Systèmes d'équations

Thomas Dubos et Guillaume Roullet

LMD, Palaiseau et LOPS, Brest

roullet@univ-brest.fr

27 Novembre 2017

Quelles équations fluides?

Navier-Stokes? . . . non! Il manque trop d'ingrédients :

- rotation de la Terre (Coriolis)
- gravité (stratification)
- thermodynamique (flux de chaleur, humidité, salinité)
- sphéricité de la Terre
- viscosité moléculaire non pertinente
- etc.

Il existe non pas un, mais plusieurs systèmes d'équations fluides pour O/A, et même beaucoup. La communauté est très créative pour trouver de nouveaux jeux d'équations.

Lequel choisir?

Cela dépend des ingrédients que vous jugez importants et des échelles que vous résolvez. Par exemple:

- couche mince vs. 3D complet
- composantes horizontales de Coriolis vs. 3D
- hydrostatique vs. non-hydrostatique
- quel niveau de simplification de la thermodynamique ?
- etc.

Idée: il existe une **hiérarchie de modèles** dans lequel on ajoute de plus en plus d'ingrédients.
Le système le plus complet n'est pas forcément le plus adapté à votre question. Ne pas sous-évaluer l'intérêt des modèles plus simples.

Plan

1. Mise en bouche sur RSW et QG
   - Modèle RSW
   - Modèle QG
2. Modèle d'Euler compressible sur la sphère
3. Modèles anélastique/Boussinesq (soundproof)
   - Cas océanique
   - Cas atmosphérique
4. Modèle hydrostatique vs modèle non-hydrostatique
5. Synthèse

I/ Le modèle shallow water tournant

Décrit un écoulement 2D dans une couche d'épaisseur h délimité par une **interface** avec une autre couche qu'on suppose au repos. On introduit $\Delta\rho$ la différence de densité entre les couche, ρ_0 la densité de la couche étudiée et $g' = g\Delta\rho/\rho_0$ la **gravité réduite**. On se place en référentiel tournant. Soit H l'é**paisseur de la couche** au repos. Les cas typiques sont

- couche : tout l'océan, interface : air-mer, $g' \approx g$, $H = 4000$ m [**mode barotrope**]
- couche : au dessus de la thermocline, interface : thermocline, $g' = 4.10^{-3} g$, $H = 200$ m [**1er mode barocline**].

Equations RSW

$$\partial_t u + u\partial_x u + v\partial_y u = -g'\partial_x h + fv$$
$$\partial_t v + u\partial_x v + v\partial_y v = -g'\partial_y h - fu$$
$$\partial_t h + u\partial_x h + v\partial_y h = -h(\partial_x u + \partial_y v)$$

Variables: (u, v) les deux composantes de la vitesse et h l'épaisseur de la couche. **Coordonnées**: (x, y). **Paramètres**: g' gravité réduite, f paramètre de Coriolis. **Dérivée matérielle**

$$\frac{D}{Dt} = \partial_t + u\partial_x + v\partial_y$$

calculant la dérivée temporelle en suivant le mouvement. Les deux premières sont les **équations de la quantité de mouvement** (*momentum equation*), la troisième est l'**équation de continuité** (*continuity equation*) traduisant la conservation de la masse.

Forme flux

La dérivée matérielle peut aussi être exprimée en terme de divergence d'un flux

$$\partial_t(hu) + \partial_x(huu) + \partial_y(huv) = -g'h\partial_x h + f(hv)$$
$$\partial_t(hv) + \partial_x(huv) + \partial_y(hvv) = -g'h\partial_y h - f(hu)$$
$$\partial_t h + \partial_x(hu) + \partial_y(hv) = 0.$$

Cette forme se prête bien à une discretisation en **volume finis**.

