
Master Recherche Dynamique des fluides, Energétique et Transferts

Option UPS-4 : Méthodologie des couplages et transferts thermiques.

Jean-Louis Breton, Jean-Louis Joly, Jean-Yves Grandpeix

(Décembre 2007)

Table des matières

1 Introduction Générale

<i>(par Jean-Yves Grandpeix)</i>	6
1.1 Découpage ; Sensibilité ; Couplage	6
1.1.1 Découpage	6
1.1.2 Sensibilité et couplage	6
1.2 Un exemple concret : la boucle fluide diphasique	10
1.2.1 Pompage mécanique	10
1.2.2 Pompage capillaire	10
1.3 Découpages physiques	11
1.3.1 Equation de l'enthalpie.	11
1.3.2 Couplage dynamique-thermique dans un écoulement de convection naturelle stationnaire : gain de rétroaction	12
1.4 Traitement numérique d'un découpage physique : raccordement océan-atmosphère . .	15

2 Convection

<i>(par Jean-Louis Breton)</i>	18
2.1 Equations "générales"	18
2.2 Simplification des équations : adoption d'hypothèses supplémentaires	19
2.3 Convection pour un gaz transparent au rayonnement	23
2.3.1 Similitude des écoulements	23
2.4 Ecoulements compressibles.	25
2.4.1 Ecoulement en conduite rectiligne à section variable	26
2.4.2 Ecoulement dans une conduite à section constante (de diamètre D)	27
2.4.3 Onde de choc droite	28

3 Sensibilités et Couplages : outils d'analyse de la dynamique des systèmes

<i>(par Jean-Louis Joly)</i>	29
3.1 Caractéristiques du comportement des systèmes complexes	30
3.1.1 Remarques et définitions préliminaires	30
3.1.2 Définition d'un système physique Σ	35
3.2 Analyse des sensibilités	37
3.2.1 Définition de la sensibilité d'une observable du Σ à une perturbation	37
3.2.2 Exemple 1 : mur conductif 1D pris entre un flux et un échange convectif	40
3.2.3 Exemple 2 : paroi séparant deux fluides	46
3.2.4 Exemple 3 : modèle cinétique de VERHULST	50
3.2.5 modèles de sensibilités	57
3.3 Dynamique des systèmes versus diagrammes de sensibilités.	57
3.3.1 Mise en évidence de phases dans l'évolution	58
3.3.2 Mise en évidence de moyens de contrôle sur l'état au RP du Σ	58
3.3.3 Comparaisons qualitatives/quantitatives entre diagrammes de sensibilité	58

3.3.4	quelques conclusions sur "l'outil" sensibilité???	59
4	Couplages	
	(par <i>Jean-Louis Joly</i>)	60
4.1	Résolution au fil du temps et système linéarisé tangent (SLT)	60
4.2	Introduction aux couplages	63
4.2.1	Sensibilités ou couplages ?	63
4.2.2	L'évolution découplée des états.	65
4.2.3	Les couplages dynamiques $c_{\eta_1/\eta_2}(t)$ ou $c_{\varphi_I/\varphi_J}(t)$.	67
4.2.4	En conséquence, quels critères pour la construction de modèles ?	68
4.3	Découpage-raccordement des systèmes : décomposition η/φ	69
4.3.1	un exemple de mise en oeuvre du découpage η/φ : l'aillette.	71
4.4	Le formalisme de modélisation TEF	73
4.4.1	Décomposition η/φ .	73
4.4.2	Description en variations temporelles.	73
4.4.3	Système linéarisé tangent.	74
4.4.4	Discrétisation temporelle.	74
4.4.5	Interprétation des éléments d'analyse du TEF.	75
4.4.6	Couplages deux à deux.	76
4.4.7	Gain de rétroaction.	76
4.5	Applications à l'étude des couplages	76
4.5.1	le mur conducteur 1D	76
4.5.2	le système paroi-fluide 1D	78
4.5.3	le couplage advection-conduction	80
4.5.4	couplages dans le problème de l'aillette	80
4.5.5	couplages entre processus dans le modèle de VERHULST	80
4.5.6	couplages et hypothèse de Boussinesq	84
4.6	Résultats en transformée de BOREL.	84
4.6.1	transformées de base	84
4.6.2	autres transformées	84
5	Couplage du processus d'échange radiatif avec la conduction	
	(par <i>Jean-Yves Grandpeix</i>)	87
5.1	Rappel : écriture des bilans radiatifs	88
5.2	Ecriture du bilan radiatif pour un gaz gris	90
5.3	Couplage conduction-rayonnement (gaz gris compris entre deux faces noires)	92
5.4	Ecriture du bilan radiatif pour un gaz réel	94
5.5	Couplage conduction-rayonnement (gaz réel compris entre deux faces noires)	101
6	Couplage du processus d'échange radiatif avec la convection	
	(par <i>Jean-Louis Breton</i>)	104

Table des figures

1.1	Définition de la viscosité : exemple de sensibilité	7
1.2	La viscosité comme coefficient de couplage	8
1.3	Boucle fluide diphasique à pompage mécanique	10
1.4	Boucle fluide diphasique à pompage capillaire	11
3.1	<i>représentation schématique d'une boucle fluide diphasique de type CPL.</i>	31
3.2	<i>schéma d'un évaporateur de type CPL.</i>	31
3.3	<i>Schéma d'instrumentation expérimentale de la CPL.</i>	32
3.4	<i>fluctuations de pression observées aux bornes de l'évaporateur.</i>	33
3.5	<i>schéma montrant les différentes zones de modélisation de la CPL.</i>	34
3.6	<i>pression dans le réservoir. Overshoot/undershoot.</i>	36
3.7	<i>représentation schématique d'un système.</i>	36
3.8	<i>trajectoire formelle d'un système.</i>	38
3.9	<i>construction intuitive de la sensibilité.</i>	39
3.10	<i>construction de la sensibilité à la condition initiale.</i>	39
3.11	<i>schéma du problème mur 1D.</i>	41
3.12	<i>profils de température du mur 1D à différents instants.</i>	42
3.13	<i>Variation de l'écart entre température moyenne du mur et température initiale.</i>	43
3.14	<i>Sensibilité réduite de T_m à l'inertie ρC</i>	44
3.15	<i>Sensibilités réduites comparées de T_m à ρC et e</i>	44
3.16	<i>Sensibilités réduites comparées de T_m à l'inertie K_p et au coefficient d'échange h.</i>	45
3.17	<i>Sensibilité de T_m à T_a et à la condition initiale T_0.</i>	46
3.18	<i>schéma du problème mur et fluide couplés thermiquement 1D.</i>	47
3.19	<i>Températures moyennes de mur (trait plein) et de fluide (pointillé).</i>	48
3.20	<i>Sensibilités réduites de τ_1 et τ_2 à h_1 et h_2.</i>	49
3.21	<i>Comparaison des sensibilités réduites de T_w (trait plein) et T_f (pointillé) à h_1.</i>	50
3.22	<i>Evolution de la population selon le modèle de Verhulst [pour $X(0) = 10$ (trait plein) et pour $X(0) = 0.1$ (pointillé)]</i>	53
3.23	<i>Sensibilité réduite de $X(t)$ au taux de mortalité D.</i>	54
3.24	<i>Sensibilité réduite de $X(t)$ au taux de croissance k.</i>	54
3.25	<i>Sensibilité réduite de $X(t)$ à la ressource constante N.</i>	55
3.26	<i>Sensibilités réduites comparées de $X(t)$ à ses trois paramètres (à N : pointillés larges, à k petits pointillés et à D trait plein).</i>	56
3.27	<i>Sensibilité réduite de $X(t)$ à l'état initial X_0.</i>	56
4.1	<i>Trajectoire schématisée d'un système.</i>	61
4.2	<i>Approche de la trajectoire en un point par SLT.</i>	61
4.3	<i>Approche de la trajectoire à tous instants par SLT successifs.</i>	62
4.4	<i>Approche de la trajectoire de VERHULST par SLT successifs.</i>	63
4.5	<i>représentation schématique d'un système.</i>	64
4.6	<i>Schéma d'un système découpé en sous-systèmes.</i>	65

4.7	<i>Evolution découplée (en pointillé) de la population X de l'espèce.</i>	67
4.8	<i>Schéma du système paroi-fluide découpé en sous-systèmes et interfaces.</i>	70
4.9	<i>Schéma de l'ailette.</i>	71
4.10	<i>Volume de contrôle local.</i>	72
4.11	<i>Evolutions pour les deux propagateurs $\mathcal{P}_1(t)$ et $\mathcal{P}_2(t)$.</i>	79
4.12	<i>Influence de $\varphi_{f/w}$ sur les températures</i>	80
4.13	<i>Schémas de représentation du système de VERHULST.</i>	81
5.1	<i>Spectre du CO_2 dans la bande $2400 - 2300cm^{-1}$</i>	95
5.2	<i>Exemples de structures en bandes des spectres des gaz</i>	96
5.3	<i>Variation du coefficient d'absorption de Planck avec la température pour le CO_2 (courbe inférieure) et la vapeur d'eau (courbe supérieure)</i>	99
5.4	<i>Carte de température obtenue par interférométrie holographique dans une expérience à plafond chaud avec de l'azote pure (à gauche) et du dioxyde de carbone pure (à droite) (interférogramme direct en haut : les franges sont des isothermes ; franges auxiliaires en bas : les franges dessinent le profil vertical de température)</i>	103
6.1	<i>Bilan radiatif volumique dans une couche limite idéalisée</i>	105
6.2	<i>Représentation des échanges avec les 4 parois : pondération des échanges avec des parois supposées infinies par les angles sous lesquels sont vues les parois.</i>	106

Chapitre 1

Introduction Générale

(par Jean-Yves Grandpeix)

1.1 Découpage ; Sensibilité ; Couplage

1.1.1 Découpage

Idée centrale : le découpage est omniprésent en physique

Lorsque l'on veut décrire le fonctionnement d'un système physique, lorsque l'on veut le modéliser, on rencontre d'abord le fait qu'un système physique réel n'est jamais quelque chose de simple, où un ou deux processus se déroulent : une lampe à incandescence n'est pas simplement un filament de résistance R chauffée selon la loi $P = U^2/R$; la résistance dépend de la température ; une bonne partie de l'énergie est perdue sous forme infra-rouge ; le filament se volatilise et obscurcit le verre ; la convection naturelle joue un rôle dans l'ampoule ...

Heureusement, avec sa longue expérience, la physique est faite pour affronter ce genre de problème : elle dit comment découper le système d'abord spatialement (en sous-systèmes homogènes), puis en processus relevant chacun de lois spécifiques (conduction thermique, conduction électrique, sublimation, convection, condensation, rayonnement ...) ; ensuite elle dit comment raccorder tous ces morceaux (lois de conservation). Dès l'abord, d'ailleurs, la physique enseigne que toute étude physique commence par la définition précise du système considéré, de ses frontières et des influences extérieures imposées (les forçages) : c'est le découpage initial, séparant le système de son extérieur.

Ainsi la démarche physique standard procède par découpage-raccordement ; sans rien dire : c'est le plus beau non-dit de la physique.

La démarche consiste à :

- séparer le système étudié du reste de l'univers ("on considère un système ...")
- séparer les zones homogènes
- séparer les divers processus
- raccorder

On remarquera que, pour le physicien, comprendre un système c'est parvenir à le découper, de sorte à identifier et décrire les processus dont il est le siège, et à décrire les mécanismes de couplage de ces processus : **la compréhension physique passe par le découpage.**

1.1.2 Sensibilité et couplage

Sensibilité :

Lorsque l'on considère un système dans sa globalité, on peut étudier la façon dont il répond à une modification des conditions aux limites ou autres forçages. Ceci se décrit, en particulier, par les **sensibilités** des variables du système aux paramètres externes.

Exemple : Définition de la viscosité.

La viscosité est définie comme étant la force exercée, par unité de surface, sur une plaque par la mise en mouvement d'une autre plaque parallèle.

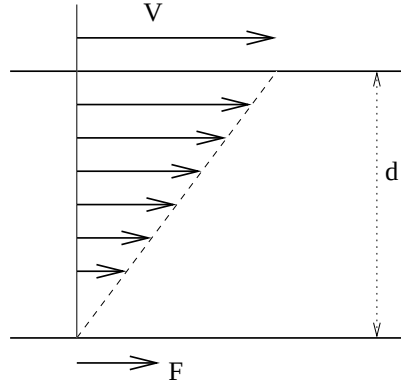


FIG. 1.1 – Définition de la viscosité : exemple de sensibilité

Force par unité de surface :

$$F = \mu \frac{v}{d}$$

- v est un forçage
- F est la réponse du système
- μ (la viscosité) est la sensibilité de F au gradient moyen v/d .

Couplage :

Mais on veut pouvoir parler non seulement de l'influence de l'extérieur sur le système (= sensibilité), mais aussi de l'influence d'une partie du système sur une autre (= couplage). Là surgit une difficulté : lorsque l'on modélise l'évolution temporelle d'un système, on a autant d'équations que d'inconnues ; c'est un problème bien posé, c'est-à-dire que le système d'équations est fermé. Si on ne modifie pas le modèle, cela n'a alors pas de sens de parler de l'influence d'une partie sur une autre, puisque l'on ne peut pas jouer sur l'évolution d'une partie ("problème bien posé" signifie "solution unique" et donc, en particulier, évolution fixée, unique, pour chaque partie) .

Pour pouvoir parler d'influence interne, il faut pouvoir modifier le modèle. On procède pour cela par découpage. Et on parle d'influence de A sur B en disant comment une perturbation des variables de A (liée, bien sûr, à une perturbation du modèle de A) modifie l'évolution des variables de B . Ceci a un sens puisque, dans cette opération, on ne modifie pas le modèle de B : ce que l'on observe, c'est bien une perturbation de l'évolution du sous-système B originel par une modification du sous-système A .

Mais ceci est encore trop compliqué : si A est un système complexe, on ne désire pas avoir en vrac les influences de toutes les variables de A sur B . Tout se simplifie considérablement si on introduit des variables d'interface (ou de raccordement).

Le principe est alors le suivant : les variables d'interface sont vues comme des conditions aux limites par les systèmes partiels A ou B ; à chacun des systèmes est associé un système d'équations accompagné de conditions aux limites, de telle sorte qu'il y corresponde un problème bien posé. Alors, à chaque ensemble de valeurs des variables d'interface vont être associées des solutions uniques dans chaque système partiel. Par conséquent, le système constitué de l'ensemble des équations des modèles partiels admet une infinité de solutions (autant que d'ensembles de valeurs des variables d'interface). Ainsi, l'introduction du découpage a introduit une liberté. Pour obtenir un système d'équations équivalent au système initial, il faut alors introduire de nouvelles contraintes : ce sont les modèles de raccordement. Ces modèles de raccordement sont obtenus en posant la question : que faut-il ajouter à

chacune des interfaces pour que les sous-systèmes continuent à se comporter comme dans le système global ?

Exemple : Rôle de la viscosité dans un écoulement.

Reprenons l'exemple de l'écoulement cisailé entre deux plaques en mouvement relatif parallèle. On coupe l'écoulement en deux par un plan parallèle aux deux plaques. On obtient deux demi-écoulements, dont on ne voit pas bien comment décrire leur face libre. On se pose donc la question : que faut-il "ajouter" à l'interface pour que les deux morceaux continuent à se comporter comme dans le système global ?

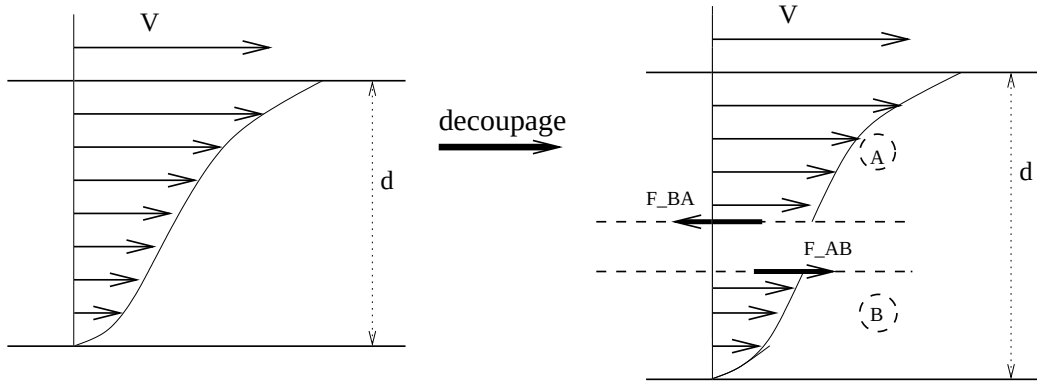


FIG. 1.2 – La viscosité comme coefficient de couplage

On connaît la réponse : il faut ajouter deux forces surfaciques (égales en module et opposées) données par :

$$\begin{cases} F_{AB} &= \mu \frac{\partial V}{\partial z} \\ F_{BA} &= -F_{AB} \end{cases} \quad (1.1)$$

Remarques :

- F_{AB} et F_{BA} sont des variables d'interface ou de raccordement (on dira variables de transfert).
- μ est un coefficient de couplage donnant l'influence (interne cette fois) de $\frac{\partial V}{\partial z}$ sur F_{AB} .
- l'équation (1.1) constitue un modèle de raccordement des deux parties.

Récapitulation : Faire une coupure, c'est ajouter un degré de liberté.

La réponse à la question "Que faut-il ajouter ... ?" mène à l'établissement d'une loi de raccord permettant de retrouver le comportement du système global.

Les lois phénoménologiques (Fourier, Fick, Darcy, . . .) sont précisément des réponses à la question "Que faut-il ajouter à la coupure pour restituer le système global ?".

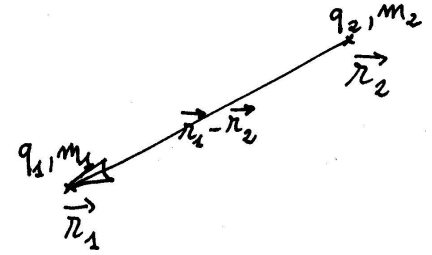
Exemples de raccordements élémentaires :

Le concept de force permet, en mécanique, de considérer n'importe quelle sous-partie du système et d'écrire ses équations d'évolution (par exemple, pour le point matériel : $m \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F}$), puis d'écrire par ailleurs les équations déterminant les forces.

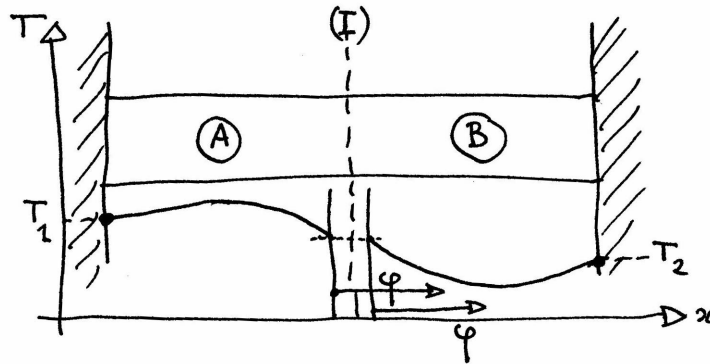
Exemple : interaction électrostatique

$$\text{Equations d'évolution} \quad \begin{cases} m_1 \partial_t \vec{V}_1 = \vec{F} \\ m_2 \partial_t \vec{V}_2 = -\vec{F} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\text{Modèle de raccord } \vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{\|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|^3} \quad (1.3)$$



Flux thermique : On considère un barreau conducteur monodimensionnel placé entre deux thermostats aux températures T_1 et T_2 . On coupe ce barreau transversalement en une section quelconque I . Et on pose l'éternelle question : que faut-il ajouter à l'interface (appliquer à chaque demi barreau) pour que la carte de température soit la même que dans le barreau non coupé ?



La réponse est, en gros, bien connue : il faut appliquer de chaque côté de la coupure un flux thermique dont l'expression est donnée par la loi de Fourier. On se retrouve alors avec deux problèmes aux limites (un dans chaque demi barreau) et deux équations de raccord exprimant les continuités des flux.

$$\text{Equations d'évolution} \quad \begin{cases} -\lambda \partial_x T_A|_I = \phi_A & ; & T_{A(0)} = T_1 & ; & \partial_t T_A = \alpha \nabla^2 T_A \\ -\lambda \partial_x T_B|_I = \phi_B & ; & T_{B(L)} = T_2 & ; & \partial_t T_B = \alpha \nabla^2 T_B \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\text{Modèle de raccord} \quad \begin{cases} \phi_A = -\lambda \partial_x T_B|_I \\ \phi_B = -\lambda \partial_x T_A|_I \end{cases} \quad (1.5)$$

Cependant, il faut prendre garde que le nouveau système d'équations mène effectivement à un problème bien posé : il est extrêmement facile de choisir des équations ayant une infinité de solutions. Ainsi, si on avait pris, au lieu des deux dernières équations, celles obtenues en croisant les deux seconds membres :

$$\begin{cases} \phi_A = -\lambda \partial_x T_A|_I \\ \phi_B = -\lambda \partial_x T_B|_I \end{cases} \quad (1.6)$$

on voit que le système aurait été singulier, les deux dernières équations étant identiques à celles de la formule (1.4) exprimant les conditions aux limites.

Récapitulation On se retrouve avec deux types d'équations et de variables : équations d'évolution - équations de raccordement (ou équations phénoménologiques) ; variables d'état - variables de transfert (ou variables de raccordement ou variables d'interface). Ce n'est pas la seule façon de faire ; mais tout

le monde est tombé d'accord pour dire que c'était la plus pratique (voir, par exemple, la Mécanique dépourvue de forces élaborée par Hertz et la discussion de Boltzmann).

Remarque :

Il faut noter la différence de point de vue entre une approche de type "Etude de couplage" et une approche de type "Analyse cause - effet". Dans une étude de couplage, on considère les diverses parties, les divers processus sur un pied d'égalité. Dans une analyse cause - effet, on essaie de répondre à la question : quel processus est cause de l'autre ? Cette dernière analyse est donc réservée aux cas où il existe une hiérarchie entre les processus. L'étude de couplage, au contraire, est particulièrement pertinente lorsqu'il n'existe pas clairement de processus dominant (voir paragraphe suivant).

1.2 Un exemple concret : la boucle fluide diphasique

Les boucles fluides diphasiques sont des systèmes destinés à transporter de la chaleur depuis un composant à refroidir (accollé à l'évaporateur) jusqu'à un composant permettant d'évacuer la chaleur (le condenseur). Selon la configuration choisie, ce sont des systèmes avec ou sans processus dominant.

1.2.1 Pompage mécanique

On se pose la question de savoir si le ΔP moteur est un processus dominant. On sait que le condenseur est générateur d'oscillations. Comme on peut disposer d'un saut de pression ΔP important, on peut augmenter les pertes de charge sans nuire au fonctionnement de la boucle. On peut donc mettre des diaphragmes de part et d'autre du condenseur, ce qui permet d'amortir les oscillations. On se retrouve alors avec un système où le ΔP moteur domine tous les processus dynamiques : on n'a pas à se préoccuper d'un éventuel couplage entre réservoir et condenseur.

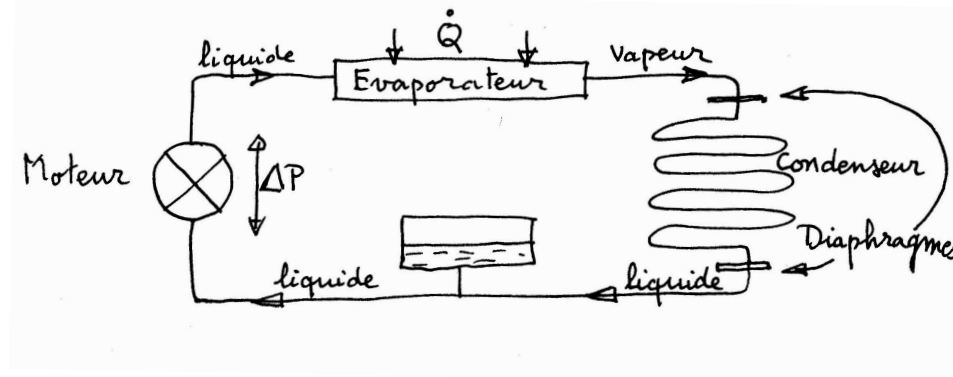


FIG. 1.3 – Boucle fluide diphasique à pompage mécanique

1.2.2 Pompage capillaire

Ici, le ΔP qui met en mouvement le fluide est le saut de pression capillaire à la traversée des ménisques liquide-vapeur se trouvant à la surface des mèches :

$$\Delta P = \frac{2\sigma}{r}$$

où σ désigne la tension capillaire et r le rayon des ménisques. ΔP est de l'ordre de quelques kPa . Dans ces conditions, il n'est pas question d'amortir les oscillations par des diaphragmes. On observe alors effectivement des oscillations permanentes. Ces dernières constituent un aspect crucial du fonctionnement de la pompe, puisqu'il existe un rayon de courbure minimal (et donc un saut de pression maximal ΔP_{max}) dont le franchissement entraîne le désamorçage de la mèche. Il est donc important

de disposer d'un modèle permettant de répondre aux questions : quelles sont les mécanismes des oscillations et comment agir sur eux ?

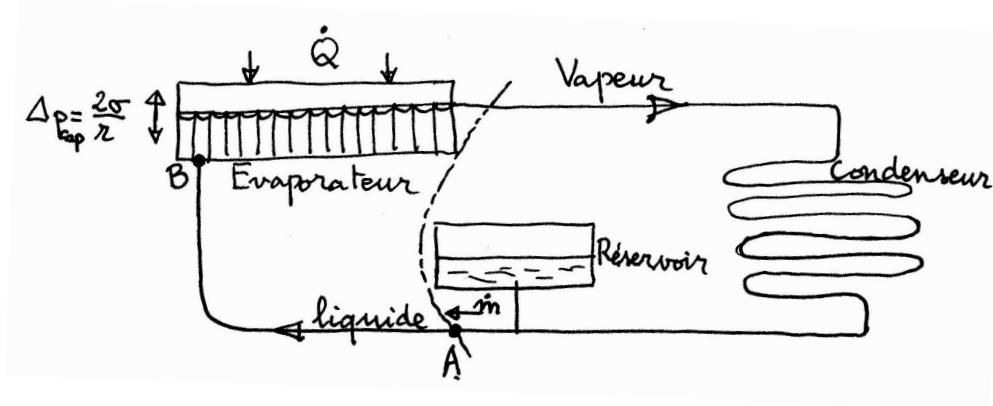


FIG. 1.4 – Boucle fluide diphasique à pompage capillaire

Le découpage permet de poser des questions plus précises : quelle est la sensibilité $\frac{d\Delta P_{cap}}{d\dot{m}}_{(t)}$ du sous-système évaporateur, conduite liquide AB ? Ou, mieux : quelle est la réponse $\Delta P_{cap(t)}$ de ce sous-système à un saut du débit $\dot{m}$?

Remarque :

On notera que le cas à processus dominant est un cas où l'on peut se faire une bonne idée de tout ce qui se passe en faisant des calculs à la main (une fois connues les lois donnant les pertes de charge des divers éléments de la boucle, on sait exprimer le débit en fonction du ΔP moteur, et donc la puissance évacuée). Ceci n'est plus du tout vrai pour le second cas : on se retrouve avec des équations couplées à résoudre ; en général on aura recours à la simulation numérique pour se faire une idée du comportement. Ceci est une règle assez générale : le monde des systèmes couplés est le lieu de prédilection des modèles numériques. C'est ainsi que l'écologie, l'économie, la météorologie, la thermique de l'habitat ... sont des univers où les modélisateurs numériques sont très présents.

1.3 Découpages physiques

1.3.1 Equation de l'enthalpie.

L'écriture usuelle de l'équation de l'énergie la plus simple est :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \lambda \nabla^2 T$$

dans laquelle on reconnaît le terme de transport (2^{eme} à gauche) et le terme de conduction (à droite).

L'écriture plus complète est usuellement :

$$\begin{aligned} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = & \quad \lambda \nabla^2 T \quad + \quad \frac{d\psi_r}{dV} \quad + \quad \beta T \frac{dp}{dt} \\ & \text{source conductive} \quad \text{source radiative} \quad \text{échauff. par compression} \\ & \quad \quad \quad \text{(ou } -\vec{\nabla} \cdot \vec{q}_r \text{)} \quad \quad \quad \text{(ou } \beta T \rho g w \text{)} \\ & + \quad \frac{d\chi}{dV} \quad - \quad L_v \frac{dq_l}{dt} \quad + \quad \dots \\ & \text{source chimique} \quad \text{source liée au} \\ & \quad \quad \quad \text{changement de phase} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Cette équation appelle deux remarques. D'une part, on constate que les physiciens écrivent les termes explicitement lorsque leurs formes leur plaisent, mais préfèrent faire apparaître un découpage en processus lorsqu'il y a tout un modèle compliqué derrière. Et, en général, ils n'ont pas le choix : les cas où l'on peut représenter tout un processus par une expression analytique simple restent très minotitaires, voire réservés à des cas très académiques. D'autre part, on voit apparaître explicitement la démarche de découpage-raccordement sous forme de découpage-raccordement d'équations. Ainsi, pour le cas convecto-radiatif, le modèle global sans découpage est :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = \lambda \nabla^2 T + \sum_l \int dV'_{(M')} \frac{\bar{\tau}''_{l(MM')}}{M M'^2} [L_{bl(T')} - L_{bl(T)}]$$

Et on découpe ce modèle en :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T & = & -\text{div}(\vec{\Phi}_{cond}) + \frac{d\Psi_r}{dV} \\ \vec{\Phi}_{cond} & = & -\lambda \vec{\nabla} T \\ \frac{d\Psi_r}{dV} & = & \sum_l \int dV'_{(M')} \frac{\bar{\tau}''_{l(MM')}}{M M'^2} [L_{bl(T')} - L_{bl(T)}] \end{array} \right. \quad (1.8)$$

ce qui permet de travailler sur les modèles partiels séparément, c'est-à-dire, par exemple, étudier l'équation de la chaleur à échanges radiatifs fixés, et étudier les échanges radiatifs à carte de températures données. C'est ainsi que l'on peut étudier, analyser et modéliser chaque classe de processus (rayonnement, conduction, processus chimiques ...) par elle-même.

Mais, du coup, on perd toutes les facilités liées à l'algèbre explicite. Il va falloir trouver de nouvelles façon de voir, permettant de décrire la façon dont les processus interagissent entre eux. Deux concepts clefs dominent cette approche : ceux de **boucle de rétroaction** et de **gain de rétroaction associé**.

Note :

Les différentes parties du cours vont ainsi présenter des aspects bien distincts :

- Les cours JYG-JLBr vont plutôt faire de l'algèbre explicite (traiter des cas d'école). Les méthodes d'approche des couplages seront :
 - adimensionnalisation (– > paramètres adimensionnels)
 - analyse d'ordre de grandeur ou analyse d'échelle
 - analyses asymptotiques ($Ra \rightarrow \infty$; couche limite ...)
- Le cours JLJ va traiter du couplage de processus. La méthode d'approche sera principalement le TEF. Les concepts importants seront :
 - sensibilités
 - coefficients de couplage
 - gains de rétroaction.

1.3.2 Couplage dynamique-thermique dans un écoulement de convection naturelle stationnaire : gain de rétroaction

Par "dynamique" on entend ici les processus qui gouvernent l'évolution des vitesses de l'écoulement

Le but de cet exemple est de montrer sur un exemple relativement simple, mais non soluble analytiquement, comment décrire les traits principaux du fonctionnement à l'aide d'un paramètre simple : le gain de rétroaction.

On considère un écoulement stationnaire de convection naturelle le long d'une plaque plane verticale chaude (température T_C en milieu semi-infini (air à la température T_F)). On s'intéresse plus particulièrement au flux thermique ϕ à la paroi chaude. L'usage est de le représenter par le nombre

de Nusselt Nu défini par :

$$\phi = Nu \frac{\lambda}{L} (T_C - T_F) \quad (1.9)$$

où λ est la conductivité thermique de l'air et L la longueur de la plaque.

La loi générale donnant le flux est usuellement exprimée sous la forme d'une corrélation entre Nu et $T_C - T_F$:

$$Nu = b(T_C - T_F)^{1/4}$$

où b est un coefficient constant. Nous allons donner une interprétation de cette loi, que nous obtiendrons par un découpage du système en deux parties.

Equations

En désignant par ϕ_v et ϕ_w les flux de chaleur transportés horizontalement (perpendiculairement à la paroi) et verticalement, les équations de Navier-Stokes peuvent se ramener formellement en chaque point à la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equations de l'énergie} \\ \phi_v + \phi_w = \lambda \nabla^2 T \\ \phi_w = \rho C_p w \partial_z T \\ \phi_v = \rho C_p v \partial_y T \\ \text{Equations dynamiques} \\ \left\{ \begin{array}{l} w = f(B) \\ v = h(B) \\ B = g\beta(T - T_F) \text{ (Flottabilité)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Où f (resp. h) désigne un opérateur exprimant le champ de vitesse verticale $w_{(y,z)}$ (resp. horizontale $v_{(y,z)}$) en fonction du champ de flottabilité $B_{(y,z)}$. Les trois premières équations (équations de l'énergie) permettent de déterminer le champ de température T une fois le champ de vitesse (v, w) connu. Ce sont des équations linéaires en T . Les formules en w et v sont une traduction très formelle des équations de la quantité de mouvement. Elles expriment la relation très non-linéaire existant entre les forces de flottabilité (elles-mêmes fonction linéaire de $T - T_F$: dernière formule) et le champ de vitesse verticale.

On va découper ce système en deux parties : (1) un modèle dynamique (les deux premières équations dynamiques), qui exprime le champ de vitesses en fonction du champ de flottabilités ; (2) un modèle énergétique (la première équation), qui exprime le champ de températures en fonction des flux transportés. Les trois formules restantes constituent les modèles de raccordement exprimant les variables d'interface (ϕ_v , ϕ_w et B) en fonction des variables d'état (T , v et w).

