.

From stephane blanco Mon Oct 27 14 06 58 2025

Merci Louis pour ton retour,

Je suis plutôt absent cette semaine, même si je ne déconnecte pas complètement. Concernant toutes tes remarques sur les questions d'homogénéité, de facteur 1/2 ou autres, il reste sûrement des erreurs et coquilles un peu partout. J'ai écrit assez vite pour avoir une version prête à vous envoyer avant la fin de la semaine dernière.

Il faut évidemment que tout soit parfaitement correct, même si on n'utilise le formalisme que comme un langage et qu'on ne fait aucun calcul. En pratique, ce n'est donc pas gênant pour le reste du texte, mais il faut corriger toutes les coquilles. Je pense que Daniel et toi êtes probablement les mieux placés pour ce type de relecture fine sur le formel, donc n'hésitez pas à relever les erreurs et à proposer d'autres formulations.

Je joins l'article de P.-L. Lions en copie. Ce sont des maths, pas illisible mais des maths quand même, et il est souvent plus simple de lire les digestions qui ont suivi, comme celles de Grebenkov, qui a passé sa vie sur ces questions.

Au passage, Louis, est-ce que tu as la thèse de Daniel ? Si ce n'est pas le cas, c'est grave, et Daniel se chargera de te l'envoyer.

Pour la partie 2, dans mes moments creux, je continue mon calculus sur un exemple 1D. C'est un peu lourdingue, mais je pense que ça va au bout tout en analytique. Là aussi, il faudra repasser le tout au peigne fin mais j'ai encore rien écrit.

N'hésitez pas à interagir sans moi. Je compte sur vous les jeunes pour reprendre la main de toute façon.

Si on y passe un peu de temps je pense que ca peut aller assez vite vers une version propre.

À très vite,

S.

Bonjour à tous,

L'idée de faire le lien entre les deux estimateurs MC et les deux approches "multiplicative" et "killed" du PRBM est vraiment super intéressante. Et ça permet effectivement de faire un premier article avec un très beau fond théorique avant de rentrer dans l'applicatif. Est-ce que tu aurais les pdf des références 17 à 19 qui montrent l'équivalence entre les deux formes, je vois bien la correspondance pour le premier terme (terme source) en utilisant la dernière relation de l'encadré (où il faudrait peut-être préciser ce qu'est F_t, un processus stochastique quelconque ?), mais pour le deuxième, le passage est moins évident pour moi.

A ce propos, j'ai deux petites questions sur les formules "multiplicatives", je ne m'y retrouve pas en termes de dimensions physiques. Pour que ce soit homogène, j'ai l'impression qu'il faudrait remplacer beta par h ou multiplier dL par lambda (pour obtenir une distance) ce qui revient au même. Si je ne me trompe pas, ça ressemble à un oubli au moment de redimensionner le Brownien standard. Deuxième question que je me pose sur la définition du processus $L_t = lim(1/\epsilon....)$: je crois comprendre que ce temps local correspond au passage dans une sphère de rayon epsilon centrée sur un point dans le volume mais si l'on est à la surface est-ce qu'il n'y a pas un facteur 1/2 à prendre en compte (comme j'ai pu lire dans Partially Reflected Brownian Motion: A Stochastic Approach to Transport Phenomena, Denis S. Grebenkov) ? Je ne suis pas sûr parce qu'au final avec la réflexion à la surface, est-ce que ce n'est pas équivalent à une sphère dans le volume, à discuter.

Merci beaucoup en tout cas pour cette relance et à bientôt pour une discussion là-dessus,

Louis

.

From stephane.blanco laplace.univ-tlse.fr Wed Oct 29 10 49 46 2025

Bonjour à tous,

Faisant suite aux échanges avec Louis et Daniel notamment, je vous envoie mon brouillon manuscrit concernant le calcul 1D, qui constituerait la deuxième partie de l'article, après la partie théorique. Il peut subsister quelques petites erreurs, même si j'essaie de vérifier la cohérence des résultats au fur et à mesure.

@Antoine, les calculs montrent qu'on peut démontrer analytiquement l'invariance que tu as tracée dans ta thèse, concernant les temps de calcul sur le slab. Ce pourrait être intéressant à mentionner lors de ta soutenance. C'est un peu lourd du fait des corrélations des Xk mais en renormalisant tout sur [0:1] ca simplifie pas mal les expressions.