Forme alternative, dite “vector invariant”

$$\partial_t u = -\partial_x B + (f + \zeta) v$$
$$\partial_t v = -\partial_y B - (f + \zeta) u$$
$$\partial_t h = -\partial_x (hu) - \partial_y (hv)$$

avec $B = g' h + (u^2 + v^2)/2$ la **fonction de Bernoulli** et $\zeta = \partial_x v - \partial_y u$ la **vorticité**.

Pour une implémentation numérique il y a deux écoles: les modèles préférant la forme flux (ROMS/CROCO par exemple) et ceux préférant cette forme (NEMO par exemple). Il n'est pas clair de savoir laquelle de ces deux formes offre les meilleures avantages.

Terme de dissipation

Les équations présentées ci-dessus sont **non-dissipatives** (*inviscid*). Dans une implémentation numérique il y a toujours une nécessité d'introduire un minimum de dissipation pour régulariser (lisser) la solution. Il existe de nombreuses techniques (cf cours du mardi). La plus simple consiste à introduire un terme de friction dans la quantité de mouvement qui peut être au choix

friction linéaire

$$\partial_t \mathbf{u} = \ldots - \lambda \mathbf{u}$$

où λ est une constante de temps ($[\lambda] = T^{-1}$).

dissipation visqueuse

$$\partial_t \mathbf{u} = \ldots + \nu \Delta \mathbf{u}$$

où ν est un coefficient de viscosité ($[\nu] = L^2 T^{-1}$). Attention ce coefficient dépend de la résolution spatiale (taille de la maille Δx). Son choix est un élément critique. Il doit ni être trop petit (pour faire le boulot), ni être trop grand (pour ne pas trop diffuser).

Conditions de bords

Un jeu d'équations admet toujours des **conditions aux limites**. Une partie des problèmes se cachent dans ces conditions aux limites. Pour RSW on a a minima la

i) **condition d'imperméabilité** (*no-flow*): $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ le long du bord ($\mathbf{n}$ vecteur normal à la frontière)

qu'on peut transformer en une condition plus forte

ii) **condition de non-glissement** (*no-slip*): $\mathbf{u} = 0$ le long du bord. Cette dernière induit une dissipation d'énergie. On verra en TP qu'elle est un moyen d'équilibrer un système forcé.

Linéarisation de RSW

Un moyen très utile tant physiquement que numériquement de caractériser un système d'équations est de décrire les **ondes** qu'il supporte.
Pour obtenir la physique des ondes, on part d'un état de référence, par exemple le repos $(u, v, h) = (0, 0, H)$, qu'on perturbe légèrement (u', v', h') avec une amplitude ϵ, un **petit paramètre de contrôle**. On cherche les solutions sous forme de modes de Fourier $\sim \exp[i(kx + ly - \omega t)]$.
Les équations s'écrivent

$$\epsilon \partial_t u' = -\epsilon \partial_x (g' h' + \epsilon K') + (f + \epsilon \zeta') \epsilon v'$$
$$\epsilon \partial_t v' = -\epsilon \partial_y (g' h' + \epsilon K') - (f + \epsilon \zeta') \epsilon u'$$
$$\epsilon \partial_t h' = -\epsilon [\partial_x (H u') + \partial_y (H v')] - \epsilon^2 [\partial_x (h' u') + \partial_y (h' v')]$$

La **linéarisation** consiste à ne garder que les termes linéaires, i.e. les termes en $\mathcal{O}(\epsilon)$.

Ondes du modèle RSW

soit

$$\partial_t u' = -g' \partial_x h' + f v'$$
$$\partial_t v' = -g' \partial_y h' - f u'$$
$$\partial_t h' = -H(\partial_x u' + \partial_y v')$$

En injectant les modes de Fourier puis en prenant le déterminant on trouve la **relation de dispersion**

$$\omega(\omega^2 - f^2 - g' H k^2) = 0$$

dont les trois racines correspondent aux trois ondes

- deux **ondes de gravito-inertie** $\omega^2 = f^2 + c^2 k^2$, avec $c = \sqrt{g' H}$
- **mode géostrophique** $\omega = 0$