Boucle de rétroaction

$$\begin{array}{ccccc} & \uparrow & \longrightarrow & \text{Modif. flux } \phi \ (\phi = -\lambda \partial_y T|_0) & \\ \text{Modif. } T_C \longrightarrow & \text{Action sur } T & \longrightarrow & \text{Modif. force de flottabilité} & \\ & (\phi_v + \phi_w = \alpha \nabla^2 T) & & (B = g\beta(T - T_F)) & \\ & \uparrow & & \downarrow & \\ & \text{Modif. Transp.} & \longleftarrow & \text{Action sur } w \text{ et sur } v & \\ & \text{de chaleur} & & (w = f(B) \quad v = h(B)) & \\ & (\phi_w = w \partial_z T \quad \phi_v = v \partial_y T) & & & \end{array} \quad (1.11)$$

Mise en évidence du gain de rétroaction

Si on coupe la boucle de rétroaction (par exemple en remplaçant $B = g\beta(T - T_F)$ par $B = cste$), la modification de T_c va seulement jouer sur les trois premières équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} (v \partial_y + w \partial_z)(T - T_F) = \alpha \nabla^2 (T - T_F) \\ (T - T_F)|_0 = T_C - T_F \\ (T - T_F)_\infty = 0 \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Comme l'équation (1.12) est linéaire, la solution va être proportionnelle à $T_C - T_F$. Il va en être de même pour le flux pariétal. Et le nombre de Nusselt, qui est proportionnel au rapport $\phi/(T_C - T_F)$, est constant. Dans ces conditions, la variation δT_C de T_c induit une variation du flux pariétal que nous allons désigner par $\delta\phi_{ins}$ et qui s'écrit (d'après la formule (1.9)) :

$$\delta\phi_{ins} = Nu \frac{\lambda}{L} \delta T_C$$

Lorsque la boucle de rétroaction est en oeuvre (c'est-à-dire lorsque le champ de vitesse dans la couche limite dépend de la flottabilité), on sait que le nombre de Nusselt varie proportionnellement à $(T_C - T_F)^{1/4}$. En posant :

$$Nu = b (T_C - T_F)^{1/4}$$

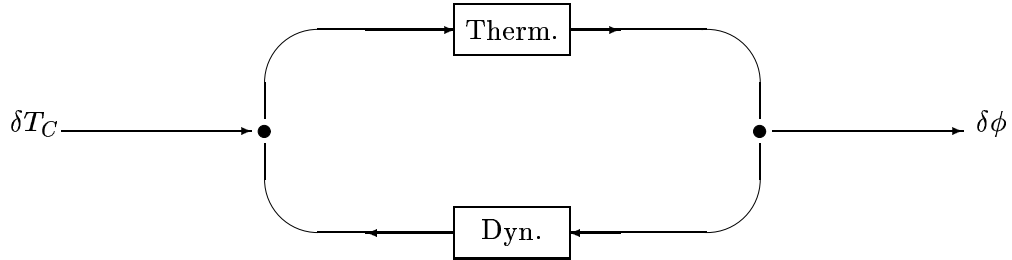
le flux pariétal ϕ s'écrit :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\lambda}{L} (T_C - T_F) b (T_C - T_F)^{1/4} \\ &= \frac{\lambda b}{L} (T_C - T_F)^{5/4} \end{aligned} \tag{1.13}$$

D'où, par différentiation :

$$\begin{aligned} \delta\phi &= \frac{5}{4} \frac{\lambda b}{L} (T_C - T_F)^{1/4} \delta T_C \\ &= \frac{5}{4} Nu \frac{\lambda}{L} \delta T_C \\ &= \frac{5}{4} \delta\phi_{ins} \end{aligned} \tag{1.14}$$

On peut symboliquement représenter la boucle de rétroaction sous la forme :



De façon très formelle, en représentant le processus de transport par une seule variable de transfert $\mathcal{T}$ (ce qui est une simplification très grossière), on peut relier la variation du transport en boucle ouverte $\delta\mathcal{T}_{ins}$ à la variation du transport lorsque la boucle de rétroaction est fermée $\delta\mathcal{T}$ par le gain de rétroaction g :

$$(1 - g)\delta\mathcal{T} = \delta\mathcal{T}_{ins}$$

Alors, le flux pariétal, dont les variations sont proportionnelles à celles du transport, va vérifier :

$$(1 - g)\delta\phi = \delta\phi_{ins}$$

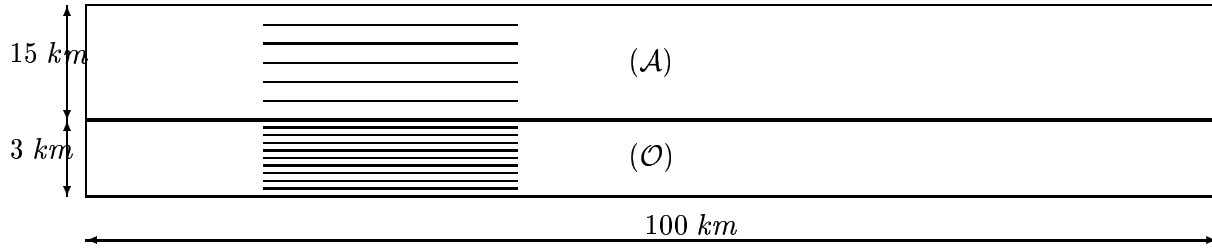
L'identification avec la formule (1.14) montre que $g = 1/5$.

En conclusion, la loi de variation du nombre de Nusselt en $(T_C - T_F)^{1/4}$ peut aussi s'exprimer sous la forme : le gain de la boucle de rétroaction thermique-dynamique, dans un écoulement de convection naturelle le long d'une plaque plane verticale, est de 20%.

1.4 Traitement numérique d'un découpage physique : raccordement océan-atmosphère

Le but de ce paragraphe est d'illustrer, sur un exemple très simple tiré d'un problème réaliste, les concepts de couplage et de raccordement exposés au paragraphe (1.1.2), ainsi que la représentation du couplage par un gain de rétroaction.

Le cas considéré est le problème de raccordement de modèles de circulations générales atmosphériques et océaniques (AGCM = Atmosphere Global Circulation Model et OGCM = Ocean Global Circulation Model). Ces modèles sont divisés chacun en deux parties : (1) une partie dite "dynamique" qui résout les équations d'Euler à trois dimensions, les processus d'échanges verticaux d'énergie et de quantité de mouvement étant représentés par des termes source (maillage horizontal de l'ordre de quelques centaines de km) ; (2) une partie dite "physique" qui décrit les processus d'échanges verticaux d'échelle sous-maille (échanges radiatifs, processus de couche limite, convection profonde, ...) et détermine les termes source nécessaires à la dynamique ; la partie physique est constituée de modèles unidimensionnels qui traitent indépendamment les colonnes de mailles des GCM. Le problème du raccordement est posé à l'échelle de chaque colonne ; il s'agit donc de raccorder, au niveau de la surface océanique, deux modèles unidimensionnels, l'un représentant l'atmosphère et l'autre l'océan. A chacun de ces modèles est associé un maillage vertical (couvrant les $3km$ de l'océan et la totalité de l'atmosphère ; mais on peut se limiter ici aux $15km$ de la troposphère tropicale). La façon de raccorder est imposée par l'histoire : les modélisateurs de l'atmosphère ont toujours utilisé la température de surface comme condition à la limite sur l'océan, tandis que les océanographes ont toujours utilisé le flux de surface comme condition à la limite supérieure.



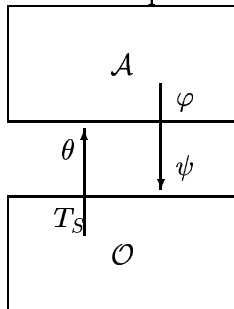
Modèles partiels :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{O}) : \text{variables d'état} &= T_o \quad (+\vec{V} \text{ et } S) ; \text{ diff turb. et trsprt de chaleur ;} \\
 &\text{cond. lim} = \text{flux } \psi \\
 (\mathcal{A}) : \text{variables d'état} &= T_a, q_v \quad (+\vec{V}) ; \text{ cond. lim.} = \text{temp. } \theta
 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Nous allons caricaturer ce problème en considérant que les modèles sont stationnaires et que chaque modèle consiste simplement en une fonction donnant : (1) le flux de surface à partir de la température de surface pour l'atmosphère et (2) la température de surface à partir du flux de surface pour l'océan.

Modèles stationnaires :

- modèle atmosphérique $\mathcal{A} : \theta \longrightarrow \text{flux de surface } \varphi$
- modèle océanique $\mathcal{O} : \psi \longrightarrow \text{température de surface } T_S$



$$\begin{cases} \varphi = F_a(\theta) \\ T_S = F_o(\psi) \end{cases} \tag{1.16} \quad \text{Raccord : } \begin{cases} \theta = T_S \\ \psi = \varphi \end{cases} \tag{1.17}$$

En éliminant les variables d'état, nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} \psi = F_a(\theta) \\ \theta = F_o(\psi) \end{cases} \quad (1.18)$$

Nous nous plaçons dans le cadre d'une résolution itérative, d'abord par relaxation pure, ensuite par la méthode de Newton-Raphson.

Relaxation

$$\begin{cases} \psi_{n+1} = F_a(\theta_n) \\ \theta_{n+1} = F_o(\psi_n) \end{cases} \quad (1.19)$$

$$\psi_{n+1} = F_a[F_o(\psi_{n-1})]$$

Si la suite obtenue en partant d'une première approximation ψ_0 , et en construisant les ψ_n de proche en proche grâce à cette dernière formule, converge, alors ce sera vers la solution du système (1.18).

Cependant, il est bien connu qu'une telle suite est convergente si et seulement si $|F'_a F'_o| < 1$. Malgré tout, c'est cette procédure qui a d'abord été universellement employée pour le raccordement de GCM, à cause de sa facilité de mise en oeuvre. Cependant elle a mené à des problèmes de convergence numérique dès que la glace de mer a été introduite dans les modèles. Ces divergences ont constitué une pierre d'achoppement pour les modèles couplés pendant plusieurs années, jusqu'à ce que l'on comprenne ce qui se passait. Pour analyser cette difficulté, il faut donner une interprétation du produit $|F'_a F'_o|$.

F'_a est la dérivée du flux de surface donné par le modèle d'atmosphère par rapport à la température de surface. Si on compte les flux positivement vers le bas, on peut écrire formellement : $\varphi = h_a(T_a - \theta)$, où h_a désigne une conductance atmosphérique effective ; il apparaît que la dérivée F'_a est négative et égale en valeur absolue à la conductance h_a .

F'_o est la dérivée de la température de surface donnée par le modèle d'océan par rapport au flux de surface. En écrivant le même genre de formule que pour l'atmosphère : $\psi = h_o(\theta - T_o)$, il apparaît que la dérivée F'_o est égale à l'inverse de la conductance océanique effective h_o .

Le produit $|F'_a F'_o|$ est donc égal au rapport de la conductance atmosphérique à la conductance océanique. Comme la glace de mer est beaucoup plus isolante que l'eau liquide (en particulier parce qu'elle ne permet que les échanges de chaleur par conduction et interdit ceux par convection), F'_o est beaucoup plus grande en présence qu'en l'absence de glace (typiquement, on passe de $|F'_a F'_o| \simeq 0.1$ à $|F'_a F'_o| \simeq 100$). Ceci explique les divergences constatées. Un des remèdes possibles consiste à passer à la méthode de Newton-Raphson.

Newton-Raphson On désigne par $(\delta\psi, \delta\theta)$ les variations de (ψ, θ) lors d'une itération entre les étapes n et $n+1$. Partant de (ψ_n, θ_n) , on a :

$$\begin{cases} \psi_{n+1} = \psi_n + \delta\psi \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \delta\theta \end{cases} \quad (1.20)$$

La linéarisation des formules (1.18) donne :

$$\begin{cases} \psi_n + \delta\psi = F_a(\theta_n) + F'_a \delta\theta \\ \theta_n + \delta\theta = F_o(\psi_n) + F'_o \delta\psi \end{cases} \quad (1.21)$$

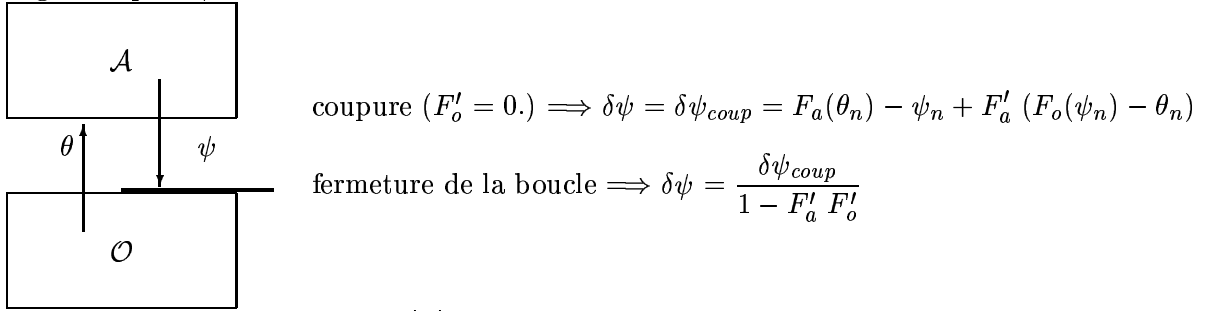
Ce qui mène au système d'équations couplées en $\delta\psi$ et $\delta\theta$:

$$\begin{cases} \delta\psi - F'_a \delta\theta = F_a(\theta_n) - \psi_n \\ -F'_o \delta\psi + \delta\theta = F_o(\psi_n) - \theta_n \end{cases} \quad (1.22)$$

La résolution donne alors :

$$\begin{cases} (1 - F'_a F'_o) \delta\psi = F_a(\theta_n) - \psi_n + F'_a (F_o(\psi_n) - \theta_n) \\ (1 - F'_a F'_o) \delta\theta = F_o(\psi_n) - \theta_n + F'_o (F_a(\theta_n) - \psi_n) \end{cases} \quad (1.23)$$

Boucle de rétroaction : L'une ou l'autre des équations (1.23) peut être utilisée pour décrire le fonctionnement de la boucle de rétroaction $\mathcal{O} \rightarrow \theta \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \psi$. Si on considère la première équation, par exemple, on voit que si l'on coupe la boucle en changeant le modèle d'océan en un modèle insensible aux variations de ψ (le modèle d'océan devenant alors $\theta = F_o(\psi_n)$), alors la sensibilité F'_o est nulle, ce qui ne change rien dans le membre de droite de l'équation et remplace le membre de gauche par $\delta\psi$:



On retrouve, comme dans l'exemple précédent, une expression où la fermeture de la boucle de rétroaction se traduit par un gain égal ici à $F'_a F'_o$. Ce gain est négatif. Ce fait est important, puisqu'il implique que les oscillations qui pourraient éventuellement apparaître seront rapidement amorties. Du coup, on se permet de ne pas faire d'itération dans les modèles couplés océan-atmosphère, les oscillations s'amortissant au fil du temps.

La première conclusion de cet exemple est que la méthode de Newton-Raphson permet toujours de résoudre le système couplé (puisque $F'_a F'_o < 0$) alors que la méthode de relaxation ne fonctionne que si $|F'_a F'_o| < 1$. Il faut noter que le prix à payer pour appliquer cette méthode de résolution est le calcul des sensibilités F'_a et F'_o des modèles atmosphérique et océanique aux variables d'interface. En deuxième conclusion, on peut remarquer que l'analyse d'une difficulté purement numérique a fortement bénéficié de l'interprétation physique des variables et paramètres utilisés (l'interprétation de $|F'_a F'_o|$ comme un rapport de conductances a permis de comprendre pourquoi les divergences se produisaient en présence de banquise).

Chapitre 2

Convection

(par Jean-Louis Breton)

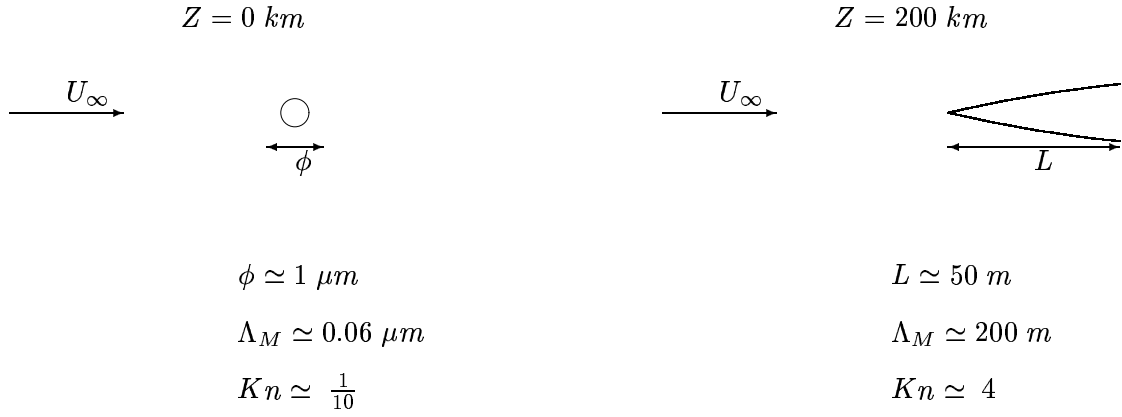
Apparemment, un problème de convection est bien posé, même s'il est difficile à résoudre : les phénomènes de transport et ceux concernant la diffusion semblent bien définis, malgré les couplages qui existent entre eux. Nous allons voir ici que cette affirmation est conditionnée par un ensemble d'hypothèses qui limitent le champ d'étude ; déjà, sur un problème aussi simple, les divers phénomènes physiques ne pourront être découplés qu'avec l'adoption d'hypothèses drastiques que nous critiquerons ensuite.

2.1 Equations "générales"

On dit qu'elles sont générales ; bien entendu, ce n'est pas la réalité ! En effet, on "oublie" qu'il existe d'autres phénomènes physiques, tel l'électromagnétisme par exemple, qui peuvent modifier sensiblement un écoulement de fluide. Nous éliminons déjà ce type d'étude nommé, d'une façon "barbare", magnétohydrodynamique.

Les hypothèses fondamentales sont les suivantes :

- **H0** Isotropie : propriétés physiques non directionnelles ; Cette hypothèse est certainement dépendante de l'hypothèse H3.
- **H1** - Homogénéité : pas de mélanges ; par souci de simplicité, nous excluons de ce cours tout ce qui concerne les couplages entre transfert de masse et de chaleur ... sur lesquels il y aurait beaucoup à dire certainement !
- **H2** - Continuité : cette hypothèse sous-entend deux faits :
 - Il n'y a pas d'onde de discontinuité dans l'écoulement, par exemple une onde de choc en écoulement supersonique.
 - Le nombre de Knudsen caractéristique du problème posé est grand au regard de l'unité. Par exemple, cette hypothèse ne peut être adoptée dans le cas où l'obstacle est de taille trop petite (fig 3-a), ou bien quand il se déplace très loin de la Terre (fig 3-b).
- **H3** - Fluide visqueux newtonien : certes, c'est une hypothèse classique en Mécanique des Fluides "traditionnelle", mais elle n'est sûrement pas adaptable à l'étude de fluides dont le comportement est plus complexe (cf les études d'écoulement de fluide en biomécanique, le sang par exemple).
- **H4** - On néglige la pression de rayonnement (par rapport à la pression statique) ; ainsi on exclut toute étude en environnement spatial par exemple.



Cet ensemble d'hypothèses, pourtant très classiques, a tendance à séparer les phénomènes physiques, à faire en sorte qu'on puisse les étudier, indépendamment les uns des autres. Malgré tout, on va voir que tel n'est pas le cas !

Alors, le problème est bien formulé : 6 inconnues $\vec{V}$, p , ρ et T (je me suis toujours demandé pourquoi les inconnu(e)s, c'était au féminin !) et 6 équations décrites ci-après :

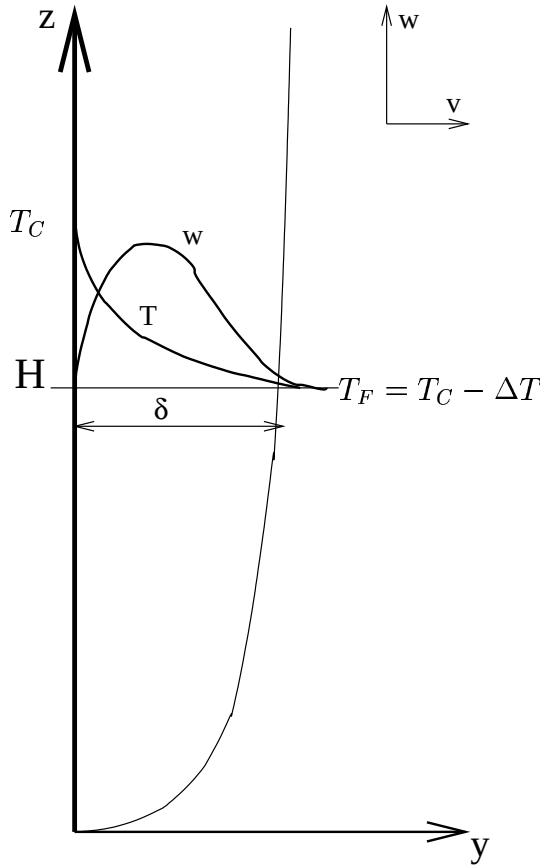
$$\begin{array}{ll}
 \text{Méca.} & \left\{ \begin{array}{ll} (1) \quad m = cste & \rightarrow \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \\ (2) \quad \Sigma \vec{F}_{ext} = m\vec{\gamma} & \rightarrow \quad \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{grad} p_s} + \vec{F} + \frac{1}{\rho} \overrightarrow{\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \vec{V})} \end{array} \right. \\
 \text{Thermo.} & \left\{ \begin{array}{ll} (3) \text{ Equ. Energie} & \rightarrow \quad \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad} T}) - \operatorname{div} \vec{q_r} + \psi + \beta T \frac{Dp}{Dt} \\ (4) \text{ Loi d'état} & \rightarrow \quad f(p_s, \rho, T) = 0. \end{array} \right.
 \end{array} \tag{2.1}$$

Remarques :

- $\vec{F}$: force massique (pour nous $\vec{F} = \vec{g} = -g \vec{z}$)
- $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}}$
- p_s : pression statique
- ψ : fonction de dissipation visqueuse
- Ces équations sont valables quel que soit le régime d'écoulement !
- Déjà, dans ces équations, on considère la chaleur massique C_p comme constante, c'est-à-dire indépendante de T .

2.2 Simplification des équations : adoption d'hypothèses supplémentaires

Ce système d'équations est "monstrueux", irrésoluble analytiquement bien entendu ; cherchons donc à le simplifier par l'adoption d'hypothèses supplémentaires qui sont caractéristiques du problème physique posé. Ainsi, nous choisirons l'exemple très simple (en principe !) de la couche limite de convection naturelle bidimensionnelle près d'une paroi verticale chauffée modérément (quelques K) pour un gaz, supposé parfait, dont le nombre de Prandtl est voisin de l'unité.



On définit les grandeurs adimensionnelles suivantes (fig 4) :

$$\begin{aligned} Re_\delta &= \frac{w\delta}{\nu} ; \Pi b = \frac{\delta}{H} ; Fr = \frac{w^2}{gH} \\ Gr &= \frac{g\beta\delta TH^3}{\nu^2} ; Ec = \frac{w^2}{C_p\delta T} ; \Pi a = \frac{\delta T}{T} ; \end{aligned} \quad (2.2)$$

l'expérience montre que $\delta \ll H$ et $v \ll w$.

Il est sûr que la définition de ces grandeurs adimensionnelles pose un problème : d'une part, ce ne sont pas des grandeurs indépendantes (cf. par exemple la dépendance entre le δT et δ ou w), et d'autre part leur définition en tant que grandeurs caractéristiques est sujette à critique, car elle fait appel à l'analyse physique du problème posé, et donc à l'analyse des couplages qui résultent de ce problème (Exercice quelque peu périlleux : il est facile de se "planter" !).

On étudie l'influence de chaque terme par rapport au flux d'enthalpie en effectuant une analyse d'échelle. Pour cela, calculons d'abord l'ordre de grandeur (l'opérateur $\mathcal{O}$ est l'opérateur "ordre de grandeur") de ce flux d'enthalpie :

$$\mathcal{O}(\rho C_p \frac{DT}{Dt}) = \mathcal{O}(\rho C_p w \frac{\partial T}{\partial z}) = \rho C_p \frac{\delta T}{H} w$$

a) Flux de dissipation visqueuse ψ est donné en 3D, puis dans le cadre de notre problème en 2D, ainsi que son ordre de grandeur par :

$$\begin{aligned} \psi &= \mu [2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2(\frac{\partial v}{\partial y})^2 + 2(\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})^2 + (\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x})^2] \\ &= \mu [2(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + 2(\frac{\partial v}{\partial y})^2 + 2(\frac{\partial w}{\partial z})^2 + (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z})^2] \\ \mathcal{O}(\psi) &= \mathcal{O}(\mu (\frac{\partial w}{\partial y})^2) = \frac{\mu w^2}{\delta^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

On en déduit le rapport suivant, qui peut qualifier (et non quantifier sauf s'il est très grand ou très petit) la primordialité, ou la nonprimordialité, des effets visqueux par rapport aux phénomènes de transport :

$$\frac{\mathcal{O}(\psi)}{\mathcal{O}(\rho C_p \frac{DT}{Dt})} = \frac{Ec}{\Pi b Re_\delta} = \frac{wH\nu}{C_p\delta T\delta^2}$$

Ce terme devient non-négligeable, par exemple, pour des fluides très visqueux ; mais il existe certainement d'autres circonstances où il peut le devenir (δT très faibles par exemple ? → à l'Etudiant de répondre!!)

En tout état de cause, on conçoit bien qu'il faudra manier cette hypothèse avec quelque délicatesse : dans une zone très proche de la paroi, les phénomènes dynamiques sont "commandés" par la viscosité ; alors, pourquoi (et dans quelle circonstance) il n'en est pas de même pour l'ensemble de la couche limite ?

En adoptant cette hypothèse, on découple partiellement les processus diffusifs et les processus de transport.

b) Puissance d'échauffement par compression du fluide : On peut donner une évaluation de ce terme en ne tenant compte, pour le gradient de pression, que de celui relatif à la "hauteur piézométrique" ; ainsi, on aboutit à :

$$\mathcal{O}\left(\frac{Dp}{Dt}\right) = \mathcal{O}(\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p_s) = \mathcal{O}\left(w \frac{\partial p}{\partial z}\right) = w \rho g$$

et l'influence relative de la puissance d'échauffement par compression du fluide peut se matérialiser par le rapport suivant :

$$\frac{\mathcal{O}(\beta T \frac{Dp}{Dt})}{\mathcal{O}(\rho C_p \frac{DT}{Dt})} = \beta T \frac{gH}{C_p \delta T} = \beta T \frac{Ec}{Fr}$$

avec :

$$Fr = \frac{w^2}{gH} \text{ ce qui donne } \frac{gH}{C_p \delta T} = \frac{Ec}{Fr}$$

En admettant que βT reste voisin de l'unité (ce qui est le cas de notre exemple, où le fluide suit la loi des gaz parfaits), en supposant de plus que g et C_p conservent leurs ordres de grandeur, il reste que, pour des H très grands ou/et des δT très faibles, cette hypothèse risque d'être mal vérifiée !

En adoptant cette hypothèse, on découple partiellement dans le bilan énergétique, des processus liés à l'agitation moléculaire (variations locales de l'énergie due aux variations de pression) et ceux dus au mouvement moyen.

c) Variation des propriétés thermophysiques : Ici, nous nous contentons de comparer, par exemple, les termes qui introduiraient une variation des propriétés physiques à ceux qui supposeraient une constance de ces propriétés physiques (mais on sait bien que ces derniers sont du même ordre de grandeur que les flux d'énergie ou de quantité de mouvement transportée). Ainsi, nous sommes amenés à comparer, par exemple, les deux ordres de grandeur suivant :

$$\mathcal{O}(\overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \lambda) = \frac{\delta T \cdot \Delta \lambda}{\delta^2}$$

et :

$$\mathcal{O}(\lambda \nabla^2 T) = \frac{\lambda \cdot \delta T}{\delta^2}$$

Le résultat final de cette comparaison est le suivant :

$$\frac{\mathcal{O}(\overrightarrow{\text{grad}} T \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \lambda)}{\mathcal{O}(\lambda \nabla^2 T)} = \frac{\Delta \lambda}{\lambda}$$

et de même pour μ , la viscosité dynamique :

$$\frac{\mathcal{O}(\overrightarrow{\text{Proj}}_z(\overrightarrow{\text{grad}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \mu))}{\mathcal{O}(\mu \nabla^2 \vec{V})} = \frac{\Delta \mu}{\mu}$$

En adoptant cette hypothèse, on découple partiellement les champs de vitesse et de température.

Rappel : D'après la théorie cinétique des gaz, μ et λ sont fonction de T seulement et $C_p = cste$.
 $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda}$ est une constante caractéristique du gaz.

EXERCICE : Soit une cavité parallélépipédique représentative d'une pièce d'habitation chauffée différentiellement au niveau des murs qui la délimitent. On se place dans la configuration où seul un des murs verticaux est chaud, les autres étant à une même température plus froide, et on regarde la couche limite près de ce mur chaud.

Rappel : Loi de Sutherland (pour l'air) :

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/2} \frac{T_0 + C}{T + C} \quad T_0 = 273K \quad C = 110K$$

Approximativement, pour les faibles écarts de température :

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^{3/4}$$

On donne : $\delta T = 10K$; $\delta = 1cm$; $C_p = 10^3 J kg^{-1} K^{-1}$; $T = 300K$; $w = 20cm s^{-1}$; $H = 3m$;
 $\rho = 1kg m^{-3}$; $\lambda = 2.10^{-2} W m^{-1} K^{-1}$; $\mu = 2.10^{-5} kg s^{-1} m^{-1}$

a) Trouver les groupements sans dimension

b) Que peut-on en déduire sur l'importance relative des termes qui régissent l'écoulement ?

Réponses : a) $Re_\delta = 100$; $Gr_H = 2.10^{10}$; $Ec = 4.10^{-6}$; $\Pi a = 3.10^{-2}$; $\Pi b = 1/300$.

b) valeur des rapports : pour $\psi = 10^{-5}$; pour $\beta T \left(\frac{Dp}{Dt} \right) = 3.10^{-3}$; pour variation des propriétés physiques 3.10^{-2}

NB : Pour ce faire, on adopte la théorie cinétique des gaz.

Alors, on peut adopter, dans ce cas, les hypothèses supplémentaires suivantes :

- **H5** - Flux de dissipation visqueuse négligé. On exclut par exemple l'étude des écoulements de fluide très visqueux.
- **H6** - Puissance d'échauffement par compression du fluide négligée. On exclut par exemple les études à δT très petit et/ou à H très grand, en météorologie par exemple. Mais il faut manier cette hypothèse avec quelque prudence : dès que tous les gradients thermiques sont comparables, ce terme peut introduire des couplages non négligeables.
- **H7** - Fluide à propriétés physiques constantes Cette hypothèse exclut par exemple, les études δT élevé.

Remarque : Notons par ailleurs que, pour les liquides, non seulement λ et μ varient rapidement avec la température, mais aussi que les variations de β et du nombre de Prandtl avec T sont loin d'être négligeables même pour des δT modérés. Qu'en est-il dans ce cas des hypothèses précitées ?

Alors, le système d'équation (2.1) devient, lorsque $\vec{F}$ représente l'accélération de la pesanteur

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \\ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\overrightarrow{\operatorname{grad} p_s} + \mu \nabla^2 \vec{V} + \vec{g} \rho \\ \rho C_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T - \operatorname{div} \vec{q_r} \\ f(p, \rho, T) = 0. \end{array} \right. \quad (2.4)$$

avec les conditions initiales et limites suivantes :

- $t = 0$: $\vec{V} = \vec{0}$ et $T = T_i$

- $t > 0$: - soit près d'une paroi solide : $\vec{V} = \vec{0}$; $\Omega(T, \overrightarrow{\text{grad}T}) = 0$
- soit à l'infini : $\vec{V} = \vec{V}_\infty$; $\Omega(T, \overrightarrow{\text{grad}T}) = 0$

remarque : ce système, en apparence fort peu couplé, l'est en fait par les variations de la masse volumique ρ (à voir... et nous le mettrons en évidence par la suite!).

2.3 Convection pour un gaz transparent au rayonnement

Dans ce paragraphe, on adopte en plus les deux hypothèses suivantes :

- **H8** - Le rayonnement n'existe pas : $\vec{q}_r = 0$ bien entendu, nous reviendrons sur cette hypothèse.
- **H9** - "Paradoxe" de Boussinesq

Alors que les mouvements du fluide sont créés par une variation locale de la masse volumique, cette masse volumique est considérée comme constante, sauf dans les termes de "poussée" de l'équation de quantité de mouvement :

EXERCICE :

Retrouver la relation suivante, pour un gaz parfait (pour de faibles perturbations $\rightarrow$ faibles écarts de températures) :

$$\vec{g} - \frac{\overrightarrow{\text{grad}} p_s}{\rho} = -\frac{\overrightarrow{\text{grad}} p'}{\rho_{\text{ref}}} - \vec{g}\beta(T - T_{\text{ref}})$$

où p' représente la fluctuation de pression due à l'écoulement autour de la pression piézométrique $-\rho g z$. Analyser et critiquer cette hypothèse.

Alors, le système (2.4) se simplifie notablement pour devenir le système (2.5) suivant (on enlève les indices ' et 0) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div} \vec{V} = 0 \\ \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{\text{grad}} p + \nu \nabla^2 \vec{V} - \vec{g}\beta(T - T_{\text{ref}}) \\ \frac{DT}{Dt} = \alpha \nabla^2 T \\ f(p, \rho, T) = 0. \text{ (inutile puisque } \rho = \text{cste)} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

avec les mêmes conditions initiale- et limites que celles énoncées pour le système (2.4).

Remarque : Si $T = T_\infty$ et si l'on étudie un problème de convection naturelle seule ($\vec{V}_\infty = \vec{0}$), une solution évidente de ce système est que $\vec{V}$ est nulle partout (et T constante), la réciproque étant vraie. On voit ici la "force" des couplages entre les effets thermiques et dynamiques que l'on ne peut dissocier !

L'intérêt d'études à l'aide des développements asymptotiques (ou des méthodes à échelles multiples) devient évident puisqu'elles arrivent à expliquer (mathématiquement pour l'instant) le concept de couche limite.

2.3.1 Similitude des écoulements

a) Intérêt de l'étude. Lorsqu'un obstacle est trop "gros" ou trop "petit", il est difficile, voire impossible d'étudier l'écoulement à son voisinage ; qui penserait possible la construction de souffleries pour étudier l'écoulement autour d'un Airbus 340 à échelle unité ? Ou bien, qui trouverait sérieuse l'étude de l'écoulement autour d'une sonde à résistance de taille très réduite, de l'ordre de quelques μm par exemple ? C'est la raison pour laquelle les physiciens ont développé la théorie des maquettes ; nous allons en citer un exemple très classique, mais contestable parce qu'il fait appel à un ensemble considérable d'hypothèses qui autorisent le découplage de tous les phénomènes physiques.

b) Exemple : Soit l'écoulement autour d'un obstacle de grande taille, un profil d'aile d'avion par exemple (fig 5)

longueur caractéristique : $L \simeq 10m$; vitesse caractéristique : $U_\infty \simeq 100ms^{-1}$; $p_\infty = 10^5 Pa$ et $T_\infty \simeq 300K$.

$$M = \frac{U_\infty}{\sqrt{\gamma r T_\infty}} = \frac{100}{\sqrt{1.4 \cdot 287 \cdot 300}} \dots$$

Cette aile est trop grande pour être étudiée en soufflerie. Alors, on va construire un modèle réduit, pour lequel on peut démontrer que les rapports de forme sont conservés dans le cadre d'une similitude (ils ne le seraient pas pour une transformation non linéaire).

On suppose que le nombre de Reynolds, à lui seul, caractérise l'écoulement. Cette hypothèse, en apparence anodine, consiste en fait à annuler tous les effets thermiques au sein de l'écoulement... Le découplage est parfait, mais l'étude n'est alors valable que pour des écoulements à basse vitesse. La question posée est la suivante : comment peut-on définir la longueur caractéristique L^* de la maquette pour que les nombres de Reynolds soient conservés [les grandeurs * sont relatives à la maquette] ?

La condition nécessaire et suffisante (compte-tenu des hypothèses) s'exprime ainsi :

$$Re = Re^* \rightarrow S = \frac{L^*}{L} = \frac{\nu^* U_\infty}{\nu U_\infty^*}$$

Pour définir L^*/L , on peut "agir" soit sur ν soit sur U_∞ , ou sur les deux en même temps ; prenons deux exemples de solution :

- on agit directement sur ν en choisissant ν^* bien plus faible que ν ; pour cela, on prend comme fluide-maquette un liquide dans les mêmes conditions de température T_∞ ; par exemple, si l'on choisit de l'eau ($\nu^*/\nu = 1/20$), on obtiendrait une maquette de dimension caractéristique L^* égale à $50cm$ pour une vitesse d'écoulement (toujours dans l'eau !) de $100ms^{-1}$ (A ce niveau-là, je préfère la flotte dans le pastis!). Blague à part, ce type de similitude a apporté - et apporte encore bien entendu - les visualisations les plus remarquables d'écoulements isothermes, tant du point de vue qualitatif que quantitatif (mais quelle est leur validité dans le cas où il existe des couplages forts entre les champs de température et de vitesse ?)

