

Equation pronostique de l'énergie cinétique turbulente et conservation de l'énergie

Frédéric Hourdin
6 mars 2012

1 Equation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente

Si on développe les équations de la dynamique en introduisant les perturbation X' d'une variable X , on peut dériver relativement facilement l'équation d'évolution de l'énergie cinétique turbulente.

Notons

$$e = \frac{1}{2} \left[\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right] \quad (1)$$

cette énergie cinétique turbulente.

Sous l'hypothèse de couche limite (gradients horizontaux des grandeurs statistiques nuls, équivalente à l'approximation plan parallèle pour le rayonnement), on peut montrer que l'évolution de l'énergie cinétique turbulente s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \mathcal{M} - \mathcal{N} + \mathcal{T} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{w'p'}}{\partial z} - \epsilon \quad (2)$$

Le terme

$$\mathcal{M} = -\overline{w'u'} \frac{\partial u}{\partial z} - \overline{w'v'} \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3)$$

est généralement positif. C'est le cas notamment pour les formulations en diffusion turbulente pour lesquelles

$$\overline{w'X'} = -K_z \frac{\partial X}{\partial z} \quad (4)$$

auquel cas

$$\mathcal{M} = K_m M^2 \quad (5)$$

avec

$$M^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \quad (6)$$

Il s'agit d'un terme de production d'énergie cinétique turbulente par transfert depuis l'énergie cinétique de l'écoulement moyen (comme on va le vérifier plus loin).

Le terme

$$\mathcal{N} = -\frac{g}{\theta} \overline{w'\theta'} \quad (7)$$

est en général positif dans une atmosphère stable. Il correspond alors à une destruction de turbulence par les effets de stratification. Il peut devenir un terme de production dans les atmosphères instables. Pour les formules en diffusion turbulente, on a

$$\mathcal{N} = K_h N^2 \quad (8)$$

où N est la fréquence de Brunt Vaissala

$$N^2 = \frac{g}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (9)$$

Les termes suivants sont un terme de pression, le transport vertical turbulent d'énergie cinétique turbulente (le transport par la grande échelle est négligé car w est supposé petit), et ϵ est le terme de dissipation mécanique de la turbulence.

Les autres termes sont un terme de transport verticales de e par la turbulence

$$\mathcal{T} = -\frac{\partial \overline{w'e}}{\partial z} \quad (10)$$

un terme dit "de pression" (je n'ai toujours pas bien percuté sur sa signification) et enfin un terme de dissipation, qui transforme en bout de course l'énergie cinétique turbulente en chaleur, souvent pris sous la forme $\epsilon = e^{3/2}/\Lambda$.

L'énergie cinétique turbulente est puisée dans l'énergie cinétique (terme source $\mathcal{M}$) et l'énergie statique (terme source $-\mathcal{N}$) de l'écoulement moyen. Si on oublie le terme de pression, l'énergie cinétique ainsi créée peut être transportée par le terme $\mathcal{T}^1$ à un autre niveau dans l'atmosphère. Mais, si ce terme de transport (souvent négligé) est nul, alors l'énergie $\mathcal{M} - \mathcal{N}$ est déposée localement sous forme de chaleur, un peu plus tard.

2 Conservation de l'énergie

En fait, on peut vérifier que, si les flux $\overline{vw'u'}$, $\overline{w'v'}$ et $\overline{w'\theta'}$ sont des flux associés à des processus conservatifs de quantité de mouvement et de température potentielle, c'est à dire si on peut écrire

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{Trsp} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{w'\xi'}}{\partial z} \quad (11)$$

pour u , v et θ , alors le fait d'ajouter un chauffage local $C_p \delta T = \delta Q = \delta t(\mathcal{M} - \mathcal{N})$ permet effectivement de conserver l'énergie.

