit in Time" (FMT), un des critères retenus pour les intercomparaisons dans le cadre d'ETEX. Ce critère est défini à partir des concentrations observées et simulées ($c_i^{\rm obs}(t)$ et $c_i^{\rm sim}(t)$) comme le rapport (traduit en pourcentage) entre la surface sous les deux courbes et la surface sous l'enveloppe :

$$FMT_i = 100 \times \frac{\int_0^T MIN[c_i^{\rm obs}(t), c_i^{\rm sim}(t)]dt}{\int_0^T MAX[c_i^{\rm obs}(t), c_i^{\rm sim}(t)]dt} \qquad (5.4)$$

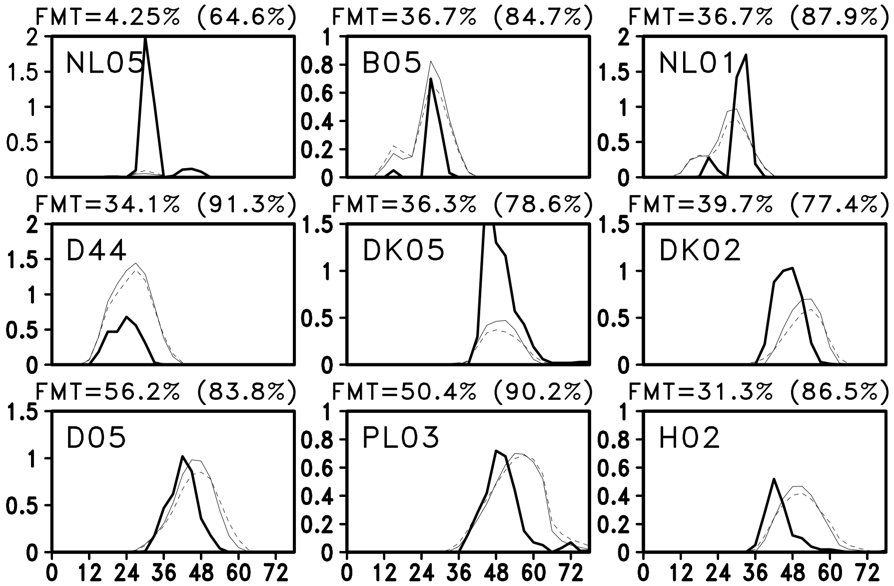


Figure 5.2: Evolution temporelle de la concentration observée (courbe grasse) et simulée (courbe fine) de PMCH (ng/m^3) pour neuf stations de l'expérience ETEX-1. Le critère FMT est une mesure de l'accord entre observations et simulation (cf. texte). Les tiretés correspondent à la simulation utilisant la technique inverse. Le critère FMT mesurant l'écart entre simulation directe et inverse est reporté entre parenthèses.

où $MIN(x,y)$ (resp. $MAX(x,y)$) est le minimum (resp. maximum) de x et y.

Sur la même figure, on a reporté les concentrations calculées avec l'approche inverse. Les coefficients d'échange sont d'abord calculés en injectant continuement sur 3 heures (Δt) à partir de $t_k = t_0 + k\Delta t$ un traceur unité pour chaque station D_i. Le transport est calculé à rebours dans le temps jusqu'à t_0. Pour chaque couple (i,k), on conserve le coefficient d'échange $\chi_{i,k}$, valeur moyenne entre t_0+12 h et t_0 de la concentration du traceur dans la maille de Monterfile. Finallement, la concentration "retro" montrée sur la Fig. 5.2 (pointillés) est simplement $c_i^{\mathrm{retro}}(t_k) = q \times \chi_{i,k}$.

Avec une FMT de l'ordre de 40% entre simulation directe et observation, nos résultats sont comparables aux meilleures simulations présentées dans les études d'intercomparaison (Graziani et al., 1996; Van Dop and Nodop, 1998). Cependant, ce qui nous intéresse ici, c'est l'excellent accord entre les estimations directe et inverse. Les légères différences sont d'ordre numérique, et liées notamment à la violation de la symétrie par le "limiteur de pentes" non linéaire qui permet de garantir la monotonie du schéma d'advection (Hourdin and Armengaud, 1999). A noter qu'il n'y a pas de raison pour privilégier a priori l'une des deux estimations numériques.