- mais on trouve des gaz qui ont une viscosité cinématique déjà faible dans les conditions normales de température et de pression. Alors, pour peu que l'on agisse sur T_∞ et p_∞ , on peut aboutir à des conditions proches de la première solution ; si l'on adopte la théorie cinétique des gaz, alors le paramètre de similitude S est donné dans ce cas par l'équation suivante :

$$S = \frac{L^*}{L} = \frac{\mu_{(T_\infty)}^*}{\mu_{(T_\infty)}} \frac{\rho_{(T_\infty)}}{\rho_{(T_\infty)}^*} \frac{U_\infty}{U_\infty^*} \quad (2.6)$$

Exercice

Supposons que tous les gaz sont calorifiquement parfaits, et que μ est approximativement proportionnel à $T^{3/4}$ dans tous les cas. Réécrire l'équation précédente.

$$\left. \begin{array}{l} \mu \sim kT^{3/4} \\ \rho = \frac{p}{rT} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{L^*}{L} = \frac{k^*}{k} \left(\frac{T^*}{T}\right)^{3/4} \frac{p}{p^*} \frac{r^*}{r} \frac{T^*}{T} \frac{U_\infty}{U_\infty^*} \\ = \frac{k^* r^*}{k r} \left(\frac{T^*}{T}\right)^{7/4} \frac{U_\infty}{U_\infty^*} \frac{p}{p^*} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

On va donc diminuer L^*/L soit :

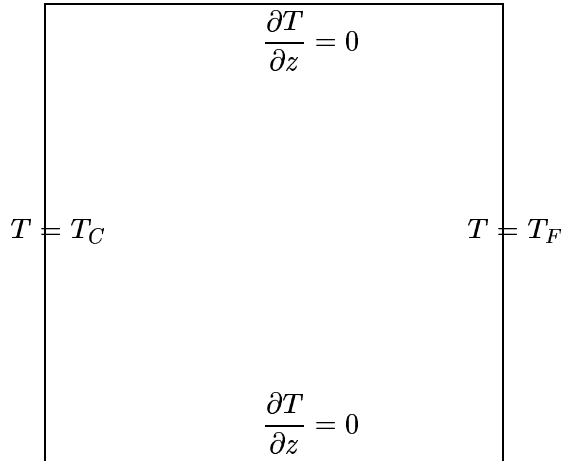
- en agissant sur r ou k : c'est relativement limité pour les gaz (?)
- en agissant sur T_∞ : on diminue la température (limité)
- en agissant sur p_∞ : on augmente la pression (limité)
- en agissant sur U_∞ : on augmente la vitesse (limité)

Alors qu'on a "shunté" tous les couplages, alors qu'on a simplifié au maximum le problème, on constate la multiplicité des solutions qui, au demeurant, peuvent être incompatibles entre elles. Ce même type de raisonnement (en beaucoup plus complexe bien entendu!) a permis de concevoir et de réaliser les souffleries cryogéniques dont un (des plus beaux) fleuron est en fonctionnement à Toulouse, à l'ONERA-CERT.

c) Exercice

Considérons une cavité, emplie d'air, où l'écoulement est supposé bidimensionnel.

On désire étudier l'écoulement dans cette cavité sur une installation plus petite, avec les mêmes conditions de température et de pression que dans la réalité. La similitude choisie est une similitude gaz-gaz.



A l'instant initial, on a :

$$\vec{V} = \vec{0}$$

$$T = T_i = (T_c + T_f)/2$$

- a) Ecrire les équations adimensionnées en partant du système II-3, où l'on suppose que $T_{ref} = T_i$, et bien entendu que $q_r = 0$
- b) Définir les nombres caractéristiques de l'écoulement
- c) Déterminer le gaz-maquette à partir de ces nombres caractéristiques

Réponse

La conclusion? Ca commence à devenir "dur" la similitude! D'un côté, le schéma de départ est satisfaisant; d'un autre côté, on peut s'interroger sur les divers couplages qui régissent les phénomènes physiques et qui pourraient "déstabiliser" un tel schéma.

2.4 Ecoulements compressibles.

Note :

→ Les deux causes d'irréversibilité en Méca. Flu. sont la viscosité et les discontinuités.

Hypothèses :

- hypothèse 1D
- loi d'état du fluide : Gaz parfaits
- fluide non pesant
- Ecoulement stationnaire
- la dissipation visqueuse est négligeable : $\phi_{d.v.} \simeq 0$
- le travail d'échauffement par compression est négligeable : $\beta T \frac{Dp_s}{Dt} \simeq 0$

Théorème de transport de REYNOLDS

Soient : X grandeur liée à l'écoulement (masse impulsion, énergie) et $\chi = \frac{\partial X}{\partial m}$ la grandeur massique associée :

$$\frac{d X_{\Omega}}{d t} = \int_{\Omega} \partial_t (\chi \rho) d \Omega + \int_{\Sigma} \chi \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) d \Sigma \quad (2.8)$$

2.4.1 Ecoulement en conduite rectiligne à section variable

Hypothèses supplémentaires

- fluide parfait
- adiabaticité
- continuité

Ces trois hypothèses entraînent l'isentropie de l'écoulement.
figure???

- conservation de la masse : $m = Cte$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \rho (\vec{V} \cdot \vec{n}) d \Sigma = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Sur les frontières latérales on a : } (\vec{V} \cdot \vec{n}) = 0. \\ \text{Sur la frontière (1), on a : } (\vec{V} \cdot \vec{n}) = -\vec{u}_1. \\ \text{Sur la frontière (2), on a : } (\vec{V} \cdot \vec{n}) = \vec{u}_2. \end{array} \right.$$

On en déduit :

$$\rho_1 (-u_1) A_1 + \rho_2 (u_2) A_2 = 0 \quad (2.9)$$

D'où :

$$\boxed{\rho u A = Cte} \quad (2.10)$$

et ce résultat vaut même en présence d'irréversibilité.

- conservation de la quantité de mouvement : $qdm = Cte$

$$\Rightarrow \vec{F}_{ext} = \int_{\Sigma} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) d \Sigma = 0$$

Les forces extérieures se réduisent ici aux forces de pression.

Prenons une tranche d'épaisseur dx et faisons le bilan de qdm :

$$p A - (p+dp)(A+dA) - \underbrace{\int_{\Sigma_{lat}} \text{proj}_x [(p + \varepsilon dp) \vec{n}] d \Sigma}_{=-p d A} = \rho u (-u) A + \rho (u + du)^2 (A+dA) \quad (2.11)$$

D'où, en utilisant la forme différentielle de la conservation de la masse (et en négligeant les petits du second ordre) :

$$u A d\rho + \rho u dA + \rho A du = 0 \quad (2.12)$$

On déduit :

$$-A dp - p dA + p dA = -\rho u^2 A + \rho u^2 A + \underbrace{\rho u^2 dA + 2\rho u A du + u^2 A d\rho}_{=\rho u A du \text{ d'après la relation précédente}} \quad (2.13)$$

On en déduit la propriété :

$$\boxed{dp + \rho u du = Cte} \quad (2.14)$$

- conservation de l'énergie : $e = Cte$

$$\Rightarrow \int_{\Sigma} \rho e (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\Sigma = - \int_{\Sigma} p (\vec{V} \cdot \vec{n}) d\Sigma$$

Le bilan d'énergie dans la tranche dx donne :

$$\rho_1 \left(C_v T_1 + \frac{u_1^2}{2} \right) (-u_1) A_1 + \rho_2 \left(C_v T_2 + \frac{u_2^2}{2} \right) (u_2) A_2 = p_1 (-u_1) A_1 - p_2 (-u_2) A_2 \quad (2.15)$$

Soit encore :

$$\rho_1 u_1 A_1 \left(-C_v T_1 - \frac{u_1^2}{2} - \frac{p_1}{\rho_1} \right) + \rho_2 u_2 A_2 \left(C_v T_2 + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho_2} \right) = 0 \quad (2.16)$$

D'où, en utilisant la conservation de la masse, :

$$C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2} = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} \quad (2.17)$$

On en déduit la relation :

$$\boxed{C_p T + \frac{1}{2} u^2 = Cte} \quad (2.18)$$

- Loi d'état des Gaz Parfaits : $p = \rho r T$

- Résolution : $p = \rho r T$

On dispose de 4 équations ; et l'isentropie entraîne que $\frac{p}{\rho^\gamma} = Cte$.

On exprime $\frac{p_i}{\rho}$, $\frac{T_i}{T}$, $\frac{\rho_i}{\rho}$ en fonction de M , nombre de Mach.

Le résultat de cette résolution est le théorème d'HUGONIOT :

$$\boxed{\frac{dA}{A} + (1 - M^2) \frac{du}{u} = 0} \quad (2.19)$$

qui s'interprète de la façon suivante selon les situations :

- Subsonique ($M < 1$) : A et u évoluent en sens contraire.
- Supersonique ($M > 1$) : A et u évoluent dans le même sens.
- La célérité du son ($M = 1$) ne peut être atteinte qu'au col ($dA = 0$).

2.4.2 Ecoulement dans une conduite à section constante (de diamètre D)

Justification

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho u A = Cte & \Rightarrow \frac{d\rho}{\rho} + \frac{du}{u} + \underbrace{\frac{dA}{A}}_{=0 \text{ car } A \text{ est Cte}} = 0 \\ qdm = Cte & \Rightarrow u du + \frac{d\rho}{\rho} = 0 \\ C_p T + \frac{u^2}{2} = Cte & \Rightarrow C_p dT + u du = 0 \\ \frac{p}{\rho} = rT & \Rightarrow \frac{dp}{p} - \frac{d\rho}{\rho} - \frac{dT}{T} = 0 \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Pour qu'il existe une solution non nulle, il faut que le déterminant de ce système en $\{d\rho, dp, du, dT\}$ soit nul : on en déduit¹ : $u^2 = a^2 (= \gamma r T)$ ou encore que le M ne peut être que égal à 1 !!

Conclusion : certaines des hypothèses de départ (voir paragraphe 2.4.1) sont caduques.

- On peut tenir compte du frottement dans l'équation [2.20-2].
- On peut mettre un transfert de chaleur dans l'équation [2.20-3].

¹c'est un exercice "amusant" recommandé au lecteur ...

Ecoulement avec frottement

→ Si le coefficient de frottement est donné par : $C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho u^2}$, alors l'équation [2.20-2] devient :

$$u du + \frac{d\rho}{\rho} + \frac{2C_f}{D} dx u^2 = 0 \quad (2.21)$$

→ résolution p_i varie $\iff$ l'écoulement n'est pas isentropique.

La résolution consiste à trouver $\frac{dp}{p}, \frac{du}{u}, \dots, \frac{dM}{M}, \frac{dp_i}{p_i}$.

On a : $\frac{du}{u} = -\frac{\gamma M^2}{M^2-1} \frac{2C_f dx}{D}$ et $\frac{dM}{M} = -\frac{1+\frac{\gamma-1}{2}M^2}{M^2-1} \gamma M^2 \frac{2C_f dx}{D}$.

On en déduit que M tend toujours vers 1.

(Noter que pour $M < 1$, le frottement accroît u .)

Ecoulement avec transfert de chaleur

→ L'équation [2.20-3] donne : $\sigma = C_p T_2 + \frac{u_2^2}{2} - (C_p T_1 + \frac{u_1^2}{2})$ d'où $\iff d\sigma = C_p dT_i$

→ résolution :

T_i varie ; la résolution consiste à trouver $\frac{dp}{p}, \frac{du}{u}, \dots$.

On a : $\frac{du}{u} = -\frac{1}{M^2-1} \frac{dT_i}{T}$; $\frac{dM}{M} = -\frac{1+\gamma M^2}{2(M^2+1)} \frac{dT_i}{T}$ et $\frac{dT}{T} = -\frac{1-\gamma M^2}{1-M^2} \frac{dT_i}{T}$

→ hypothèse : $d\sigma (= C_p dT_i)$ positif alors $\iff M$ tend toujours vers 1 ;

pour $M \in [0, \gamma^{-1/2}]$, $T \nearrow$.

pour $M \in [\gamma^{-1/2}, 1]$, $T \searrow$!!.

2.4.3 Onde de choc droite

Figure ???

→ Le problème consiste à trouver $p_1, T_1, \dots$ connaissant $p_0, T_0, \dots$.

→ équations :

$$\begin{cases} \rho_0 u_0 = \rho_1 u_1 \\ p_0 + \rho_0 u_0^2 = p_1 + \rho_1 u_1^2 \\ C_p T_0 + \frac{1}{2} \rho_0 u_0^2 = C_p T_1 + \frac{1}{2} \rho_1 u_1^2 \\ \frac{p_0}{\rho_0 T_0} = \frac{p_1}{\rho_1 T_1} \end{cases} \quad (2.22)$$

→ résolution :

la résolution consiste à trouver $\frac{p_1}{p_0}, \dots, \frac{M_1}{M_0}, \frac{p_{i,1}}{p_{i,0}}$ en fonction de M_0 .

Exemple : $M_0 = 4 \rightarrow \frac{p_1}{p_0} \simeq 18$; $\frac{T_1}{T_0} \simeq 4$; $M_1 \simeq 0.4$ et $\frac{p_{i,1}}{p_{i,0}} \simeq 0.13$

→ Relation de PRANDTL :

$$\boxed{u_0 u_1 = a_c^2} \quad (2.23)$$

(a_c est la célérité du son en $M = 1$) $\iff M_0 > 1$ et $M_1 < 1$;

Chapitre 3

Sensibilités et Couplages : outils d'analyse de la dynamique des systèmes

(par Jean-Louis Joly)

Dans l'introduction présentée par JYG au chapitre 1, il a été annoncé deux grandes parties à ce cours.

- D'une part une importante partie méthodologique, introduisant diverses méthodes de mise en évidence et d'estimation des couplages au sein des systèmes (adimensionnalisation, similitude, analyse d'échelle, méthodes asymptotiques, etc.) dans le cadre des systèmes physiques couplant écoulements et modes de transfert de la chaleur (conduction, convection et rayonnement). Il sera en particulier beaucoup question de rayonnement et de la façon dont on peut le traiter tout en gardant une approche de type transferts et couplages.

Ces analyses vont utiliser pour l'essentiel une "algèbre explicite" ; les problèmes qui vont servir de support sont des cas académiques sur lesquels on pourra souvent disposer de solutions analytiques à la formulation mathématique de ces problèmes.

- Une autre partie de ce cours a pour but de se situer "plus près" des outils utilisés dans le cadre des problèmes traités en recherche tout en gardant cette optique d'analyse des systèmes : on va aborder les questions posées aux chercheurs (et aux futurs jeunes chercheurs) par les problèmes à résoudre dans des contextes réels donc généralement complexes, et non académiques.

L'exploration des systèmes par voie expérimentale, et l'analyse des simulations sur ordinateur réalisées à partir de modèles numériques constituent les deux voies de compréhension de la dynamique des systèmes.

Il a été dit plus haut que le domaine des systèmes fortement couplés est le lieu de prédilection des modèles numériques et des modélisateurs (concepteurs-utilisateurs de modèles numériques).

Il est fréquent de rencontrer à ce stade (y compris dans des rapports de stage, voire même dans des publications) des confusions sérieuses entre système réel et modèle, entre modèle physique et modèle numérique, et dans les cas extrêmes, entre la réalité observée expérimentalement et le résultat du traitement graphique des simulations. A toutes fins utiles, nous réaffichons ici la grille des niveaux ou couches de description, qui appelle à la vigilance contre ces glissements de pensée toujours dommageables.

couche des apparences de l'objet d'étude
couche des aspects physiques
couche des aspects mathématiques
couche des aspects numériques
couche des objets informatiques, algorithmiques

Disons rapidement pour commenter cette "grille" que :

- les trois couches constituées par les théories physiques, la description équationnelle et la traduction numérique sont très interpénétrées. La formulation en équations (différentielles, intégrales) et les schéma(s) numérique(s) de discrétisation (en temps ou en espace) associés à un problème physique n'entraînent pas systématiquement une perte de contact avec l'objet physique de départ, et peuvent au final (moyennant vigilance) représenter une information fiable pour explorer le comportement global du système.
- lors de la mise en oeuvre des simulations numériques, il est important de garder le lien avec le "monde" physique, sinon avec le "monde" des équations mathématiques, l'objectif restant de manipuler des résultats ayant un sens dans le "monde" de l'observation (expérimentale) du système.

Pour une modélisation s'appuyant sur les trois couches principales (physique, mathématique et numérique), la question-clé est de rester en contact étroit avec les objectifs descriptifs et interprétatifs du modèle c'est-à-dire de garder les significations physiques maximales du système .

3.1 Caractéristiques du comportement des systèmes complexes

3.1.1 Remarques et définitions préliminaires

Les sujets de recherche auxquels vous allez être confrontés lors du stage de Master ou qui vous seront proposés lors d'une future thèse de doctorat contiennent le plus souvent un certain nombre "d'ingrédients".

Parmi ces ingrédients, on peut reconnaître :

- des objectifs affichés au départ : comprendre et maîtriser un phénomène physique très particulier ayant une importance précise dans un système plus vaste, améliorer un dispositif ayant une finalité technologique précise, vaincre un "verrou scientifique" -ou technologique- (vous remarquerez que le monde de la recherche n'est pas en reste en ce qui concerne l'utilisation intensive d'un jargon interne très imagé et stéréotypé).
- des processus plus ou moins complexes, plus ou moins couplés ou imbriqués, pour lesquels il faudra établir des modèles de préférence prédictifs.
- un besoin généralement important de traduire les "résultats" en tableaux de chiffres, graphes, courbes "parlants". Les analyses physiques qui en découlent sont essentielles.
- la question cruciale des "outils" expérimentaux ou numériques à utiliser pour parvenir aux objectifs : tout dépend souvent de l'histoire du Laboratoire (de ses moyens humains et matériels), de l'Equipe de recherche, de ses collaborations, etc.

A titre d'exemple, on va voir comment pourrait se présenter un sujet de stage de MR2 proposé dans un Laboratoire tel que le Labo d'Energétique, plus précisément dans l'Equipe Systèmes diphasiques, par exemple sur une boucle diphasique de type CPL.

- 1er transparent (fig. 3.1) montrant une CPL. On aura à l'oral un commentaire sur le principe de fonctionnement et les utilisations de ce type de dispositif pour le refroidissement de l'électronique dans les engins spatiaux. On réfléchira sur la définition du système d'étude, ses forçages, ses paramètres internes et les processus physiques qui y siègent. On note immédiatement la structuration en sous-systèmes ou en composants : l'évaporateur, le condenseur, le réservoir, les conduites liquide et vapeur, les sources, etc.

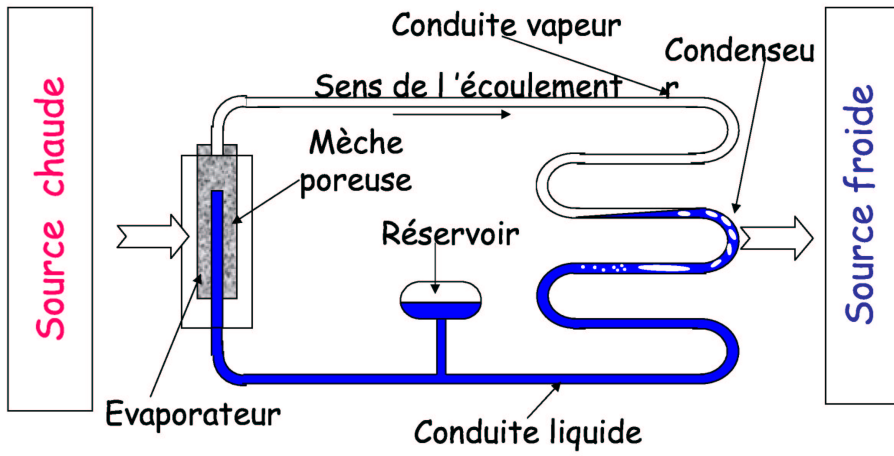


FIG. 3.1 – représentation schématique d'une boucle fluide diphasique de type CPL.

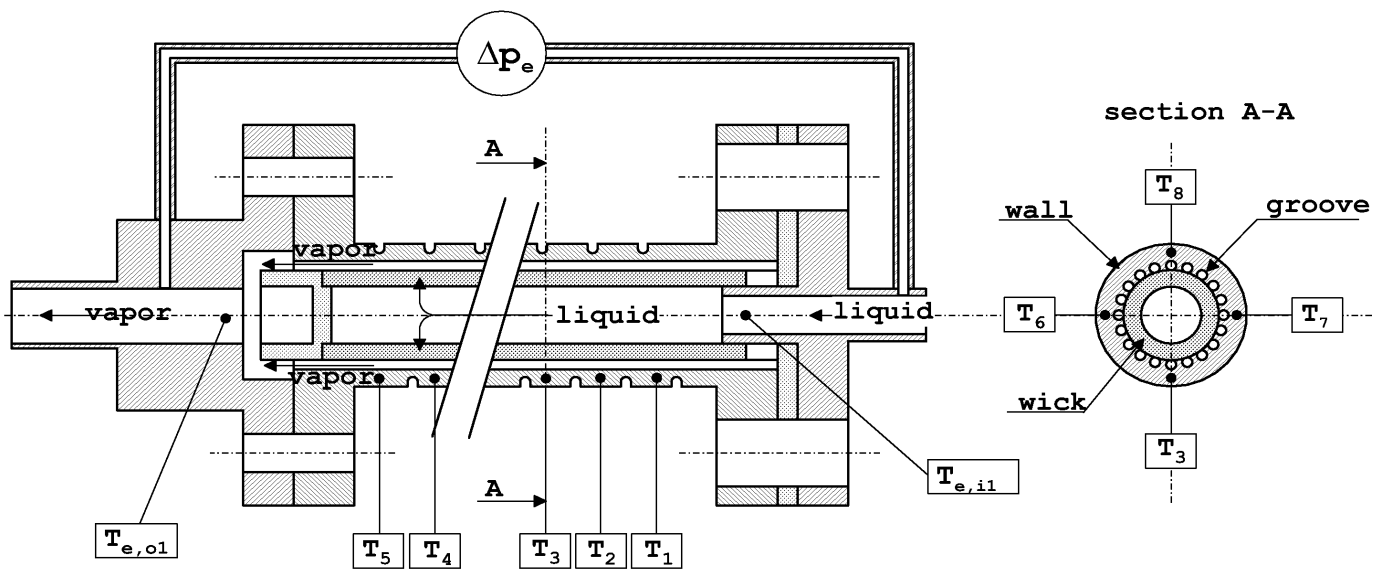


FIG. 3.2 – schéma d'un évaporateur de type CPL.

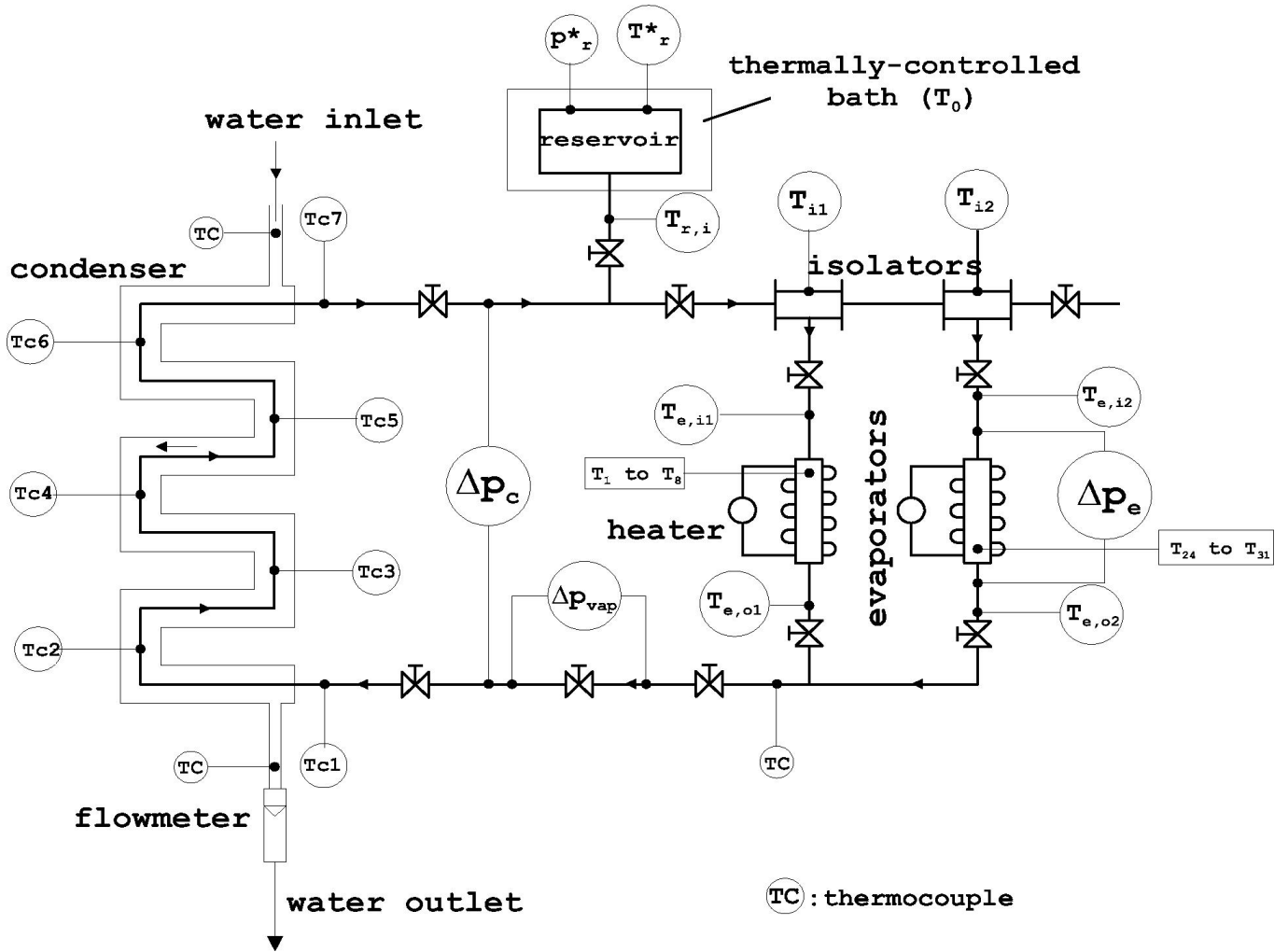


FIG. 3.3 – Schéma d'instrumentation expérimentale de la CPL.

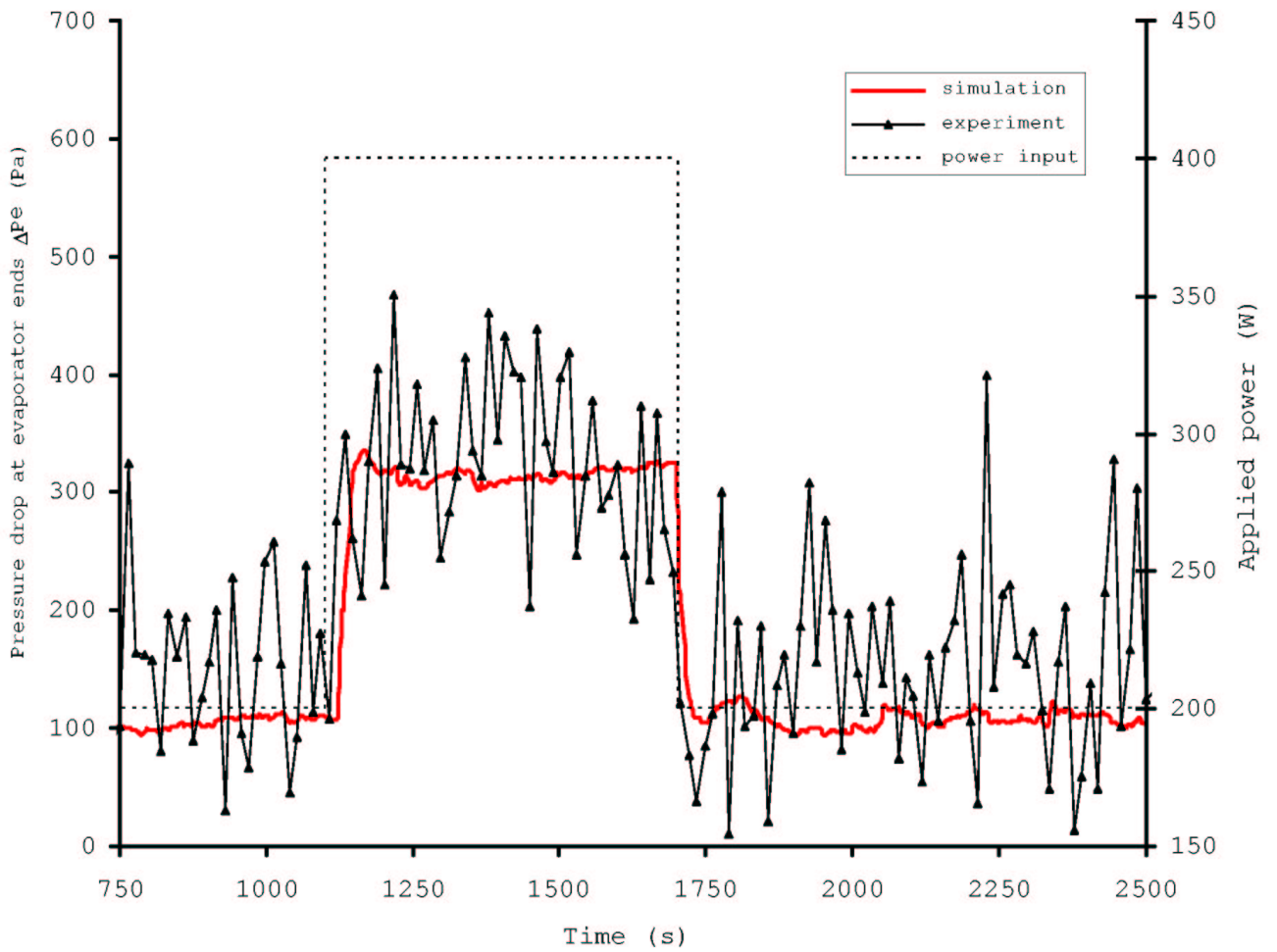


FIG. 3.4 – *fluctuations de pression observées aux bornes de l'évaporateur.*

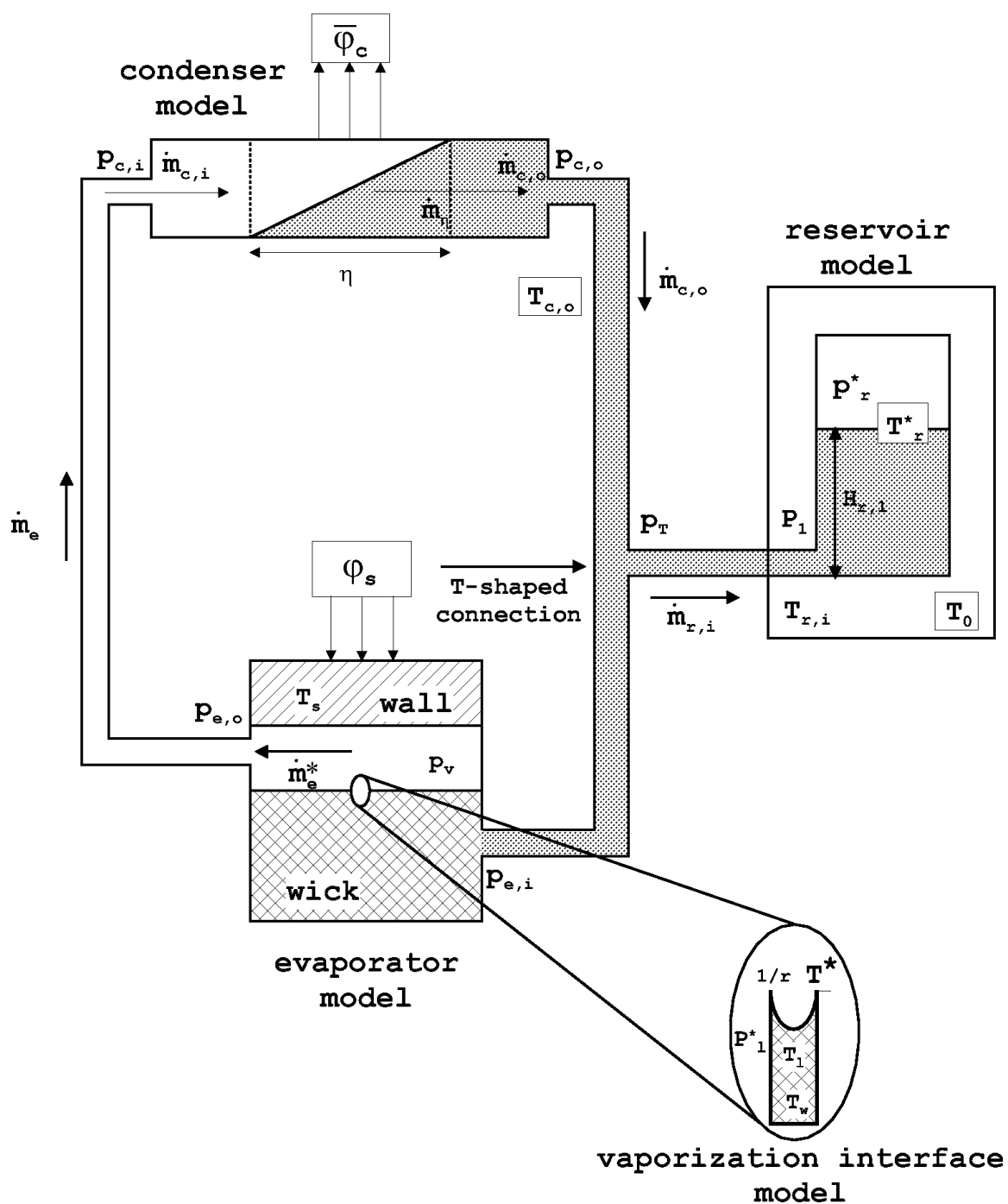


FIG. 3.5 – schéma montrant les différentes zones de modélisation de la CPL.

- 2ème transparent (fig. 3.2) : ce transparent montre la complexité technologique d'un évaporateur cylindrique classique de CPL, ainsi que le positionnement de l'instrumentation associée (thermocouples et capteurs de pression différentiel)
- 3ème transparent (fig. 3.3) : montre sur un schéma l'instrumentation générale de la boucle, ainsi que les dispositifs de chauffe et de régulation du bain thermostaté.
- 4ème T (fig. 3.4) montre les fluctuations de pression ΔP_e mesurées aux bornes de l'évaporateur (notamment avant et après l'application du créneau de puissance).
- 5ème T (fig. 3.5) montrant de façon schématique comment a été construit le modèle numérique global de la boucle. On note à la fois l'inventaire des sous-modèles au sein de la CPL, et les variables de sortie qui vont figurer dans la simulation.

On constate que certaines variables jouent le rôle de variables de raccordement entre les composants ;

Une mention particulière doit être faite du traitement du débit de changement de phase à l'évaporateur, de la dynamique des ménisques en fonction des transferts thermiques appliqués à la culasse métallique : c'est grâce à un ménisque "moyen" représentatif de ce qui se passe au débouché des pores de la mèche poreuse que ces processus ont pu être pris en compte. A l'aide d'un objet physique (le ménisque "moyen") de taille miniature par rapport aux autres objets (culasse de l'évaporateur, réservoir diphasique) qui ont été également modélisés et raccordés dans le modèle global.

- 6ème T (fig. 3.6) montrant une comparaison "simul-expé" de la pression dans le réservoir d'une CPL de l'instant 0s à 1000 s (RP) et après le créneau (1100 s à 1700 s). On peut notamment observer la qualité de l'accord modèle numérique - expérience en particulier loin du démarrage, pour lequel le modèle n'est pas du tout descriptif.