Le rayon de déformation de Rossby

Un paramètre dimensionel naturel de RSW est le **rayon de déformation de Rossby**

$$R_d = \frac{\sqrt{g'H}}{f}$$

Le nombre adimensionel associé est le **nombre de Burger**

$$\mathrm{Bu} = \frac{R_d^2}{L^2}$$

où L est l'échelle spatiale caractéristique du phénomène considéré. On distingue les trois régimes suivants:

sous-mésoéchelle $\mathrm{Bu} \gg 1$

mésoéchelle $\mathrm{Bu} \sim 1$

grande échelle $\mathrm{Bu} \ll 1$.

Mode géostrophique et onde de Rossby

Remarque importante, si f/H varie spatialement alors le mode géostrophique ω se transforme en **onde de Rossby**

$$\omega = -\frac{\beta k_x}{k^2 + R_d^{-2}} \tag{1}$$

qu'on peut adimensionnaliser sous la forme

$$\frac{\omega}{f} = -\frac{\beta R_d}{f}\frac{k_x R_d}{1 + (kR_d)^2} \tag{2}$$

soit

$$\tilde{\omega} = -\mu\frac{\tilde{k}_x}{1 + \tilde{k}^2} \tag{3}$$

avec $\mu = R_d/(R_T \tan\lambda)$, λ=latitude.

