Modélisation numérique : TD 2

Frédéric Hourdin
hourdin@lmd.ens.fr

30 novembre 2010

Advection uni-dimensionelle d'un traceur

On considère une espèce trace dont la concentration $q(x,t)$, en kg/kg d'air par exemple, ne dépend que de la dimension x et du temps, sur un domaine $[0,L]$ en x et $[0,T]$ en temps.

On suppose que cette espèce trace est advectée par un champ de vent non divergeant $U =$cste avec une masse linéique de l'air (ρ en kg/m) constante.

On pourra prendre $L = 1000$ km et $U = 10$ m s^{-1} pour fixer les idées ou les légendes des axes mais ces paramètres ne sont pas utiles à l'exercice.

1. On suppose qu'à l'instant initial, le traceur est réparti comme une gaussienne autour d'une valeur $x_0 = L/5.$, soit $q(x,t=0) = exp(-[(x-x_0)/\lambda]^2)$ avec $\lambda = L/15$. Que vaudra la concentration à un instant t quelconque.
2. Se donner une discrétisation de 100 points dans le domaine $[0,L]$. Ecrire un programme fortran qui imprime en colonne les valeurs de x_i et de $q_{i,0} = q(x_i, t=0)$ pour les 100 points du maillage. Tracer ces valeurs à l'écran.

   Dans ce cas simple, on peut facilement calculer la concentration exacte pour des pas de temps ultérieur. Quelle sera la distribution du traceur au temps $t = 0.6 * L/U$. Calculer ces concentrations et les mettre égalament dans un fichier. Superposer les deux courbes sur un graphique.

   On prendra soin de paramétrer le nombre de points en x, c'est à dire de déclarer par exemple le tableau des x_i comme :

   ```
   implicit none
   integer, parameter :: imax=100
   integer i

   real, dimension(imax) :: xxx
   do i=1,imax
      xxx(i)=...
   ```

   Prendre bien soin de séparer une phase de déclaration des variables, une phase d'initialisation (attribution des valeurs) et une phase de calcul. Les initialisations doivent être faites en particulier avant la boucle en temps.
   $[(x-x_0)/y]^2 \rightarrow$ ((x-x0)/y))**2 en Fortran.
3. Rappeler les 3 schémas d'advection basés sur trois estimations en différences finies de la dérivée spatiale de la concentration. On appelle schémas amont, centré et aval les

schémas basés respectivement sur des dérivées à gauche, centrée et à droite (pour $U > 0$). Au moyen d'un développement limité au voisinage du point x_i, comparer la précision des différents schémas de discrétisation de la dérivée spatiale de la concentration quand δx tend vers 0. Quel est le schéma le plus précis.

4. Ecrire une boucle en temps pour calculer l'advection du traceur avec un schéma d'advection amont sur 350 pas de temps. On prendra un pas de temps $\delta t = 0.2 \times \delta x / U$.

   Pour effectuer les sorties, on pourra par exemple écrire :

```
character*4 file
do it=1,nt
....
    if (mod(it,10)==1) then
       file="q..."
       write(file(2:4),'(i3.3)') it  ! Ecriture, codée sur 3 caractères, d'un entier
                                     ! dans les emplacements 2 à 4 d'une chaîne de
                                     ! 4 caractères
       open (10,file=file,form='formatted')
       do i=1,imax
          write(10,*) xxx(i),qqq(i)
       enddo
       close(10)
    endif
```

   qui créera un fichier tous les 10 pas de temps, s'appelant par exemple 'q091' pour le pas de temps 91.

   On pourra également, pour faciliter l'écriture, se donner deux variables informatiques pour stoker les valeurs de la concentration q aux instants n et $n+1$, par exemple 'qn()' et 'qnp1()'.

   Pour la condition aux limites à gauche du domaine (entrante pour l'advection), on supposera $q = 0$ pour $x < 0$.

5. Adapter le programme pour qu'il utilise un schéma centré en x. Comparer le résultat des deux schémas.

   Commenter en termes de précision, en regardant en particulier les premiers pas de temps, et au regard des développements limités effectués plus haut.

   Commenter sur le caractère plus ou moins "physique" ou stable des schémas.

   Sur la base de 2 ou 3 figures et d'1/2 à 1 page de texte, tirer les enseignements de ce TD. Envoyer à hourdin@lmd.jussieu.fr un fichier binomeN.pdf où N est le numéro de votre binôme.