5.3 Inversion des paramètres de la source

Nous montrons enfin, sur le cas d'ETEX, comment la réciprocité du transport atmosphérique permet d'inverser les concentrations mesurées pour reconstituer les paramètres d'une source. Ici, on essaie de reconstituer le lieu d'émission à date et intensité connues. Dans ce cas, le calcul à rebours dans le temps est évidemment très avantageux. Il permet, pour une détection donnée – un couple (D_i, t_k) –, de calculer en une seule simulation les coefficients d'échange avec toutes les sources possibles (S, t_s).

Pour n'importe quelle position possible de la source on peut donc calculer très facilement les mesures synthétiques aux neufs stations retenues et par suite l'écart entre mesures simulées et observations. Ici, on a choisi comme fonction objective la moyenne des FMT ($\sum_i FMT_i/9$, Fig. 5.3). L'estimation grossière qui consisterait à prendre comme lieu d'émission le maximum de cette fonction donnerait une source située dans la Manche, éloignée d'environ 100 à 300 km du lieu réel d'émission.

Les mêmes cartes peuvent bien sûr être calculées pour n'importe quelle intensité de la source et n'importe quel instant d'émission. Le maximum de la fonction objective peut dans ce cas encore être estimé par une simple recherche du minimum absolu. Plus généralement, l'approche peut être appliquée à la détermination d'une source étendue à la fois dans le temps et dans l'espace. L'accroissement de la dimension du système peut alors nécessiter l'utilisation d'algorithmes de minimisation plus sophistiqués adaptés à des fonctions montrant des extrema locaux.

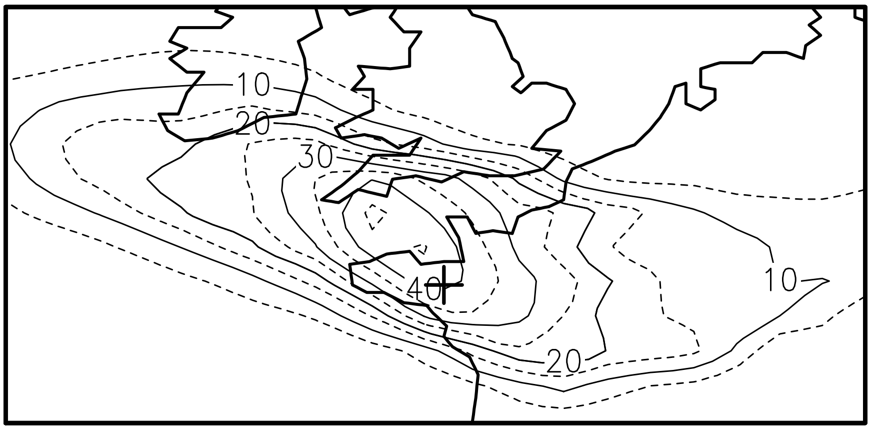


Figure 5.3: Carte représentant, au point d'émission, la moyenne des FMTs (%) mesurant l'accord entre les simulations inverses et les observations aux 9 stations de la Fig. 1. La croix montre l'emplacement de la source

5.4 Extension et formalisme adjoint:

On a dit plus haut que la réciprocité du transport atmosphérique doit s'appliquer aussi bien au transport grande échelle qu'au transport turbulent. Si on a une atténuation du traceur le long des trajectoires (par exemple une décroissance radioactive), on doit également retouver cette atténuation dans le transport rétro. De plus, le transport considéré étant linéaire par rapport à la quantité transportée, la réciprocité s'étend à des sources non locales dans le temps et dans l'espace.

Formellement, si dans le monde directe, le transport d'un traceur est régi par l'équation

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\text{grad}}\ q - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(k\rho\frac{\partial q}{\partial z}\right) + \lambda q = \sigma \tag{5.5}$$

Dans cette équation, λ est le coefficient d'atténuation (qui peut être un champ 4D, représentant par exemple le lessivage par la pluie), σ est la fonction source du traceur (4D également), et le coefficient de mélange turbulent peut prendre des formes très sophistiquées.

Si μ est la distribution de mesure, c'est à dire que la mesure s'écrit

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega\times\mathcal{T}} \rho q \mu d\vec{x} dt \tag{5.6}$$

la réciprocité du transport atmosphérique s'écrit simplement

$$\mathcal{J} = \int_{\Omega\times\mathcal{T}} \rho q_r \sigma d\vec{x} dt \tag{5.7}$$

où le rétro-traceur q_r satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{\partial q_r}{\partial t} + \vec{V}.\vec{\text{grad}}\ q_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial z}\left(k\rho\frac{\partial q_r}{\partial z}\right) + \lambda q_r = \mu \tag{5.8}$$

$\int_{\Omega\times\mathcal{T}} \rho q \mu d\vec{x}dt = \mathcal{J} = \int_{\Omega\times\mathcal{T}} \rho q_r \sigma d\vec{x}dt$ se montre facilement par intégration par partie en utilisant l'équation de continuité pour lair.