Relations de dispersion adimensionelles

$\omega \to \tilde{\omega} = \omega/f$, $k \to \tilde{k} = R_d k$

advection

$$\tilde{\omega} = \frac{U}{fR_d}\tilde{k}$$

inertie-gravité

$$\tilde{\omega}^2 = 1 + \tilde{k}^2$$

Rossby

$$\tilde{\omega} = -\mu \frac{\tilde{k}_x}{1 + \tilde{k}^2}$$

$Fr = \frac{U}{fR_d}$ est le nombre de Froude

Relation de dispersion

Relie l'échelle temporelle à l'échelle spatiale

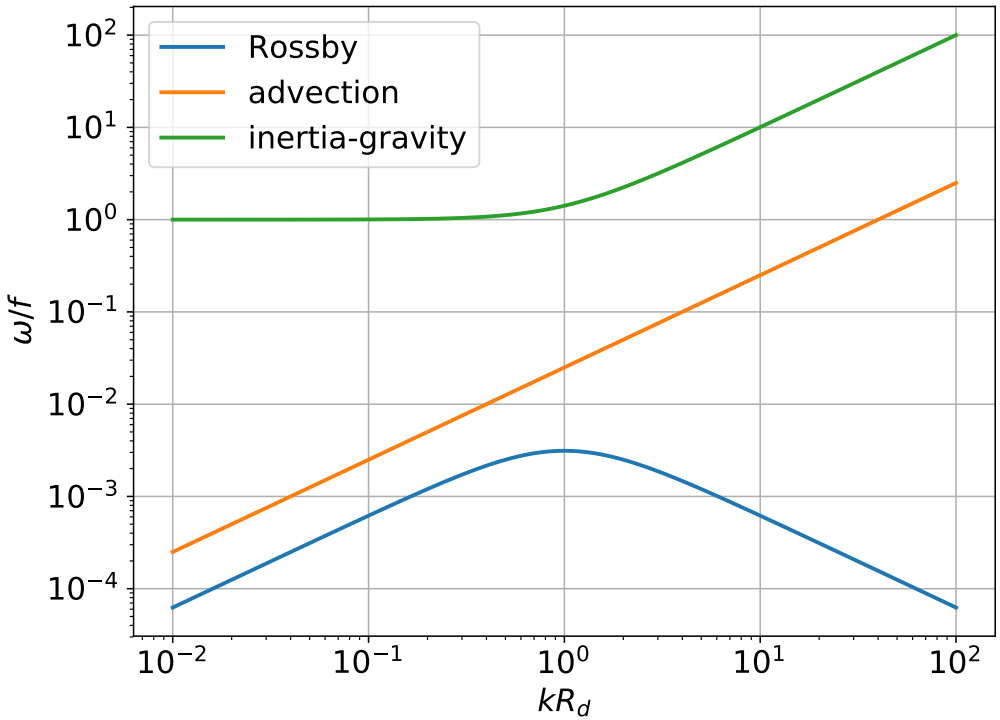

Figure: $R_d = 40\,km$, $f = 10^{-4}\,s^{-1}$, $\mu = R_d/R_T = 40/6400$, $U = 0.1\ m.s^{-1}$

Vitesse des ondes

Les ondes sont capables de transporter l'énergie beaucoup plus vite que l'écoulement. On distingue U, la vitesse des parcelles et c la vitesse (de phase) des ondes. c dépend de k et du type d'ondes.

- gravité: $c_g = \sqrt{g'H}$ [soit $f\,R_d$, très utile en 3D stratifié !]
- Rossby: $c_R = \beta R_d^2$ [pour les ondes longues]

Le **nombre de Froude** est $\mathrm{Fr} = U/c_g$. Il indique l'importance du couplage entre les ondes de gravité et l'écoulement. $\mathrm{Fr} \ll 1$: les ondes sont découplées. Motivation pour étudier un système sans ondes de gravité.

Le nombre de Rossby

Un autre nombre adimensionnel absolument essentiel est le **nombre de Rossby**

$$\mathrm{Ro} = \frac{U}{fL}$$

où L est l'échelle spatiale caractéristique et U l'échelle de vitesse caractéristique. Le nombre de Rossby caractérise l'importance de la force de Coriolis par rapport à l'advection avec les régimes suivants

- $\mathrm{Ro} \ll 1$ la force de Coriolis est centrale, l'équilibre dominant est la **géostrophie**
- $\mathrm{Ro} \leq 1$ la force de Coriolis est très importante
- $\mathrm{Ro} \gg 1$ la force de Coriolis est négligeable, i.e. on peut négliger les effets de rotation de la Terre.

Dans l'océan, seuls les phénomènes $L < 1\,\mathrm{km}$ ont un $\mathrm{Ro} \gg 1$.

Vorticité potentielle

Il s'agit d'une quantité essentielle pour la dynamique à méso et grande échelle (en fait Fr $\ll 1$). Pour RSW la PV est

$$q = \frac{f + \zeta}{h} = \frac{\text{vorticity}}{\text{stretching}}$$

La particularité de la PV est qu'elle est **matériellement conservée**

$$D_t q = 0$$

et que moyennant l'hypothèse Ro ≤ 1 la connaissance de $q(x, y)$ suffit à caractériser toutes les autres variables (u, v, h). C'est le **principe d'inversibilité** (Hoskins 1985).
Remarque importante: il existe une PV pour chaque système d'équations. La forme précise que prend la PV dépend du système considéré. Pour les équations primitives, il s'agit de la **PV d'Ertel** ($q = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho$)

Modèle QG

Le modèle QG est basé sur les hypothèses que pour $\mathrm{Bu} \sim 1$ et $\mathrm{Ro} \ll 1$ l'écoulement est dominé par l'équilibre géostrophique

$$-g'\partial_x h + fv = 0\,, \qquad -g'\partial_y h - fu = 0\,.$$

Le modèle QG décompose la vitesse en une **composante géostrophique $\mathbf{u}_g$** et un résidu, la **composante agéostrophique $\mathbf{u}_a$**. La vitesse géostrophique dérive donc de la **fonction de courant géostrophique** $\psi = g'h/f$

$$u_g = -\partial_y \psi \qquad v_g = +\partial_x \psi$$

Le système d'équations QG est

$$\begin{aligned} \partial_t u_g + J(\psi, u_g) &= +f v_a \\ \partial_t v_g + J(\psi, v_g) &= -f u_a \\ \partial_t h + J(\psi, h) &= +w_a \end{aligned}$$

où l'on a remplacé les termes en $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\nabla}$ par $J(\psi,\cdot)$ et fait apparaître w_a la composante verticale de la vitesse agéostrophique.