Le futur stagiaire de Master intéressé par un tel sujet pourrait se trouver face une liste impressionnante d'objets d'étude et de causes de complexité dans un tel sujet de stage dans le domaine des systèmes diphasiques. Sans ordre particulier :

- déplacement d'interfaces liquide-vapeur et de ménisques et mécanismes de formation (ou rupture) de bulles/gouttes de poches,
- instabilités (hydrodynamiques, thermohydrodynamiques, etc.)
- écoulements ou répartition des phases en milieux poreux, etc.

Il y aura probablement à affronter des difficultés de description de son problème à différents niveaux :

- à l'échelle des phénomènes physiques "élémentaires" siégeant dans les composants
- à l'échelle de chaque composant
- à l'échelle système : sophistication géométrique et/ou technologique, complexité de l'assemblage des composants couplés

Dans ce contexte, le chercheur est très vite sollicité à parler de son problème (ou de son système) à l'aide ou en termes de modèles, destinés à expliquer le comportement du système global et prédire son amélioration en termes de performances, de coûts, etc.

Il lui faudra s'appropriier (et critiquer) les modèles partiels ou globaux existants, ceux de la "littérature", c'est-à-dire de la communauté scientifique proche ou spécialisée. Les utiliser. Et/ou en proposer et en construire de nouveaux. Dans quel esprit ? Sous quelles approches ? Proposons quelques pistes.

3.1.2 Définition d'un système physique Σ

Le concept de système est essentiel pour l'approche d'un très grand nombre de processus physiques. Une fois bien établi, et muni d'hypothèses de construction, il constitue par lui-même un outil indispensable de compréhension et de développement d'interprétations et d'analyses de comportement.

Nous allons proposer une représentation de système physique présentant une extension spatiale

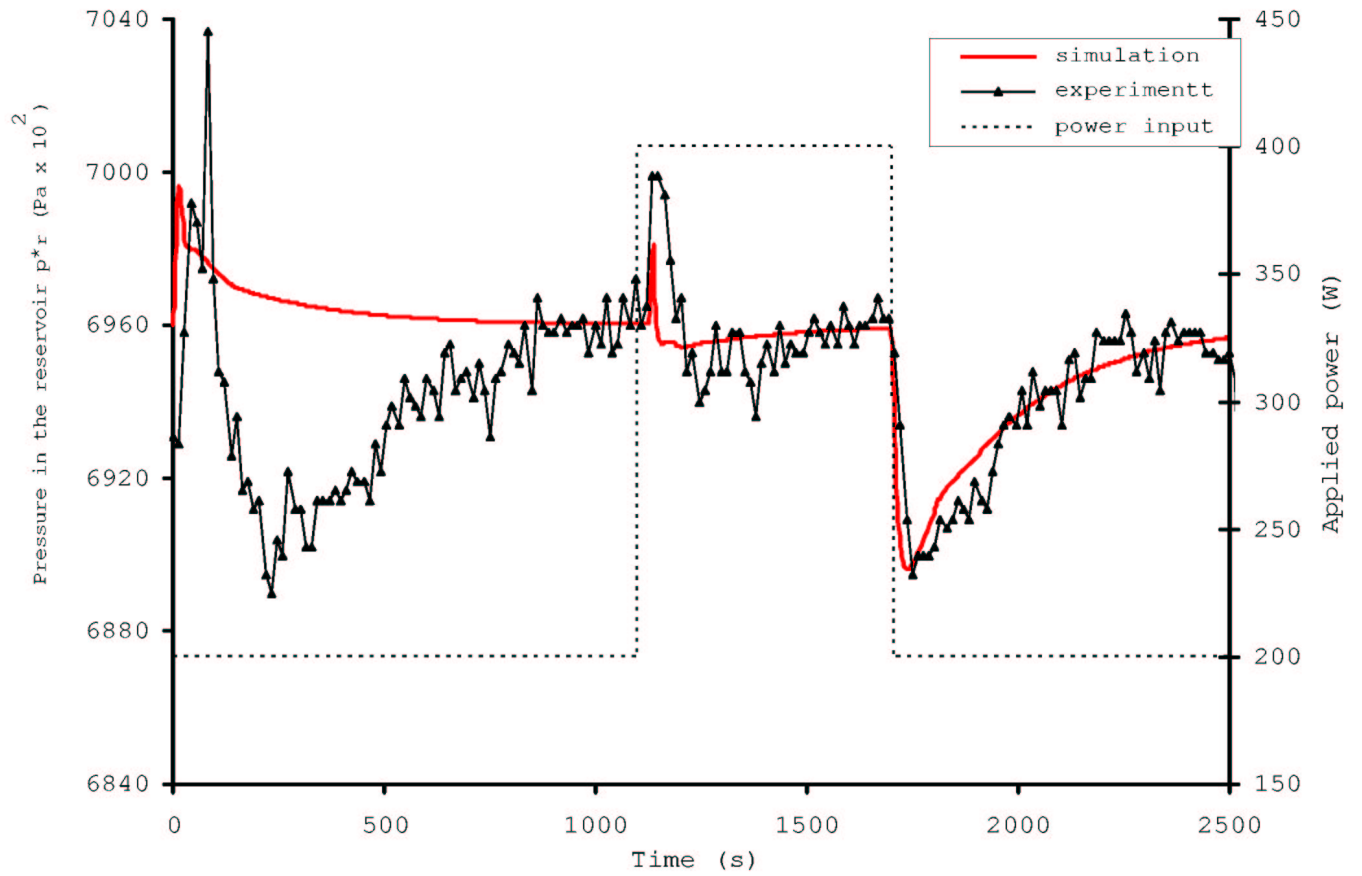


FIG. 3.6 – *pression dans le réservoir. Overshoot/undershoot.*

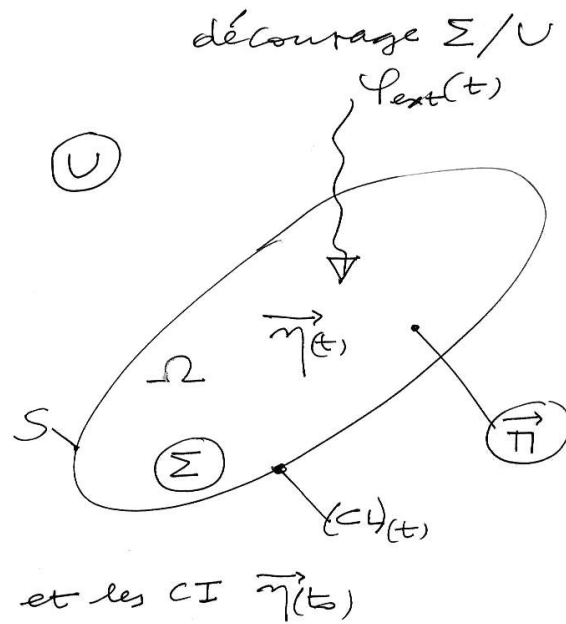


FIG. 3.7 – *représentation schématique d'un système.*

(ou défini sur un domaine) Ω . Même si la représentation schématique ci-dessus d'un système ¹ est assez formelle, elle contient des éléments essentiels :

- l'état du système Σ est caractérisé en tout point du domaine Ω qu'il occupe par la connaissance d'un certain nombre de grandeurs physiques. Ces variables (d'état) forment le vecteur d'état η du système, généralement ramené (par discrétisation ou formulation intégrale) à une dimension finie. (sauf nécessité, on ne représentera pas la nature vectorielle par la flèche symbolique)
- le système Σ est soumis à l'influence de son environnement (variable ou non) via des forçages extérieurs, des sources ou puits regroupées ensemble formellement sous le symbole $\varphi_{ext}(t)$; l'environnement agit également via les conditions aux limites de la forme $f(\eta, \nabla_n \eta)_\Gamma = 0$ (Dirichlet ou Neumann)
- le système présente un état initial $\eta_{(t=t_0)} = \eta_0$ identifié avec une certaine précision (qui ne pourra être infinie... ni dans la couche de l'observation expérimentale, ni dans la couche numérique).
- le système possède aussi un certain nombre de "propriétés" ou paramètres internes : géométriques, mécaniques, thermophysiques ou autres qui sont regroupés dans le vecteur des paramètres qu'on notera π .

En se plaçant dans la couche mathématique, on admettra que l'on peut toujours décrire l'évolution au fil du temps du système au moyen de la formulation générique suivante c'est-à-dire l'équation d'évolution (equation différentielle d'ordre 1 en temps) :

$$\boxed{\frac{\partial \eta}{\partial t} = G(\eta, \varphi_{ext}, \pi, t)} \quad (3.1)$$

Dans certaines conditions (d'existence et d'unicité), cette évolution pourra également être décrite de façon intéressante au moyen d'un opérateur propagateur ou opérateur d'évolution $\mathcal{P}(t, t_0, \pi)$ dépendant de t , t_0 et de l'ensemble des paramètres internes du système π , sous la forme :

$$\boxed{\eta(t) = \mathcal{P}(t, t_0, \pi) \eta_0} \quad (3.2)$$

remarque : Les equations différentielles (ED) ou les systèmes différentiels (SD) tel(le)s que formulés en (3.1), ont deux natures mathématiques possibles : ils sont linéaires ou non.

Dans le cas d'ED linéaire, la solution d'évolution écrite sous la forme (3.2) est toujours valide, c'est-à-dire quel que soit $t \in [0, \infty]$.

Dans le cas d'ED non-linéaire, la forme (3.2) n'est plus valable que pour un petit intervalle de temps δt au-delà de t_0 . On montre qu'on peut malgré tout écrire (3.2) pour une ED linéaire tangente associée, valable pour un "petit horizon" de temps $[t_0, t_0 + \delta t]$; on peut renouveler l'opération sur la suite des instants successifs, séparés de δt et ainsi proposer une évolution au fil du temps, même pour cette ED non-linéaire.

On peut représenter de façon schématique la trajectoire de référence portée par une observable significative du système sous la forme de la fig. (3.8)

3.2 Analyse des sensibilités

3.2.1 Définition de la sensibilité d'une observable du Σ à une perturbation

De façon intuitive et simple, une sensibilité vise à exprimer l'influence d'une perturbation d'une des données du système (paramètres de contrôle, conditions initiales ou aux limites) sur l'évolution de celui-ci.

Si l'on prend la perturbation d'un paramètre, on peut procéder de façon simple à une évaluation de telles sensibilités :

¹Les systèmes d'étude ne sont pas tous munis d'une extension spatiale (ne sont pas tous "spatialisés"). Les problèmes de cinétique chimique complexe, de dynamique des populations, de macroéconomie, etc. présentent des situations où le système est sans domaine ni frontières.

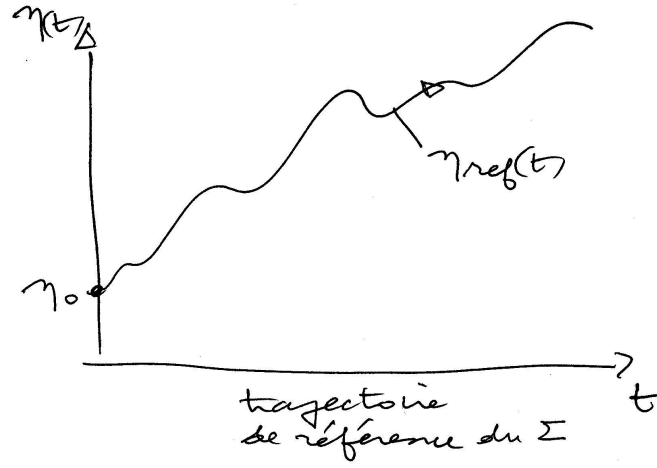


FIG. 3.8 – *trajectoire formelle d'un système.*

- on suppose qu'on dispose d'une évolution de référence (ou trajectoire) du système pour un certain ensemble des données (dont le paramètre dont on veut étudier l'influence). Cette trajectoire de référence peut avoir été obtenue par voie expérimentale ou par voie numérique si on dispose d'un modèle pour le problème étudié.
- on fait varier le paramètre π_1 d'une "petite quantité" à définir (là réside une partie de la difficulté), et on observe la nouvelle trajectoire du système.
L'écart à tout instant entre les deux trajectoires (Fig. 3.9), rapportée à l'écart imposé au paramètre donne une mesure de la sensibilité.

On peut ainsi formuler la définition de la sensibilité d'une variable d'état η du système à une petite perturbation du paramètre π_1 par l'expression :

$$s_{\eta/\pi_1} = \frac{\Delta\eta}{\Delta\pi_1}$$

Notons que cette définition permet totalement de mettre en oeuvre des analyses de sensibilité par études expérimentales, à condition de pouvoir faire varier le paramètre dont on veut analyser l'influence par petits incréments, ce qui est particulièrement réalisable en ce qui concerne les forçages ou les conditions aux limites mais est plus difficile en ce qui concerne les "propriétés" des matériaux, du fluide, etc.

Par extension, on pourra aussi construire de la même manière des sensibilités aux conditions initiales du problème (Fig. 3.10), c'est-à-dire étudier la réponse du système à une perturbation de η_0 . Et également des sensibilités aux conditions aux limites, aux forçages, etc.

Par la suite, on définira mathématiquement la sensibilité (au sens linéaire) par passage à la limite de l'accroissement fini du paramètre c'est-à-dire $\Delta\pi_1 \rightarrow 0$, la sensibilité devenant une dérivée partielle du type :

$$\boxed{s_{\eta/\pi_1} = \frac{\partial\eta}{\partial\pi_1}} \quad (3.3)$$

remarque : avec cette définition mathématique de la sensibilité, on pourra obtenir toute sensibilité souhaitée par dérivation directe de l'évolution $\eta(t)$ par rapport à tout paramètres, conditions extérieure ou initiale...

Notons que pour les ED (ou SD) linéaires, on peut aussi obtenir ces sensibilités en dérivant les deux membres de (3.2), c'est-à-dire en faisant :

$$\boxed{s_{\eta/\pi_1} = \frac{\partial \mathcal{P}(t, t_0, \pi)}{\partial \pi_1} \eta_0} \quad (3.4)$$

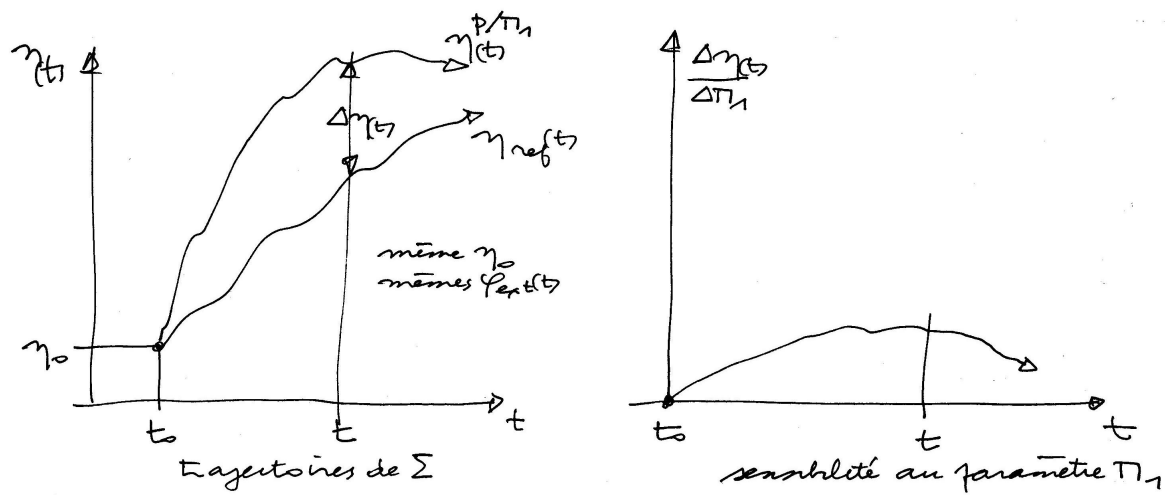


FIG. 3.9 – construction intuitive de la sensibilité.

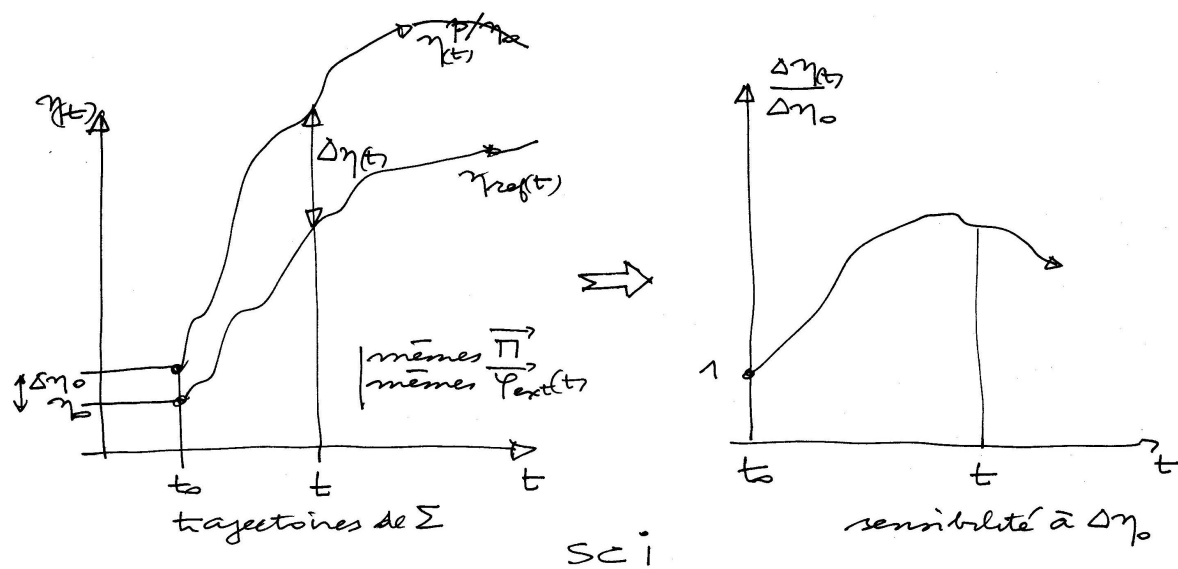


FIG. 3.10 – construction de la sensibilité à la condition initiale.

Cette formule sera applicable $\forall t$.

On pourra procéder de la sorte pour les SD non-linéaires, mais par pas de temps successifs (voir plus loin).

Pour que de telles sensibilités portent un sens maximal concernant le comportement du système, c'est-à-dire constituent un outil d'analyse de la dynamique du système considéré, le choix de la ou des variables d'état porteuses de la réponse aux perturbations devra se porter sur une variable caractérisant le mieux ce comportement, c'est-à-dire une observable significative de sa dynamique.

On va maintenant exercer la capacité d'interprétation des sensibilités sur quelques exemples. Il va s'agir d'exemples simples, à solution analytique, permettant de construire les sensibilités par dérivation partielle directe. Il est difficile de faire autrement dans le cadre d'un cours ; dans un cadre recherche, il est évident que systèmes et analyses de sensibilités associées prennent vite des proportions plus complexes et conséquentes en volume de calcul et en temps.

Dans toute la suite, on utilisera plutôt les sensibilités réduites :

$$s_{\eta/\pi}^* = \pi s_{\eta/\pi}$$

(cf. paragraphe 3.3.3) qui permettent notamment de comparer les sensibilités entre elles.

La dimension de la sensibilité réduite est la même que celle de la variable observée (l'observable).

3.2.2 Exemple 1 : mur conductif 1D pris entre un flux et un échange convectif

Le problème peut être posé de la façon suivante : une plaque d'épaisseur e et de propriétés thermophysiques constantes est placée initialement en équilibre thermique avec une ambiance thermostatée à température T_a . A partir de l'état initial, on applique un flux de chaleur uniforme sur la face opposée (à gauche sur la Fig. 3.11).

On donne :

$$\begin{aligned} e &= 0.1 \text{ m}, \\ \rho C &= 6 \cdot 10^6 \text{ J m}^{-3} \text{ K}^{-1}, \\ \lambda &= 170 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}, \\ h &= 1000 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}, \\ \dot{q} &= 5000 \text{ W m}^{-2}, \\ T_0 &= 293 \text{ K} \text{ et } T_a = 313 \text{ K} \end{aligned}$$

Le système est ici le mur solide. Les paramètres du Σ sont soit géométriques (S, e), soit relatifs aux propriétés (λ, C), au coefficient d'échange h . Les conditions aux limites de ce système sont la densité de flux appliqué $\dot{q}$ à gauche et le transfert convectif à droite.

La condition initiale est, d'après l'énoncé, $T(x, t = 0) = T_0$

On a adopté une hypothèse de description 1D :

H1 : hypothèse monodimensionnelle (valable ssi $e \ll \sqrt{S}$).

remarque : le système étant "à un corps", son étude se réduit à connaître $T(x, t)$; de plus le mur n'est le siège que du processus de conduction thermique : on ne voit pas intuitivement où vont se situer couplages ou complexité.

construction du modèle. Le bilan local d'énergie pour une tranche d'épaisseur dx , d'abscisse x , s'écrit en tenant compte de **H1** :

$$\rho C S dx \frac{dT(x, t)}{dt} = \varphi(x - dx/2, t) - \varphi(x + dx/2, t)$$

et si la tranche est infiniment petite :

$$\rho C S dx \frac{dT(x, t)}{dt} \simeq - \left. \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \right|_{(x, t)} dx \quad (3.5)$$

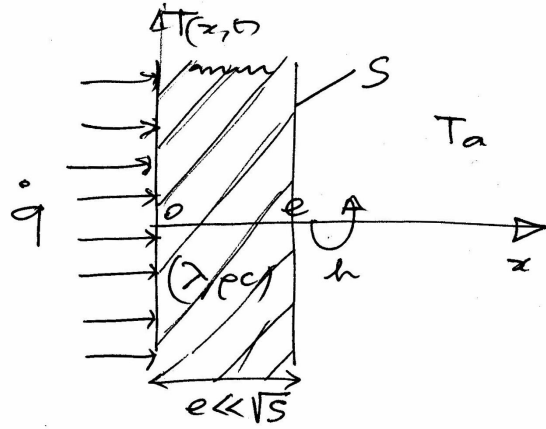


FIG. 3.11 – schéma du problème mur 1D.

Deux voies se présentent alors :

- **poursuivre l'étude locale de $T(x, t)$.** On remplace alors $\varphi(x, t)$ par un flux de Fourier $\varphi(x, t) = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(x,t)}$. On obtient l'équation de la chaleur (avec ses conditions aux limites et initiale) :

$$\rho C \frac{dT(x, t)}{dt} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

La solution générale s'établit (non sans quelques difficultés algébriques) à l'aide d'un développement en Série de Fourier infinie :

$$T(x, t) = T_a - 2 \frac{\dot{q}e}{\lambda} [1 - x/e + 1/Bi] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\mu_n e) \cos(\mu_n x)}{[\mu_n e + \sin(\mu_n e) \cos(\mu_n e)]} (1 - e^{-\alpha \mu_n^2 t})$$

avec $\alpha = \lambda / \rho C$ diffusivité thermique et $Bi = h e / \lambda$ nombre de Biot qualifiant le rapport des échanges convectifs paroi-ambiance aux échanges conductifs dans la plaque.

Les valeurs μ_n sont les racines pour $n = 1, 2, \dots, \infty$ de l'équation trigonométrique :

$$\mu_n \tan(\mu_n) = Bi$$

On a représenté ci-contre (Fig. 3.12), quelques profils de l'écart de $T(x)$ à T_0 pour différents instants : $t = 12s, 120s, 240s, 480s, 720s, 1200s, 1800s, 4800s$; le premier profil pour $t = 12s$ est la courbe en pointillé la plus proche de l'état initial $0C$. L'état permanent est quasiment établi pour $3000s$.

- **réaliser une formulation intégrale.** Si l'intérêt de l'étude porte sur le comportement de ce mur en fonction de ses influences, alors il est avantageux de rechercher une observable représentative, en intégrant (3.5) sur le domaine $[0, e]$:

$$\rho C S \int_0^e \frac{dT(x, t)}{dt} dx = - \int_0^e \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x} \Big|_{(x,t)} dx = - \int_0^e d\varphi(x, t)$$

Cette intégration fait apparaître une observable globale du système : la température moyenne du mur $T_m(t) = \frac{1}{e} \int_0^e T(x, t) dx$.

On a d'abord $\rho C S e \frac{dT_m(t)}{dt} dx = \varphi(0, t) - \varphi(e, t)$. On remplace alors les flux aux deux extrémités par : $\varphi(0, t) = S \dot{q}$ et $\varphi(e, t) = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{(x,t)} = -h S (T(e, t) - T_a)$. D'où :

$$\rho C e \frac{dT_m(t)}{dt} dx = \dot{q} - h (T(e, t) - T_a)$$

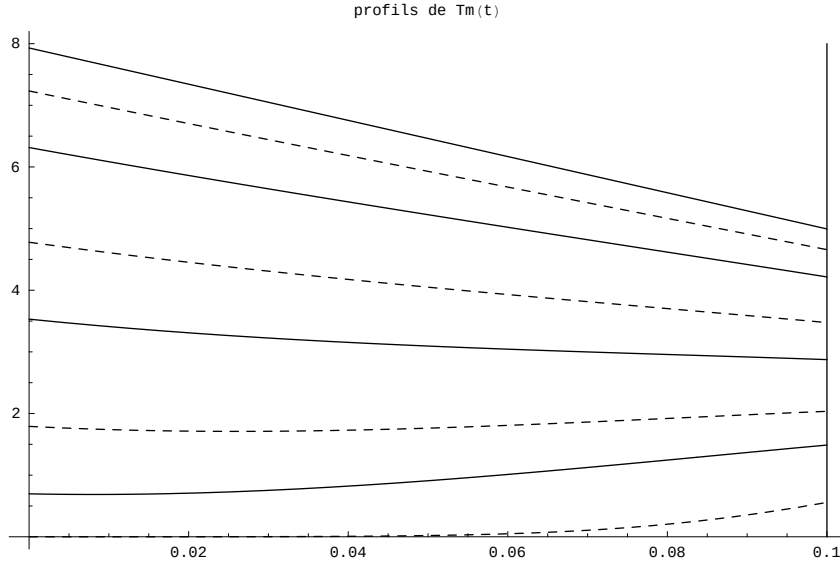


FIG. 3.12 – *profils de température du mur 1D à différents instants.*

Il manque alors une information sur la valeur de $T(e, t)$. On ne peut alors aller plus loin sans adopter une nouvelle hypothèse :

H2 : mur thermiquement mince (ce qui se traduit par $T(e, t) = T_m(t)$ c'est-à-dire que la température instantanée est uniforme dans toute l'épaisseur) : cette hypothèse est vraie si la condition $Bi = \frac{h e}{\lambda} < 0.1$ est réalisée. Avec cette hypothèse, la conduction locale dans le mur disparaît au profit d'un bilan en bloc du mur. En anglais on dit qu'on a opéré une "lumped analysis" (to lump = traiter en bloc).

C'est une hypothèse forte ; on aurait pu prendre un gradient uniforme et trouver alors une autre valeur pour $T(e, t)$ ou encore d'autres hypothèses pour lever ce blocage, en s'appuyant sur la solution exacte de la (Fig. 3.12).

remarque : on a remplacé dans la description de l'évolution du mur, un vecteur d'état de dimension infinie par un vecteur d'état de dimension 1 ; la question demeure du caractère "significatif" de l'observable $T_m(t)$ pour le système -notons que le mécanisme physique de conduction a totalement disparu.

autre remarque : On a abouti à une équation différentielle (ordinaire) linéaire, qui place ce modèle à température moyenne de mur dans la couche purement mathématique (et notamment susceptible de donner lieu à solution analytique, etc.).

l'équation de bilan intégral et la solution. L'équation de bilan intégral du mur s'écrit (après simplification par S) :

$$\rho C e \frac{dT_m(t)}{dt} = \dot{q} - h(T_m(t) - T_a)$$

avec la condition initiale : $T_m(t) = T_0$.

dont la solution est, en posant $\tau = \frac{\rho C e}{h}$ (c'est le temps caractéristique d'installation de ce système) :

$$T_m(t) = T_0 e^{-t/\tau} + (T_a + \frac{\dot{q}}{h})(1 - e^{-t/\tau}) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/\tau} \quad (3.6)$$

Avec les valeurs numériques données ici aux coefficients ρ , C et e , on a $\tau = 600$ s.

On a noté que la solution stationnaire, c'est-à-dire au régime permanent (RP) est $T_m(t \rightarrow \infty) = (T_a + \frac{\dot{q}}{h}) = T_\infty$. L'évolution de $T_m(t)$ est représentée sur le diagramme de la fig.(3.13).

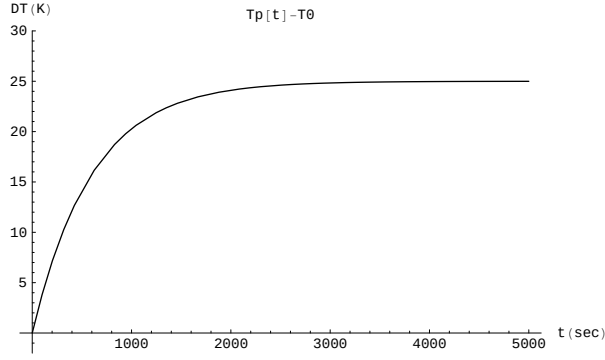


FIG. 3.13 – Variation de l'écart entre température moyenne du mur et température initiale.

On montre que l'on atteint 99 % de T_∞ au bout d'un temps de $t_{99\%} = \tau \ln(100) \simeq 4.6 \tau$. soit ici $t_{99\%} \simeq 2763 \text{ s}$.

remarque : on voit que si on prend comme variable, la variable centrée $\theta_m(t) = (T_m(t) - T_\infty)$ la solution se présente comme :

$$\theta_m(t) = e^{-t/\tau} \theta_0$$

qui met en évidence le propagateur de $\theta_m(t)$ qui est bien $\mathcal{P}(t, t_0, \pi) = e^{-t/\tau}$ (alors que dans la solution (3.6) on a du mal à mettre en évidence le propagateur de $T_m(t)$ sous la forme (3.2)).

autre remarque : aucune observation même très attentive ne révélera de phases temporelles dans cette évolution. Et pour cause : mathématiquement il ne peut pas y en avoir puisque les dérivées successives de $e^{-t/\tau}$ sont toutes monotones. Par contre on va voir ci-après qu'il existe des phases temporelles de sensibilité.

sensibilités aux paramètres de contrôle du Σ sensibilité réduite à l'inertie thermique (volumique) du mur (ρc).

on obtient (en remarquant que $s_{T_m/(\pi)}^*(t) = s_{\theta_m/(\pi)}^*(t) + s_{T_\infty/(\pi)}^*$) :

$$s_{T_m/(\rho c)}^*(t) = (\rho c) \frac{\partial \mathcal{P}(t, t_0, (\rho c))}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial (\rho c)} \theta_0 = \left\{ \frac{t}{\tau^2} e^{-t/\tau} \right\} \left\{ \frac{\rho c e}{h} \right\} (T_0 - T_\infty)$$

soit :

$$s_{T_m/(\rho c)}^*(t) = \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} (T_0 - T_\infty)$$

Sur la (Fig. 3.14) on a une allure caractéristique en $t e^{-t/\tau}$ qui exprime que le système passe par différentes phases. Durant la phase qui va jusqu'à l'instant $t = \tau$, $T_m(t)$ est tout d'abord peu sensible au paramètre. Cette influence passe par un pic de sensibilité en $t = \tau$ où la sensibilité vaut :

$$s_{max}^* = 0.368 (T_0 - T_\infty)$$

En expérimentation, on dit que c'est le moment optimal pour identifier le paramètre (en estimer la valeur par méthode inverse). Se reporter à l'ouvrage de [1].

Ensuite, pendant une seconde phase beaucoup plus longue (on n'atteint 1% de s_{max} qu'au bout de $t_{1\%} = 4.6 \tau$), la sensibilité décroît exponentiellement pour s'annuler aux grands temps : l'état final est indépendant de l'inertie du mur.

La sensibilité à l'épaisseur e du mur

donne un diagramme également en $e^{-t/\tau}$, et présente une forme totalement affine de la précédente : les deux paramètres (ρc) et e sont totalement corrélés.

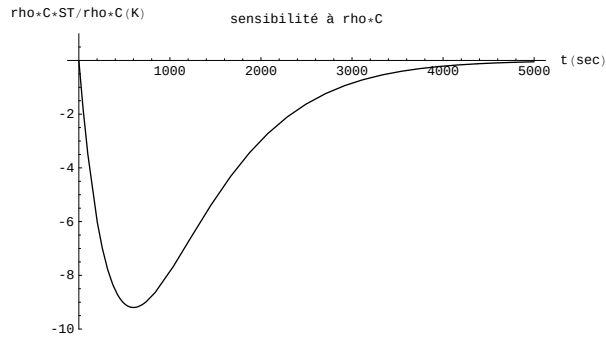


FIG. 3.14 – *Sensibilité réduite de T_m à l'inertie ρC*

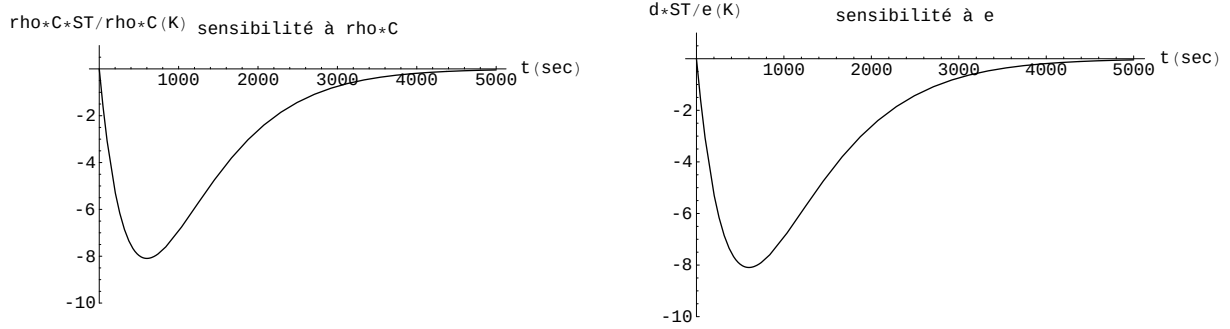


FIG. 3.15 – *Sensibilités réduites comparées de T_m à ρC et e*

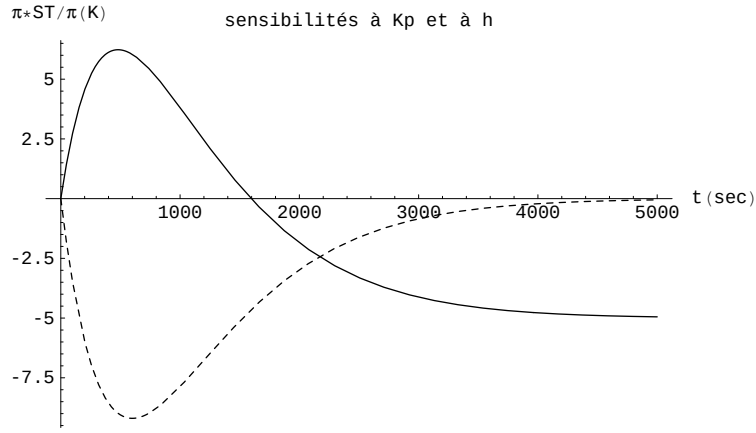


FIG. 3.16 – Sensibilités réduites comparées de T_m à l'inertie K_p et au coefficient d'échange h .

Si on travaille en sensibilités réduites, on a une identité parfaite des courbes (cf. fig. 3.15).

On montre que ces paramètres pourraient (doivent) être regroupés dans un groupement ($K_p = \rho c e$) ne formant en fait qu'un seul paramètre de contrôle (l'inertie) dans la dynamique du système.

