

Transport numérique

Formation MODélisation NUMérique de l'Océan et de l'Atmopshère

Brest, 27-31 mars 2023

Laurent.Debreu@inria.fr

Plan

1. Illustrations
2. Etude d'un schéma numérique
3. Etude séparée en temps et en espace

Illustrations

Advection - Introduction

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - f v + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = F_u \\
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + f u + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} = F_v \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\
 \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho(T, S, p)g \\
 \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \nabla \cdot (K_h \nabla T) + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial T}{\partial z} \right] \\
 \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} + w \frac{\partial S}{\partial z} = \nabla \cdot (K_h \nabla S) + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z \frac{\partial S}{\partial z} \right] \\
 \frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} + w \frac{\partial q}{\partial z} = \nabla \cdot (K_h^q \nabla q) + \frac{\partial}{\partial z} \left[K_z^q \frac{\partial q}{\partial z} \right]
 \end{array} \right.$$

Quantité de mouvement

Continuité

Equilibre hydrostatique

Conservation de la température

Conservation de la salinité

Advection d'un traceur passif

$$\frac{\partial(H + \eta)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} ((H + \eta)U) + \frac{\partial}{\partial y} ((H + \eta)V) = 0 \quad \text{Evolution temporelle de la hauteur d'eau}$$

Advection - Introduction

Table 2

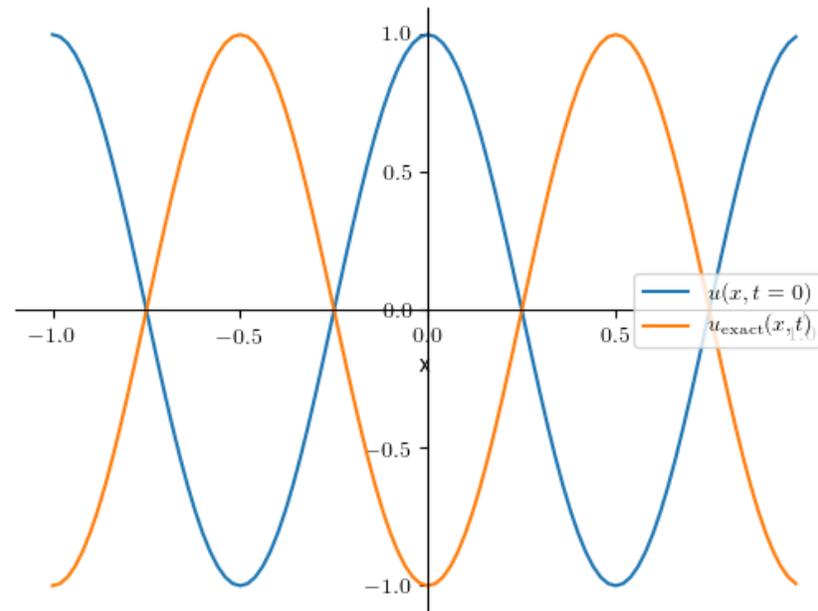
Properties of some structured-grid coastal ocean models (note that the models might have many more choices than those listed here). Specific acronyms: FB=Forward-Backward, Gen=generalised, SPE=split-explicit, SPI=split-implicit, LF=Leapfrog, AM3=3rd-order Adams–Moulton, TR=trapezoidal, (S)UP3=(Split) 3rd-order upwind, C2=2nd-order centered, C4=4th-order centered, QK3=3rd-order QUICKEST, SL=semi–Lagrangian, MY=Mellor–Yamada, GLS=Gen. length-scale model. GOTM (www.gotm.net) is a turbulence library that provides different state-of-the-art turbulence closure.

	Introd. ref.	Horz grid	Mode splitting	Internal Time-stepping	External Time-stepping	Mom. advec.	Tracer advec.	Vertical discret.	Turb. closure
BOM	Svendsen et al. (1996)	C	SPE	LF-AM3	LF-TR	TVD Superbee	TVD Superbee	<i>s</i>	MY2.5
COHERENS	Luyten et al. (1999)	C	SPI/SPE	2-level	-	TVD Superbee	TVD Superbee	<i>s</i>	<i>k-ε</i>
Delft-3D	Gerritsen et al. (2004)	C	SPI	ADI	ADI	UP3	UP3 w/ Forester fltr	<i>z</i> & <i>s</i>	<i>k-ε</i>
ECOM-si	Blumberg (1992)	C	SPI	2-level	θ -scheme	C2	C2	<i>s</i>	MY2.5
GETM	Burchard and Bolding (2002)	C	SPE	2-level	FB	TVD	TVD	adapt.	GOTM
HAMSOM	Backhaus (1985)	C	SPI	2-level	θ -scheme	TVD	TVD	<i>z</i>	<i>k-ε</i>
ROMS (Rutgers)	Haidvogel et al. (2000)	C	SPE	LF-TR	LF-AM3	UP3	MPDATA	<i>s</i>	GLS
ROMS (UCLA)	Shechetkin and McWilliams (2005)	C	SPE	LF-AM3	Gen FB	UP3	UP3	<i>s</i>	KPP
ROMS (Agrif)	Penven et al. (2006)	C	SPE	LF-AM3	Gen FB	UP3	WENO5Z	<i>s</i>	KPP
Mars3D	Lazure and Salomon (1991)	C	SPI	2-level	ADI	QK3	QK3	<i>s</i>	GLS
MIKE 3	Pietrzak et al. (2002)	C	SPI	2-level	ADI	Ultimate QK3	Ultimate QK3	<i>s</i>	<i>k-ε</i>
MOHID	Martins et al. (2001)	C	SPI	2-level	ADI	upstream	TVD Superbee	<i>s</i>	GOTM
NCOM	Martin (2000)	C	SPI	LF	θ -scheme	SUP3	FCT(UP3)	hyb <i>z/s</i>	MY2.5
POLCOMS	Holt and James (2001)	B	SPE	2-level	FB	PPM w/ limiters	PPM w/ limiters	<i>s</i>	GOTM
POM	Blumberg and Mellor (1978)	C	SPE	LF	LF	C2	MPDATA	<i>s</i>	MY2.5
Symphonic	Johns et al. (1992) Marsaleix et al. (1998)	C	SPE	LF	LF	C4	SUP3	<i>s</i>	TKE
TRIM-3D	Cheng et al. (1993)	C	SPI	2-level	θ -scheme	SL	TVD Van-Leer	<i>z</i>	GLS
Hycom	Bleck (2002)	C	SPE	LF	LF	Enstrophy-conserving	FCT(C2)	hyb <i>z/s/ρ</i>	KPP
NEMO	Madec et al. (1991)	C	SPE	LF	LF	Enstrophy-conserving	FCT(C2)	<i>z</i> & <i>s</i>	GLS