Modèle QG suite

La forme précédente est utile pour prendre conscience de la proximité de QG avec SW, elle permet de comprendre que la circulation agéostrophique n'est pas totalement ignorée (forçage membre de droite). L'inconvénient est qu'on ne voit pas qu'en réalité il n'y a qu'un degré de liberté et pas trois. On utilise alors la relation suivante

$$\partial_x u_a + \partial_y v_a + w_a/H = 0$$

qu'on applique au système précédent pour trouver

$$\partial_t q + J(\psi, q) = 0$$
$$\Delta\psi - R_d^{-2}\psi = q$$

Sous cette forme on retrouve les deux ingrédients importants de la dynamique à mésoéchelle:

- la PV est matériellement conservée
- le principe d'inversion permet de diagnostique toutes les variables à partir de la PV.

L'équation relation ψ à q est une **équation elliptique**.

Equation elliptique

Les deux principales équations elliptiques sont l'**équation de Poisson**

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi = r.h.s.\,,$$

où ϕ est l'inconnue, et l'**équation de Helmholtz**

$$\phi - \gamma^2\boldsymbol{\nabla}^2\phi = r.h.s.\,,$$

où γ est un paramètre donné, comme l'équation QG précédente. Les équations elliptiques se retrouvent dans

- modèles O à toit rigide ou surface libre implicite (NEMO)
- modèles A avec schéma d'advection semi-implicite
- modèles O non-hydrostatique (calcul la pression)
- modèles intermédiaires, type QG ou en fonction de courant (cf. TP)

Pourquoi c'est difficile?

La difficulté vient de ce que **le Laplacien couple les directions**. La solution est globale et ne peut être calculée de proche en proche.
Dans le cas d'un Laplacien 1D alors la résolution est triviale (système tridiagonal): diffusion turbulente dans les modèles O.
Difficultés numériques:

- choix du solveur itératif (PCG, multigrille etc)
- problème de convergence avec augmentation du nombre de points de grille pour certains algo: e.g. PCG
- parallélisation

La communauté OA n'aime pas trop ces problèmes, on préfère trouver des astuces pour ne pas avoir à résoudre ce genre d'équation ...

Propriété du modèle QG

Le modèle QG ne retient que l'onde de Rossby. Par construction **il filtre les ondes** de gravito-inertie.
L'onde de Rossby s'obtient par exemple en faisant l'approximation plan beta ce qui conduit à introduire une PV planétaire dans la définition

$$q = \Delta\psi - R_d^{-2}\psi + \beta y$$

Le premier terme est la vorticité, le second est l'étirement (*stretching*), le troisième est l'effet β, encodant la courbure de la Terre.

Différences et points communs

- RSW et QG retiennent tous les deux des **termes d'advection** $(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\nabla})$
- RSW est entièrement explicite: les trois variables du modèles sont **pronostiques** [se calculent via leur dérivée temporelle].
- QG possède une partie prognostique (advection de la PV) et une partie **diagnostique** (relation entre q et ψ). La partie diagnostique est un **problème de type elliptique**.
- les deux systèmes sont capables d'avoir des ondes. QG n'a que l'**onde de Rossby**, RSW a en plus les **ondes de gravito-inertie**.
- RSW et QG ont tous les deux des **conditions aux limites**
- ils peuvent tous les deux être rendus dissipatifs par l'ajout d'un **terme de dissipation**.