L'idée principale est de montrer que l'estimateur W2 tend vers une variance nulle lorsque la probabilité de sortie en convection (notée a dans mes notes) tend vers 0. On peut montrer qu'asymptotiquement, la variance décroît linéairement avec a, ce qui implique un nombre de réalisations proportionnel à 1/a pour un écart-type fixé. Or, pour une erreur de troncature donnée, le nombre de sous-chemins varie lui aussi en 1/a, d'où une compensation exacte.

Pour la suite, voici quelques pistes de réflexion :

* Que se passe-t-il avec l'estimateur W3, par exemple en considérant une puissance uniforme sur le slab ?
* En loi, W2 semble tendre vers une gaussienne (on le sens bien avec les mains et le theor, lim. central)
* Dans le cas général, il resterait à montrer que la variance des estimateurs W tend également vers 0.

. À vous,

S. .

From stephane.blanco@laplace.univ-tlse.fr Thu Oct 30 08:36:15 2025

Le 29/10/2025 à 23:33, louis d'alençon a écrit : :), de biens réjouissantes pages de calcul.

Pour être sûr d'avoir bien compris : X_k est la variable aléatoire associée au passage aux extrémités du Brownien parfaitement réfléchi (a = 0) avec $X_0 = 0$ (coquille = 1 sur la première page).

Tout à fait. Les X_k sont ceux des estimateurs W2 et W3 définis dans la partie théorique du papier. Oui, il y a bien une coquille sur la première page.

p est la fraction de distance de réinjection qui dépend du delta numérique à la frontière. Dans la vérification de cohérence tu fais un diviseur de tension pour exprimer la température au point x=0 en fonction de la différence de température des extrêmes (1 - 0).

Oui pour p. On peut le lire ici comme une probabilité de retrouver la frontière du côté du point de réinjection (ruine du joueur).

Oui pour la différence de température des extrêmes (1 - 0).

Ce qui m'a permis de m'en sortir sans que ce soit trop lourd, c'est le choix de prendre la fonction $u_{ext}(X) = X$ et de tout normaliser autour de [0:1]

Bien joué le calcul de $E(W^2)$, pas trivial. Je n'ai pas encore relu chaque ligne mais ça m'amuse bien de refaire tout ça.

Je veux bien que tu vérifies, il peut subsister quelques erreurs par-ci par-là.

Super l'indépendance en a du temps de calcul. Est-ce que tu imaginais ajouter à cette partie une vérification "expérimentale" du slab 1D par MC ?

On a fait les codes MC avant pour la thèse d'Antoine. Je pourrais te les envoyer si tu veux. Il faudra de toute façon faire quelques vérifications nouvelles, notamment sur la variance, car on n'avait pas l'expression analytique des notes que j'ai envoyées. Idem pour le coût computationnel.

Je ne suis pas sûr de comprendre ce que tu veux faire dans le troisième point des pistes de réflexion. Est-ce que tu veux creuser la variance de la moyenne des Wi tronqués (1/nreal somme Wi_{tronc}) sur un nombre nreal de réalisations en fonction de a et de la troncature n ? Dans ton dernier calcul tu utilises sigma(Wi) = sigma(W) donc je comprends implicitement que ton estimateur de Monte Carlo faisait la moyenne de Wi non tronqués (impossible en pratique) mais en même temps tu le relies ensuite au coût computationnel pour une troncature donnée. Je vois bien l'idée mais effectivement en pratique on ne peut se fixer que l'écart type de la moyenne des Wi_{tronc} qui dépend de a mais forcément aussi de n. Est-ce que c'est dans cette direction que tu veux approfondir ? Est-ce que l'écart-type de la moyenne des Wi_{tronc} tend vers 0 qd a tend vers 0 pour n fixé (sachant qu'il tendra forcément vers 0 qd a tend vers 0 et n vers l'infini) ? Si c'est ça, je veux bien regarder.

PS : si c'est bien ce calcul que tu cherches, je viens de le griffonner et je trouve bien une variance nulle pour l'estimateur de la moyenne des Wi_{tronc} et ce quel que soit n. Et chose amusante, l'espérance de cet estimateur est nulle aussi (!) quel que soit n (c'est le bout qui tend vers l'infini qui fait toute l'espérance 1/2 de W qd a tend vers 0). Calculs bien lourds à vérifier cependant.