On a représenté ci-dessous (fig. 3.16) la sensibilité à cette inertie surfacique K_p : on voit bien qu'elle est identique à celle représentée sur la (Fig. 3.15).

remarque : on note que les sensibilités qui évoluent asymptotiquement vers 0 permettent de déterminer le temps de retour à l'insensibilité du système à ses paramètres, lié au temps d'installation du système à son état stationnaire ; cette propriété peut être étendue aux systèmes non-linéaires.

La sensibilité au paramètre h .

On pourrait penser à première vue qu'elle est semblable à celle de l'inertie, avec un effet inversé puisqu'il figure déjà dans un paramètre global : le temps caractéristique τ .

En fait, on obtient par dérivation :

$$\begin{aligned} s_{T_m/h}^*(t) &= s_{\theta_m/h}^*(t) + s_{T_\infty/h}^* \\ &= \left(-\frac{\dot{q}}{h}\right)(1 - e^{-t/\tau}) - (T_0 - T_\infty)\frac{te^{-t/\tau}}{\tau} \end{aligned}$$

Ce diagramme de sensibilité se présente comme la superposition d'une allure en $te^{-t/\tau}$ et d'une allure en $(1 - e^{-t/\tau})$.

Cette fois, en fin d'évolution l'état final est directement dépendant du paramètre h . L'écart de trajectoire que représente s_∞ pour des perturbations petites du paramètre h est :

$$\Delta T_{m,\infty} = s_{T_m/h}^*(t \rightarrow \infty) \frac{\Delta h}{h} = \left(-\frac{\dot{q}}{h}\right) \frac{\Delta h}{h}$$

Pratiquement, augmenter h de 10% reviendra à **diminuer** la température finale de $0.1 \left(-\frac{\dot{q}}{h}\right)$.. et inversement. Il faut noter qu'on déduit aussi de l'étude de sensibilité le sens (le signe) de l'influence du paramètre sur la réponse du système.

En comparant les sensibilités de T_m à h et K_p sur la (Fig. 3.16), on note que les diagrammes (les portraits) de sensibilité ne sont pas affines : ces deux paramètres ne sont pas corrélés entre eux, contrairement à ce que laisse croire leur présence commune dans la constante de temps τ . Mais c'est que h figure aussi dans T_∞ .

La sensibilité de la température $T_m(t)$ à la température ambiante T_a

qui constitue avec $\dot{q}$ un des forçages du système est simple à déterminer :

$$s_{T_m/T_a}(t) = (1 - e^{-t/\tau}) \frac{\partial T_\infty}{\partial T_a} = (1 - e^{-t/\tau})$$

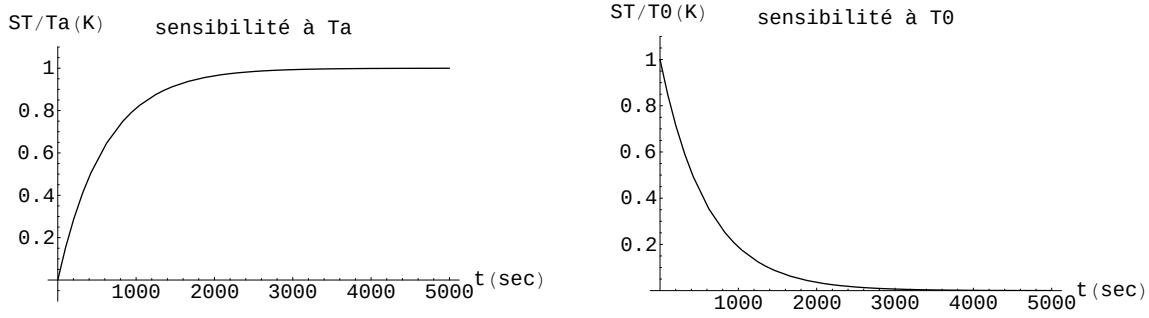


FIG. 3.17 – Sensibilité de T_m à T_a et à la condition initiale T_0 .

et :

$$s_{T_m/\dot{q}}^*(t) = \dot{q} (1 - e^{-t/\tau}) \frac{\partial T_\infty}{\partial \dot{q}} = \left(\frac{\dot{q}}{h}\right)(1 - e^{-t/\tau})$$

avec dans les deux cas des allures en $(1 - e^{-t/\tau})$ caractéristiques d'une influence directe sur l'état final. de nouveau on peut écrire :

$$\Delta T_{m,\infty} = s_{T_m/T_a}(t \rightarrow \infty) \Delta T_a = \Delta T_a$$

De façon pratique, toute augmentation de T_a retentit directement sur la température finale. Par contre, $\Delta T_{m,\infty} = (\frac{1}{h})\Delta \dot{q}$

sensibilité à la condition initiale (SCI) Les sensibilités à tout ce qu'on veut sont directement accessibles par dérivation directe de la solution (ou du propagateur). Dont notamment la SCI :

$$s_{T_m/T_0}(t) = e^{-t/\tau}$$

A l'instant $t = 0$, on observe qu'on a bien $s_{T_m/T_0}(0) = 1 = s_0$ et on peut écrire : $s_{T_m/T_0}(t) = e^{-t/\tau} s_0$.

On en déduit indirectement que $s_{T_m/T_0}(t)$ et $\theta_m(t)$ (solution du système physique) ont le même propagateur.

On constate sur la courbe ci-dessus Fig. 3.17, sur laquelle on a regroupé les deux dernières sensibilités, que si l'influence de la CI est forte aux petits temps (100% à l'instant initial), elle décroît exponentiellement pour ne plus représenter aucune influence sur l'état final (qui est indépendant de l'état initial).

3.2.3 Exemple 2 : paroi séparant deux fluides

Cette fois, le système est constitué de deux corps (deux sous-systèmes) : un mur solide toujours avec l'hypothèse 1D (indiqué par $w(all)$), et un fluide (indiqué f) confiné entre le mur et une paroi adiabatique.

Les paramètres sont d'une part géométriques (S, e_w, e_f) ; ils comportent aussi les propriétés (thermophysiques) : densités et conductivités $\rho_w, \rho_f, \lambda_w, \lambda_f$, capacités C_w, C_f , les coefficients d'échange h_1, h_2 . Les conditions aux limites de ce système sont une densité de flux nulle à gauche (paroi adiabatique) et le transfert convectif à droite lié à une ambiance (réservoir liquide infini) dont la température est brusquement élevée (juste après l'instant initial) à la température T_a .

La condition initiale est par exemple uniforme :

$$T(x, t = 0) = T_0 \text{ partout dans le mur et le fluide.}$$

Le problème est représenté sur la fig. (3.18).

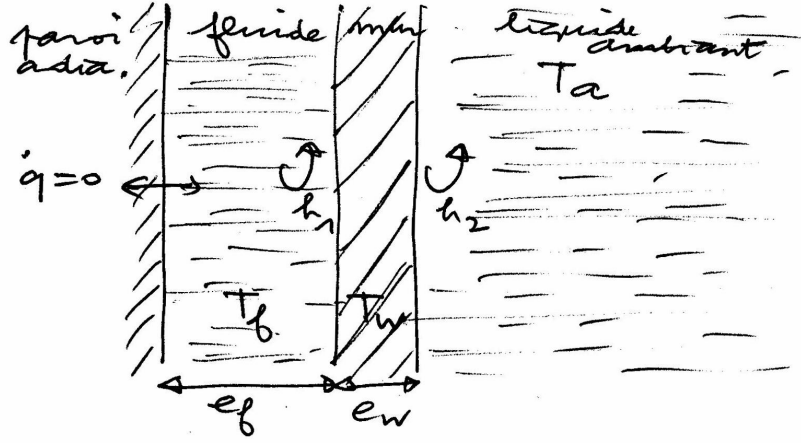


FIG. 3.18 – schéma du problème mur et fluide couplés thermiquement 1D.

remarque : sur ce système à deux corps couplés par un transfert convectif, on peut s'attendre (contrairement à l'exemple précédent) à une mise en évidence de couplages au sein de la dynamique.

les équations de bilan intégral. Par une approche de type formulation intégrale (en anglais “lumped analysis”) du même type que celui vu ci-dessus pour le mur unique, on obtient pour les températures moyennes du mur et du liquide les équations d'évolution :

$$\begin{cases} (\rho C)_f e_f \frac{dT_f(t)}{dt} = 0 - h_1(T_f - T_w) \\ (\rho C)_w e_w \frac{dT_w(t)}{dt} = h_1(T_w(t) - T_f(t)) - h_2(T_w(t) - T_a) \end{cases} \quad (3.7)$$

On introduit les capacités surfaciques $K_f = \rho_f C_f e_f$ et $K_w = \rho_w C_w e_w$. Après cette réduction de paramètres (absolument corrélés entre eux), le système complet paroi-fluide ne comporte plus “que” 4 paramètres internes et un paramètre intervenant dans les conditions aux limites : T_a .

On fait apparaître enfin les quantités : $\nu_1 = \frac{h_1}{\rho_f C_f e_f} = \frac{h_1}{K_f}$, $\nu_2 = \frac{h_1}{\rho_w C_w e_w} = \frac{h_1}{K_w}$, $\nu_3 = \frac{h_2}{\rho_w C_w e_w} = \frac{h_2}{K_w}$ dont il faut remarquer qu'il s'agit de quantités reliées aux constantes de temps du système : le système n'est plus qu'à 3 paramètres internes indépendants !

On obtient alors :

$$\begin{cases} \frac{dT_f(t)}{dt} = 0 - \nu_1(T_f - T_w) \\ \frac{dT_w(t)}{dt} = -\nu_2(T_w(t) - T_f(t)) - \nu_3(T_w(t) - T_a) \end{cases} \quad (3.8)$$

solution par transformée de Laplace. On “centre” les variables d'état sur la température de l'ambiante : $\theta_f(t) = T_f(t) - T_a$ et $\theta_w(t) = T_w(t) - T_a$, ce qui simplifie le système d'équations différentielles linéaire en :

$$\begin{cases} \frac{d\theta_f(t)}{dt} = -\nu_1(\theta_f - \theta_w) \\ \frac{d\theta_w(t)}{dt} = -\nu_2[\theta_w(t) - \theta_f(t)] - \nu_3\theta_w(t) \end{cases} \quad (3.9)$$

On remarque que, du fait de leur caractère uniforme, les CI sont identiques pour les deux températures centrées (ce qui va pas mal simplifier ici la résolution) : $\theta_w(0) = \theta_f(0) = (T_0 - T_a) = \theta_0$.

La résolution qui suit peut être avantageusement sautée sauf intérêt particulier à la méthode.

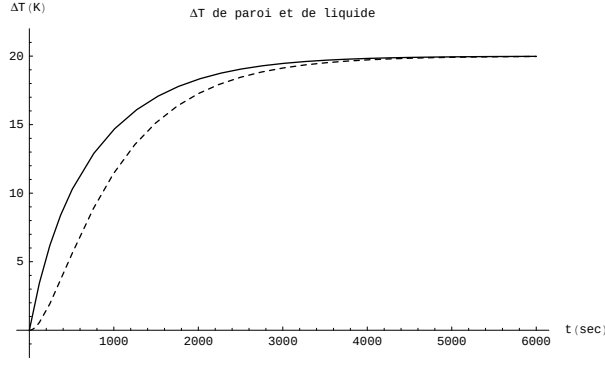


FIG. 3.19 – Températures moyennes de mur (trait plein) et de fluide (pointillé).

La transformée de Laplace du système donne, en utilisant $\left[\frac{d\theta(t)}{dt}\right] = p\widetilde{\theta(p)} - \theta_0$:

$$\begin{cases} (p + \nu_1)\widetilde{\theta_f} - \nu_1\widetilde{\theta_w} = \theta_f(0) = \theta_0 \\ -\nu_2\widetilde{\theta_f} + (p + \nu_2 + \nu_3)\widetilde{\theta_w} = \theta_w(0) = \theta_0 \end{cases}$$

Qui n'est autre qu'un système algébrique matriciel :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (p + \nu_1) & -\nu_1 \\ -\nu_2 & (p + \nu_2 + \nu_3) \end{bmatrix}}_{\tilde{A}} \begin{Bmatrix} \widetilde{\theta_f} \\ \widetilde{\theta_w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_0 \\ \theta_0 \end{Bmatrix}$$

Le déterminant de $\tilde{A}$ peut s'écrire :

$$\det(\tilde{A}) = p^2 + \underbrace{(\nu_1 + \nu_2 + \nu_3)}_S p + \underbrace{\nu_1\nu_3}_P = (p - r_1)(p - r_2),$$

où $-r_1$ et $-r_2$ sont les racines (réelles négatives) de l'équation du second degré $p^2 + Sp + P = 0$. Après inversion (immédiate) de la matrice $\tilde{A}$, les solutions transformées s'écrivent :

$$\begin{cases} \widetilde{\theta_f} = \theta_0 \left(\frac{p+S}{(p-r_1)(p-r_2)} \right) \\ \widetilde{\theta_w} = \theta_0 \left(\frac{p+\nu_1+\nu_2}{(p-r_1)(p-r_2)} \right) = \theta_0 \left(\frac{p+S-\nu_3}{(p-r_1)(p-r_2)} \right) = \widetilde{\theta_f} - \theta_0 \frac{\nu_3}{(p-r_1)(p-r_2)} \end{cases}$$

On décompose en éléments simples les fractions des seconds membres, et on utilise la transfo.

inverse $\left(\frac{1}{(p+a)}\right)^{-1} = e^{-at}$. On trouve finalement les solutions analytiques :

$$\begin{cases} \frac{\theta_f(t)}{\theta_0} = \frac{T_f(t)-T_a}{(T_0-T_a)} = \left(\frac{r_1 e^{-r_2 t} - r_2 e^{-r_1 t}}{(r_1 - r_2)} \right) \\ \frac{\theta_w(t)}{\theta_0} = \frac{T_w(t)-T_a}{(T_0-T_a)} = \frac{\theta_f(t)}{\theta_0} - \nu_3 \left(\frac{e^{-r_2 t} - e^{-r_1 t}}{(r_1 - r_2)} \right) \end{cases} \quad (3.10)$$

Les évolutions de $T_f(t)$ et $T_w(t)$ sont représentées sur le graphe (Fig. 3.19).

On a pris les valeurs suivantes pour les paramètres et les conditions aux limites :

$$\begin{aligned} e_w &= 0.02 \text{ m}, e_f = 0.04 \text{ m}, S = 1 \text{ m}^2 \\ \rho_w &= 3000 \text{ kg m}^{-3}, \rho_f = 1000 \text{ kg m}^{-3}, \\ C_w &= 10000 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}, C_f = 4180 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ h_1 &= 500 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1}, h_2 = 1000 \text{ J m}^{-2} \text{ K}^{-1} \\ T_a &= 313 \text{ K}, T_0 = 293 \text{ K} \end{aligned}$$

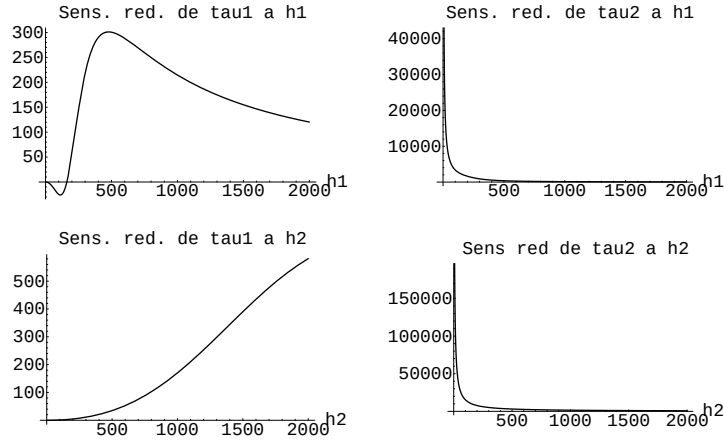


FIG. 3.20 – Sensibilités réduites de τ_1 et τ_2 à h_1 et h_2 .

Comme on pouvait le prédire pour un système d'équations différentielles (SED) linéaire du 1er ordre à deux variables, les évolutions sont des combinaisons linéaires d'exponentielles à deux constantes de temps $\tau_1 = 1/r_1$ et $\tau_2 = 1/r_2$.

Avec le jeu de paramètres choisis arbitrairement dans cet exemple, on a obtenu :

$\tau_1 \simeq 230.3 \text{ s}$ et $\tau_2 \simeq 871.3 \text{ s}$ ce qui donne un temps d'obtention du RP à 99% d'environ 4000 s, ce qui est bien observé. C'est donc τ_2 , mode le plus lent, qui impose au système son temps d'installation au RP, l'autre exponentielle e^{-t/τ_1} s'atténuant beaucoup plus vite.

On remarque que les évolutions du mur et du liquide sont nettement décalées dans le temps : le fluide n'atteindra une température donnée qu'après que le mur (plus directement soumis à l'influence de l'ambiante) l'ait atteinte. C'est "l'effet retard". Mais mur et fluide se rejoignent dans un même état de température au RP.

Dans certaines conditions, avec d'autres choix de paramètres conduisant par exemple à $\tau_1 \ll \tau_2$, le temps d'installation de l'évolution est "déterminé" par la constante la plus grande ; la plus petite (dont l'atténuation dans la dynamique est la plus rapide, les premières secondes ou fractions de seconde) ne comptera pas : dans ces cas de forte disparité entre TC (temps caractéristiques), les évolutions entre les deux sous-systèmes sont fortement couplées et leur évolution est identique. C'est ce qui se passerait notamment si le coefficient d'échange h_1 était très fort (contact thermique parfait) : le mur et le fluide évolueraient quasi identiquement sous l'influence de l'échange convectif "lent" avec le thermostat T_a .

sensibilités des temps caractéristiques aux paramètres du système. On peut aussi être intéressé par la sensibilité de ces TC τ_1 et τ_2 , qui déterminent la durée des phases temporelles, aux différents paramètres de contrôle du système.

Parmi les objectifs visés par une telle étude dans des systèmes complètement différents, on peut par exemple vouloir réduire la durée de phases de latence du système, ou de régénération dans des processus cycliques (cf. exemple du transformateur thermochimique : article ?? ?).

Toujours par dérivation directe, on peut obtenir les diagrammes de sensibilité de τ_1 et τ_2 par exemple aux deux coefficients d'échange h_1 et h_2 qui pilotent les "contacts" thermiques des deux corps à leur environnement.

On obtient les diagrammes de la fig. (3.20).

L'analyse de ces diagrammes est moins intuitive que les précédentes.

En ce qui concerne τ_2 les choses sont claires ; comme c'est le TC qui impose le temps d'installation du RP, on constate qu'il intervient également de façon importante dans les ordres de grandeur

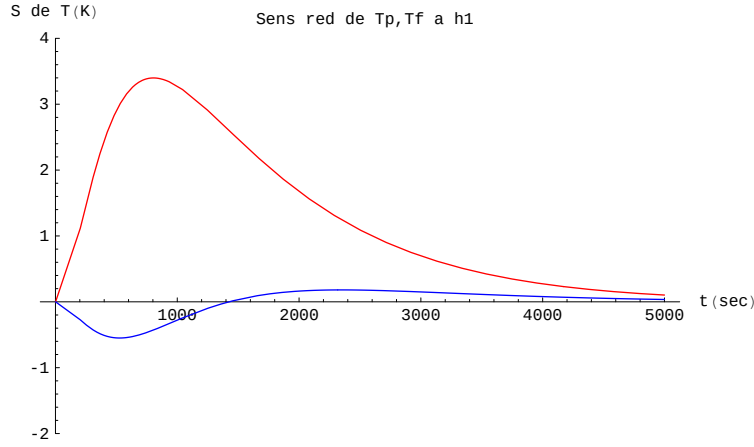


FIG. 3.21 – Comparaison des sensibilités réduites de T_w (trait plein) et T_f (pointillé) à h_1 .

des sensibilités : des valeurs de h_1 et/ou h_2 très petites, c'est-à-dire de très faibles couplages à l'environnement entraînent des augmentations énormes sur τ_2 , c'est-à-dire sur le temps d'installation du système. À l'inverse, des coefficients d'échange très élevés, c'est-à-dire un contact thermique parfait avec les sources, entraîne un raccourcissement à 0 du temps d'installation. Logique.

Dans les valeurs médianes de h_1 et h_2 prises pour cet exemple, les effets d'une perturbation des coefficients d'échange sont plus difficiles à interpréter.

sensibilités et couplages entre les deux sous-systèmes. On a dit qu'un des objectifs est d'analyser les couplages entre sous-systèmes à l'aide d'estimations quantitatives. Visiblement comme on vient de le voir, le couplage entre mur et liquide confiné passe par le transfert convectif $\varphi = -h_1 S(T_f - T_w)$.

Une façon indirecte d'évaluer l'influence de ce transfert sur l'évolution de l'un et de l'autre sous-système peut être d'étudier la sensibilité de $T_f(t)$ et $T_w(t)$ au paramètre h_1 qui intervient dans ce transfert.

On dispose des solutions analytiques pour les deux variables d'état, mais la dérivation directe donnant s_{T_f/h_1} ou s_{T_w/h_1} s'avère laborieuse et le résultat assez lourd (non détaillé ici). On a utilisé un logiciel de calcul formel pour aboutir.

Les courbes des deux sensibilités réduites (c'est-à-dire multipliées par h_1 pour pouvoir être comparées entre elles) sont représentées sur la (Fig. 3.21).

Du point de vue analyse d'ordre de grandeur, on remarque que les valeurs absolues $|s|_{max}$ sont assez disparates (rapport de 1 à 5). La sensibilité de la température moyenne du fluide (en pointillé) passe quant à elle par trois phases : décroissance, croissance, décroissance, c'est-à-dire qu'elle passe par deux extremums. Alors que la sensibilité à h_1 de la température moyenne du mur présente un diagramme assez comparable à celui d'un mur seul.

3.2.4 Exemple 3 : modèle cinétique de VERHULST

Les deux exemples précédents, conductifs, ont l'avantage (pour la résolution analytique) et le désavantage (pour la généralité de ce qu'ils exhibent) d'être des systèmes d'équations différentielles linéaires. Prenons résolument un système non-linéaire, mais (concession à la simplicité) à solution analytique.

Le modèle de VERHULST [4] est principalement rencontré dans l'étude de la "dynamique des populations" : il donne l'évolution d'une espèce de densité X en présence d'une autre espèce de densité Y qui lui sert de ressource ; les deux espèces forment un écosystème isolé.

Ce modèle sert également à la description de problèmes complexes tels que la compétition d'espèces dans une même niche écologique, aux études démographiques des sociétés humaines (ou d'insectes sociaux), etc.

Selon un autre point de vue, on peut l'apparenter à une simple équation de cinétique chimique comportant un terme de production et un terme de destruction qui suivent des lois stoéchiométriques. Il est construit sur les hypothèses suivantes :

1. la croissance de l'espèce étudiée X est proportionnelle à la ressource Y et ... à valeur même de sa densité de population X : $+kYX$ où k est un taux de croissance (en général annuel, sinon rapporté à une unité de temps notée *u.t.*) constant.
2. la décroissance $-DX$ de l'espèce, proportionnelle à sa densité, est due à un taux de mortalité fixe D .

La cinétique écologique de l'espèce s'écrit :

$$\frac{dX(t)}{dt} = kYX - DX$$

3. On fait l'hypothèse que la ressource variable, de densité Y se régénère entièrement à partir de la mortalité de X et se calque sur son évolution suivant une cinétique opposée :

$$\frac{dY(t)}{dt} = +DX - kYX$$

On en déduit une loi de conservation instantanée pour la biomasse totale : $X + Y = N = C^{te}$. à l'aide d'une seule évolution d'espèce :

4. Finalement le modèle de VERHULST peut s'écrire à l'aide d'une seule équation d'évolution de l'espèce X :

$$\frac{dX(t)}{dt} = (kN - D)X - kX^2 = AX - kX^2 \quad (3.11)$$

On peut faire apparaître le paramètre $A = (kN - D)$, combinant les trois paramètres k , N , D de départ du système, dont on ne sait pas s'ils sont ou non corrélés entre eux. A agit sur le terme linéaire alors que k agit sur le terme quadratique.

Par contre si on veut mettre en évidence des couplages entre processus (voir plus loin au paragraphe 4.5.5), un découpage en "mécanismes" ou cinétiques de création/extinction s'impose comme par exemple :

$$\frac{dX(t)}{dt} = G(X) = \underbrace{+kX(N - X)}_{\text{croissance (m1)}} \underbrace{-DX}_{\text{décroissance (m2)}} \quad (3.12)$$

ou encore :

$$\frac{dX(t)}{dt} = G(X) = \underbrace{+kNX}_{\text{croissance (m'1)}} \underbrace{-kX^2}_{\text{décroissance (m'2)}} \underbrace{-DX}_{\text{décroissance (m3)}} \quad (3.13)$$

remarque : le terme de croissance est référencé à partir d'une ressource constante N . Il est aussi évident que dans une analyse plus fine du mécanisme non linéaire de croissance, il est possible de distinguer deux processus essentiels :

- une croissance proportionnelle à la densité de population X et à la "ressource" N déterminée par kNX
- un sous-mécanisme de régulation pouvant s'interpréter comme la réponse à une surcroissance par un mécanisme atténuateur en $-kX^2$

La cinétique de décroissance $-DX$ correspond à une mortalité naturelle, à taux constant D .

On a pris dans l'application les valeurs suivantes :

$X_0 = 10$ (il s'agit d'"unités" de population = u.p.)

$N = 1000$ (de même dimension que X ou X_0 !)

$k = 0.0167 \text{ u.p./u.t.}$ et $D = 0.0113 \text{ u.p./u.t.}$ taux de croissance et décroissance par unité de temps (u.t.)

Ce modèle présente un certain nombre de caractéristiques intéressantes à la fois pour mener une étude analytique des sensibilités, des propriétés de stabilité, pour procéder à une analyse d'ordre de grandeur de ces cinétiques. C'est également un système dynamique connu pour présenter une bifurcation par fluctuations à l'origine, c'est-à-dire pour une condition initiale proche de 0.

solutions stationnaires :

Il est toujours intéressant de disposer des solutions stationnaires; celles-ci se déduisent rapidement :

$$\begin{cases} X = O \\ X_\infty = \frac{A}{k} = \frac{kN-D}{k} = N - \frac{D}{k} \simeq N \end{cases}$$

si k et D , paramètres de contrôle, sont petits devant N ; $k > D$ mais $k \simeq D$

La première solution est instable. La deuxième solution sera toujours atteinte dès qu'il y a fluctuation autour de la première : c'est un point fixe du système. Remarquons qu'elle dépend des trois paramètres : les sensibilités tendront asymptotiquement vers des limites finies.

analyse d'échelle

- **échelles** : on choisit des échelles pour la variable X et le temps t , telles qu'elles soient représentatives de la solution du système au régime permanent :

$$\begin{cases} X_{ref} = X_\infty = N - \frac{D}{k} \Rightarrow X = X_{ref} X^* \\ t_{ref} = 1/kN \Rightarrow t = t^*/kN \end{cases} \quad (3.14)$$

- **adimensionnalisation** : on remplace dans l' Eq. 3.13 :

$$X_{ref} \frac{dX^*(t)}{dt} = kN X_{ref} X^* - k(X_{ref} X^*) - D X_{ref} X^* \quad (3.15)$$

et on simplifie par $kN X_{ref}$, ce qui donne :

$$\frac{dX^*(t)}{dt^*} = X^* - \left(1 - \frac{D}{kN}\right) X^{*2} - \frac{D}{kN} X^* \simeq X^* - X^{*2} \quad (3.16)$$

La première remarque est qu'on fait apparaître un groupement adimensionnel $\frac{D}{kN}$ comportant (correlant) les trois paramètres d'origine : sous sa forme adimensionnelle, le modèle ne comporte qu'un seul paramètre de contrôle.

C'est sur cette équation adimensionnalisée qu'on peut le mieux hiérarchiser les mécanismes par analyse d'échelle : le premier mécanisme (1er terme du second membre) fait apparaître un coefficient adimensionnel de 1; le troisième est $\sim 10^{-3}$ et le second est ~ 1 . La conclusion que l'on peut tirer de l'analyse d'échelle classique est que le 3ème mécanisme peut être négligé devant les deux premiers, "sans perte majeure d'information" sur le comportement du système.

On va comparer les résultats de cette analyse d'échelle avec les sensibilités de la variable population aux différents paramètres du système.

Et d'abord exprimer $X(t)$ de façon analytique.

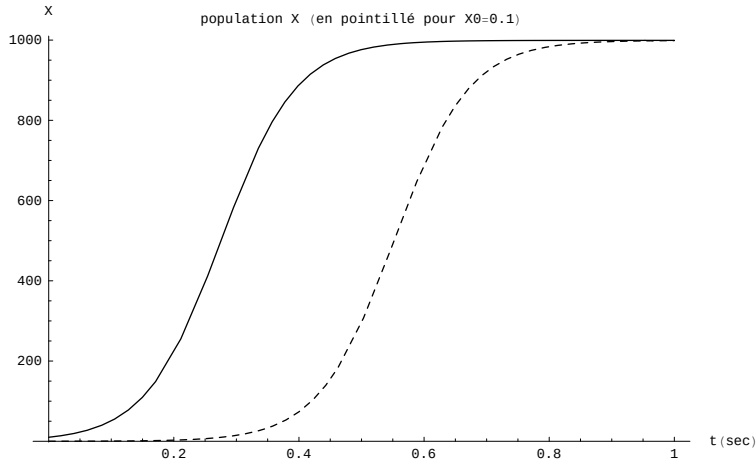


FIG. 3.22 – Evolution de la population selon le modèle de Verhulst [pour $X(0) = 10$ (trait plein) et pour $X(0) = 0.1$ (pointillé)]

solution analytique. On réécrit d'abord :

$$\frac{dX}{X(A - kX)} = dt \iff \left(\frac{dX}{X} + \frac{k dX}{A - kX} \right) = A dt \quad (3.17)$$

on obtient ensuite :

$$X(t) = \frac{AX_0 e^{At}}{A + kX_0(e^{At} - 1)} \quad (3.18)$$

vérification : $X(0) = X_0$ et

$$X(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{AX_0}{\frac{A + kX_0}{e^{At}} + kX_0} = \frac{A}{k}$$

L'évolution de la population au cours du temps est représentée sur la courbe fig. 3.22.

effet de la non-linéarité : L'effet de la non-linéarité est particulièrement visible en ce qui concerne l'influence de l'état initial sur la trajectoire : sur la Fig. 3.22 on voit comment diffèrent les évolutions de la densité de population de l'espèce X pour deux états initiaux de $X(0) = 10$ (trait plein) et pour $X(0) = 0.1$ (pointillé).

On illustrera cette sensibilité aux CI plus loin.

sensibilités de $X(t)$ aux différents paramètres. Reprenons (3.11) comme une équation d'évolution de la variable X sous la dépendance d'un jeu de paramètres :

$$\frac{dX}{dt} = (kN - D)X - kX^2 = AX - kX^2 = G(X, k, N, D) \quad (3.19)$$

avec $\vec{\Pi} = (k, N, D)$ vecteur des paramètres du système.

1. sensibilité au taux de croissance k

A l'aide d'un dérivateur formel on obtiendra une expression (assez compliquée) de cette sensibilité :

$$s_{X/k}^*(t) = k \frac{\partial X(t)}{\partial k} = \frac{kX_0 e^{At}}{[A + kX_0(e^{At} - 1)]^2} \{ D X_0 (e^{At} - 1) + AN t (A - kX_0) \} \quad (3.20)$$

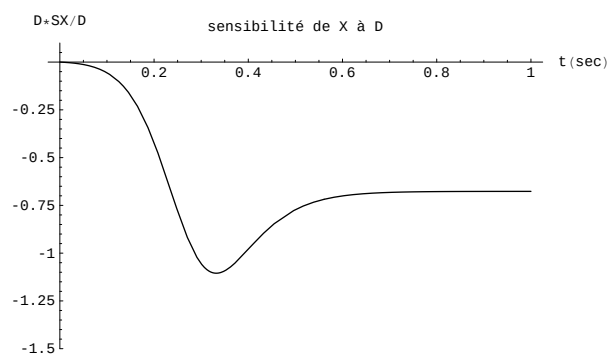


FIG. 3.23 – Sensibilité réduite de $X(t)$ au taux de mortalité D .

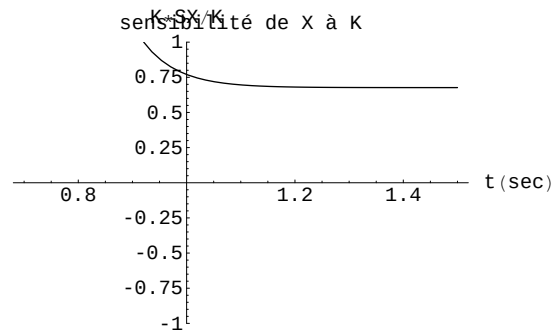
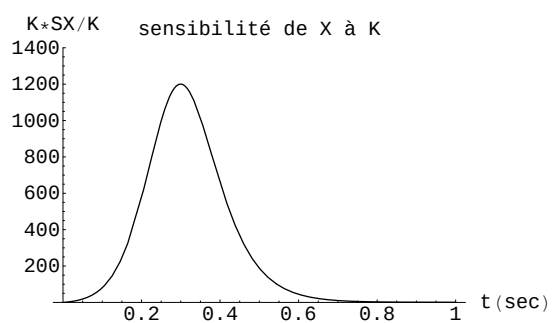


FIG. 3.24 – Sensibilité réduite de $X(t)$ au taux de croissance k .

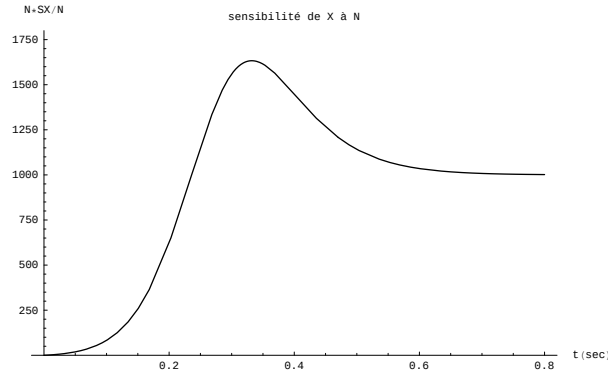


FIG. 3.25 – *Sensibilité réduite de $X(t)$ à la ressource constante N .*

d'où la valeur limite :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s_{X/k}^*(t) = \frac{kDX_0^2}{k^2X_0^2} = \frac{D}{k} \quad (3.21)$$

On remarque que cette sensibilité est indépendante de l'état initial.

On a représenté ci-dessous son graphe Fig. 3.24.

L'écrasement du à l'effet d'échelle masque un résultat important déjà visible sur la solution stationnaire : cette sensibilité réduite tend en fait vers une limite finie = 0.6766, comme on peut le voir sur la figure de droite.

2. sensibilité au taux de mortalité D

De la même façon on obtiendra par dérivation directe de (3.11) la sensibilité au taux de disparition D . On a représenté ci-contre son graphe (fig. 3.23). Attention de remarquer la faible amplitude de cette sensibilité.

3. sensibilité à la ressource fixe N

On obtient le diagramme ci-dessous (fig. 3.25).

Il paraît alors utile de représenter les trois diagrammes ensemble, sur une même échelle en semi-log, de façon à comparer les ordres de grandeur des sensibilités réduites. La sensibilité au taux de mortalité D étant négative, on a représenté sa valeur absolue en pointillés. Le diagramme de comparaison des sensibilités a cette fois l'allure suivante (fig. 3.25).