Code pour les TPs

- **Fluid2d** code versatile en Python/Fortran
- plusieurs modèles: advection 2D, Euler 2D, Boussinesq 2D, quasi-geostrophique 2D
- combinant les ingrédients précédents: advection, equation de poisson, etc.
- une grande diversité de schémas numériques, y compris un solveur multigrille
- et permettant l'étude d'une vaste gamme d'écoulements 2D (tournant ou stratifié)

II/ Modèle d'Euler compressible sur la sphère

traité par Thomas Dubos

III/ Filtrage des ondes sonores

L'enjeu maintenant est de filtrer les ondes sonores car elles sont beaucoup trop rapides et ne jouent aucun rôle dans la météo, le climat, la circulation océanique etc. Un moyen naïf d'y arriver est d'imposer une stricte **incompressibilité**

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$$

Le problème est que l'atmosphère n'est pas du tout incompressible et pour l'océan, les effets de compressibilité veulent être retenus en particulier via l'équation d'état de l'eau de mer.
Vu les compressibilités très différentes des deux fluides, les communautés A et O ont chacune développer leur propre système d'équations filtrés.

Communauté océan

Le filtrage le plus fréquent repose sur l'**hypothèse de Boussinesq**

> *remplacer ρ par ρ_0 (constante) partout sauf dans le terme de poids*

En particulier la continuité devient $\partial_t \rho_0 + \boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$ soit $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$. La densité ρ devient **diagnostique**: elle se calcule à partir de l'**équation d'état** (*EOS*). Dans l'équation d'état on remplace la dépendance en la pression p par une dépendance en la profondeur z, soit

$$\rho = \rho_{EOS}(T, S, z)$$

EOS eau de mer

Nouvelle version TEOS-10 http://www.teos-10.org/ (2010), la précédente était EOS-80 (1980). Avantages (p15 de http://www.teos-10.org/pubs/TEOS-10_Manual.pdf)

- une définition cohérente de toutes les propriétés thermodynamiques via le **potentiel de Gibbs** permettant de retrouver, via les relations de Maxwell, toutes les grandeurs: énergie interne, enthalpie, densité, potentiel chimique, point de fusion, chaleur latente d'évaporation etc.
- en particulier l'ancienne *température potentielle* θ est remplacée par Θ la **conservative temperature** (CT) qui est une meilleure définition du contenu thermique et dont la conservation matérielle est de 2 ordres de grandeur meilleure que θ!
- la salinité pratique (*practical salinity*) est redéfinie en **absolute salinity** (SA). L'unité est g/kg. Elle permet de prendre en compte la différence spatiale de composition chimique du sel! Le traitement des flux d'eaux douces est plus cohérent avec SA.

Couplage thermodynamique-dynamique

En version inviscid (sans diffusion, sans dissipation)

$$
\begin{aligned}
D_t\Theta &= 0 \\
D_t S_A &= 0 \\
\rho &= \rho_{EOS}(\Theta, S_A, z) \\
D_t\mathbf{u} &= -\frac{1}{\rho_0}\boldsymbol{\nabla} p - 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} + \frac{\rho}{\rho_0}\mathbf{g} \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} &= 0
\end{aligned}
$$

Attention: ρ est la densité **in-situ**, $\mathbf{u}$ est 3D et $\boldsymbol{\Omega}$ est non projeté sur la verticale locale. Les deux premières sont dites **équations de traceur**

Variables pronostiques (5): Θ, S_A, $\mathbf{u}$
Variable diagnostiques (2): ρ, p
Equations : 7, le problème est bien posé

Structure des équations

En **compressible**: ρ est pronostique, la pression est diagnostique (définition thermodynamique)

En **Boussinesq**: ρ devient diagnostique, la pression reste diagnostique mais prend alors une définition mécanique : elle est soit

hydrostatique la pression est le poids de la colonne

$$p = \int_z^\zeta \rho g \, dz'$$

non-hydrostatique , la pression est définie implicitement via $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{u} = 0$

$$\boldsymbol{\nabla}^2 p = r.h.s.$$

qui est une équation de Poisson 3D, devant être résolue à chaque pas de temps. Exemple: CROCO-NH.