J'imaginais pas grand-chose de plus sur la troncature. D'abord parce qu'au début je trouvais que la troncature était un problème pour la communication, puis progressivement je me suis convaincu que c'est anecdotique, au point de n'en parler que dans la partie 2, mise en œuvre sur un toy modèle, comme on le fait là. Oui, j'utilise $sigma(Wi) = sigma(W)$ car implicitement je fais l'hypothèse qu'en tendance, pour une erreur epsilon faible, il se comporte de la même façon que $E(Wi) = E(W)$, c'est-à-dire "à epsilon près". Mais c'est peut-être pas grand-chose de le rendre propre.

Si tu as envie de creuser, dans le même esprit je pense que ça vaudrait le coup de montrer que si on ajoute une source, donc W3, on a encore le même genre de propriété de VAR = 0 et de coût computationnel constant pour les a évanescents. Mais en pratique je pense que c'est pas gagné, car un sous-chemin peut passer un temps infini avant de toucher un bord (certes avec une probabilité nulle), et du coup la puissance est non bornée. On n'a plus un second principe pour nous régulariser la solution. Bref, il faudra un discours de toute façon sur cette partie.

Sinon, en toute généralité, ce serait utile de montrer que var(W2) = 0 pour les a tendant vers zéro. Je pense qu'on peut majorer par le plus grand a du domaine. Reste à produire une loi sur la covariance des positions d'impact, et la on tombe dans des questions difficiles de premiers retours à la frontière. Mais peut être qu'on a besoin que de comportement en loi, ou peut être même pas. Bref à creuser.

Ou n'importe quelle autre idée qui permettrai de continuer à caractériser les estimateurs W_2 et W_3 en toute généralités ou sur toy modèle. Je pense par exemple au fait que W_2 tend probablement en loi vers une gaussienne pour a tendant vers 0.

Mais tous ces derniers points ne sont pas obligatoires pour boucler l'article.

Merci Louis, À très vite au moins par les ondes (cette semaine je suis en vacances).

S.

.

From luigidal hotmail.com Thu Oct 30 12:13:10 2025

Quelques réflexions sur W3 avec une source s uniforme sur le slab. Si on appelle τ_k la variable aléatoire associée au temps passé dans le slab jusqu'à la kième rencontre avec une extrémité. On peut dire il me semble que $\tau_k = k.\tau$ où τ est le temps de première sortie du slab lorsqu'on part à une distance delta d'un bord (peu importe quel bord, tous les bouts de chemins entre deux extrémités vont avoir la même distribution de durée τ). Donc si je me limite à $W_{3,s}$ la partie source de W_3 (l'autre partie étant W_2) J'ai $W_{3,s} = \Sigma_1^\infty[s(1-a)^k\tau_k] = \Sigma_1^\infty[sk(1-a)^k\tau]$ On sort le τ de la somme et on utilise un résultat classique sur somme kq^k : D'où $W_3, s\ = \tau.s.(1-a)/a$

Je ne sais pas si on peut trouver facilement la distribution de τ (c'est des trucs du style walk on rectangle, non ?] mais on n'en a pas besoin pour voir que l'espérance et la variance de $W_{3,s}$ tendent toutes les deux vers l'infini qd a tend vers 0.

$E(W_3, s) = E(\tau)s(1-a)/aetVar(W_3, s) = Var(\tau)[s(1-a)/a]$

Cela vous paraît correct ?

A plus

Louis

.

From luigidal@hotmail.com Fri Oct 31 16:55:38 2025

Une proposition pour Var(W2) -¿0 qd a -¿ 0 dans le cas général moyennant deux hypothèses très raisonnables (tous les a tendent vers 0 à la même "vitesse" et la série des covariances (k,m) des sorties converge qd m tend vers l'infini à k fixé, decorrelation). L'écriture est assez directe mais à vérifier. Pour W3 je crois bien que c'est l'infini en revanche, voir l'envoi précédent.

.

From stephane.blanco@laplace.univ-tlse.fr Sun Nov 2 19:32:21 2025

Bonjour à tous,

Je rouvre le fil car j'ai continué les développements sur la partie source de W3 pour le slab.