Transport 1D à vitesse constante - Dissipation / Dispersion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \text{solution exacte } u(x, t) = u(x - ct, 0)$$

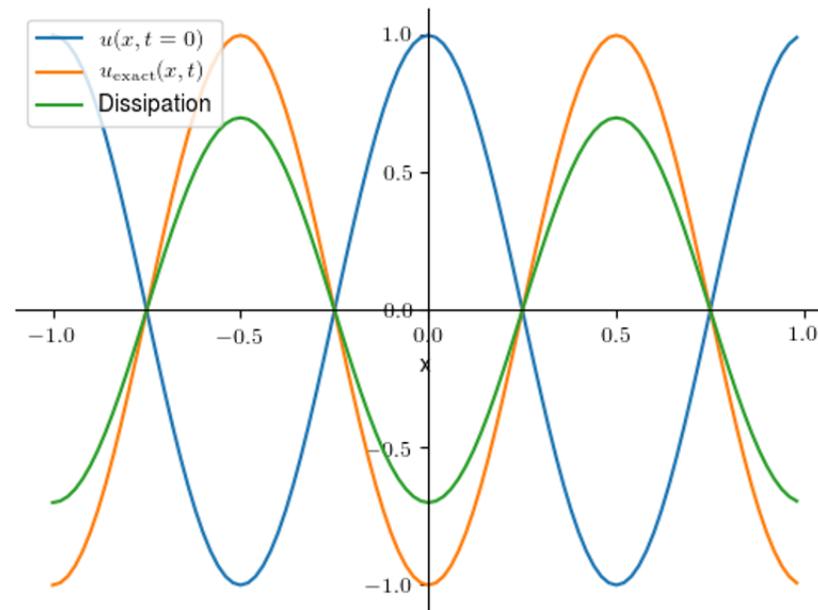
Propagation à vitesse constante $c > 0$



Transport 1D à vitesse constante - Dissipation / Dispersion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ solution exacte } u(x, t) = u(x - ct, 0)$$

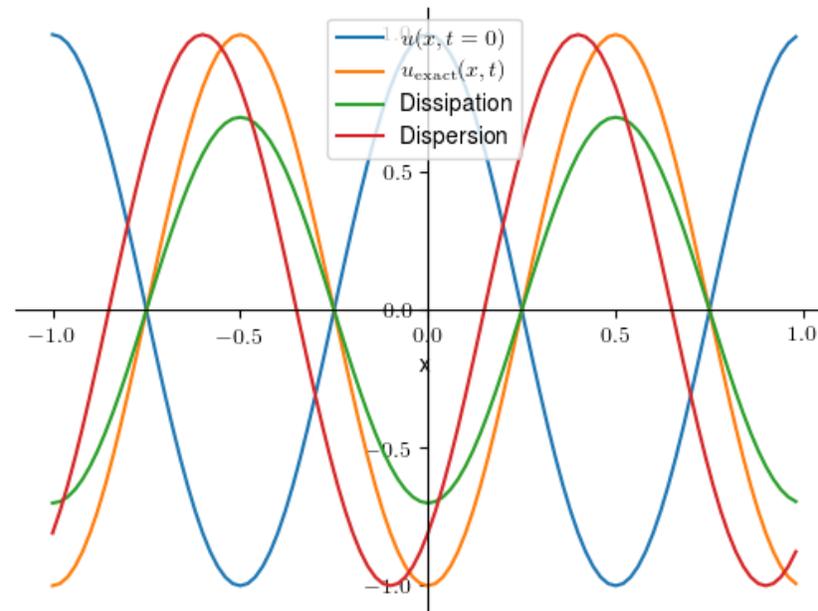
Dissipation



Transport 1D à vitesse constante - Dissipation / Dispersion

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \text{ solution exacte } u(x, t) = u(x - ct, 0)$$