Ce qu'on peut dire à l'observation c'est qu'on retrouve les échelles de 1 à 1000 pour les sensibilités à k et D évoquées dans l'analyse d'échelle au début de l'étude sur ce modèle, du moins dans la phase initiale c'est-à-dire jusqu'à $t = 0.25 u.t.$ Mais l'écart se réduit assez vite pour aboutir à une identité (au signe près) pour $t > 1 u.t.$

De là à dire que les sensibilités aux paramètres du système peuvent servir à hiérarchiser le rôle des processus dans la dynamique, il y a un grand pas à ne pas franchir : on ne peut confondre le paramètre associé à un processus et le processus lui-même. Mais l'indication donnée par les sensibilités est intéressante.

sensibilités de $X(t)$ à l'état initial X_0 . Enfin, on peut également étudier la sensibilité à la condition initiale pour ce système dont on a dit qu'il présente une instabilité connue si l'état initial est voisin de 0.

Pour illustrer cette propriété, on étudie deux cas initiaux : $X_0 = 10$ et $X_0 = 0.1$. On constate en effet que pour la seconde valeur, la sensibilité devient extrême (observer son échelle) et de plus le pic de sensibilité se translate vers les grands temps.

On obtient les deux diagrammes de la Fig. 3.27 :

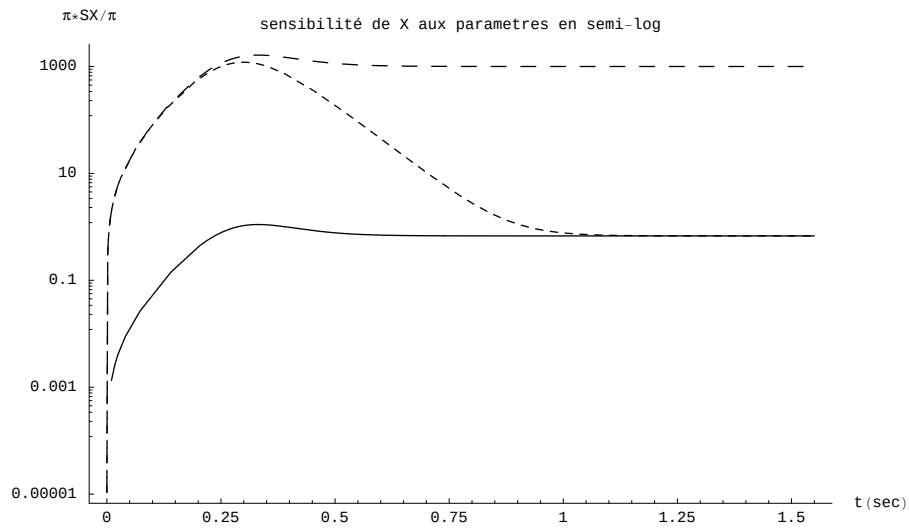


FIG. 3.26 – Sensibilités réduites comparées de $X(t)$ à ses trois paramètres (à N : pointillés larges, à k petits pointillés et à D trait plein).

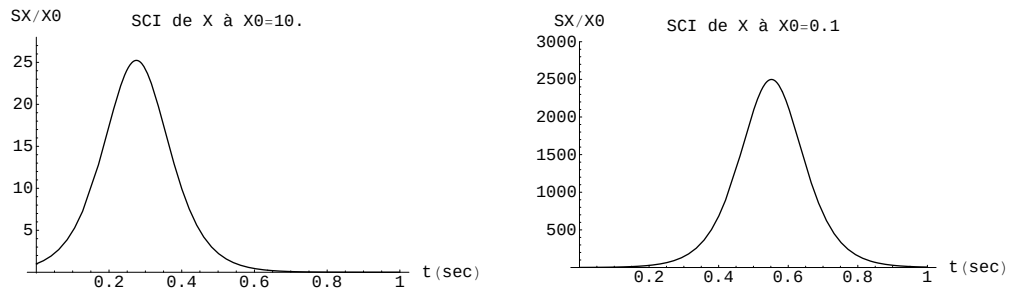


FIG. 3.27 – Sensibilité réduite de $X(t)$ à l'état initial X_0 .

3.2.5 modèles de sensibilités

Il existe une voie moins simple que la dérivation directe pour obtenir l'évolution des sensibilités.

Il faut au préalable remarquer que les problèmes donnant lieu à solutions analytiques sont rarissimes, et qu'il faut disposer d'un dérivateur formel puissant (en général intégré dans un logiciel de calcul formel) pour aller au bout des calculs et les présenter sous forme compacte et lisible.

Pour les systèmes à grand nombre d'équations d'évolution, le recours passe naturellement par les modèles numériques. Comment s'en sortir dans ces situations ? La solution consiste à construire un nouveau modèle répondant à la question : connaissant le modèle d'évolution des variables d'état (3.1), on peut construire un modèle associé de sensibilités. Prenons le cas d'un système autonome (c'est-à-dire où le second membre de (3.1) ne dépend pas explicitement du temps) :

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = f(\eta, \pi)$$

On tire par dérivation partielle des deux membres par rapport à la perturbation souhaitée (paramètre, état initial, conditions extérieures, etc.) par exemple ici π_1 :

$$\frac{\partial}{\partial \pi_1} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \eta}{\partial \pi_1} \right) = \frac{\partial}{\partial \pi_1} f(\eta, \pi) = \frac{\partial f}{\partial \pi_1} + \overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial \eta}}} \frac{\partial \eta}{\partial \pi_1}$$

(le symbole à deux barres au dessus de l'objet indique que celui-ci est de nature matriciel ou tensoriel).

soit finalement le modèle de sensibilité :

$$\frac{\partial s_{\eta/\pi_1}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \pi_1} + \overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial \eta}}} s_{\eta/\pi_1}$$

Malgré son apparente forme linéaire, ce modèle est généralement **non-linéaire** (même si le modèle d'évolution des η est linéaire) : cette non-linéarité se produira dès que $\overline{\overline{\frac{\partial f}{\partial \eta}}}$ est fonction du temps.

Dans certains cas le paramètre dont on veut étudier l'influence sur le système ne figure pas dans le propagateur mais dans les conditions aux limites : il faudra passer par leur prise en compte indirecte.

Exemple de modèle de sensibilité concernant le mur conducteur de l'exemple 1 (cf. ci-dessus) Son équation d'évolution (de la température moyenne) avait été établi sous la forme :

$$\rho c e \frac{dT_m(t)}{dt} = \dot{q} - h(T_m(t) - T_a)$$

Supposons qu'on s'intéresse à la sensibilité au flux appliqué $s_{T_m/\dot{q}}(t) = s$ et qu'on construise son modèle :

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial \eta} s = \frac{1}{\rho c e} - \frac{h}{\rho c e} s = -\frac{h}{\rho c e} \left(s - \frac{1}{h} \right) = -\frac{1}{\tau} \left(s - \frac{1}{h} \right)$$

Dans ce cas particulièrement simple (où $\frac{\partial f}{\partial \eta} = Cte$) l'intégration de ce modèle de sensibilité donnera :

$$s(t) = \left(\frac{1}{h} \right) (1 - e^{-t/\tau}) \blacksquare$$

qui est bien le résultat obtenu ci-dessus.

3.3 Dynamique des systèmes versus diagrammes de sensibilités.

Qu'est-ce que ces études de sensibilités nous ont apporté du point de vue de l'analyse du comportement dynamique du système ?

3.3.1 Mise en évidence de phases dans l'évolution

Diagrammes à plusieurs pics. Les allures de diagramme en $t e^{-t/\tau}$ se retrouvent assez souvent pour les systèmes différentiels **linéaires** (cf. exos ci-dessus). Le temps de retour à l'insensibilité du système à ce paramètre (ou à l'équilibre, au RP,...) est une indication intéressante pour l'analyse du comportement dynamique du système.

Les instants τ où se rencontrent les extremums de sensibilité du système à un paramètre donné permettent de repérer de bons créneaux temporels pour effectuer des mesures conduisant à "identifier" ou estimer (par ajustement modèle-expérimentation) le paramètre considéré.

3.3.2 Mise en évidence de moyens de contrôle sur l'état au RP du Σ .

Diagrammes de sensibilités à limite asymptotique non nulle. Dans divers cas (illustrés par les courbes fig. 3.16 ou fig. 3.17 par exemple), l'état final est définitivement décalé par la perturbation $\Delta\pi$ du paramètre.

Ce type de diagramme de sensibilité indique qu'on dispose avec ce paramètre π d'un moyen de contrôler l'état du système au RP ; c'est un véritable paramètre de contrôle du système. A l'aide de ce "potard", on peut jouer en positif ou en négatif sur le RP dans le sens d'une "optimisation" (au sens des performances visées par le concepteur du système) en fonction de critères donnés.

3.3.3 Comparaisons qualitatives/quantitatives entre diagrammes de sensibilité

Pour comparer il faut tout d'abord dimensionner les s de façon qu'elles soient comparables, puisqu'au départ $\dim[s] = \dim[\frac{\eta}{\pi}]$. La solution la plus courante consiste à utiliser des **sensibilités réduites** définies par :

$$\bar{s}_{\eta/\pi} = \pi_{ref} s_{\eta/\pi} \Rightarrow \dim[\bar{s}] = \dim[\eta]$$

On peut alors comparer deux, trois diagrammes de sensibilités et les hiérarchiser c'est-à-dire ordonner les influences de divers paramètres sur une même observable.

Les diagrammes à plusieurs sensibilités réduites permettent également de déduire si les sensibilités sont proportionnelles (courbes affines l'une de l'autre) : dans ce cas les paramètres concernés sont corrélés entre eux (ne sont pas indépendants) et on ne peut pas séparer leur influence sur la dynamique du système (cf. diagramme de la fig. 3.15).

Autre exemple de paramètres corrélés : dans une ailette utilisée de nombreux dispositifs de refroidissement, on ne peut pas séparer au sein du matériau l'influence de λ de celle de ρc : les deux sont corrélés par l'intermédiaire de la diffusivité $\alpha = \frac{\lambda}{\rho c}$: les sensibilités $s_{T/\lambda}$ et $s_{T/\rho c}$ ont des allures complètement homothétiques.

Démonstration de l'homothétie des sensibilités dans le cas de paramètres corrélés Si dans l'évolution formulée sous la forme (3.2), le propagateur est tel que figure dans le vecteur π le groupement des paramètres (ab) , c'est-à-dire se présente sous la forme $\mathcal{P}(t, t_0, (ab))$, alors on peut calculer les sensibilités à a et b par dérivation directe du propagateur $\mathcal{P}$. On a tout d'abord :

$$s_{\eta/a} = \frac{\partial \mathcal{P}(t, t_0, (ab))}{\partial a} \eta_0 = b \frac{\partial \mathcal{P}(t, t_0, (ab))}{\partial (ab)} \eta_0$$

et de même :

$$s_{\eta/b} = \frac{\partial \mathcal{P}(t, t_0, (ab))}{\partial b} \eta_0 = a \frac{\partial \mathcal{P}(t, t_0, (ab))}{\partial (ab)} \eta_0$$

On en déduit le résultat précisément que les deux sensibilités sont affines : $a s_{\eta/a} = b s_{\eta/b}$. ■

Résultat subsidiaire important dans la pratique : les sensibilités réduites (définies par $s_{\eta/\pi}^*$ = $\pi s_{\eta/\pi}$) relatives à deux paramètres parfaitement corrélés sont strictement identiques (voir la figure 3.15).

3.3.4 quelques conclusions sur "l'outil" sensibilité ???

En tant que moyen d'illustration de la réponse du système à des perturbations de ses paramètres, les études de sensibilité constituent un outil d'exploration indispensable.

Les études de sensibilité sont d'ailleurs de plus en plus présentes dans les publications et présentations qui se fixent pour but d'éclairer le fonctionnement d'un système soumis à perturbations. Il n'est que de rappeler la forme de la question posée sur la sensibilité du climat de la planète (à travers l'observable température moyenne annuelle de l'atmosphère) à l'augmentation du taux de CO_2 sous l'action des effluents dus à l'activité humaine.

En tant qu'outil d'analyse des processus internes, la question se pose de savoir si les études de sensibilité permettent à elles seules de révéler des résultats contre-intuitifs dans le comportement du système qu'une longue expertise ne permettrait pas de déceler...

Nous allons voir que d'autres outils peuvent compléter avantageusement les données représentées à l'aide des diagrammes de sensibilité.

Chapitre 4

Couplages

(par Jean-Louis Joly)

Avant d'aborder une formulation en évolutions d'état et transferts propre à satisfaire les besoins en analyse-système, nous allons faire une parenthèse mathématique -et numérique- et examiner rapidement la solution des systèmes différentiels sous l'angle des algorithmes d'avancement dans le temps.

4.1 Résolution au fil du temps et système linéarisé tangent (SLT)

rappel sur les algorithmes de résolution dans le temps. Le plus généralement, l'étude du comportement des systèmes différentiels non linéaires passe par l'étude des trajectoires obtenues par voie numérique.

Les algorithmes de résolution numérique de l'équation Eq. 4.1 sont nombreux.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = f(\eta) \quad (4.1)$$

La condition initiale $\eta(t_0) = \eta_0$ est supposée connue.

(On se limite pour simplifier au cas des systèmes différentiels autonomes c'est-à-dire dans lesquels il n'y a pas de dépendance explicite à t dans la fonctionnelle du second membre $f()$. Tous les résultats qui suivent peuvent être étendus au cas des systèmes non autonomes.)

Une grande classe de ces algorithmes est dite "algorithmes à un pas de temps"; ils procèdent par avancement de l'état du système pas par pas, en passant de t_n à $t_n + \delta t$ selon la formule :

$$\eta(t_n + \delta t) = \eta(t_{n+1}) = \eta(t_n) + \delta t \Phi(\eta, t, \delta t)$$

où Φ est une fonctionnelle possédant les mêmes propriétés que f .

On peut aussi récrire :

$$\delta \eta(t_{n+1}) = \delta t \Phi(\eta, t, \delta t)$$

La question est d'optimiser au mieux la "direction" que doit suivre l'accroissement fini rectiligne $\delta \eta^*$ pour atteindre une valeur approchée $\eta^*(t_{n+1})$ aussi près que possible de la solution exacte $\eta^{SD}(t_{n+1})$: voir la figure Fig. 4.1.

Les "schémas" numériques temporels proposant une valeur de tirage Φ se répartissent en deux types :

- explicites : où Φ fait appel à une combinaison de valeurs connues en t_n , c'est-à-dire par exemple de la fonction f ou de sa courbure,
- implicites : où Φ combine la connaissance de valeurs connues en t_n et de valeurs totalement ou partiellement connues en t_{n+1} telle que $f(t_{n+1})$, ce qui nécessite la résolution d'un système algébrique implicite.

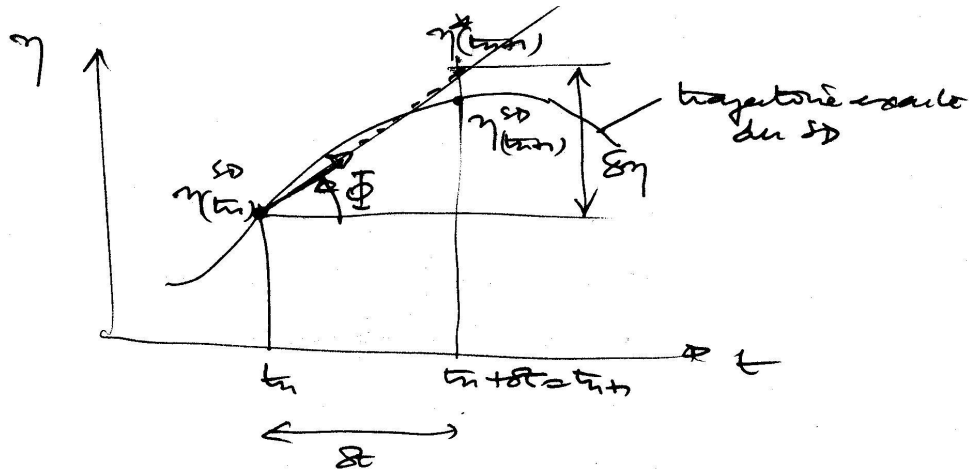


FIG. 4.1 – Trajectoire schématisée d'un système.

Tous ces schémas s'appuient plus ou moins sur une image linéarisée de ce qui se passe entre les instants t_n et $t_n + \delta t$.

système linéarisé tangent à tout instant t_n . Une autre approche construit à tout instant t_n un système linéarisé tangent dont la trajectoire reste voisine de celle du système différentiel initial, sur une portion courte de la trajectoire au delà de t_n comme le montre la figure Fig. 4.2. Très rapidement système dynamique (supposé non linéaire) et système linéarisé tangent ont des trajectoires qui divergent.

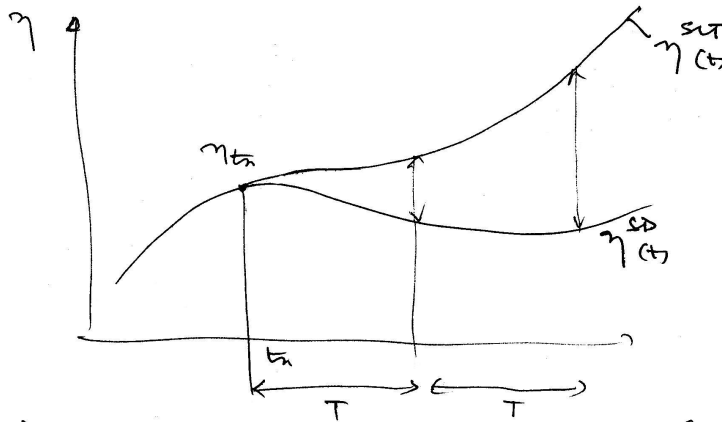


FIG. 4.2 – Approche de la trajectoire en un point par SLT.

Comment construire un tel système linéarisé tangent ?

La formulation mathématique d'un tel système linéarisé tangent s'obtient par accroissement fini (par développement de TAYLOR au premier ordre) de la formulation Eq. 4.1 :

$$\frac{\partial \delta \eta(\tau)}{\partial t} = f|_{t_n} + \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{t_n} \delta \eta(\tau)$$

où la variable temps est $\tau = t_n + t$ qui $\in [t_n, t_n + \delta t]$ et la variation dans le temps de la variable d'état η est définie par : $\delta \eta(\tau) = \eta(\tau) - \eta(t_n)$.

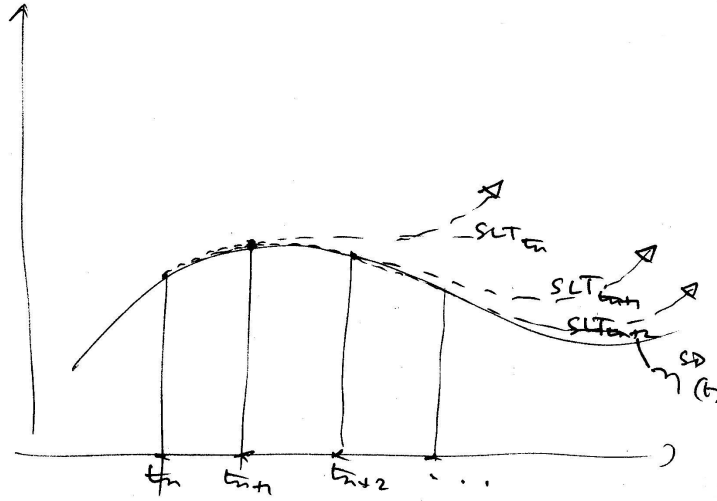


FIG. 4.3 – Approche de la trajectoire à tous instants par SLT successifs.

La propriété essentielle du système linéarisé tangent est ... d'être un système différentiel linéaire, propriété qui va être déclinée sous plusieurs formes pour fournir solutions et outils d'analyse.

On en déduit une procédure de construction, pas par pas, de la trajectoire d'un système différentiel non-linéaire à l'aide de systèmes linéarisés tangents successifs, créés à chaque nouvel instant t_{n+1} , t_{n+2} , t_{n+3} ... comme le montre la figure Fig. 4.3.

avancement dans le temps. Le système linéarisé tangent étant linéaire, sa solution peut être obtenue par une des nombreuses voies mises aux point sur les systèmes différentiels linéaires, notamment le calcul opérationnel par transformée de LAPLACE (ou d'autres transformées voisines).

On choisit la transformée de BOREL-LAPLACE définie par :

$$f(t) \xrightarrow{\mathcal{B}} \mathcal{B}(f(t)) \text{ ou } \tilde{f}(\tau) = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-t/\tau} f(t) dt = \frac{1}{\tau} \hat{f}(\frac{1}{\tau}) \quad (4.2)$$

Dans cette transformée, l'avantage est que τ la variable de BOREL, est homogène à un temps ¹ et qu'elle est très simplement reliée à $\hat{f}(p)$ la transformée de LAPLACE.

En fait, on utilisera de façon équivalente une autre transformée de type BOREL, pour laquelle on change l'échelle de temps et telle que :

$$\mathcal{B}^*(\tau) = 2 \mathcal{B}(\tau/2)$$

Dans ce cas, la solution exacte du système linéarisé tangent en t_n se déduira, après résolution de l'équation **algébrique** implicite suivante :

$$\widetilde{\delta \eta(\tau)} = \tau f|_{t_n} + \frac{\tau}{2} \left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{t_n} \widetilde{\delta \eta(\tau)} \quad (4.3)$$

par l'application d'une transformée inverse sur $\widetilde{\delta \eta(\tau)}$.

En ce qui concerne la mise en oeuvre numérique, la charge de travail n'est pas si lourde : il faut recalculer à chaque nouvel instant (et stocker ²) la fonction $f|_{t_i}$ et en plus la matrice jacobienne (ou Jacobien) $\left. \frac{\partial f}{\partial \eta} \right|_{t_n}$ qui pour un système donné se calcule récursivement de la même manière.

¹ alors que p la variable de LAPLACE est homogène à $1/t$

² ce que tous les autres types d'algorithmes sont aussi contraints de faire...

On va voir "qu'une fois ce prix payé" cette matrice jacobienne va pouvoir être utilisée de façon multiple pour produire de l'information sur sensibilités, couplages, etc.

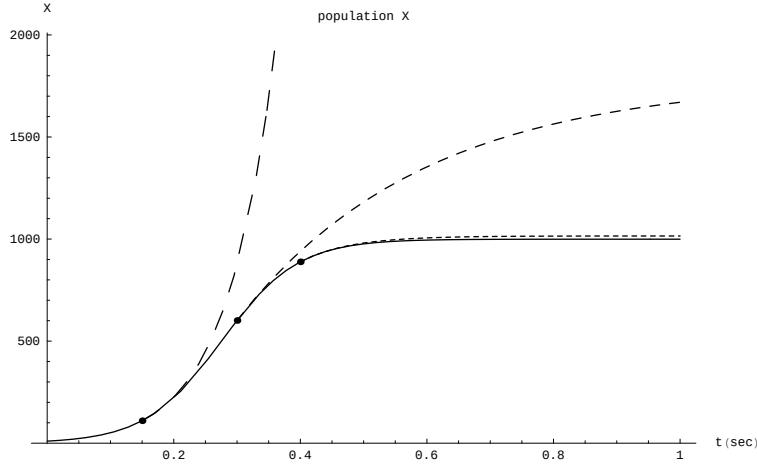


FIG. 4.4 – *Approche de la trajectoire de VERHULST par SLT successifs.*

application au modèle de VERHULST. On montrerait sans difficulté que la solution du système linéarisé tangent initié à l'instant t_n est donnée par :

$$\delta X(t) = \frac{(AX_n - kX_n^2) [e^{(A-2kX_n)(t-t_n)} - 1]}{(A - 2kX_n)}$$

On a représenté ci-dessous plusieurs évolutions de la population X obtenues par système linéarisé tangent démarrant successivement à des temps t_i de $0.15 u.t.$, $0.3 u.t.$ et $0.4 u.t.$. On observe bien sur la Fig. 4.4 que les trajectoires au long terme de ces SLT sont très éloignées de celle du système non-linéaire de référence. Mais en réduisant l'intervalle de validité de ces trajectoires sur de petits δt on conçoit qu'on restera à tout instant aussi près que l'on veut de la trajectoire de VERHULST.

4.2 Introduction aux couplages

4.2.1 Sensibilités ou couplages ?

retour sur sensibilités On a vu précédemment, dans le cas du système unique sur lequel agit un environnement qu'il est possible d'extraire de l'information sur le comportement du système (lié à ses conditions extérieures ou forçages φ_{ext} , défini par ses paramètres π et par ses conditions initiales η_0) à l'aide des sensibilités.

On peut récrire cette information sur la réponse du système perturbé sous la forme :

$$\eta_p(t) = \eta_{ref}(t) + s_{\eta/\pi}(t) \delta \pi \quad (4.4)$$

où $\eta_p(t)$ représente l'évolutions perturbée du système, $\eta_{ref}(t)$ l'évolution de référence -sans perturbation ici du paramètre-, $s_{\eta/\pi}(t)$ la sensibilité et $\delta \pi$ la petite perturbation imposée au paramètre.

Les autres types de sensibilités (SCI, sensibilités aux forçages) pourraient être étudiées de la même façon.

Pour décrire ces trajectoires perturbées ou de référence, on peut aussi bien travailler en variations temporelles par rapport à un instant origine (au début de l'observation).

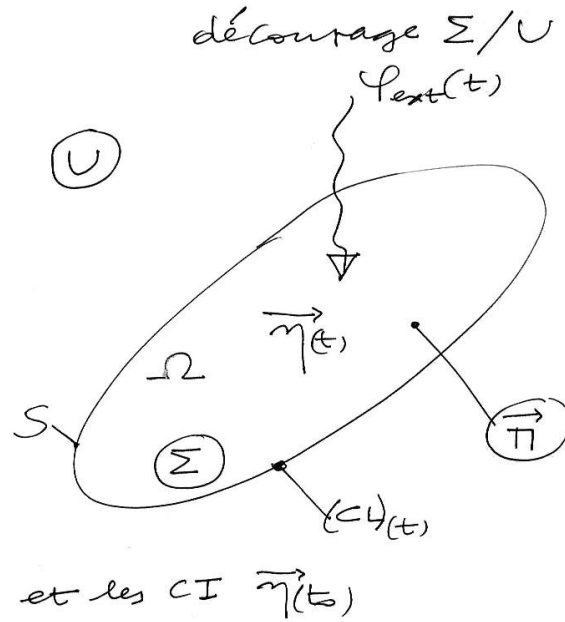


FIG. 4.5 – représentation schématique d'un système.

remarque : En fonction des besoins de l'étude, ce temps origine peut aussi se situer quelque part au milieu de l'évolution complète du système . Dans ce cas les variations sont simplement définies entre deux instants. Par définition : $\delta \eta(t) = \eta(t) - \eta(t_0)$.

On écrit :

$$\boxed{\delta \eta_p(t) = \delta \eta_{ref}(t) + s_{\eta/\pi}(t) \delta \pi} \quad (4.5)$$

structuration en sous-systèmes Cependant, il est clair que la représentation du système unique simplifié de la Fig. 4.5 masque pour la plupart des systèmes une sous-structuration en sous-systèmes de plus ou moins grande complexité.

Ainsi par exemple pour ne visualiser que quelques sous-systèmes et interfaces internes, on peut représenter cette structuration (ici à deux niveaux d'emboîtement seulement) par le schéma suivant Fig. 4.6 : on voit apparaître un sous-système Ω_1 et un second sous-système composé à son tour de deux sous-systèmes Ω_2 et Ω_3 reliés par une interface I_{1-2} . Chacun des sous-systèmes "voit" ses propres conditions aux limites (CaL sur le schéma) comme par exemple pour le sous-système Ω_2 les conditions aux limites CaL_{1-2} , ainsi que d'autres CaL à sa frontière Σ_2 et une partie des forçages φ_{ext} .

A ce niveau, deux remarques :

remarque 1 : le découpage géométrique du domaine Ω en sous-domaines disjoints mais dont l'union constitue le système global permet l'application de méthodes relevant de la physique mathématique (cf. méthode de décomposition de domaines) : on établit alors des critères mathématiques pour justifier cette structuration (existence, unicité des solutions, convergence des solutions approchées, etc.).

Pour satisfaire ces critères, lors de la procédure de découpage du système complet en sous-systèmes (ou réciproquement, d'assemblage de sous-systèmes pour former le système global), on a vu qu'il fallait porter une grande attention aux **critères de raccordement**. On les rappelle :

- chacun des sous-systèmes doit constituer à lui seul un "problème bien posé" (au sens mathématique du terme) : une fois définis ses conditions aux limites, ses forçages extérieurs, et ses conditions

initiales son évolution doit être complètement déterminée..

On peut dire aussi que son évolution découplée du reste du système doit pouvoir être établie indépendamment.

- les conditions de raccordement aux interfaces doivent être construites de telle sorte qu'après assemblage, les évolutions de chacun des sous-systèmes soit les plus proches possibles de celles observées pour le système unique non découpé. Ce critère, et la caractérisation des "erreurs" entre les deux types d'évolution, peuvent être fondés mathématiquement dans le cadre de l'analyse fonctionnelle différentielle (cf. théorie de Cacuci [2]).

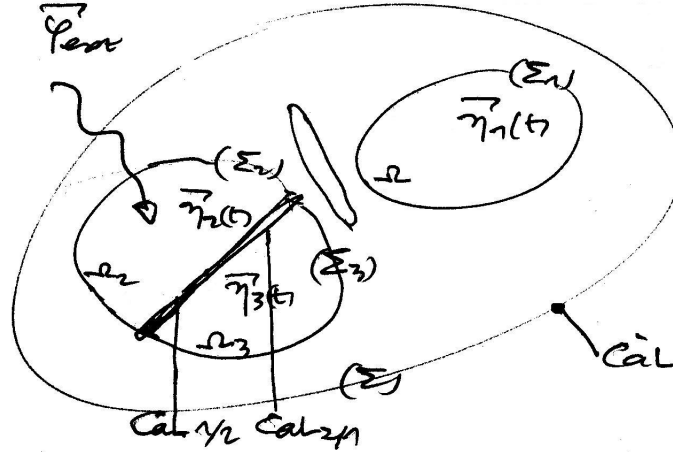


FIG. 4.6 – Schéma d'un système découpé en sous-systèmes.

remarque 2 :

Le découpage en sous-domaines n'est pas la seule forme souhaitée de "coupure" mettant en évidence les couplages : cf. Intro générale paragraphe (1.3). Le couplage/découplage entre processus physiques fait aussi partie des objectifs d'analyse du comportement du système .

couplages entre variables. Une fois mise en place, cette structuration fait apparaître à la fois des variables d'état η_i internes à chacun des sous-systèmes , mais aussi des variables de transferts aux interfaces φ_I entre sous-systèmes .

Ce qu'on peut maintenant envisager d'extraire c'est de l'information sur l'évolution couplée entre variables d'état ou entre variables d'interfaces. Sur le modèle de la définition des sensibilités apparaissant dans l'Eq. 4.5, on ferait alors idéalement apparaître des coefficients de couplage variant dans le temps et qui seraient porteurs de cette information.

Par exemple ³ pour le couplage de deux variables d'état quelconques 1 et 2 :

$$\delta \eta_{1,p}(t) = \delta \eta_{1,ref}(t) + c_{\eta_1/\eta_2}(t) \delta \eta_2(t) \quad (4.6)$$

Il en serait de même pour des interfaces I et J et les variables de transfert correspondantes :

$$\boxed{\delta \varphi_{I,p}(t) = \delta \varphi_{I,ref}(t) + c_{\varphi_I/\varphi_J}(t) \delta \varphi_J(t)} \quad (4.7)$$

4.2.2 L'évolution découplée des états.

Quelle évolution de référence pour les couplages ?

³rappel : toutes les notations ci-dessous sont simplifiées. Le caractère tensoriel de chaque terme -vecteur ou matrice- ne doit pas être oublié !

Pour les sensibilités le choix de l'évolution de référence était simple : celle où les paramètres étaient ceux de la configuration initiale, non perturbée.

Mais pour les couplages entre variables internes de type variable d'état ou variable de transfert, ce choix n'est plus adéquat : il faut définir une autre référence.

reprise de l'Exemple 2 : paroi séparant deux fluides.

En appliquant l'esprit précédent, on aimerait savoir comment la réponse $\delta T_f(t)$ du sous-système fluide serait influencée par une perturbation portant sur $T_w(t)$ la température de mur, en faisant par exemple apparaître un coefficient de couplage de la forme $c_{T_f/T_w}(t)$; on établirait alors une relation de variation du type :

$$\delta T_{f,p}(t) = \delta T_{f,ref}(t) + c_{T_f/T_w}(t) \delta T_w(t)$$

Quel sens donner dans cette relation à l'évolution de référence $T_{f,ref}(t)$ ou $\delta T_{f,ref}(t)$? Ce ne pourrait être que l'évolution de T_f sans perturbation de $T_w(t)$, c'est-à-dire sans la variation $\delta T_w(t)$ imposée arbitrairement. La référence qui va devoir s'imposer est alors l'évolution de la température du fluide découplée de celle du mur ou encore insensible aux perturbations de la température du mur.

On va définir l'évolution découplée des variables d'état comme l'évolution que suivrait le système (ou le sous-système) d'étude, si tous les forçages et conditions aux limites restaient figées à leur valeur à l'instant initial.

reprise de l'Exemple 1 : mur conducteur 1D.

L'évolution de la température moyenne était donnée par :

$$\rho C_e \frac{dT_m(t)}{dt} = \dot{q} - h(T_m(t) - T_a)$$

où figurent dans le second membre $G(\dot{q}, \varphi_{conv})$ un flux fixe à gauche $\dot{q}$ et à droite un flux convectif $\varphi_{conv} = -h(T_m(t) - T_a)$ dépendant du temps.

Suivant la définition précédente, l'évolution découplée sera déterminée à partir de l'équation différentielle où on prend pour flux convectif à tout instant $\varphi_{conv} = -h(T_0 - T_a)$ c'est-à-dire qu'on prolonge sur tous les temps celui observé à l'instant $t = 0$:

$$\rho C_e \frac{dT_{m,dec}(t)}{dt} = \dot{q} - h(T_0 - T_a)$$

dont la solution sera donnée simplement par une évolution linéaire en temps :

$$T_{m,dec}(t) = \frac{\dot{q} - h(T_0 - T_a)}{\rho C_e} t + T_0$$

reprise de l'Exemple 3 : modèle de VERHULST.

Rappelons le modèle de VERHULST :

$$\frac{dX(t)}{dt} = G(X(t)) = \underbrace{kX(N - X)}_{\text{croissance}} \underbrace{- DX}_{\text{décroissance}}$$

L'évolution découplée est l'évolution que suivrait la population X si toutes les cinétiques (de croissance et décroissance) restaient figées à leur valeur à l'instant initial $t_0 = 0$ c'est-à-dire si le second membre $G(X(t)) = kX(N - X) - DX$ prenait en tous temps la valeur $G_0 = kX_0(N - X_0) - DX_0$.

Dans ce cas, l'évolution découplée est solution de l'équation

$$\frac{dX_{dec}(t)}{dt} = G(X_0) = G_0$$

et s'exprime simplement par :

$$X_{dec}(t) = G_0 t + X_0$$

ou encore en variations temporelles :

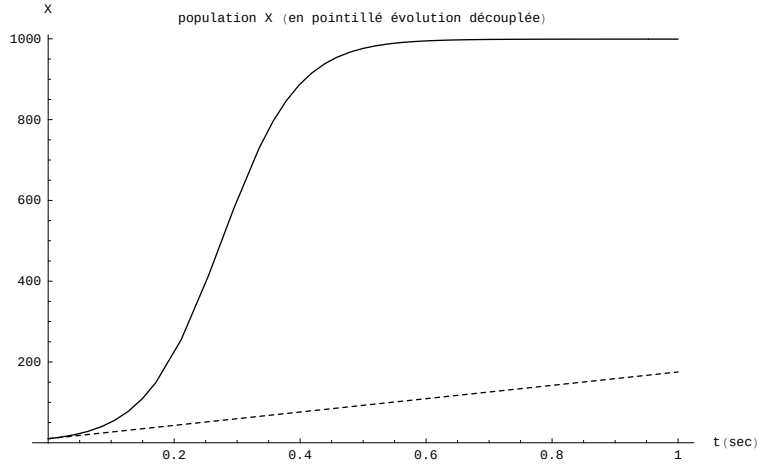


FIG. 4.7 – *Evolution découplée (en pointillé) de la population X de l'espèce.*

$$\delta X_{dec}(t) = X_{dec}(t) - X_0 = G_0 t$$

Le graphe suivant Fig. 4.7 montre en pointillé une telle évolution découplée.