En fait, si on résume l'équation du transport direct à un opérateur $q = \mathcal{L}(\sigma)$ et l'équation rétro à un opérateur $r_r = \mathcal{L}_r(\mu)$, si on introduit le produit scalaire $\langle \phi, \psi \rangle = \int_{\Omega\times\mathcal{T}} \rho\phi\psi d\vec{x}dt$, la réciprocité s'écrit simplement $\mathcal{J} = \langle \mu, \mathcal{L}(\sigma) \rangle = \langle \mathcal{L}_r(\mu), q \rangle$.

Cette relation n'est autre que celle définissant L_r comme opérateur adjoint de L.

Bibliography

Allen, D. J., Douglass, A. R., Rood, R. B., and Guthrie, P. D. (1991). Application of a monotonic upstream-biased transport scheme to three dimensional constituent transport calculations. *Mon. Wea. Rev.*, 119:2456–2464.

Carpenter, R. L., Droegemeier, K. K., Woodward, P. R., and Hane, C. E. (1990). Application of the piecewise parabolic method (PPM) to meteorological modeling. *Mon. Wea. Rev.*, 118:586–612.

Chandrasekhar, S. (1960). *Radiative transfer.* Dover publications, 180 Varick Street, New York.

Chedin, A., Husson, N., Scott, N. A., Cohen-Hallaleh, I., and Berroir, A. (1984). The "GEISA" data bank 1984 version. Technical Report 127, Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS, Ecole Polytech., Palaiseau, France.

Colella, P. and Woodward, P. R. (1984). The piecewise parabolic method (PPM) for gaz-dynamical simulations. *J. Computational Phys.*, 54:174–201.

Cressman, G. P. (1959). An operational objective analysis system. *Mon. Wea. Rev.*, 87:367–374.

Crisp, D., Fels, S. B., and Schwarzkopf, M. D. (1986). Approximate methods for finding CO_2 15μm band transmission in planetary atmospheres. *J. Geophys. Res.*, 91(D11):11,851–11,866.

Curtis, A. R. (1952). Contribution to a discussion of a statistical model for water vapor absorption', by R. M. Goody. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 78:638.

Dörr, H. (1984). *Investigation of the gas and the water balance in the unsaturated soil zone with CO_2, and ^{222}Rn measurements.* PhD thesis, Heidelberg University.

Dörr, H. and Munnick, K. (1990). ^{222}Rn flux and soil concentration profiles in West-Germany. Soil ^{222}Rn as tracer for gas transport in the unsaturated soil zone. *Tellus*, 42 B:20–28.

Fels, S. B. (1979). Simple strategies for inclusion of Voigt effect in infrared cooling rate calculations. *Appl. Opt.*, 18:2634–2637.

Fouquart, Y. and Bonnel, B. (1980). Computations of solar heating of the Earth's atmosphere: A new parametrization. *Contrib. Atmos. Phys.*, 53:35–62.

From, J. E. (1968). A method for reducing dispersion in convective difference schemes. *J. Computational Phys.*, 3:176–189.

Geleyn, J. F. and Hollingswortha, A. (1979). An economical method for the computation of the interaction between scattering and line absorption of radiation. *Contrib. Atmos. Phys.*, 52:1–16.

Genthon, C. and Armengaud, A. (1995). Radon 222 as a comparative tracer of transport and mixing in two general circulation models of the atmosphere. *Journal of Geophys. Res.*, 100:2849–2866.

Godson, W. L. (1953). The evaluation of infra-red radiative fluxes due to atmospheric vater vapor. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 79:367.

Godunov, S. K. (1959). Finite-difference methods for the numerical computations of equations of gas dynamics. *Math. Sb.*, 7:271–290.

Goody, R. M. (1952). A statistical model for water vapour absorption. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 78:165–169.

Goody, R. M. and Yung, Y. L. (1989). *Atmospheric Radiation, Theoretical Basis*. Oxford University Press., 200 Madison Avenue, New York, New York 10016, second edition.

Graziani, C., Klug, W., and Mosca, S. (1996). Real-time long-range dispersion model evaluation of the ETEX release. Technical report, Joint Research Center, Office for Official Publications of the European Communities.