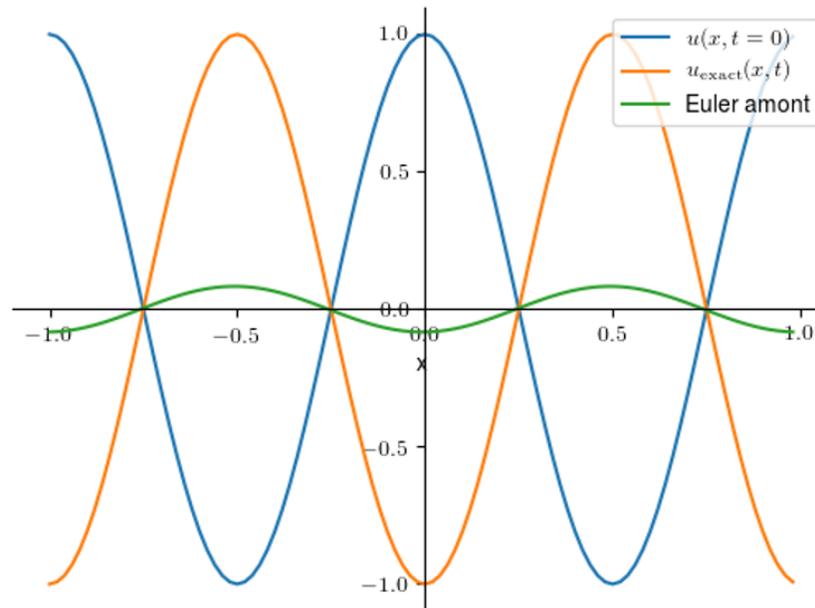
Dispersion



Le schéma Euler amont (EA)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x}$$

Schéma Euler amont $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$

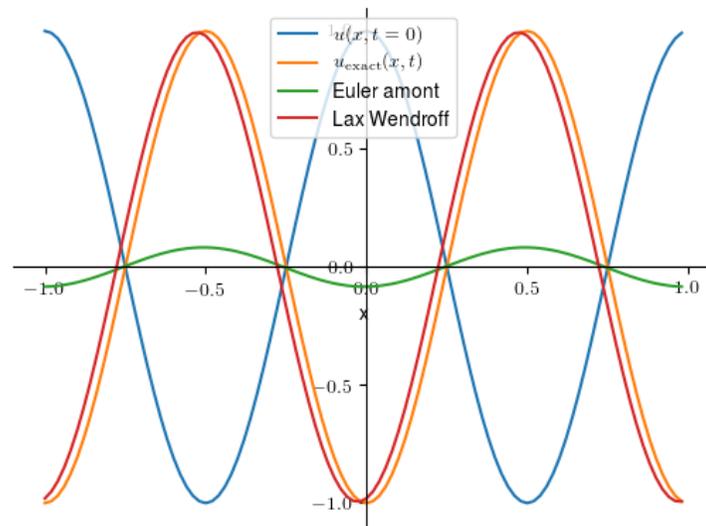


Euler amont (EA) et Lax Wendroff (LW), solution "régulière"

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Schéma Euler amont $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$

Schéma Lax Wendroff $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$

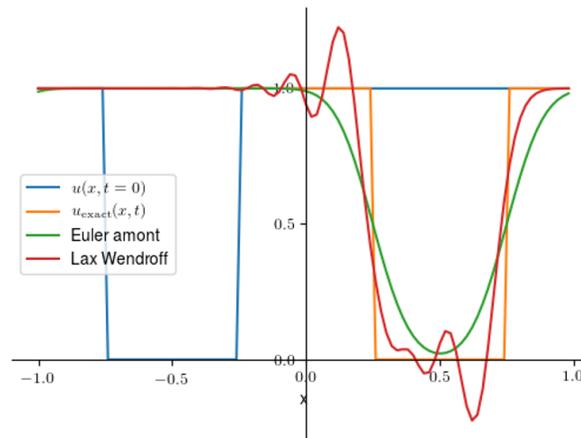


Euler amont (EA) et Lax Wendroff (LW), sur un créneau

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Schéma Euler amont $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$

Schéma Lax Wendroff $u_j^{n+1} = u_j^n - c \frac{\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + c^2 \frac{\Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$



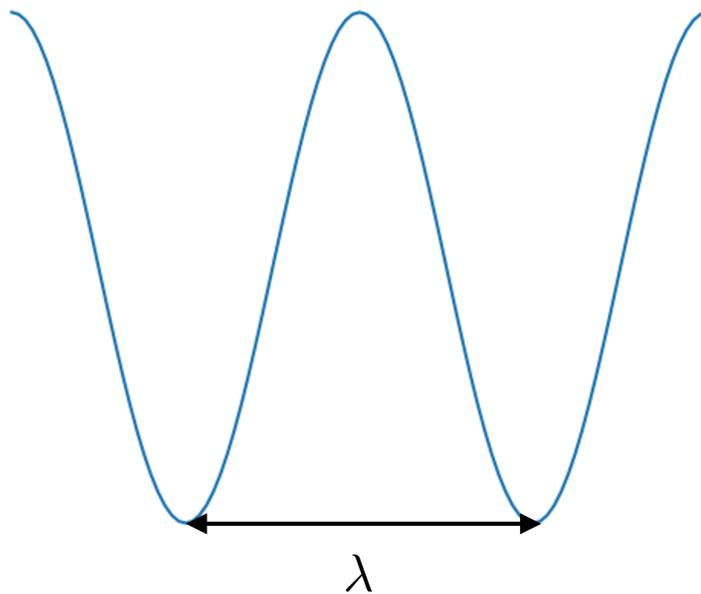
➔ finalement lequel est le plus précis ?