Pour cela, on considère l'intégrale verticale

$$\int_0^\infty -\overline{w'u'} \frac{\partial u}{\partial z} \rho dz = -\left[u \rho \overline{w'u'} \right]_0^\infty + \int_0^\infty u \frac{\partial \rho \overline{w'u'}}{\partial z} \rho dz \quad (12)$$

$$= -\int_0^\infty u \frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{Trsp} \rho dz \quad (13)$$

D'où finalement (les termes de bords étant nuls, en bas parce que $u = 0$ et en haut parce que le flux est nul),

$$\int_0^\infty \mathcal{M} \rho dz = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{\partial (u^2 + v^2)}{\partial t} \Big|_{Trsp} \rho dz \quad (14)$$

Pour le mélange turbulent, $\mathcal{M}$ est positif et la diffusion représente donc un terme systématique de décroissance de l'énergie cinétique. C'est ce à quoi on s'attend si on part d'un champ de vent suivant x dont la valeur oscille autour d'une moyenne $\bar{u} + u^*$. Le mélange va tendre à homogénéiser u à sa valeur moyenne et donc à faire décroître $\overline{u^2}$ (car $(\bar{u} + u^*)^2 = \bar{u}^2 + \overline{u^{*2}} \geq \overline{u^2}$)

Pour la θ , on va partir d'une formule un peu simplifiée (sachant que je ne suis pas allé jusqu'au bout des vérifications) :

$$\mathcal{N} = -\frac{g}{\theta_0} \overline{w'\theta'} \quad (15)$$

1. A noter qu'une dérivation propre ferait sûrement apparaître plutôt $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \overline{w'e'}}{\partial z}$

$$\int_0^\infty \mathcal{N} \rho dz = - \left[\frac{gz}{\theta_0} \overline{\rho w' \theta'} \right]_0^\infty + \int_0^\infty \frac{gz}{\theta_0} \frac{\partial \overline{\rho w' \theta'}}{\partial z} dz \quad (16)$$

$$= - \int_0^\infty gz \frac{1}{\theta_0} \frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{Trsp} \rho dz \quad (17)$$

On retrouve l'analyse classique de la convection. Si θ est plus grand en bas qu'en haut (atmosphère instable, $-\mathcal{N} > 0$), alors le mélange va amener de l'air lourd du haut vers le bas et va faire monter de l'air léger. L'atmosphère va globalement perdre du géopotentiel gz . Dans ce cas, le terme $\frac{\partial \theta}{\partial t} \Big|_{Trsp}$ sera négatif en bas et positif en haut. L'intégrale calculée ci-dessus sera donc négative.

Reste à démontrer que c'est exactement le puits de $C_v T + gz$ (c'est ça qu'on veut dans le processus de transport).

On peut utiliser le fait que

$$\int_0^\infty (C_v T + gz) \rho dz = \int_0^\infty C_p T \rho dz = \frac{1}{\kappa} \int_0^\infty gz \rho dz \quad \text{avec } \kappa = \frac{R}{C_p} \quad (18)$$

3 En pratique dans le code

Si on active vraiment une équation de la TKE, comme dans le schéma de Mellor et Yamada, le mieux est de mettre directement le terme ϵ comme chauffage local additionnel.

Pour toutes les autres paramétrisations qui transportent θ et la quantité de mouvement, on peut directement ajouter $\mathcal{M} - \mathcal{N}$ comme chauffage local.

On peut éventuellement partir directement des tendances intégrées à partir du sommet de l'atmosphère,

$$\overline{\rho w' \xi'} = \int_z^\infty \frac{\partial \xi}{\partial t} \Big|_{Trsp} \rho dz \quad (19)$$

Ces corrections s'appliquent en particulier au modèle du thermique !

Pour la convection profonde, il faut sans doute regarder d'un peu plus près de quels flux ou tendances il faut partir pour que ce calcul soit valable.

Pour la quantité de mouvement pour les thermiques, il faut bien vérifier aussi que le terme de couplage par termes de pression horizontaux entre le vent moyen et le panache (qui incline les panaches) ne viole pas cette conservation.