@Louis, il y a une erreur dans ton expression de $W3_s$: $\Sigma_{k=1}^\infty[s(1-a)^k\tau]$ (le k est en trop). Ce n'est pas essentiel pour la suite car tu serais arrivé aux mêmes conclusions de divergence et elles ne sont pas tout à fait correctes de mon point de vue, ou du moins trop rapide.

Je joins mon dernier brouillon sur ce thème, mais je decode brièvement ci dessous.

Je continue ici avec les notations lambda et h, mais dans le papier il faudra sans doute les remplacer par D et alpha pour respecter les conventions.

Il faut bien voir qu'il existe trois façons différentes de faire tendre a vers 0, et elles ne sont pas équivalentes :

1) delta → 0
2) lambda → infini
3) h → 0

Pour les cas (1) et (2), les temps de résidence tendent aussi vers 0 et l'espérance reste finie : on retrouve bien la valeur analytique attendue.

Pour le cas (3), le problème est mal posé à h = 0 : les parois deviennent imperméables alors qu'il existe une source, donc il n'y a pas de solution stationnaire. Cependant, lorsque h tend vers 0, il est normal que l'espérance tende vers l'infini, car pour évacuer la puissance par le flux au bord, il faut que u au bord devienne très grand si h est très petit. Rien d'anormal à cela.

En calculant la variance, on constate à nouveau que ce n'est pas la variance absolue qui importe, mais le rapport écart-type / espérance (erreur relative). On obtient : $Sigma(W3_s)/E(W3_s)\ sqrt(e/delta)$ Il n'y a donc un problème de divergence que lorsque delta → 0 ; sinon, le rapport est indépendant de h et de lambda.

Ca me parait normal que cette limite en delta pose un problème calculatoire mais je l'avais pas anticipé.

Je ne retrouve pas exactement le même comportement pour W_s de l'estimateur 1, mais c'est qualitativement cohérent. Je m'explique pas pourquoi on a pas le meme comportement au delta tendant vers 0 que pour $W3_s$. Je peux néanmoins imaginer des erreurs au moins sur W_S de l'estimateur 1 que j'ai fait un peu vite. En tout cas je suis preneur de vérifications et de reprises.

J'ai clarifié pas mal de choses en refaisant ces derniers calculs pas triviaux, mais je pense qu'il faut maintenant confronter les variances analytiques de W_s aux résultats Monte Carlo, pour se rassurer et pour mieux comprendre en regardant la distribution des poids.

À partir de cette semaine, je suis disponible pour en discuter avec ceux qui le souhaitent.

À vous,

S. .

From luigidal@hotmail.com Sun Nov 2 21:10:48 2025

Ah merci,

je ne voyais que la pire situation h -¿ 0 car c'est ce que je testais sur le toymodèle (mais sans source) et du coup j'avais une espérance de sortie fixée. Mais effectivement si lambda va à l'infini ou delta à 0, l'espérance du temps de sortie est impactée et tend aussi vers 0, ça compense et l'ensemble reste fini, cool.

Dispo mercredi, jeudi ou éventuellement vendredi matin la semaine prochaine (j'ai aussi pas mal réfléchi à la possibilité que W2 suive une loi normale, ton deuxième point de réflexion, et j'avais plutôt l'impression que non, "simplement" en regardant le moment d'ordre 3 dans le slab qui n'est pas nul à première vue mais ça sera mieux de voir ça ensemble).

A plus

Louis .

From daniel.yaacoub@doctorant.uca.fr Sun Nov 2 23:39:37 2025

Hello Louis, Hello Stéphane,

Désolé pour la réponse tardive, j'avance beaucoup plus lentement que vous. Merci Stéphane pour cette proposition, je la trouve magnifique est extrêmement éclaircissante. Je prends les choses dans l'ordre de ma lecture (partielle pour l'instant):

*Page 3 pour le cadre canonique de Feynman-Kac, quelques typos mais rien de grace. Je ne comprends pas "A function $\xi \to \boldsymbol{\gamma}(\xi)$ taking values in $\mathbb{R}^d$".