Etude d'un schéma numérique

Etude d'un schéma numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u_{\text{exact}}(x, t) = u(x - ct, 0) = u_0(x - ct) \text{ où } u_0(x) \text{ la condition initiale.}$$

Solution périodique : $u(x, t) = a(t)e^{ikx}$, k nombre d'onde, $\lambda = 2\pi/k$ longueur d'onde



$$a'(t) + ikc a(t) = 0 \quad \rightarrow \quad a(t) = a(0)e^{-ikc t}$$

$$u(x, t) = a(0)e^{ik(x-ct)}$$

$$u(x, t) = a(0)e^{i(kx - \omega_{\text{exact}} t)} \text{ avec } \omega_{\text{exact}} = kc$$

Etude d'un schéma numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

- Différences finies : $u_j^n \approx u(x_j, t^n) = e^{i(kx_j - \omega_{\text{num}} t^n)}$
- Grille régulière : $x_{j+1} = x_j + \Delta x$, $t^{n+1} = t^n + \Delta t$

Euler amont : $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$ $\rightarrow e^{-i\omega_{\text{num}}\Delta t} u_j^n = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (1 - e^{-ik\Delta x}) u_j^n$

Solution exacte

Solution numérique

$$u_{\text{exact}}(x_j, t^{n+1}) = G_{\text{exact}} u(x_j, t^n) \quad u_j^{n+1} = G_{\text{num}} u_j^n$$

$$G_{\text{exact}} = e^{-i\omega_{\text{exact}}\Delta t} = e^{-ikc\Delta t}$$

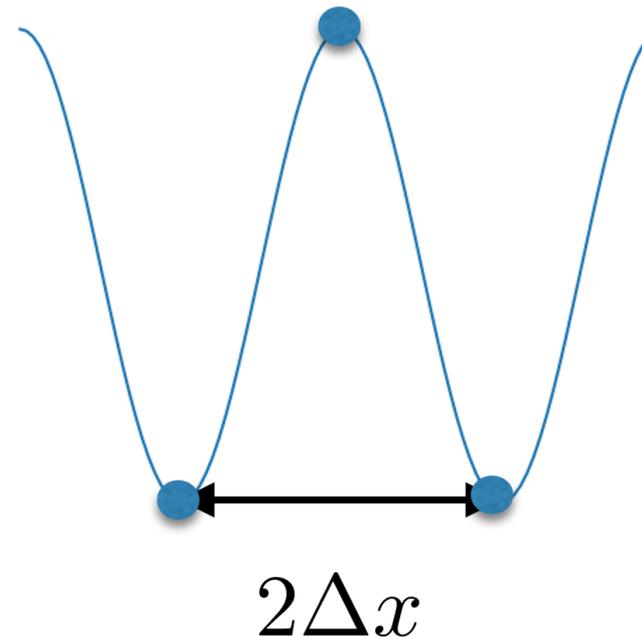
$$G_{\text{num}} = e^{-i\omega_{\text{num}}\Delta t} = 1 - \mu(1 - e^{-ik\Delta x}) \text{ où } \mu = \frac{c\Delta t}{\Delta x} \text{ (nombre de Courant)}$$

Etude d'un schéma numérique

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad G_{\text{num}} = e^{-i\omega\Delta t} = 1 - \mu(1 - e^{-i\theta}), \quad \theta = k\Delta x = 2\pi\Delta x/\lambda$$

Sur une grille de calcul :

$$\lambda \geq 2\Delta x \quad (\text{soit } 0 \leq \theta \leq \pi)$$



θ petit \leftrightarrow grandes échelles, θ grand \leftrightarrow petites échelles

Etude d'un schéma numérique

Etude du facteur d'amplification $u_j^{n+1} = G_{\text{num}} u_j^n$

Dissipation Dispersion (changement de phase en un pas de temps)

$$\frac{|u_j^{n+1}|}{|u_j^n|} = |G_{\text{num}}| \quad \arg(u_j^{n+1}) - \arg(u_j^n) = \arg(G_{\text{num}})$$

$$|G_{\text{exact}}| = 1 \quad \arg(G_{\text{exact}}) = -\omega_{\text{exact}} \Delta t = -kc \Delta t$$

Etude d'un schéma numérique

Euler amont $G_{\text{num}} = 1 - \mu(1 - e^{-i\theta})$

Dissipation $\frac{|u_j^{n+1}|}{|u_j^n|} = |G_{\text{num}}|$

Dispersion $R = \frac{\arg(G_{\text{num}})}{\arg(G_{\text{exact}})}$

EA : $|G|^2 = 1 - 2(1 - \mu)\mu(1 - \cos(\theta))$

Le schéma est stable si $|G| \leq 1$, $\forall \theta \in [0; \pi]$

$|G| \leq 1 \iff 0 \leq \mu \leq 1$

Condition CFL (*Courant Friedrichs Lewy*)