Deux remarques :

rem 1 :

On peut observer que cette référence "évolution découplée" n'est pas porteuse d'une signification physique très riche en ce qui concerne le comportement du système ; on pourrait en dire de même pour la reprise de l'Exemple 1 du mur conducteur 1D.

rem 2 :

On peut aussi remarquer que tout dépend de ce qu'on range ou ne range pas dans les forçages extérieurs : on pourrait tout à fait considérer que la croissance est un processus interne et que la cinétique de décroissance est un forçage externe variant dans le temps, et alors il faudrait repenser le modèle sous la forme :

$$\frac{dX(t)}{dt} = G(X(t)) = kX(N - X) + \varphi_{décroissance}$$

avec $\varphi_{décroissance} = -DX(t)$

dans ce cas l'évolution découplée serait plutôt solution de l'équation différentielle non-linéaire :

$$\frac{dX_{dec}(t)}{dt} = G(X_{dec}, \varphi_{décroissance}(t=0))$$

ce qui aboutirait à une évolution découplée très différente.

On constate que cette notion d'évolution découplée est tributaire de la façon dont on pense le système , c'est-à-dire dont on le découpe et modélise en variables internes (variables d'état) et variables externes (variables de transfert) comme nous allons le voir.

4.2.3 Les couplages dynamiques $c_{\eta_1/\eta_2}(t)$ ou $c_{\varphi_I/\varphi_J}(t)$.

On peut penser au vu de la relation Eq. 4.6 ou Eq. 4.7 que l'on a rempli l'objectif fixé plus haut de disposer d'un outil complet d'analyse de couplage. Cet objectif peut-il être rempli ? En fait, non.

En effet, on ne peut à la fois suivre l'influence d'une perturbation ⁴ de $\delta\eta_2(t)$ sur l'évolution $\delta\eta_1(t)$ telle que la décrit la relation Eq. 4.6 et considérer que le comportement global du système

⁴variable dans le temps

n'a pas été modifié par cette perturbation : en fixant une évolution perturbée à η_2 on a supprimé la rétroaction -on a coupé la boucle de rétroaction- entre les deux variables d'état ce qui a détruit l'évolution couplée initiale.

On a changé le modèle d'évolution du système .

On se trouve devant la contradiction suivante :

- fixer une loi temporelle de perturbation arbitraire forcée $\delta \eta_2(t)$, c'est recueillir une information intéressante sur la réponse du système si la variable **interne** η_2 était perturbée au fil du temps.

On peut remarquer que la procédure de perturbation est très différente dans les études de sensibilité où on fixe des écarts définitifs aux paramètres ou aux forçages.

- mais fixer une perturbation arbitraire $\delta \eta_2$, c'est perdre l'évolution couplée entre $\delta \eta_2$ et $\delta \eta_1$, c'est changer le modèle d'évolution du système .

Le choix de la loi temporelle forcée qu'on est amené à imposer à $\delta \eta_2$: step, impulsion en Dirac, etc. n'est pas non plus sans effet sur la qualité et l'interprétation tirées des informations recueillies lors de l'analyse de couplage.

4.2.4 En conséquence, quels critères pour la construction de modèles ?

Dans ces conditions, quel type de modélisation faut-il envisager pour l'étude de systèmes "complexes" c'est-à-dire comportant un grand nombre de composants ou de sous-domaines géométriques, et/ou un nombre également notable de processus physiques couplés, et présentant un fort caractère de non-linéarité ?

A noter que les systèmes peuvent être complexes avec un petit nombre de variables, et sans même être spatialisés c'est-à-dire posséder un support géométrique (cf. modèle de LORENZ dans [3]).

Pour résumer les réflexions faites au fil des études particulières de systèmes et de la mise en oeuvre des méthodes abordées dans les chapitres précédents, on peut retenir les contraintes suivantes à imposer à une modélisation de tels systèmes :

- le modèle doit garder dans sa description la composition du système global en différenciant ses composants et les mécanismes physiques dont il est le siège.
Garder les parties ou processus sous une forme individualisée peut alors permettre de les retoucher et affiner en fonction du progrès de connaissance qu'on a du système. C'est le concept fort en modélisation de **modularité**.
- par construction, le modèle doit permettre des études de comportement du système lorsqu'on active ou bloque tel ou tel des sous-modèles de partie ou processus : on peut alors isoler ou découpler parties et/ou processus.
- le modèle doit permettre des études perturbatives c'est-à-dire permettre l'étude de la réponse du système global à des perturbations de paramètres, de CI, etc. et éventuellement de se comparer à des études similaires réalisées par expérimentations sur le dispositif d'étude, c'est-à-dire développer **des études de sensibilités**.
- enfin, la modélisation doit faciliter, par sa description même du système d'étude, la mise en évidence et **l'analyse des couplages** entre parties (d'où l'importance du découpage en domaines) et entre processus.

Il est clair que réaliser tous ces objectifs simultanément représente un pari difficile à tenir.

De plus, les objectifs se perdent parfois lorsqu'on passe de la description des processus au niveau des lois physiques à la traduction sous forme d'équations et également lorsqu'on traduit le modèle sous sa forme de "schémas numériques".

Cependant il n'est jamais inutile de préciser ces divers objectifs tout au long du processus de modélisation.

4.3 Découpage-raccordement des systèmes : décomposition η/φ

L'exemple des boucles fluides diphasiques a déjà été utilisé (cf. paragraphe 3.1.1) pour illustrer la structuration complexe de certains systèmes .

Que retenir de cette structuration à propos des variables utilisées pour la description ?

variables d'état et variables de transfert . En se situant dans le cadre des observations expérimentales, les grandeurs qu'on est amené à mesurer lors de telles campagnes d'observation sont :

- soit des grandeurs d'état locales : températures (par thermocouples), pressions (par capteur de pression absolue), soit vitesses (anémomètres à fil chaud, etc.), etc.
- soit des variables d'échange entre sous-domaines, entre le système et son environnement, etc. Ce dernier type peut s'exprimer notamment sous forme de flux aux interfaces : de chaleur (fluxmètres), de masse (débitmètres), etc..

Si on reprend la formulation de l'équation générale de bilan d'enthalpie (1.7), on note que, sauf les termes source, toutes les différentes variables globalisées sous la forme Φ_{cond} , Φ_{ray} , etc.. au second membre du bilan sont de ce type variable de transfert. On peut également ranger dans ce type le terme de transport $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}T}$ figurant au premier membre.

Finalement cette décomposition en processus dans l'équation de l'enthalpie favorise le développement de théories physiques séparées correspondant à chaque type d'échange entre le système et son environnement, (ou entre parties du système, etc.) et pour des configurations à préciser (c'est-à-dire pour certaines hypothèses et domaines de variation des paramètres).

Ainsi de la théorie de Fourier sur le transfert de chaleur par diffusion macroscopique (la conduction), loi en gradient obtenue par des raisonnements du même type que celui exposé au paragraphe 1.1.1 pour la diffusion visqueuse de quantité de mouvement . Sans cette loi reliant échange et champ de température de part et d'autre d'interfaces fictives ou non, les équations de bilan d'enthalpie ne sauraient être établies. La loi de Fourier a d'ailleurs servi de modèle à bien d'autres lois de transfert par diffusion (Fick, etc.).

En mécanique, la forme de cette variable de transfert à l'interface entre systèmes est bien connue : c'est la force. Qu'elle agisse par liaison entre sous-systèmes (actions de contact, par frottement, etc.) ou à distance (gravitation, force électrostatique, etc.) la variable force est bien une variable d'échange entre systèmes .

interfaces géométriques. La notion d'interface est cruciale pour tout ce qui concerne ces variables de type transfert. Dès que le système ou ses parties ont une extension géométrique, on peut pratiquer une coupure fictive ou réelle entre le système et son environnement et faire apparaître de telles variables (de transfert) aux interfaces. Cette notion de coupure-raccordement a notamment été illustrée dans l'introduction générale (cf. mise en évidence de la viscosité dans le paragraphe 1.1.1).

On doit cependant noter que le raccordement aux interfaces entre systèmes ou sous-systèmes ne se fait pas exclusivement par variables d'échange (flux tout particulièrement). Des variables d'état d'interface peuvent opérer ce raccordement (cf. l'exemple du raccordement océan-atmosphère au paragraphe 1.4).

Ce même procédé est généralisable à l'échelle du système global et de la construction de modèle global par découpage-raccordement.

De plus on a vu le lien entre coupure au sein d'un système et mise en évidence par ce biais de couplages entre parties du système : "couper" révèle les couplages.

reprise de l'Exemple 2 : interface séparant paroi et fluide.

On représente sur le schéma ci-contre Fig. 4.8 la décomposition du système en deux sous-systèmes et une interface.

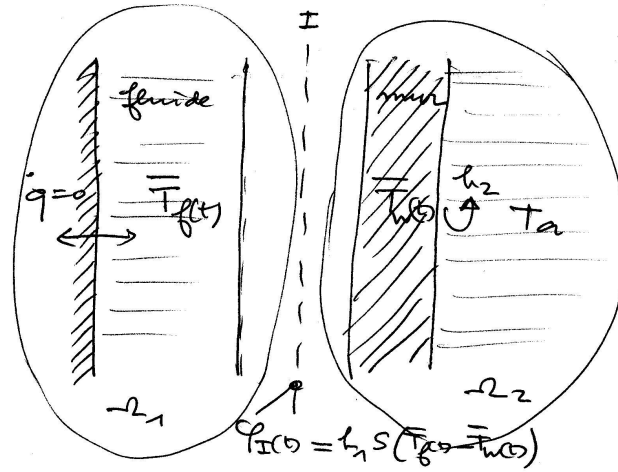


FIG. 4.8 – Schéma du système paroi-fluide découpé en sous-systèmes et interfaces.

couplages entre processus ; boucles de rétroaction. La notion d'interface est totalement tributaire d'un support géométrique au sein du système. Les couplages entre parties ne peuvent s'analyser sans interfaces.

Mais dans le paragraphe (1.3.2) sur l'analyse des significations physiques du nombre de Nusselt, on a mis en évidence une autre forme de couplage, cette fois entre processus, sans support géométrique ni interface matérielle au sein du système.

Pour ces couplages entre processus physiques, c'est le schéma de boucle de rétroaction qui joue le rôle de révélateur du couplage. Construire une boucle de rétroaction entre processus permet d'en estimer le couplage. C'est le pendant de la construction d'interfaces virtuelles pour révéler des interactions entre parties.

découpage η/φ . Pour aller au bout de la démarche, il est nécessaire de garder en évidence, dans la description physique du système mais également dans la traduction mathématique sous forme de modèle ces deux types de variables.

Dans la couche mathématique, ces deux variables figurent simultanément dans deux types d'équations :

- Le premier type est une équation d'évolution des variables d'état du système, soit formellement une équation différentielle du premier ordre en temps ⁵ :

$$\frac{\partial \eta(t)}{\partial t} = G(\eta, \varphi, \pi, t...) \quad (4.8)$$

- et le deuxième type est une relation définissant les variables de transfert sous la forme d'une équation algébrique instantanée, soit :

$$\varphi(t) = f(\eta, \varphi, \pi, t) \quad (4.9)$$

Ces deux équations générales forment un système algèbro-différentiel d'équations. D'un point de vue pratique, c'est-à-dire numérique, ces systèmes algèbro-différentiels ne présentent pas plus aujourd'hui, étant donné le développement des solveurs, de difficultés à résoudre par algorithmes d'avancement en temps que des systèmes purement différentiels.

Si on maintient le choix de description en η/φ jusqu'à la couche de la résolution numérique sur ordinateur, on remplit une des contraintes énoncées dans l'introduction ci-dessus.

⁵la présence de dérivées partielles (gradients, divergences etc.) dans le second membre à l'intérieur de la fonctionnelle G transforme l'équation différentielle en équation aux dérivées partielles (voir exemple plus loin).

De plus ce choix de décomposition en η/φ facilite considérablement la construction de modèles par assemblage de sous-modèles raccordés ; on peut alors par composition de modèles décrire des systèmes sophistiqués tels par exemple les boucles diphasiques de type LHP ou CPL évoquées ci-dessus.

4.3.1 un exemple de mise en oeuvre du découpage η/φ : l'ailette.

On peut mettre en lumière les concepts précédents sur un problème bien connu : le problème de l'ailette.

position du problème et hypothèses.

Ce problème peut se décrire sous la forme du système physique représenté par le schéma suivant Fig. 4.9 :

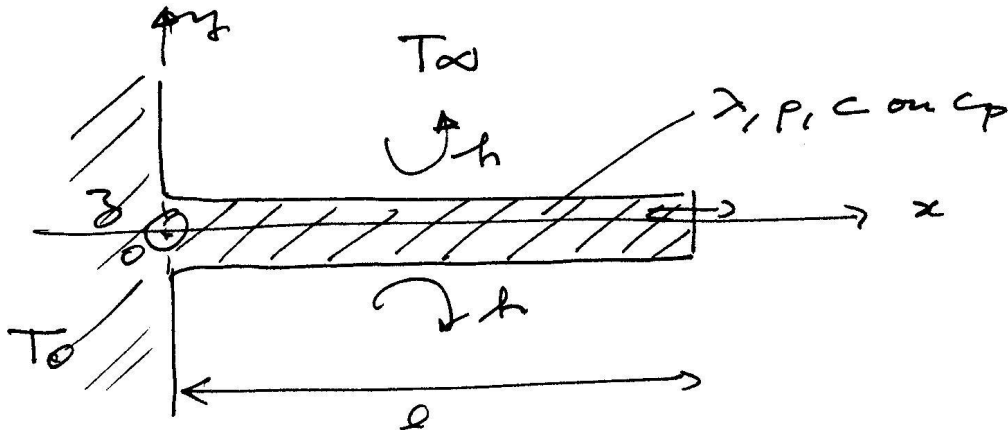


FIG. 4.9 – Schéma de l'ailette.

Il s'agit par exemple d'une ailette métallique, de grand rapport de forme l/e , dont l'assise est supposée liée à un réservoir thermique infini à la température T_0 ; cette ailette baigne dans un milieu fluide brassé et thermostaté à la température T_∞ (supposé d'extension infinie).

Un échange convectif entre la surface latérale de l'ailette et le milieu fluide est supposé suivre la loi de NEWTON $\varphi_{conv} = hS(T_S - T_\infty)$; S est la surface d'échange paroi-fluide, h le coefficient d'échange supposé uniforme sur tout S et T_S est la température de surface locale de la paroi de l'ailette.

La conduction thermique au sein du corps de l'ailette suit la loi de FOURIER, qui s'écrit mathématiquement : $\varphi_{cond} = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x}$; λ est la conductivité thermique du métal, S est la surface transversale traversée par le flux conductif.

On adopte une hypothèse de description mono-dimensionnelle.

La condition aux limites en bout ($x = l$) est supposée adiabatique.

Notons que tel qu'il est posé, le modèle de l'ailette adopte de fait des hypothèses supplémentaires : l'échange par rayonnement est négligé, la dépendance locale de h aux mouvements et aux propriétés du fluide n'est pas prise en compte, les singularités géométriques aux angles sont sans effet, etc.

Cet ensemble constitue le modèle physique de l'ailette.

modèle mathématique discrétisé du système

On procède alors à une discrétisation spatiale 1D de l'ailette en volumes de contrôle ou mailles positionnées aux abscisses x_i , de taille longitudinale δx_i , de section droite constante S et de surface élémentaire latérale d'échange avec le fluide $P\delta x_i$ (où P est le périmètre de la section droite).

On a ci-contre Fig. 4.10 le schéma du volume de contrôle local.

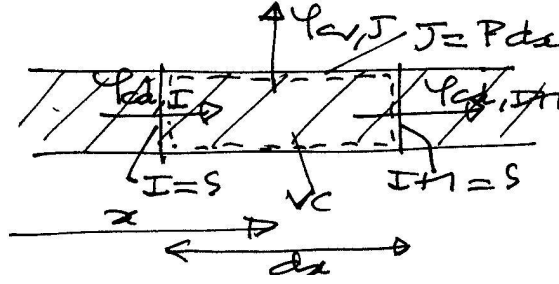


FIG. 4.10 – Volume de contrôle local.

L'équation de la chaleur ou de bilan d'enthalpie pour cette maille élémentaire permet, pourvu que l'équilibre thermodynamique local y soit vérifié, de supposer que la température $T_i = T(x_i)$ est uniforme et régie par la somme des transferts de chaleur convectif et conductif traversant les interfaces latérales de la maille avec le fluide ou les interfaces I et $I + 1$ avec les mailles conductrices voisines :

$$\begin{aligned} S \delta x_i (\rho C_p)_i \frac{\partial T_i}{\partial x} &= -\lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{I=x_i-\delta x_i/2} + \lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{I+1=x_i+\delta x_i/2} + hP \delta x_i (T_i - T_\infty) \\ &= \varphi_{cond,I} - \varphi_{cond,I+1} + \varphi_{conv,i} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Quels que soient les développements et réarrangements ultérieurs, on observe que cette discrétisation conduit à un modèle mathématique discrétisé qui relève bien de la décomposition η/φ .

L'équation Eq. 4.10 est bien en effet du type formel de l' Eq. 4.8 :

$$\frac{\partial T_i}{\partial x} = G_i(\varphi_{cond,I}, \varphi_{conv,i})$$

où figurent deux types de transferts conductif et convectif aux interfaces :

$$\begin{cases} \varphi_{cond,I} = -\lambda S \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_I \\ \varphi_{conv,i} = hP \delta x_i (T_i - T_\infty) \end{cases}$$

L'utilisation d'un schéma aux différences approché pour la description de $\varphi_{cond,I}$, utilisant par exemple les différences finies, donnera par exemple :

$$\varphi_{cond,I} \simeq -\lambda S \frac{(T_i - T_{i+1})}{\delta x_I}$$

Et les transferts relèvent bien du type formel de l'Eq. 4.9 :

$$\begin{cases} \varphi_{cond,I} = f_{cond,I}(T_i, T_{i+1}) \\ \varphi_{conv,i} = f_{conv,i}(T_i) \end{cases}$$

Il est important de noter que ce découpage permet de dissocier les mécanismes (d'en individualiser le rôle) intervenant dans l'évolution de la température locale en toute abscisse x de l'ailette.

C'est cet aspect qui sera développé pour pratiquer une analyse de la dynamique (sensibilités, couplages) à l'échelle locale comme à l'échelle système.

4.4 Le formalisme de modélisation TEF

Revenons aux objectifs initiaux.

Une fois le modèle traduit par découpage en équations différentielles d'évolution d'états et en lois de transferts, de nature plus ou moins fortement non-linéaire, c'est-à-dire une fois accomplie la décomposition en η/φ , il s'agit d'en déduire l'évolution à chaque instant, ce qui se fera généralement par une suite de pas de temps successifs.

De nombreux algorithmes de résolution regroupés en codes de calcul sont disponibles dans la communauté scientifique.

Nous allons en décrire un qui a l'avantage (pour nous) de remplir un certain nombre des attentes évoquées ci-dessus : le formalisme TEF.

Le TEF (en français Formalisme d'évolution par Transferts) se présente d'une part comme un formalisme de description des systèmes permettant de les modéliser et fournit d'autre part divers outils d'analyse de la dynamique des systèmes modélisés.

Nous allons présenter les principales étapes qui permettent, sur un modèle formulé à l'aide du TEF, d'extraire ces éléments chiffrés d'analyse du comportement du système .

4.4.1 Décomposition η/φ .

Nous reprenons pour un court instant la notation tensorielle de tous les éléments.

Chacun des sous-systèmes ⁶ résultant du découpage η/φ du système global, qu'on peut indiquer α , est décrit par son propre modèle d'évolution du vecteur d'état $\vec{\eta}_\alpha$:

$$\forall \alpha \quad \boxed{\frac{\partial \vec{\eta}_\alpha}{\partial t} = \vec{G}_\alpha(\{\vec{\eta}_\alpha\}, \{\vec{\varphi}_I\}, t)} \quad (4.11)$$

et chaque transfert (vecteur $\vec{\varphi}_I$ des variables de transfert) à l'interface I entre le sous-système α et ses voisins possède également son modèle d'interface :

$$\forall I \quad \boxed{\vec{\varphi}_I = \vec{f}_I(\{\vec{\eta}_\alpha\}, \{\vec{\varphi}_J\}, t)} \quad (4.12)$$

remarque : Dans cette dernière expression qui généralise le concept de transfert, on a fait apparaître la possibilité qu'un transfert (à une interface I) dépende non seulement des vecteurs d'état $\{\vec{\eta}_\alpha\}$ des sous systèmes connectés par l'interface, mais explicitement de transferts $\{\vec{\varphi}_J\}$ associés à d'autres interfaces $J \neq ou = I$, ⁷. Ce n'est évidemment pas toujours le cas.

Le terme de variable de transfert utilisé ici va au-delà du sens habituellement donné aux variables de flux ou aux variables d'état d'interface raccordant deux sous-systèmes.

Ainsi un coefficient d'échange convectif dépendant de variables d'état du fluide telles que sa température locale, son champ de vitesse local ou du débit parallèle à la paroi, etc. qu'on peut décrire formellement par $h = f(T_f, m) \dots$ pourra figurer dans la catégorie transfert de type Eq. 4.12, ce qui n'est pas du tout d'usage dans le formalisme courant de la physique.

4.4.2 Description en variations temporelles.

Plutôt que les variables η et φ , on choisit de décrire l'évolution en termes de variations temporelles par rapport à un instant origine, ce qui s'écrit par définition les variations :

$$\vec{\delta \eta}_\alpha(\tau) = \vec{\eta}_\alpha(\tau) - \vec{\eta}_\alpha(t_0); \vec{\delta \varphi}_J(\tau) = \vec{\varphi}_J(\tau) - \vec{\varphi}_J(t_0)$$

⁶Sans perte de généralité, on s'est restreint aux cas des systèmes autonomes, c'est-à-dire où le temps ne figure pas explicitement dans $\vec{G}_\alpha$ et $\vec{f}_I$.

⁷pourvu qu'un sous-système comporte à la fois l'interface I et l'interface J

4.4.3 Système linéarisé tangent.

On construit alors le système linéarisé tangent (SLT), associé au couple de relations (Eq. 4.11, Eq. 4.12) ; ce système linéarisé tangent est valable, pour chaque intervalle de temps $t \in [t_n, t_n + \delta t]$, où t_n , début du pas de temps et δt sa durée. Il est construit en suivant la méthode vue au paragraphe (4.1).

Par développement de TAYLOR au premier ordre autour de t_n , on obtient le système couplé d'équations en variation d'états et de transferts :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\delta\eta}_\alpha(\tau)}{\partial \tau} = \vec{G}_\alpha \Big|_{t_n} + \frac{\partial \vec{G}_\alpha}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \vec{\delta\eta}_\alpha(\tau) + \frac{\partial \vec{G}_\alpha}{\partial \varphi_I} \Big|_{t_n} \vec{\delta\varphi}_I(\tau) \\ \vec{\delta\varphi}_I(\tau) = \frac{\partial \vec{f}_I}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \vec{\delta\eta}_\alpha(\tau) + \frac{\partial \vec{f}_I}{\partial \varphi_J} \Big|_{t_n} \vec{\delta\varphi}_J(\tau) \end{cases}$$

rem : dans ce qui va suivre, pour alléger, on ne va plus appliquer la notation matrice-vecteur.

4.4.4 Discrétisation temporelle.

L'application de la transformée de BOREL-LAPLACE ($\mathcal{B}^*(f)$ équivalente à $\tilde{f}$ définie ci-dessus) aux deux équations précédentes fournit le système d'équations algébriques suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\delta\eta}_\alpha(\tau) = \tau G_\alpha|_{t_n} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \tilde{\delta\eta}_\alpha(\tau) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \varphi_I} \Big|_{t_n} \tilde{\delta\varphi}_I(\tau) & (a') \\ \tilde{\delta\varphi}_I(\tau) = \frac{\partial f_I}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \tilde{\delta\eta}_\alpha(\tau) + \frac{\partial f_I}{\partial \varphi_J} \Big|_{t_n} \tilde{\delta\varphi}_I(\tau) & (b') \end{cases} \quad (4.13)$$

Ces deux dernières équations couplent les évolutions transformées des états et transferts du système sous la forme d'un système algébrique linéaire, dont il est facile d'extraire les variations $\tilde{\delta\eta}_\alpha(\tau)$ et $\tilde{\delta\varphi}_I(\tau)$ donnant accès par transformée de BOREL inverse aux évolutions recherchées.

Une autre voie est possible par discrétisation temporelle par pas de temps, en suivant par exemple un schéma d'avancement en temps semi-implicite du type de CRANK-NICOLSON. C'est cette démarche qui sera mise en oeuvre dans les codes numériques de simulation.

On montre en effet que les variations $(\tilde{\delta\eta}_\alpha(\tau), \tilde{\delta\varphi}_I(\tau))$ dans l'espace de BOREL-LAPLACE et $(\delta\eta_\alpha(t), \delta\varphi_I(t))$ dans l'espace réel ont des développements autour de t_n qui coïncident au second ordre en temps.

Il suffit de remplacer τ par δt et les valeurs transformées par les valeurs réelles dans (a') et (b') pour disposer d'un schéma d'avancement temporel du second ordre dans les codes numériques.

L'application du schéma de CRANK-NICOLSON fournit le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} A \delta\eta + B \delta\phi = \Gamma \delta t \\ C^+ \delta\eta - (\mathbb{I} + D) \delta\phi = \Omega \delta t \end{cases} \quad (4.14)$$

avec les matrices ⁸ et vecteurs introduits définis par :

$$\begin{cases} A = \mathbb{I} - \frac{\delta t}{2} \frac{\partial G}{\partial \eta} \Big|_{t_0} \\ B = -\frac{\delta t}{2} \frac{\partial G}{\partial \varphi} \Big|_{t_0} \\ \Gamma = G|_{t_0} + \frac{\delta t}{2} \frac{\partial G}{\partial t} \Big|_{t_0} \\ C^+ = \frac{\partial f}{\partial \eta} \Big|_{t_0} \\ D = -\frac{\partial f}{\partial \varphi} \Big|_{t_0} \\ \Omega = -\frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t_0} \end{cases} \quad (4.15)$$

⁸la matrice unité est notée $\mathbb{I}$

La matrice $(\mathbb{I} + D)$ provient de la partition effectuée sur l'ensemble des transferts ; D introduit des contraintes instantanées entre les "objets transferts" du TEF si on est dans le cas de la remarque du 1er paragraphe du (4.4.1).

4.4.5 Interprétation des éléments d'analyse du TEF.

On organise la résolution de (a') et (b') de façon à exhiber au maximum les éléments d'analyse espérés : on reporte d'abord (b') dans (a') . On obtient :

$$\widetilde{\delta\eta}_\alpha(\tau) = \left[1 - \frac{\tau}{2} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \right]^{-1} \tau G_\alpha|_{t_n} + \left[1 - \frac{\tau}{2} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \right]^{-1} \frac{\tau}{2} \frac{\partial G_\alpha}{\partial \varphi_I} \Big|_{t_n} \widetilde{\delta\varphi}_I(\tau)$$

Dans le but d'expliciter le rôle des deux termes du second membre, on réécrit formellement cette dernière relation :

$$\boxed{\widetilde{\delta\eta}_\alpha(\tau) = \widetilde{\delta\eta}_{\alpha,dec}(\tau) + \mathcal{F}_{a,I} \widetilde{\delta\varphi}_I(\tau)} \quad (4.16)$$

La résolution algébrique se termine en substituant les $\widetilde{\delta\eta}_\alpha(\tau)$ dans l'expression des $\widetilde{\delta\varphi}_I(\tau)$:

$$\widetilde{\delta\varphi}_I(\tau) = \frac{\partial f_I}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \left\{ \widetilde{\delta\eta}_{\alpha,dec}(\tau) + \mathcal{F}_{a,I} \widetilde{\delta\varphi}_I(\tau) \right\} + \frac{\partial f_I}{\partial \varphi_J} \Big|_{t_n} \widetilde{\delta\varphi}_I(\tau) \quad (4.17)$$

Alors en notant globalement le second membre $\widetilde{\delta\varphi}_{I,ins}(\tau)$, on aboutit à l'équation matricielle ultime à résoudre :

$$\left[1 - \frac{\partial f_I}{\partial \varphi_J} \Big|_{t_n} - \frac{\partial f_I}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \mathcal{F}_{a,I} \right] \widetilde{\delta\varphi}_I(\tau) = \widetilde{\delta\varphi}_{I,ins}(\tau) \quad (4.18)$$

La résolution de cette équation matricielle en termes de transferts donne les valeurs des $\widetilde{\delta\varphi}_I(\tau)$, lesquelles reportées dans l'Eq. 4.16 donneront les $\widetilde{\delta\eta}_\alpha(\tau)$. Il ne restera "plus" qu'à appliquer une transformée inverse pour disposer des solutions dans l'espace réel.

les éléments du TEF : On a successivement mis en évidence lors des étapes précédentes :

- la décomposition dans l'Eq. 4.16 de l'évolution des états en une **évolution découplée des états** (celle qui résulterait d'un blocage des transferts à leur valeur initiale) et une évolution intégrant l'action des transferts.
- On a également défini dans l'Eq. 4.17 une **évolution insensible des transferts** $\widetilde{\delta\varphi}_{I,ins}(\tau)$ sous la formulation :

$$\widetilde{\delta\varphi}_{I,ins}(\tau) = \frac{\partial f_I}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \widetilde{\delta\eta}_{\alpha,dec}(\tau)$$

c'est-à-dire l'évolution que suivraient les transferts en absence de couplages entre transferts (ou mieux, si les états suivaient leur évolution découplée).

- L'opérateur matriciel agissant sur $\widetilde{\delta\varphi}_I(\tau)$ dans le premier membre de l'Eq. 4.18 est noté $\mathbb{I} + \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ est appelée **matrice de couplage**, exhibant tous les coefficients de couplages entre transferts. En fait la ligne relative à la résolution de l'interface I s'écrit plus précisément en distinguant I et J dans la sommation d'Einstein :

$$\left[1 - \frac{\partial f_I}{\partial \varphi_I} \Big|_{t_n} - \frac{\partial f_I}{\partial \eta_\alpha} \Big|_{t_n} \mathcal{F}_{a,I} \right] \widetilde{\delta\varphi}_I(\tau) - \frac{\partial f_I}{\partial \varphi_J} \Big|_{t_n} \widetilde{\delta\varphi}_J(\tau) = \widetilde{\delta\varphi}_{I,ins}(\tau)$$

4.4.6 Couplages deux à deux.

La matrice $[\mathbb{I} + \mathcal{C}]$ de l'Eq. 4.18 porte tous les coefficients de couplage du système : ces couplages sont à la fois des couplages à tout instant (dans l'espace de BOREL) et liés à la nature linéaire du SLT du système construit à l'instant t_n .

On peut extraire les éléments d'intérêt pour l'étude en résolvant tout ou partie de l'Eq. 4.18 .

On peut ainsi résoudre tout le système matriciel sauf une ligne relative au modèle de transfert lié à la variable notée φ_1 et à sa dépendance à une autre variable de transfert φ_2 . Après élimination des autres lignes on obtient :

$$\widetilde{\delta \varphi_1}(\tau) = \widetilde{\delta \varphi_{1,ins}}(\tau) + \widetilde{c_{\varphi_1/\varphi_2}}(\tau) \widetilde{\delta \varphi_2}(\tau) \quad (4.19)$$

Pour analyser l'influence de φ_2 sur φ_1 on doit appliquer un certain type de scénario temporel à $\widetilde{\delta \varphi_2}(\tau)$, soit un step, soit un Dirac, soit d'autres lois temporelles inspirées de l'expertise du comportement du système . On dispose d'une réponse qui est du type de celle qu'on imaginait dans l'Eq. 4.7 de l'introduction aux couplages.

4.4.7 Gain de rétroaction.

On peut également avoir gardé en plus de l'Eq. 4.19 l'équation réciproque :

$$\widetilde{\delta \varphi_2}(\tau) = \widetilde{\delta \varphi_{2,ins}}(\tau) + \widetilde{c_{\varphi_2/\varphi_1}}(\tau) \widetilde{\delta \varphi_1}(\tau) \quad (4.20)$$

La résolution de ces deux équations simultanées donne finalement :

$$\widetilde{\delta \varphi_1}(\tau) = \widetilde{\delta \varphi_{1,ins}^*}(\tau) + \widetilde{g_{\varphi_1}}(\tau) \widetilde{\delta \varphi_1}(\tau) \quad (4.21)$$

qu'on peut récrire après retour vers l'espace réel par transformée inverse :

$$\delta \varphi_1(t) = \frac{\delta \varphi_{1,ins}^*(t)}{1 - g_{\varphi_1}(t)} \quad (4.22)$$

On peut alors étudier le gain de rétroaction de la boucle relative à la variable φ_1 .

La ligne directrice suivie dans ces étapes de la résolution (qui s'appuie sur l'idée de conservation de la structuration η/φ souhaitée pour la modélisation) permet d'aboutir à la mise en évidence d'éléments tels que évolution découplée des états, évolutions insensibles des transferts et coefficients de couplages entre transferts qui constituent les "briques de base" sur lesquelles on peut appuyer une analyse de la dynamique du système au fil du temps.

Cette formulation répond au programme envisagé ci-dessus.

4.5 Applications à l'étude des couplages

4.5.1 le mur conductif 1D

rappel des résultats : On a obtenu l'évolution suivante pour $T_m(t)$:

$$T_m(t) = T_0 e^{-t/t_C} + (T_a + \frac{\dot{q}}{h})(1 - e^{-t/t_C}) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)e^{-t/t_C}$$

avec $T_m(t=0) = T_0$, $T_m(t \rightarrow \infty) = T_\infty = \frac{\dot{q}}{h} + T_a$ et $t_C = \frac{\rho C e}{h}$ la constante de temps.

solutions en variations temporelles : On obtient : $\delta T_m(t) = (T_\infty - T_0) (1 - e^{-t/t_C})$

découpage η/φ : On décompose le problème en un système (le mur, associé à une variable d'état $T_m(t)$) et deux interfaces : I_G (avec un flux imposé $\varphi_g(t) = \dot{q} H(t)$ ⁹) et I_D (avec un flux convectif $\varphi_d(t) = -h(T_m(t) - T_a)$) :

$$\begin{cases} \frac{dT_m(t)}{dt} = \varphi_d(t) + \varphi_g(t) = G(t) \\ \varphi_d(t) = -\frac{1}{t_C} (T_m(t) - T_a) \\ \varphi_g(t) = \frac{\dot{q}}{h t_C} H(t) \end{cases}$$

On note que $\varphi_g(0) = 0$, par définition de la fonction de Heaviside, $G(t = 0) = G_0 = \varphi_d(0) + \varphi_g(0) = -\frac{1}{t_C} (T_0 - T_a)$

linéarisation : le SLT. Ici l'équation différentielle étant linéaire, le système linéarisé tangent sera identique au système de départ, aux variations temporelles près, et il sera valable pour tout temps :

$$\begin{cases} \frac{d\delta T_m(t)}{dt} = G_0 + \delta \varphi_d(t) + \delta \varphi_g(t) \\ \delta \varphi_d(t) = -\frac{1}{t_C} \delta T_m(t) \\ \delta \varphi_g(t) = \frac{\dot{q}}{h t_C} H(t) \end{cases}$$

Résolution par transformée de BOREL : A titre indicatif on trouvera en annexe 4.6 les quelques transformées de BOREL $\mathcal{B}$ (et non $\mathcal{B}^*$) qui vont être utiles pour les exemples utilisés ci-dessous. Le système précédent se réécrit en espace transformé :

$$\begin{cases} \widetilde{\delta T_m(\tau)} = \tau G_0 + \widetilde{\delta \varphi_d(\tau)} + \widetilde{\delta \varphi_g(\tau)} \\ \widetilde{\delta \varphi_d(\tau)} = -\frac{1}{t_C} \widetilde{\delta T_m(\tau)} \\ \widetilde{\delta \varphi_g(\tau)} = \frac{\dot{q}}{h t_C} H(\tau) \end{cases} \quad (4.23)$$

On va résoudre selon la procédure des éliminations décrite au paragraphe 4.4.5.