Pour moi le chemin $\boldsymbol{\gamma} := \lim_{,\to\infty}\{\mathbf{r}_{j\in[\![0;n]\!]}|\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}\}$ vit dans l'espace $\lim_{n\to\infty}\mathbb{R}^{3n}$. Pour la mesure de Wiener, d'habitude elle ne référence pas $\mathcal{D}\boldsymbol{\gamma}$ mais plutôt $\mathcal{D}\mathbb{P}[\boldsymbol{\gamma}]$, c'est-à-dire $p_{\boldsymbol{\Gamma}}(\boldsymbol{\gamma})\mathcal{D}\boldsymbol{\gamma}$.

* Pour le Brownien réfléchi et le temps d'arrêt, j'entends la proposition d'écriture cohérente (au 1/2 près) de Stéphane. Cependant, ce n'est pas l'écriture canonique et partagée. Le brownien réfléchi est souvent défini par la SDE $d\mathbf{R}_s = \sqrt{2D}d\mathbf{W}_s + \mathbb{1}_{\{\mathbf{R}_s\in\partial\Omega\}}\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{R}_s)dL_s^{\mathbf{R}}$ dans laquelle $L_s^{\mathbf{R}}$ est appelé (à tord) "temps local à la frontière" et est défini par $L_s^{\mathbf{R}} := \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mathbb{1}_{\{\mathbf{R}_{s'}\in\Omega_\varepsilon\}}dQ_{s'}^{\mathbf{R}}$ dans lequel apparait d'une part la couronne$\Omega_\varepsilon := \{\mathbf{r}\in\Omega|||\mathbf{r}-\mathbf{r}'|| < \varepsilon\forall\mathbf{r}'\in\partial\Omega\}$ contourant la frontière $\partial\Omega$ et d'autre part, la variation quadratique infinitésimale $dQ_s^{\mathbf{R}}$ du brownien $\mathbf{R}_s$ dont on montre qu'elle vaut $2Dds$. On voit donc bien que $\in_0^s \mathbb{1}_{\{\mathbf{R}_{s'}\in\Omega_\varepsilon\}}ds'$ est le temps de résidence dans la couronne tandis que le préfacteur $2D/\varepsilon$ en fait une longueur locale d'occupation.

* J'en profite pour faire un point biblio histoire d'avoir une trace écrite, on pourra rajouter [Skorokhod, 1961] avant Lions et Snitzman pour le Brownien réfléchi, [Lévy, 1965] [Grebenkov, 2019] et [Zhou, 2017] pour le temps local à la frontière. Pour les formulations de Feynman-Kac : c'est bien Papanicolaou qui ouvre la voie pour les Robin en 1990 mais on pourra aussi mentionner les travaux fondateurs de [Brosamler, 1976] et [Hsu, 1985] pour les Neumann.

* pour les connections entre temps d'arrêt et probabilité de survie (démonstration de la dernière relation de la box 1), j'ai posé les choses calmement sur le pdf en PJ. Ça explique la reformulation du terme de sources volumiques mais je crois que je bloque comme toi, Louis, sur le second terme.

J'avance dans la lecture et les cas analytiques dès que je peux et j'en profite pour vous donner mon mail avant que ma boite clermontoise ne ferme : daniel.yaacoub@laplace.univ-tlse.fr.Je suis dispo mardi et mercredi matin cette semaine.

Au plaisir,

Daniel

.

From stephane.blanco@laplace.univ-tlse.fr Tue Nov 4 11:57:40 2025

Au cas où quelqu'un voudrait regarder les notes manuscrites : il y avait une petite erreur d'algèbre dans la version précédente, ce qui expliquait pourquoi je ne comprenais pas un certain comportement limite. C'est maintenant corrigé et tout est beaucoup plus cohérent.

On a donc que la partie source de W_3 est telle qu'à la limite, quand a et delta tendent vers 0, l'erreur relative tend vers 0.

Même conclusion que pour W_2. C'est super.

A+

S. .

From stephane.blanco@laplace.univ-tlse.fr Fri Nov 7 07:24:12 2025

Après discussions avec Daniel je vous envoie le projet git pour écrire directement dans le latex. J'ai pas d'avis sur branche ou master directement.

Pour cloner il faut un compte sur la nastar mais tout le monde en a un je pense :

`gitclonenastar:/nastar/git/antoine_phys.git`

A+

S.