$\arg G = \arctan \frac{\Im(G)}{\Re(G)}$

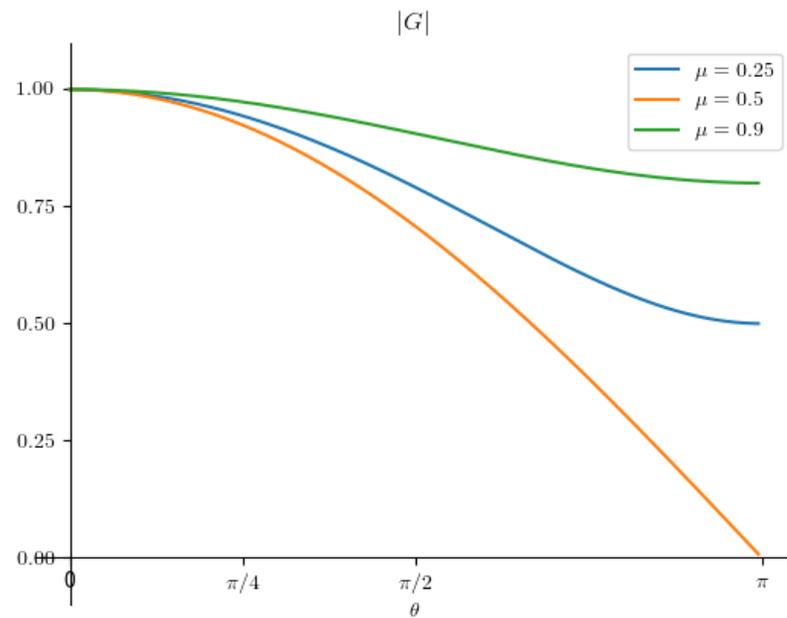
$R(\theta) = -\frac{1}{\underbrace{\omega_{\text{exact}} \Delta t}_{\mu\theta}} \arctan \frac{-\mu \sin(\theta)}{1 - \mu(1 - \cos(\theta))}$

Aux grandes échelles (θ petit) :

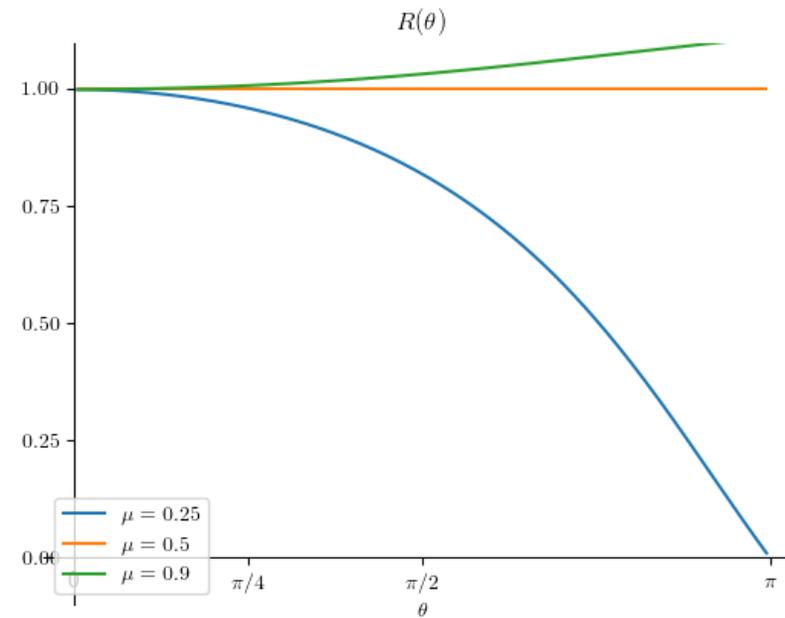
$R(\theta) = 1 - \frac{1}{6}(1 - \mu)(1 - 2\mu)\theta^2 + \dots$

Etude d'un schéma numérique

Dissipation



Dispersion



Schémas en temps et schémas en espace : ordre

$$\text{EA} : u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n)$$

Schéma à l'ordre p en temps et q en espace : $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{O}(\Delta t^p) + \mathcal{O}(\Delta x^q)$

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \dots, u_{j-1}^n = u_j^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots$$

➔ EA : $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \mathcal{O}(\Delta t^1) + \mathcal{O}(\Delta x^1)$, ordre 1 en temps et 1 en espace.

La dissipation et la dispersion peuvent venir à la fois du schéma en temps et du schéma en espace

Exercice : montrer que le schéma de Lax-Wendroff est à l'ordre 2 en temps et en espace

(Utiliser $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$)

Schéma spatial

Un schéma décentré dissipe (dissipation *implicite*)

$$\text{upwind (amont) ordre 1 : } \frac{u_j - u_{j-1}}{\Delta x} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\Delta x^2}$$

C'est une approximation de $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$

$$\text{Equation modifiée : } \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{c\Delta x}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mathcal{O}(\Delta x)^2$$

➔ Dissipation (si $c > 0$).

Schéma spatial

Un schéma décentré dissipe (dissipation *implicite*)

upwind ordre 3 :
$$\frac{2u_{j+1} + 3u_j - 6u_{j-1} + u_{j-2}}{6\Delta x}$$

C'est une approximation de
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\Delta x^3}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$$

Equation modifiée :
$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{c\Delta x^3}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \mathcal{O}(\Delta x)^4$$

➔ Dissipation (si $c > 0$).

Etude séparée en temps et en espace

Etude séparée en temps et en espace

On souhaite étudier séparément les actions du schéma en temps et du schéma en espace

Exemples (pour le schéma temporel)

Schéma d'Euler : $\frac{du}{dt} = F(u, t), \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = F(u^n, t^n)$

Sur le transport : $\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -c \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n$