Harzallah, A. and Sadourny, R. (1994). Internal versus SST-forced atmospheric variability as simulated by atmospheric general circulation model. *J.Clim.*, 8, Number 3:474–495.

Hess, P. G., Nanda, S., and Flocke, S. J. (1996). Trajectories and related variations in the chemical composition of air for the mauna loa observatory during 1991 and 1992. *J. Geophys. Res.*, 101:14,543–14,568.

Holton, J. R. (1992). *An introduction to dynamic meteorology*, volume 48 of *Internal geophysics series*. Academic Press, third edition.

Hoppel, W. A., Fitzgerald, J. W., Frick, M., , Larson, R., and Mack, E. J. (1990). Aerosols size distributions and optical properties found in the marine boundary layer over atlantic ocean. *Journal of Geophys. Res.*, 95:3659–3686.

Hoppel, W. A., Fitzgerald, J. W., and Larson, R. (1985). Aerosols size distributions in air masses advecting off the east coast of the United States. *Journal of Geophys. Res.*, 90:2365–2379.

Hoppel, W. A., Larson, R. E., and Vietti, M. A. (1984). Aerosols size distributions at a site on the east coast of the United States. *Atmospheric Environment*, 18:1213–1621.

Hourdin, F. (1992). A new representation of the CO_2 15 μm band for a Martian general circulation model. *J. Geophys. Res.*, 97(E11):18,319–18,335.

Hourdin, F. and Armengaud, A. (1999). Test of a hierarchy of finite-volume schemes for transport of trace species in an atmospheric general circulation model. *Mon. Wea. Rev.*, 127:822–837.

Hourdin, F., Forget, F., and Talagrand, O. (1995a). The sensitivity of the Martian surface pressure to various parameters: A comparison between numerical simulations and Viking observations. *J. Geophys. Res.*, 100:5501–5523.

Hourdin, F., Le Van, P., Forget, F., and Talagrand, O. (1993). Meteorological variability and the annual surface pressure cycle on Mars. *J. Atmos. Sci.*, 50:3625–3640.

Hourdin, F., Talagrand, O., Sadourny, R., Régis, C., Gautier, D., and McKay, C. P. (1995b). General circulation of the atmosphere of Titan. *Icarus*, 117:358–374.

Husson, N., Chédin, A., Scott, N. A., Bailly, D., Graner, G., Lacome, N., Levy, A., Rossetti, C., Tarrago, G., Camy-Peyret, C., and Flaud, J. M. e. (1986). The GEISA spectroscopic line parameters data bank in 1984. *Ann. Geophys.*, 4:185–190.

Jacob, D. and Prather, M. (1990). Radon 222 as a test of convective transport in a general circulation model. *Tellus*, 42:118–134.

Joseph, J. H., Wiscombe, W. J., and Weiman, J. A. (1976). The delta-eddington approximation for radiative flux transfer. *J. Atmos. Sci.*, 33:2452–2459.

Kasahara, A. (1977). Computational aspects of numerical models for weather prediction and climate simulation. In Chang, J., editor, *Methods in computational physics*, volume 17, pages 1–66. Academic press, inc.

Kuo, H. L. (1965). On formation and intensification of tropical cyclones through latent heat release by cumulus convection. *J. Atmos. Sci.*, 22:40–63.

Lambert, G., Polian, G., Sanak, J., Ardouin, B., Jegou, A., and Leroulley, J. (1982). Cycle du radon et de ses descendants : application à l'étude des échanges troposphère-stratosphère. *Annales de géophysique*, 38,Fascicule 4:497–531.

Larson, R. (1978). Radon measurements during marine fog events off Nova Scotia. *Journal of Geophys. Res.*, 83:415–418.

Larson, R. and Bressan, D. (1980). Air mass characteristics over coastal areas as determined by radon measurements. In *Second Conference on Coastal Meteorology*, pages 94–100, Los Angeles, Ca.

Larson, R., Bressan, D., Marlow, K., Wojciechowski, T., and Hefter, J. T. (1979). A comparison of concentrations of fission products, Radon 222 and CCN over north atlantic. *J. Pure and Applied Geophysics.*, 117:874–882.

Le Treut, H. and Li, Z. X. (1991). Sensitivity of an atmospheric general circulation model to prescribed SST changes: Feedback effects associated with the simulation of cloud optical properties. *Clim. Dyn.*, 5:175–187.

Le Treut, H., Li, Z. X., and Forichon, M. (1994). Sensitivity study of the LMD GCM to greenhouse forcing associated with two different cloud water parameterizations. *J. Clim.*, 7:1827–1841.