Autre conséquences de l'hypothèse de Boussinesq

- L'**énergie interne** est découplée de la dynamique=les effets de compressibilité n'ont aucun coût énergétique
- La PV du système Boussinesq est la **PV d'Ertel**

$$q = \boldsymbol{\nabla} \times (\Omega + \mathbf{u}) \cdot \boldsymbol{\nabla} \rho \tag{4}$$

Conditions aux limites

Dans leur **version inviscid** (système conservatif sans forçage) la seule condition aux limites à ajouter pour **fermer le système** vient du $\boldsymbol{\nabla} p$ et consiste en $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur les bords solides et $D_t \eta = w$ sur l'interfaces air-mer (η, hauteur de surface de la mer, **ssh**).

La présence d'une surface libre dans les modèles O induit de nombreuses complications numériques (séparation barotrope-barocline, cf. cours du mardi).

Forçage et dissipation

En pratique, les modèles ont tous des **termes diffusifs** (traceurs) et des **termes visqueux** (momentum). De plus ils distinguent les directions horizontales vs. verticales (avec des raffinements, cf. cours du mardi). Cela donne

$$
\begin{aligned}
D_t\Theta &= \boldsymbol{\nabla}_h(K_h\boldsymbol{\nabla}_h\Theta) + \partial_z(K_v\partial_z\Theta) \\
D_tS_A &= \boldsymbol{\nabla}_h(K_h\boldsymbol{\nabla}_h\Theta) + \partial_z(K_v\partial_z\Theta) \\
\rho &= \rho_{EOS}(\Theta, S_A, z) \\
D_t\mathbf{u} &= \ldots + \boldsymbol{\nabla}_h(A_h\boldsymbol{\nabla}_h\mathbf{u}) + \partial_z(A_v\partial_z\mathbf{u}) \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{u} &= 0
\end{aligned}
$$

où K_h et K_v sont les coefficients de diffusion turbulente et A_h, A_v de viscosité turbulente. La forme en Laplacien sur la verticale est unanimement utilisée, la forme en Laplacian sur l'horizontale est très discutée, il existe de nombreuses alternatives (cf. cours du vendredi).

Fermeture turbulente

Le choix des coefficients K_h, K_v, A_h, A_v est tout sauf simple et anodin.
On entre dans le domaine de la **fermeture turbulente** et des **paramétrisations**.
Il existe des bibliothèques entières traitant de la manière de déterminer ces coefficients et de leurs impacts.

Conditions aux limites II

La présence de dérivées supplémentaires imposent de nouvelles conditions aux limites: latérales (pour les termes horizontaux) et verticales (pour les termes verticaux).

- **diffusion** : pas de flux diffusif de traceur à travers les bords solides, flux avec avec l'atmosphère à la surface (chaleur, sel)
- **viscosité** : condition sur la **tension** $\tau = A_v \partial_z \mathbf{u}_h$ au fond et en surface. Cette tension est soit imposée par l'atmosphère, soit couplée avec l'atmosphère. Au fond on utilise des frictions linéaires ou quadratiques. En latéral, on prend une condition de non-glissement (**no-slip**) ou de glissement partiel.

Simplifications supplémentaires

- **Approximation couche mince, dite traditionnelle**: On ne retient de la force de Coriolis que la composante horizontale $2\mathbf{\Omega} \rightarrow f\mathbf{k}$. [Les modèles avec Coriolis 3D sont encore rares]
- **Hypothèse hydrostatique**: on néglige le terme en $D_t w$, $D_t w \rightarrow 0$.

ces deux hypothèses combinées aboutissent aux **équations primitives** qui constituent le coeur de la plupart des modèles d'océan.

Communauté atmosphérique

Parce que l'air est beaucoup plus compressible que l'eau, l'hypothèse de Boussinesq est trop forte pour le cas atmosphérique. On peut utiliser l'**hypothèse anélastique** qui est moins forte: on introduit une **atmosphère de référence** $\rho_0(z)$ et la continuité devient

$$\boldsymbol{\nabla}(\rho_0 \mathbf{u}) = 0 \tag{5}$$

L'hypothèse est adaptée lorsque les échelles de temps étudiées sont très grandes devant les échelles de temps associées à la propagation des ondes sonores.