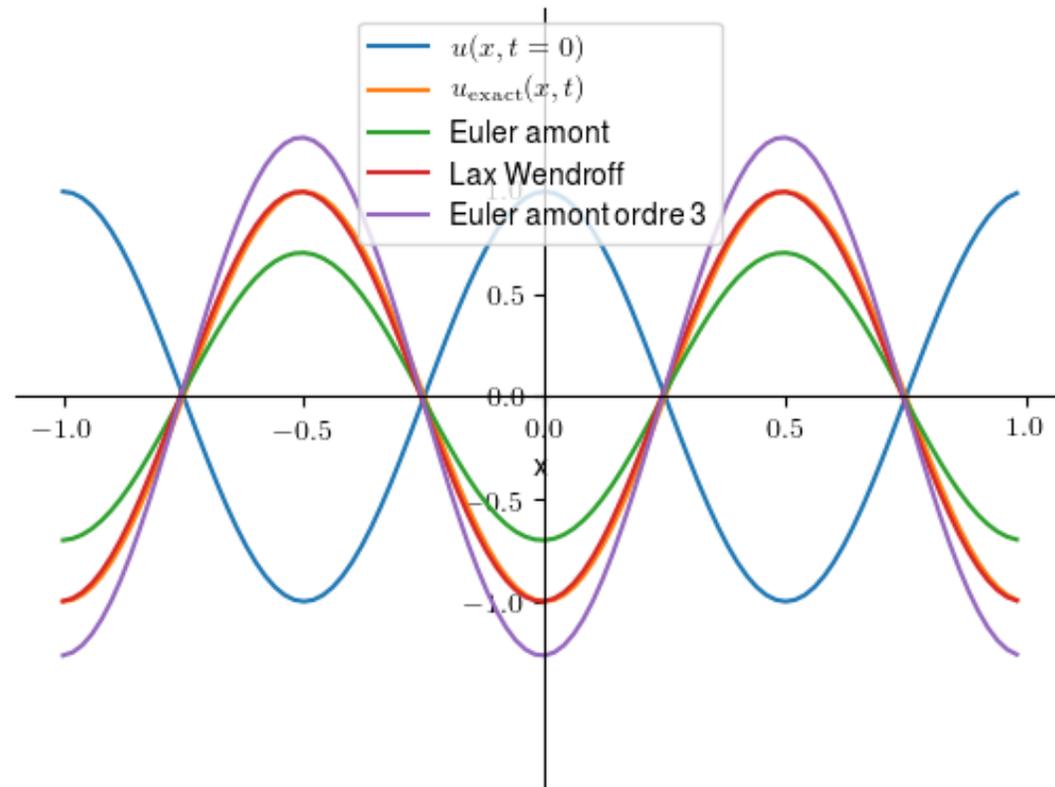
$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)}$ et on suppose la dérivation en espace exacte, i.e. $\frac{\partial u}{\partial x} = iku$

$$u^{n+1} = (1 - ikc\Delta t)u^n = (1 - i\omega\Delta t)u^n$$

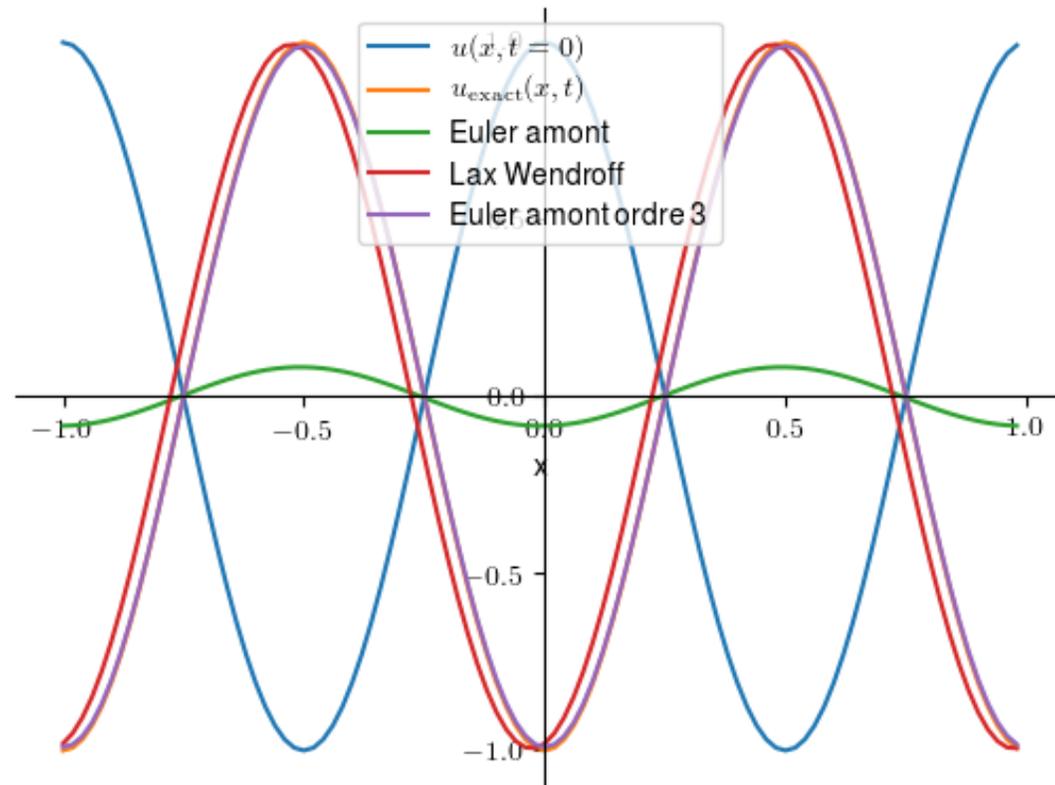
$G_{\text{num}} = 1 - i\omega\Delta t, \quad |G_{\text{num}}|^2 = 1 + (\omega\Delta t)^2 > 1 \rightarrow$ Schéma instable

*C'est la dissipation du schéma décentré en espace qui stabilise le schéma Euler **amont***

