

Modélisation numérique : TD 2

Frédéric Hourdin
hourdin@lmd.ens.fr

15 octobre 2009

Advection uni-dimensionnelle d'un traceur

On considère une espèce trace dont la concentration $q(x, t)$, en kg/kg d'air par exemple, ne dépend que de la dimension x et du temps, sur un domaine $[0, L]$ en x et $[0, T]$ en temps.

On suppose que cette espèce trace est advectée par un champ de vent non divergeant $U = \text{cste}$ avec une masse volumique linéique de l'air (ρ en kg/m) constante.

On pourra prendre $L = 1000$ km et $U = 10$ m s⁻¹ pour fixer les idées ou les légendes des axes mais ces paramètres ne sont pas utiles à l'exercice.

1. On suppose qu'à l'instant initial, le traceur est réparti comme une gaussienne autour d'une valeur $x_0 = L/5$, soit $q(x, t = 0) = \exp(-[(x - x_0)/\lambda]^2)$ avec $\lambda = L/15$. Que vaudra la concentration à un instant t quelconque.
2. Se donner une discrétisation de 100 points dans le domaine $[0, L]$. Ecrire un programme fortran qui imprime en colonne les valeurs de x_i et de $q_{i,0} = q(x_i, t = 0)$ pour les 100 points du maillage. Tracer ces valeurs à l'écran. Faire le même calcul pour $t = 0.6 * L/V$. Superposer les deux courbes.

On prendra soin de paramétrer le nombre de points en x , c'est à dire de déclarer par exemple le tableau des x_i comme :

```
implicit none
integer, parameter :: imax=100
integer i
```

```
real xxx(imax)
do i=1,imax
  xxx(i)=...
```

3. Rappeler les 3 schémas d'advection basés sur trois estimations en différences finies de la dérivée spatiale de la concentration. On appelle schémas amont, centré et aval les schémas basés respectivement sur des dérivées à gauche, centrée et à droite (pour $U > 0$). Au moyen d'un développement limité au voisinage du point x_i , comparer la précision des différents schémas de discrétisation de la dérivée spatiale de la concentration quand δx tend vers 0. Quel est le schéma le plus précis.
4. Ecrire une boucle en temps pour calculer l'advection du traceur avec un schéma d'advection amont sur 350 pas de temps. On prendra un pas de temps $\delta t = 0.2 \times \delta x/U$. Pour effectuer les sorties, on pourra par exemple écrire :

```
character*4 file
do it=1,nt
....
  if (mod(it,10)==1) then
    file="q.."
    write(file(2:4),'(i3.3)') it ! Ecriture, codée sur 3 caractères, d'un entier
                                ! dans les emplacements 2 à 4 d'une chaîne de
                                ! 4 caractères
    open (10,file=file,form='formatted')
    do i=1,imax
      write(10,*) xxx(i),qqq(i)
    enddo
    close(10)
  endif
```

qui créera un fichier tous les 10 pas de temps, s'appelant par exemple 'q091' pour le pas de temps 91.

On pourra également, pour faciliter l'écriture, se donner deux variables informatiques pour stoker les valeurs de la concentration q aux instants n et $n + 1$, par exemple 'qancien' et 'qnouveau'.

5. Adapter le programme pour qu'il utilise un schéma temporel centré. Comparer le résultat des deux schémas.