Comme pour l'océan la densité se calcule alors de **manière diagnostique** via l'**équation d'état**

$$\rho = \frac{p}{RT} \tag{6}$$

Thermodynamique air sec

La **température potentielle** θ est la température qu'aurait une parcelle ramenée adiabatiquement à la pression de référence p_R ($p_R = 1000\,\text{mbar}$). Elle obéit donc à une **loi de conservation** (i.e. elle est conservée en l'absence de terme diabatique Q)

$$D_t\theta = \frac{Q}{\Pi} \tag{7}$$

où Π est le **potentiel d'Exner** $\Pi\theta = C_p T$ (C_p chaleur spécifique à pression constante). θ est reliée à la température absolue T par

$$\theta = T\left(\frac{p_R}{p}\right)^{\kappa} \tag{8}$$

avec R la constante des GP, $\kappa = R/C_p = 1 - 1/\gamma$ et $\gamma = 1.4$.

Equations anélastiques atmosphériques

[par ex. Bannon, 1996]

$$D_t(\theta_0 + \theta) = \frac{Q}{\Pi_0}$$

$$\rho = \frac{p}{R\theta}\left(\frac{p_R}{p}\right)^{\kappa}$$

$$D_t\mathbf{u} = -\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{p}{\rho_0}\right) - 2\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} - \frac{\theta}{\theta_0}\mathbf{g}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho_0\mathbf{u}) = 0$$

où toutes les variables sont des petites perturbations par rapport à un état de référence $\rho_0(z)$, $\theta_0(z)$, $\Pi_0(z)$ en équilibre hydrostatique au repos.
Grosse limitation: modèle en perturbations. Avantage: **conserve énergie mécanique + énergie interne**

Discussion

Ces hypothèses suppriment les ondes sonores. La pression ne se calcule plus via la thermodynamique mais via la (pseudo) incompressibilité $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\rho_0 \mathbf{u}) = 0$.

Il existe une myriade de variantes à ces systèmes Boussinesq et anélastiques, ayant des propriétés de conservation et des limites de validité variant légèrement de l'un à l'autre. Recherches en cours.

Les équations des modèles de demain seront peut être un peu différentes de celles qu'on utilise aujourd'hui.

Pour l'atmosphère, il est possible qu'un jour on bascule vers des systèmes anélastiques (améliorés).

Pour l'océan, l'hypothèse la plus importante à lever est l'hypothèse hydrostatique.

IV/ Modèle hydrostatique vs modèle non-hydrostatique

traité par Thomas Dubos

V/ Synthèse

- physique commune: **écoulements tournants stratifiés**
- hiérarchie de systèmes d'équations, adaptés à un certain régime
- traitement différents des ondes (sonores, gravité, Rossby)
- impliquant une structure différente des équations
- **partie commune: termes d'advection**
- selon les cas: partie elliptique (implémentation numérique difficile), compressibilité (modèles réalistes)
- choix du systèmes de coordonnées i) horizontale: cartésiennes, sphériques, curvilignes, ii) verticale z, pression, densité, sigma
- choix de la fermeture turbulente
- conditions aux limites

Les grands modèles OA

Modèle	**O vs. A**	**Systèmes**	**Approx**
NEMO	O	PE	Boussinesq+H
ROMS	O	PE	Boussinesq+H
CROCO	O	PE	Boussinesq+NH
HYCOM	O	PE	
MARS	O	PE	Boussinesq+H
Symphonie	O	PE	Boussinesq+NH
MITgcm	O et A	PE	Boussinesq+NH
LMDz	A	Compressible + hydrostatique	
ARPEGE	A		
UKmet	A		
WRF	A		
MesoNH	A	anélastique	

The End