Euler en temps, divers schémas en espace



Runge-Kutta ordre 2 en temps, divers schémas en espace



Etude séparée en temps et en espace

Exemples (pour le schema temporel)

$$\text{Schéma } \theta : \frac{du}{dt} = F(u, t), \quad \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = \theta F(u^n, t^n) + (1 - \theta)F(u^{n+1}, t^{n+1})$$

Schéma implicite pour $\theta \neq 1$.

$$\text{Sur le transport : } u^{n+1} = u^n - c\Delta t \left(\theta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n + (1 - \theta) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{n+1} \right)$$

$$(1 + i(1 - \theta)\omega\Delta t)u^{n+1} = (1 - \theta i\omega\Delta t)u^n$$

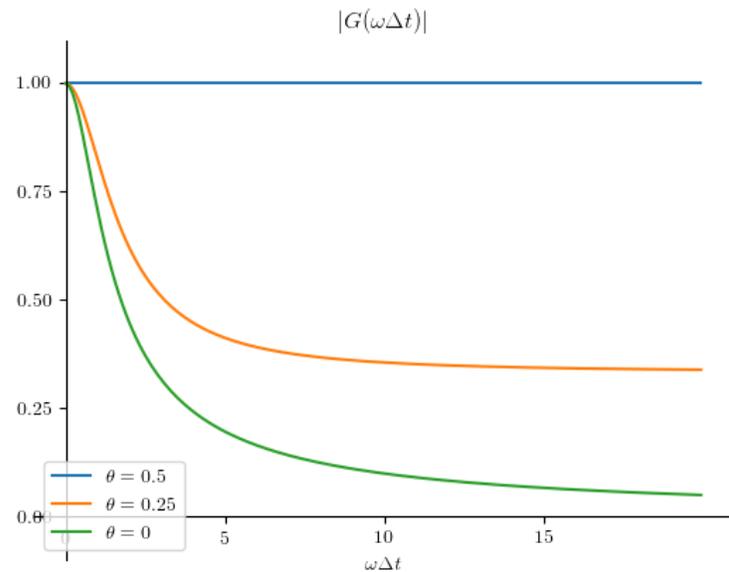
$$G_{\text{num}} = \frac{1 - i\theta\omega\Delta t}{1 + i(1 - \theta)\omega\Delta t}, \quad |G_{\text{num}}|^2 = \frac{1 + \theta^2(\omega\Delta t)^2}{1 + (1 - \theta)^2(\omega\Delta t)^2}$$

➡ schéma stable si $\theta \leq 1/2$, schéma neutre ($|G_{\text{num}}| = 1$) si $\theta = 1/2$ (Crank Nicholson).

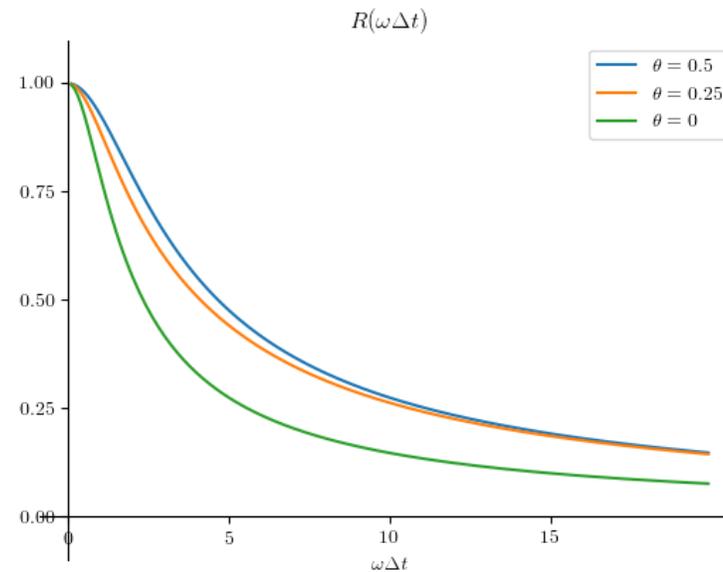
Sous ces conditions sur θ , le schéma est inconditionnellement instable : i.e. $|G_{\text{num}}| \leq 1, \forall \omega\Delta t$

Dissipation et dispersion du schéma θ

Dissipation



Dispersion



On utilise un schéma implicite avec un grand pas de temps uniquement quand la précision n'est pas importante. Sinon compromis entre temps de calcul et précision.

Schémas implicites et résolution d'un système linéaire

$$u^{n+1} = u^n - c\Delta t \left(\theta \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n + (1 - \theta) \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{n+1} \right)$$

Discrétisation en espace (par exemple en centré ordre 2) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_n \approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{n+1} \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

Pour aboutir au système :

$$au_{j-1}^{n+1} + du_j^{n+1} + bu_{j+1}^{n+1} = f$$

Quelques schémas (explicites) pour $\frac{dU}{dt} = F(U)$

Euler $U^{n+1} = U^n + \Delta t F(U^n)$ Ordre 1, instable sans diffusion, CFL=1

Leap Frog $U^{n+1} = U^{n-1} + 2\Delta t F(U^n)$ Ordre 2, instable pour la diffusion, mode numérique, CFL=1

LF – AM3 $U^{n+1,*} = U^{n-1} + 2\Delta t F(U^n)$
 $U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{12} F(5U^{n+1,*} + 8U^n - U^{n-1})$ Ordre 3, modes numériques, CFL=1.5874