Lin, S.-J. and Rood, R. B. (1996). Multi-dimensional flux form semi-lagrangian transport schemes. *Mon. Wea. Rev.*, 124:2046–2070.

Liou, K.-N. (1980). *An Introduction to Atmospheric Radiation.* Academic, San Diego, Calif.

Malkmus, W. (1967). Random Lorentz band model with exponential-tailed s^{-1} line-intensity distiribution function. *J. Opt. Soc. Am.*, 57:323–329.

Manabe, S., Smagorinsky, J., and Strickler, R. (1965). Simulated climatology of a general circulation model with a hydrologic cycle. *Mon. Wea. Rev.*, 93:769–798.

McKay, C. P., Pollack, J. B., and Courtin, R. (1989). The thermal structure of Titan's atmosphere. *Icarus*, 80:23–53.

Meador, W. E. and Weaver, W. R. (1980). Two-stream approximations to radiative transfer in planetary atmospheres: a unified description of existing methods and new improvement. *J. Atmos. Sci.*, 37:630–643.

Merrill, J. T. (1994). Isentropic airflow probability analysis. *J. Geophys. Res.*, 99:25,8881–25,8889.

Morcrette, J. J., Smith, L., and Fouquart, Y. (1986). Pressure and temperature dependence of the absorption in longwave radiation parametrizations. *Contrib. Atmos. Phys.*, 59(4):455–469.

Prather, M. (1993). A radon/lead simulation to test boundary-layer and cumulus transport in global chemical models. Virginia beach, Va. World Climate Research Program Workshop.

Prather, M. J. (1986). Numerical advection by conservation of second order moments. *J. Geophys. Res.*, 91:6671–6681.

Ramonet, M., Le Roulley, J. C., Bousquet, P., and Monfray, P. (1996). Radon-222 measurements during the tropoz ii campaign and coparison with a global atmospheric transport model. *J. Atmos. Chem.*, 23:107–136.

Rodgers, C. D. and Walshaw, C. D. (1966). The computation of infra-red cooling rate in planetary atmospheres. *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, 92:67–92.

Rood, R. B. (1987). Numerical advection algorithms and their role in atmospheric transport and chemistry models. *Rev. Geophys.*, 25:71–100.

Russell, G. L. and Lerner, J. A. (1981). A new finite-differencing scheme for the tracer transport equation. *J. Appl. Met.*, 20:1483–1498.

Sadourny, R. and Laval, K. (1984). January and July performance of the LMD general circulation model. In Berger, A. and Nicolis, C., editors, *New perspectives in Climate Modeling*, Elsevier, pages 173–197. Amsterdam.

Salby, M. L. (1996). *DFundamentals of Atmospheric Physics.* Academic Press.

Stull, R. B. (1988). *An introduction to boundary layer meteorology.* Kluwer Academic Publishers.

Tiedtke, M. (1989). A comprehensive mass flux scheme for cumulus parameterization in large-scale models. *Mon. Wea. Rev.*, 117:1179–1800.

Van Dop, H. and Nodop, K., editors (1998). *ETEX, A european tracer experiment*, volume 32 of *Atmos. Enrionn. special issue, pp. 4089–4378.*

Van Leer, B. (1977). Towards the ultimate conservative difference scheme : IV. a new approach to numerical convection. *J. Computational Phys.*, 23:276–299.

Van Leer, B. (1979). Towards the ultimate conservative difference scheme. V. a second-order sequel to Godunov's method. *J. Computational Phys.*, 32:101–136.

Wells, N. (1997). *The atmosphere and ocean : A physical Introduction.* John Wiley and Sons, 2nd edition.

Woodward, P. R. and Colella, P. (1981). High resolution difference schemes for compressible gaz dynamics. *Lect. Notes Phys.*, 141:434–441.

Woodward, P. R. and Colella, P. (1984). The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks. *J. Computational Phys.*, 54:115–173.

Zdunkowski, W. G., Welch, R. M., and Korb, G. (1980). An investigation of the structure of typical two-stream methods for the calculation of solar fluxes and heating rates in clouds. *Contrib. Atmos. Phys.*, 53:147–166.

Zhu, X. (1988). An improved voigt line approximation for the calculation of equivalent width and transmission. *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 39:421–427.

Zhu, X. (1989). Radiative cooling calculated by random models with $S^{-1-\beta}$ tailed distribution. *J. Atmos. Sci.*, 46:511–520.