Runge Kutta, ordre 2 $U^{n+1,*} = U^n + \Delta t F(U^n)$
 $U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{2} F(U^{n+1,*} + U^n)$ Ordre 2, instable sans diffusion, CFL=1

$$U^* = U^n + \frac{\Delta t}{3} F(U^n)$$

Schéma d'Euler pour la diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \sigma > 0$$

$$u(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad \rightarrow \quad \omega = -\sigma k^2$$

$$\text{Euler : } \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = -\sigma k^2 u^n$$

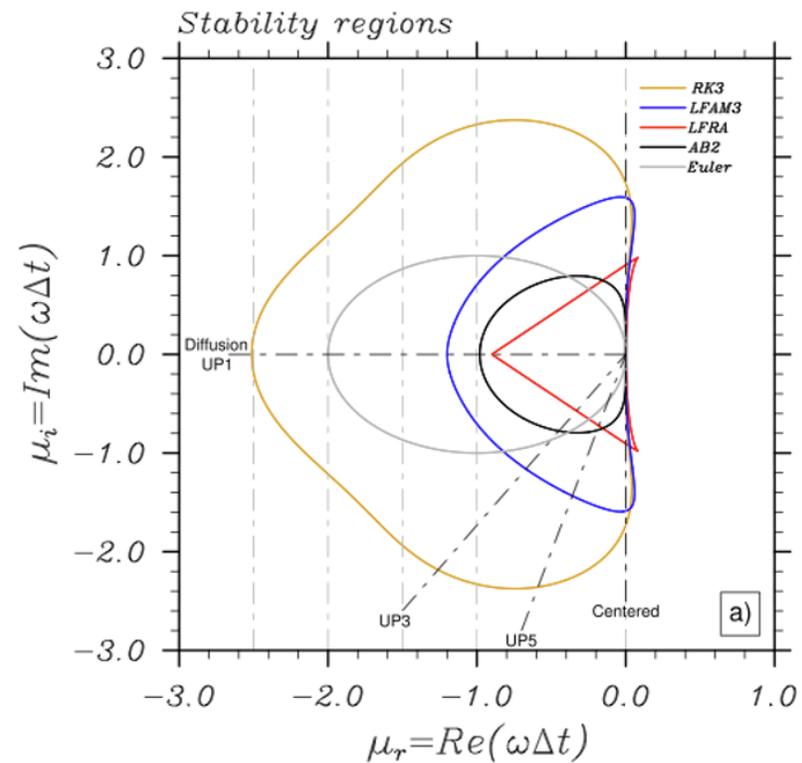
$$u^{n+1} = G_{\text{num}} u^n, \text{ avec } G_{\text{num}} = 1 - \sigma k^2 \Delta t.$$

→ Le schéma est stable ($|G_{\text{num}}| \leq 1$) si $\sigma k^2 \Delta t \leq 2$

Quelques schémas (explicites)

Diagrammes de stabilité

$$\frac{dU}{dt} = \omega U, \text{ où } \Re(\omega) \leq 0$$



Lemarié et al, 2014, OM

Ordre en espace

Objectif de l'augmentation de l'ordre d'un schema :

- Diminuer les erreurs d'amortissement et de dispersion
 - Au moins lorsque la solution est "régulière"
 - Lorsque le processus est suffisamment bien résolu (i.e. θ petit ($\lambda \gg \Delta x$))

Remarques

1. Impact de l'augmentation de l'ordre sur la condition de stabilité : plus l'ordre est élevé, plus la condition de stabilité est contraignante.
2. Augmenter l'ordre du schema ou augmenter la résolution de la grille (diminuer Δx) ?
3. Que faire près des bords (côtes) ? (Dégradation du schéma)
4. Parallélisation ? (le nombre de ghost cells nécessaires augmente avec l'ordre du schema)

Etude espace temps

Nombre de Courant maximum

Time Integration Scheme	Advection Scheme				
	2 nd	3 nd	4 nd	5 nd	6 nd
Leap Frog($\epsilon = 0.1$)	0.91	U	0.66	U	0.57
RK2	U	0.9	U	0.39	U
RK3	1.73	1.63	1.26	1.43	1.09
LFAM3	1.57	0.85	1.15	0.9	1.

Etude espace temps

Nombre de Courant maximum divisé par le nombre d'évaluations du second membre

Time Integration Scheme	Advection Scheme				
	2 nd	3 nd	4 nd	5 nd	6 nd
Leap Frog($\epsilon = 0.1$)	0.91	U	0.66	U	0.57
RK2	U	0.45	U	0.2	U
RK3	0.58	0.54	0.42	0.48	0.36
LFAM3	0.79	0.43	0.58	0.45	0.5

Extension au 2D (ou plus)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c_x \frac{\partial u}{\partial x} + c_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad c_x > 0, c_y > 0$$

Si la stabilité du schéma 1D est donnée par $c_x \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \mu_{\max}$
alors la stabilité du schéma 2D est donnée par $c_x \frac{\Delta t}{\Delta x} + c_y \frac{\Delta t}{\Delta y} \leq \mu_{\max}$

Sauf si on fait du splitting directionnel ... (i.e. on intègre d'abord en x puis en y)

$$\begin{aligned} \frac{u^x - u^n}{\Delta t} &= -c_x \frac{\partial u^n}{\partial x} \\ \frac{u^{n+1} - u^x}{\Delta t} &= -c_y \frac{\partial u^x}{\partial y} \end{aligned}$$

où on a :

$$\max \left(c_x \frac{\Delta t}{\Delta x}, c_y \frac{\Delta t}{\Delta y} \right) \leq \mu_{\max}$$