On reporte $\widetilde{\delta T_m(\tau)}$ dans le 2ème Eq. 4.23, on trouve :

$$\widetilde{\delta \varphi_d(\tau)} = -\frac{1}{t_C} \{ \tau G_0 + \widetilde{\delta \varphi_d(\tau)} + \widetilde{\delta \varphi_g(\tau)} \}$$

qu'on réécrit encore sous la forme de l'équation couplant les transferts $\delta \varphi_d$ et $\delta \varphi_g$:

$$(1 + \frac{\tau}{t_C}) \widetilde{\delta \varphi_d(\tau)} + \frac{\tau}{t_C} \widetilde{\delta \varphi_g(\tau)} = -\frac{\tau}{t_C} G_0$$

on reconnaît au second membre le transfert insensible $\widetilde{\delta \varphi_{d,ins}(\tau)} = -\frac{\tau}{t_C} G_0$ qui donne bien par transformation inverse de BOREL $\delta \varphi_{d,ins}(t) = -\frac{t}{t_C} G_0$, résultat qu'il fallait trouver.

La relation précédente se présente sous la forme recherchée :

$$\widetilde{\delta \varphi_d(\tau)} = -\frac{\frac{\tau}{t_C}}{(1 + \frac{\tau}{t_C})} G_0 - \underbrace{\frac{\frac{\tau}{t_C}}{(1 + \frac{\tau}{t_C})}}_{\widetilde{c_{\varphi_g/\varphi_d}}} \widetilde{\delta \varphi_g(\tau)}$$

Le premier terme du second membre est ce qu'on avait noté $\widetilde{\delta \varphi_{d,ins}^*(\tau)}$ et le second se présente sous la forme attendue $\widetilde{c_{\varphi_g/\varphi_d}} \widetilde{\delta \varphi_g(\tau)}$ avec le coefficient de couplage $\widetilde{c_{\varphi_g/\varphi_d}(\tau)}$ de φ_g agissant sur φ_d .

⁹où $H(t)$ est la fonction de Heaviside ou échelon telle que :

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Le scénario de perturbation est tout trouvé : c'est l'action d'un step de puissance à l'instant $t = 0$ tel que l'imposait la physique du problème. Les propriétés de convolution de Heaviside donnent un retour sans difficulté vers l'espace réel ; on trouve finalement :

$$c_{\varphi_g/\varphi_d}(t) = -(1 - e^{-t/t_C})$$

Le couplage, nul à l'instant initial, tend vers -1 pour les grands temps : au RP, à une perturbation $\delta \varphi_g$, le système répond par une variation opposée $-\delta \varphi_d$.

Finalement, on peut écrire dans l'espace réel la décomposition de la variation dans le temps de la variable de transfert $\delta \varphi_d$ en fonction de son évolution insensible et de l'influence de $\delta \varphi_g$:

$$\delta \varphi_d(t) = \underbrace{-G_0 (1 - e^{-t/t_C})}_{\delta \varphi_{d,ins}(t)} \underbrace{-(1 - e^{-t/t_C})}_{\frac{\dot{q}}{h t_C} H(t)} \delta \varphi_g(t)$$

A titre d'exercice, on pourra refaire l'étude précédente mais avec un forçage du flux appliqué variant en exponentielle de t établi sur un temps d'installation de $t_{instal} \neq t_C$, c'est-à-dire tel que $\varphi_g(t) = \frac{\dot{q}}{h t_C} (1 - e^{-t/t_{instal}})$.

4.5.2 le système paroi-fluide 1D

rappel des résultats : On avait obtenu en "centrant" les températures sur celle de l'ambiante T_a le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\theta_f(t)}{dt} = -\nu_1(\theta_f - \theta_w) \\ \frac{d\theta_w(t)}{dt} = \nu_2(\theta_f - \theta_w) - \nu_3\theta_w(t) \end{cases}$$

et les solutions étaient données par :

$$\begin{cases} \theta_f(t) = \theta_0 \mathcal{P}_1 \\ \theta_w(t) = \theta_f(t) - \theta_0 \mathcal{P}_2 \end{cases}$$

avec les deux propagateurs en temps : $\mathcal{P}_1(t) = \left(\frac{r_1 e^{-r_2 t} - r_2 e^{-r_1 t}}{(r_1 - r_2)} \right)$

et $\mathcal{P}_2(t) = -\nu_3 \left(\frac{e^{-r_2 t} - e^{-r_1 t}}{(r_1 - r_2)} \right)$. dont les évolutions sont représentées sur la figure Fig. 4.11.

découpage η/φ : Le couplage entre les deux sous-systèmes tels que montrés sur la figure Fig. 4.8 passe par le transfert convectif surfacique $\varphi_{f/w} = h_1 (T_f - T_w)(t)$, qui sous la forme des températures centrées s'écrit $\varphi_{f/w} = h_1 (\theta_f - \theta_w)$.

Le système découpé en séparant sous-systèmes et interface aboutit à la décomposition η/φ suivante :

$$\begin{cases} K_f \frac{d\theta_f(t)}{dt} = -\varphi_{f/w} \\ K_w \frac{d\theta_w(t)}{dt} = \varphi_{f/w} - h_2 \theta_w(t) \\ \varphi_{f/w} = h_1 (\theta_f - \theta_w) \end{cases}$$

La solution du système découpé sous cette forme est bien évidemment identique à celle donnée ci-dessus. On peut noter que l'évolution du transfert convectif est donnée par $\varphi_{f/w}(t) = h_1 \theta_0 \mathcal{P}_2(t)$. C'est donc lui qu'on va étudier.

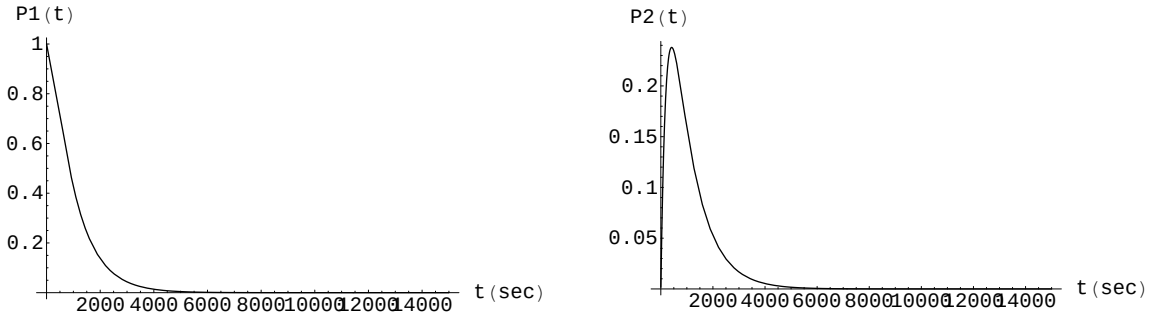


FIG. 4.11 – Evolutions pour les deux propagateurs $\mathcal{P}_1(t)$ et $\mathcal{P}_2(t)$.

évolutions découplées. Le découplage au sens thermique se réalise si le coefficient d'échange $h_1 \rightarrow 0$: alors chaque sous-système évolue indépendamment de façon découplée : ceci correspond à un flux convectif nul qui est aussi la valeur prise à l'instant $t = 0$ par $\varphi_{f/w}$ puisque les deux corps paroi et fluide sont en équilibre thermique à l'instant initial.

Les équations des évolutions découplées sont donc :

$$\begin{cases} \frac{d\theta_{dec,f}(t)}{dt} = 0 \\ \frac{d\theta_{dec,w}(t)}{dt} = -\nu_3 \theta_{dec,w}(t) \end{cases}$$

et les évolutions découplées sont données par :

$$\begin{cases} \theta_{dec,f}(t) = \theta_0 \\ \theta_{dec,w}(t) = \theta_0 e^{-\nu_3 t} \end{cases}$$

Il y a peu de commentaire physique à faire sur ces solutions.

évolutions en variations. On définit les variations de température par $\delta \theta_i(t) = \theta_i(t) - \theta_0$ qui sont identiques pour les deux températures car $\theta_i(0) = T_i(0) - \theta_a$.

D'où les équations d'évolutions en variations qui sont identiques en forme aux équations différentielles initiales le système différentiel étant linéaire :

$$\begin{cases} K_f \frac{d\delta \theta_f(t)}{dt} = -\delta \varphi_{f/w} \\ K_w \frac{d\delta \theta_w(t)}{dt} = \delta \varphi_{f/w} - h_2 \delta \theta_w(t) \\ \delta \varphi_{f/w} = h_1 (\delta \theta_f - \delta \theta_w) \end{cases}$$

coefficients d'influence de $\delta \varphi_{f/w}$ sur les $\delta \theta_i(t)$. A partir des solutions analytiques, on est en mesure de déterminer tous types d'éléments mis en évidence par le TEF. Ainsi par exemple les influences de $\delta \varphi_{f/w}$ sur chacune des évolutions des températures de paroi et de fluide peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \delta \theta_f(t) = \delta \theta_{dec,f}(t) + \mathcal{F}_{T_f, \varphi_{f/w}}(t) \delta \varphi_{f/w}(t) \\ \delta \theta_w(t) = \delta \theta_{dec,w}(t) + \mathcal{F}_{T_w, \varphi_{f/w}}(t) \delta \varphi_{f/w}(t) \end{cases}$$

Ici, il n'y a qu'une variable de transfert et deux variables d'état : on ne peut étudier de couplages entre transferts par une relation du type de l'Eq. 4.19 ; mais on peut étudier l'influence du transfert entre paroi et fluide sur les évolutions au cours du temps des deux températures ; on écrit les relations de type Eq. 4.16 dans l'espace réel c'est-à-dire en t ; en substituant les solutions on trouve que :

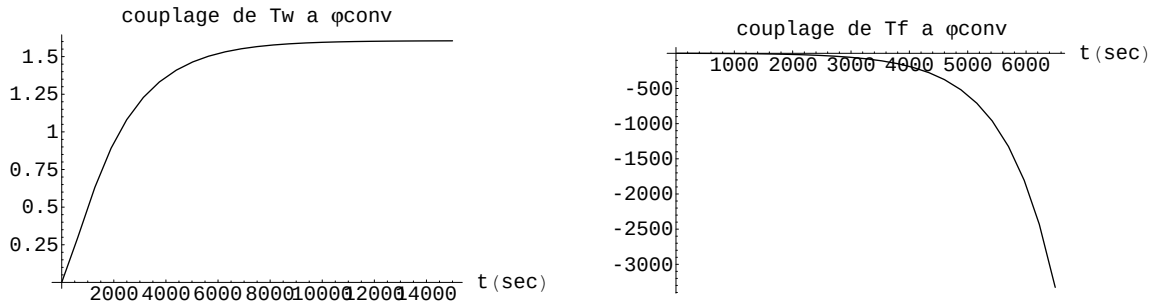


FIG. 4.12 – Influence de $\varphi_{f/w}$ sur les températures .

$$\begin{cases} \mathcal{F}_{T_f, \varphi_{f/w}}(t) = \frac{(\mathcal{P}_1(t)-1)}{\mathcal{P}_2(t)} \\ \mathcal{F}_{T_w, \varphi_{f/w}}(t) = \frac{(\mathcal{P}_1(t)-\mathcal{P}_2(t)-e^{-\nu_3 t})}{\mathcal{P}_2(t)} \end{cases}$$

On a représenté sur la figure Fig. 4.12 ces coefficients au fil du temps. On note que l'influence de $\varphi_{f/w}$ sur la température du mur T_w tend asymptotiquement vers une valeur finie positive : cette influence du transfert convectif contribue peu (1.5 degré sur les 20 que va subir le mur). Pour ce qui concerne la température du liquide, l'influence tend à augmenter asymptotiquement dans les grands temps ?! et en négatif?! Cette analyse est à affiner.

Cette analyse des courbes fournies par résolution directe n'est pas instantanée : ici il ne faut pas oublier qu'on n'est pas dans la même démarche que dans le TEF où ces coefficients sont déterminés par rapport (ou en relation) à des perturbations imposées aux transferts : les courbes ci-jointes montrent des $\mathcal{F}_{T_i, \varphi_{f/w}}(t)$ qui intègrent les rétroactions des transferts.

L'étude précédente doit être comparée à une étude qui serait réalisée pratiquement dans le cadre du TEF.

4.5.3 le couplage advection-conduction

Pour cet exemple et certains de ceux qui suivent, la rédaction est à réaliser.

4.5.4 couplages dans le problème de l'ailette

4.5.5 couplages entre processus dans le modèle de VERHULST

résultats : On rappelle la solution en variation :

$$\delta X(t) = \frac{G_0 (e^{At} - 1)}{A + k X_0 (e^{At} - 1)} \quad (4.24)$$

On doit aussi garder à l'esprit les résultats du paragraphe (3.2.4) où les sensibilités de $X(t)$ aux paramètres avaient été étudiées et comparées en ordre de grandeur. Clairement un des objectifs qu'on peut fixer à l'étude qui va suivre est d'évaluer le couplage entre cinétiques de croissance et de décroissance, et d'en déduire une meilleure compréhension du comportement non-linéaire du système de VERHULST.

découpage η/φ : La première évidence est qu'il faut repenser le système : il n'y a pas d'interfaces géométriques : on ne peut pas faire un schéma de système sous la forme d'un domaine lié à un environnement à l'aide d'interfaces (cf. Fig. 4.13) où on isolerait φ_C la cinétique de croissance, et φ_D

la cinétique de décroissance. Il faut penser le système à travers une boucle de rétroaction où toute perturbation de $X(t)$ agit par exemple sur φ_D , qui va varier donc modifier $X(t)$, lequel va modifier φ_C qui va à son tour changer la densité $X(t)$.

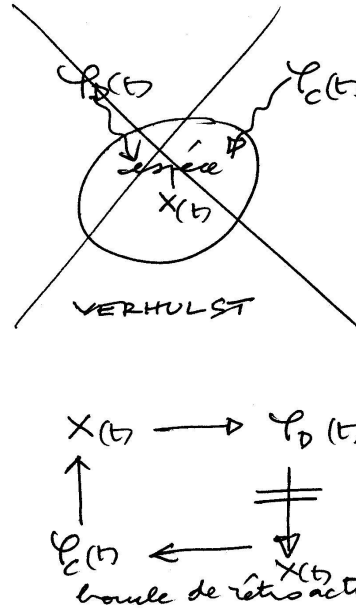


FIG. 4.13 – Schémas de représentation du système de VERHULST.

On choisit le découpage suivant (parmi d'autres possibles en fonction de ce qu'on veut étudier du système) :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = \varphi_C + \varphi_D = G(\varphi_C, \varphi_D) \\ \varphi_C = +kX(N - X) \\ \varphi_D = -DX \end{cases}$$

Etude sans système linéarisé tangent ni éléments d'analyse tirés du TEF. On peut, connaissant précisément la solution analytique commencer par déduire divers résultats exacts, sans recourir à l'approximation du SLT à tout instant. On a par exemple sans difficulté les résultats suivants :

- **évolution découplée de $X(t)$.**

$X_{dec}(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dX_{dec}(t)}{dt} = G(\varphi_C(0), \varphi_D(0)) = G_0$$

où $G_0 = +kX_0(N - X_0) - DX_0$. On tire : $\delta X_{dec}(t) = G_0 t$, évolution découplée qui servira de référence mais qui n'apporte pas grand chose (cf. Fig. 4.7) à la compréhension du comportement du système .

- **expressions exactes des évolutions découplées des transferts**

$$\delta \varphi_D(t) = -D \delta X(t) = -\frac{DG_0 (e^{At} - 1)}{A + kX_0(e^{At} - 1)}$$

Pour ce qui concerne $\delta \varphi_{D(t)}$, on obtient sans linéarisation :

$$\delta \varphi_C(t) = kN \delta X - k\delta(X^2) = k[(N - X_0) - X(t)] \delta X$$

• **relation entre $\delta \varphi_C$ et $\delta \varphi_D$.**

Sans recourir à une approche évolution de référence/évolution perturbée, on peut aboutir par élimination de $\delta X(t)$ à une relation liant les deux variables de transfert :

$$\delta \varphi_C(t) = \frac{k[(N - X_0) - X(t)]}{D} \delta \varphi_D(t) \quad (4.25)$$

où tout est connu.

Dans cette relation où le coefficient $\frac{k[(N-X_0)-X(t)]}{D}$ varie non linéairement en fonction du temps par l'intermédiaire de $X(t)$, on dispose d'une forme de rétroaction passant par $X(t)$; mais cette relation n'est pas une relation de couplage entre φ_C et φ_D : on n'accède pas à l'information qui dirait comment évolue φ_C sans φ_D ou le contraire. Il n'y a pas de boucle de rétroaction présente dans cette relation : il faut pouvoir couper et définir l'évolution de φ_C passant par $X(t)$ sans la présence de φ_D ou quelque chose d'analogue.

Etude dans le cadre du TEF.

• **découpage.**

Il a été réalisé ci-dessus.

• **linéarisation : le SLT.**

$$\begin{cases} \frac{d\delta X(t)}{dt} = G_0 + \delta \varphi_C + \delta \varphi_D \\ \delta \varphi_C = +kN \delta X - 2kX_0 \delta X = k[N - 2X_0] \delta X \\ \delta \varphi_D = -D \delta X \end{cases}$$

On note que le $\delta \varphi_C$ linéarisé n'a pas la même écriture (ni contenu) que le $\delta \varphi_C$ exact : on a $k[N - 2X_0] \delta X$ au lieu de $k[(N - X_0) - X(t)] \delta X$.

• **Transformée de BOREL du SLT.**

Le TEF permet d'écrire, après linéarisation, et en transformée de BOREL les relations suivantes :

$$\begin{cases} \widetilde{\delta X}(\tau) = \tau G_0 + \tau \widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) + \tau \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) \\ \widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) = +kN \delta X - 2kX_0 \delta X = k[N - 2X_0] \widetilde{\delta X}(\tau) \\ \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) = -D \widetilde{\delta X}(\tau) \end{cases}$$

• **résolution et éléments du TEF.**

– 1ère relation

$$\widetilde{\delta X}(\tau) = \widetilde{\delta X_{dec}}(\tau) + \{\tau \widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) + \tau \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau)\}$$

En prenant l'inverse du premier terme du second membre on trouve :

$$\widetilde{\delta X_{dec}}(\tau) = \mathcal{B}^{-1}(\tau G_0) = G_0 t$$

Les coefficients d'influence $\widetilde{\mathcal{F}}_{C/X}$ et $\widetilde{\mathcal{F}}_{D/X}$ sont simples : ils valent τ ; mais on ne peut pas les inverser seuls pour avoir les $\mathcal{F}_{D ou C/X}(t)$; ils sont sous forme de produit avec des $\widetilde{\delta \varphi}$ dans l'espace transformé $\mathcal{B}$: il faut les déconvoluer pour y avoir accès, et il faut connaître les $\delta \varphi(t)$!

rappel :

$$\tau \mathcal{B}(f) \mathcal{B}(g) \xrightarrow{\mathcal{B}^{-1}} f * g = \int_0^t f(s) g(t-s) ds$$

– 2ème relation

On élimine $\widetilde{\delta X}(\tau)$ dans $\widetilde{\delta \varphi_D}(\tau)$; d'où :

$$\widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) = \underbrace{-D \widetilde{\delta X_{dec}}(\tau)}_{\widetilde{\delta \varphi_{D,ins}}(\tau) = -D \tau G_0} - D \tau \widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) - D \tau \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau)$$

On récrit la ligne :

$$\underbrace{(1 + D \tau)}_{\mathcal{C}_{D/D}} \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) + \underbrace{D \tau}_{\mathcal{C}_{C/D}} \widetilde{\delta \varphi_C} = \widetilde{\delta \varphi_{D,ins}}(\tau)$$

Si on veut résoudre, on écrit :

$$\widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) = \underbrace{\frac{-D \tau G_0}{(1 + D \tau)}}_{\widetilde{\delta \varphi_{D,ins}}^*(\tau)} - \underbrace{\frac{-D \tau}{(1 + D \tau)}}_{\mathcal{C}_{C/D}^*} \widetilde{\delta \varphi_C}$$

Le $\widetilde{\delta \varphi_{D,ins}^*}(\tau)$ est connu et peut toujours s'inverser. On obtient par inversion :

$$-D G_0 \frac{\tau}{(1 + D \tau)} \xrightarrow{\mathcal{B}^{-1}} -D G_0 \frac{(1 - e^{-D t})}{D}$$

L'évolution insensible s'exprime donc : $\delta \varphi_{D,ins}^*(t) = -G_0 (1 - e^{-D t})$. Rappelons que cette évolution n'est valide que sur un court horizon de temps δt .

On note que cette dernière relation n'est pas du type de la relation (4.25) mais bien du type évolution de référence/évolution perturbée.

– 3ème relation

On peut aussi éliminer $\widetilde{\delta X}(\tau)$ dans $\widetilde{\delta \varphi_C}(\tau)$; on obtient :

$$\widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) = k[N - 2X_0] \widetilde{\delta X_{dec}}(\tau) - k[N - 2X_0] \tau \{ \widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) + \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) \}$$

On résout :

$$\widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) = \widetilde{\delta \varphi_{C,ins}^*}(\tau) + \underbrace{\frac{k[N - 2X_0] \tau}{(1 + k[N - 2X_0] \tau)}}_{\mathcal{C}_{D/C}^*} \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau)$$

L'évolution de $\widetilde{\delta \varphi_{D,ins}^*}(\tau)$ est complètement connue.

– 4ème relation

On peut pousser la résolution jusqu'au bout avec les deux lignes où on a éliminé $\widetilde{\delta X}(\tau)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{(1 + D \tau)}_{\mathcal{C}_{D/D}} \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) + \underbrace{D \tau}_{\mathcal{C}_{C/D}} \widetilde{\delta \varphi_C} = \widetilde{\delta \varphi_{D,ins}}(\tau) \\ -k[N - 2X_0] \tau \widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) + (1 + k[N - 2X_0] \tau) \{ \widetilde{\delta \varphi_C}(\tau) = \widetilde{\delta \varphi_{C,ins}}(\tau) \} \end{array} \right.$$

Il s'agit d'un système algébrique dans $\mathcal{B}$ duquel on peut tirer la valeur finale de l'un ou l'autre transfert sous la forme par exemple de :

$$\widetilde{\delta \varphi_D}(\tau) = \frac{\widetilde{\delta \varphi'_{D,ins}}}{(1 - \mathcal{C}_{D/D}(\tau))}$$

$\widetilde{\delta \varphi'_{D,ins}}$ est encore une autre expression que $\widetilde{\delta \varphi^*_{D,ins}}$. A la place de $\widetilde{\mathcal{C}_{D/D}}(\tau)$ on fait plutôt figurer le gain de rétroaction $\widetilde{g_D}(\tau)$.

Reste à appliquer des scénarios de perturbation pour évaluer $\delta \varphi_D(t)$ ou le gain $g_D(t)$.

4.5.6 couplages et hypothèse de Boussinesq

4.6 Résultats en transformée de BOREL.

La transformée de LAPLACE d'une fonction du temps est définie par :

$$f_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{L}} \widetilde{f}_{(p)} = \int_0^\infty e^{-pt} f_{(t)} dt \quad (4.26)$$

où p est la variable de LAPLACE.

On préfère passer de l'espace de LAPLACE à l'espace de BOREL, les deux transformées étant liées par la relation-définition :

$$f_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{B}} \widehat{f}_{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \int_0^\infty e^{-t/\tau} f_{(t)} dt = \frac{1}{\tau} \widetilde{f}_{(\frac{1}{\tau})} \quad (4.27)$$

où cette fois τ est la variable de BOREL, homogène à un temps.

En fait, pour les besoins *ad hoc* de la résolution des systèmes instationnaires dans le cadre du T.E.F., on peut aussi utiliser une fonction transformée pour laquelle on change l'échelle des temps (en la multipliant par un facteur 2). On définit ainsi une troisième transformée (dite "star") qui s'écrit :

$$f_{(t)} \xrightarrow{\mathcal{T}} f^*_{(\tau)} = \frac{4}{\tau} \int_0^\infty e^{-2t/\tau} f_{(t)} dt = \frac{4}{\tau} \widetilde{f}_{(\frac{2}{\tau})} = 2 \widehat{f}_{(\frac{\tau}{2})} \quad (4.28)$$

4.6.1 transformées de base

En s'appuyant sur les quelques propriétés suivantes de la transformée de BOREL (et par voie de conséquence à la transformée $\mathcal{T}$), où K est une constante quelconque :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t) &= \tau \\ \mathcal{B}(K) &= K \\ \mathcal{B}(f * g) &= \tau \mathcal{B}(f) \mathcal{B}(g) \\ \mathcal{B}(\partial_t f) &= \frac{1}{\tau} (\mathcal{B}(f) - f|_{t_0}) \end{aligned}$$

4.6.2 autres transformées

On peut établir en suivant quelques transformées de BOREL et leurs inverses :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(t^n) &= n! \tau^n \\ \mathcal{B}(e^{Kt}) &= \frac{1}{1 - K\tau} \\ \mathcal{B}\left(\frac{1 - e^{-Kt}}{K}\right) &= \frac{\tau}{1 + K\tau} \\ \mathcal{B}\left(\frac{\tau}{K} + \frac{e^{-Kt} - 1}{K^2}\right) &= \frac{\tau^2}{1 + K\tau} \end{aligned}$$

et ainsi de suite $\cdots$

Bibliographie

- [1] J.V. BECK and K.J. ARNOLD. *Parameter estimation in Engineering and Science*. John Wiley & sons, New-York., 1977.
- [2] D. G. CACUCI. Sensitivity theory for nonlinear systems. i. Nonlinear functional analysis approach and ii. Extensions to additional classes of responses. *J. Math. Phys.*, 22(12) :2794–2812, december 1981.
- [3] P. MANNEVILLE. *Structures dissipatives. Chaos et Turbulence*. Collection Aléa Saclay., 1991.
- [4] G. NICOLIS and I. PRIGOGINE. *Self-organization in non-equilibrium systems. From dissipative structures to order through fluctuations*. John Wiley & sons, New-York., 1977.

Chapitre 5

Couplage du processus d'échange radiatif avec la conduction

(par Jean-Yves Grandpeix)

Nous allons aborder ce couplage dans le cadre restreint des systèmes confinés quasi isothermes (principalement l'habitat), ce qui nous permettra de nous affranchir des effets (compliqués) de la non-linéarité des échanges radiatifs. Les gaz considérés seront principalement CO_2 et H_2O , mais on pensera aussi aux gaz des maquettes qui peuvent être très différents.

Pour simplifier le développement, nous ne considérerons, dans ce paragraphe, que des systèmes unidimensionnels. Les résultats principaux se transposent directement en 3D.

Le cadre de ce couplage va être l'équation de l'énergie :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + \frac{d\psi_r}{dx}$$

La plus grande partie du travail va consister à écrire d'une façon acceptable le terme de bilan radiatif $\frac{d\psi_r}{dx}$. Le principe, pour cela, va consister à :

- passer à un problème linéaire par rapport aux températures par une linéarisation :

$$L_{bl(T)} = L_{bl(T_0)} + L'_{bl(T_0)}(T - T_0)$$

sur chaque bande spectrale l .

- faire apparaître la température d'équilibre radiatif local $T_{r(x)}$ en chaque point, ce qui permettra d'écrire :

$$\frac{d\psi_r}{dx} = [coef](T_{r(x)} - T_{(x)})$$

- y séparer les contributions de chacune des parois et du gaz :

$$T_{r(x)} = T_{r1(x)}^p + T_{r2(x)}^p + T_{r(x)}^g$$

et montrer que, dans les cas qui nous intéressent, on peut négliger la contribution due aux échanges avec le gaz.

Cette dernière approximation, dénommée "Approximation des échanges faibles avec le gaz", occupe une position centrale dans l'analyse de couplage que nous allons faire. Elle nous permettra de mettre en évidence les paramètres adimensionnels caractérisant l'intensité du couplage. Sa justification est immédiate dans le cas du couplage convection-rayonnement ; elle est beaucoup plus délicate dans le cas conduction-rayonnement.

La Convection naturelle en cavité fermée se caractérise par de faibles écarts de température dans le coeur de la cavité, relativement aux écarts entre parois. Le bilan volumique se décompose en contributions dues aux échanges avec le gaz et celles dues aux échanges avec les parois :

$$\psi_{r(i)} = \sum_j \psi_{r(i,j)}^{gg} + \sum_k \psi_{r(i,k)}^{gp}$$

puis les échanges avec le gaz en échanges avec la couche limite et échanges avec le coeur :

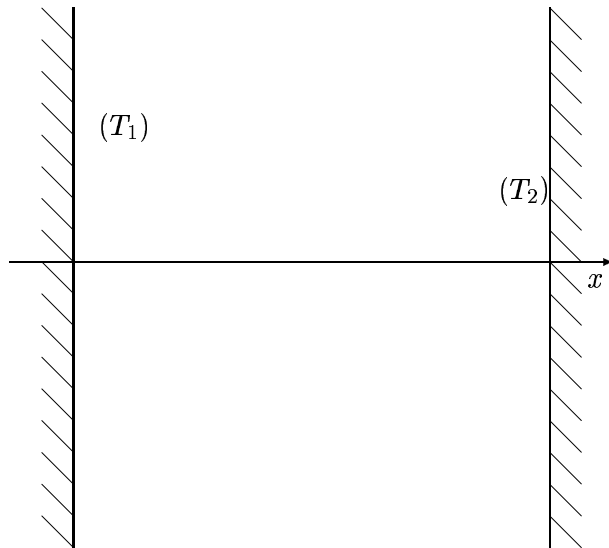
$$\psi_{r(i)} = \psi_{r(i,couchelimite)}^{gg} + \psi_{r(i,coeur)}^{gg} + \sum_k \psi_{r(i,k)}^{gp}$$

Lorsque l'on se place hors couche limite, les échanges avec le coeur sont quasi nuls (faiblesse des écarts de température) et on voit que les échanges avec les parois sont nettement dominants. Dans les couches limites, ce sont les échanges avec le gaz qui dominent, mais c'est alors le bilan radiatif qui est négligeable devant le bilan conductif.

On peut donc faire l'approximation que, partout dans le gaz, les échanges radiatifs se limitent aux échanges avec les parois.

En Conduction la justification précédente n'est plus valable, puisque le coeur n'est plus isotherme (il n'y a plus de séparation nette coeur-couche limite). Mais nous montrerons que, dans la limite des grandes valeurs du paramètre de couplage rayonnement-conduction introduit dans ce chapitre, on peut à nouveau négliger les échanges gaz-gaz.

Nous allons attaquer ce problème en établissant d'abord une écriture simplifiée des échanges radiatifs dans le cas d'un gaz gris ; ensuite, nous analyserons le couplage conduction-rayonnement dans ce cas ; enfin, nous considérerons le cas des gaz réels. L'exemple considéré est celui d'un gaz compris entre deux parois noires maintenues à des températures T_1 et T_2 . Le but est de déterminer le profil de température dans le gaz en régime stationnaire.



5.1 Rappel : écriture des bilans radiatifs

Notations

- nombre d'onde : ν
- fréquence : $\hat{\nu}$; on a : $\hat{\nu} = c\nu$

- Luminance monochromatique noire à la température $T : L_{b\nu(T)}$: par abus, on notera $L_{b\nu(x)}$ la luminance à la température du point d'abscisse x
- Luminance noire à la température T (cas du gaz gris) : L_b
- coefficient d'absorption volumique : κ_ν (ou κ dans le cas gris)
- transmittance à travers une distance $s : \tau_{\nu(s)}$; dans le cas monochromatique ou gris, on a :
 $\tau_{(s)} = \exp(-\kappa s)$

Echanges gaz-gaz :

Densité surfacique de flux émis par une couche $[x, x + dx]$ et absorbée par une couche $[y, y + dy]$, dans une bande $[\nu, \nu + d\nu]$, et dans un angle solide $d\Omega$ autour d'une direction $\vec{n}$ faisant un angle θ avec l'axe x :

$$d\Phi_{y,x,\nu,\vec{n}} = \underbrace{\kappa_\nu L_{b\nu(x)} dx d\Omega d\nu}_{\text{émission}} \underbrace{\tau_\nu\left(\frac{|y-x|}{\cos\theta}\right)}_{\text{transmission}} \underbrace{\kappa_\nu \frac{dy}{\cos\theta}}_{\text{absorption}} \quad (5.1)$$

(noter l'absence de facteur en $\cos\theta$ dans le terme d'émission, due au fait que la longueur émettrice est $\frac{dx}{\cos\theta}$ alors que la surface émettrice, projetée sur la normale à $\vec{n}$ est $\cos\theta$)

En remarquant que $K^2\tau = \tau''$, en appliquant la règle que pour obtenir l'expression de l'échange il suffit de remplacer $L_{b\nu(x)}$ par la différence $L_{b\nu(y)} - L_{b\nu(x)}$, en intégrant sur la fréquence ν et en intégrant y sur tout le gaz, on obtient le bilan en x des échanges avec le gaz :

$$\frac{d\psi_r^{gg}}{dx} = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d(\cos\theta) \int_0^D dy \frac{1}{\cos\theta} \tau_\nu''\left(\frac{|y-x|}{\cos\theta}\right) (L_{b\nu(y)} - L_{b\nu(x)})$$

Echanges paroi-gaz

De la même manière, on obtient le bilan en x des échanges avec la paroi 1 :

$$\frac{d\psi_{r1}^{gp}}{dx} = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d(\cos\theta) \left| \tau_\nu'\left(\frac{x}{\cos\theta}\right) \right| (L_{b\nu(T_1)} - L_{b\nu(x)})$$

Echanges paroi-paroi

$$\psi_{r12}^{pp} = 2\pi \int_0^\infty d\nu \int_0^1 d(\cos\theta) \cos\theta \tau_\nu\left(\frac{D}{\cos\theta}\right) (L_{b\nu(T_1)} - L_{b\nu(T_2)})$$

Transmittances de couche

Pour faciliter l'écriture, on introduit les transmittances de couche ("slab transmittance") :

$$\tilde{\tau}_\nu(r) = 2 \int_0^1 d\mu \mu \tau_\nu\left(\frac{r}{\mu}\right)$$

qui vérifient $\tilde{\tau}_\nu(0) = 1$ et qui ont donc bien les caractéristiques de transmittances.

Alors, les formules de bilan s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_r^{gg}}{dx} &= \pi \int_0^\infty d\nu \int_0^D dy (L_{b\nu(y)} - L_{b\nu(x)}) \tilde{\tau}_\nu''(|y-x|) \\ \frac{d\psi_{r1}^{gp}}{dx} &= \pi \int_0^\infty d\nu (L_{b\nu(T_1)} - L_{b\nu(x)}) |\tilde{\tau}_\nu'(x)| \\ \psi_{r12}^{pp} &= \pi \int_0^\infty d\nu (L_{b\nu(T_1)} - L_{b\nu(T_2)}) \tilde{\tau}_\nu(D) \end{aligned} \quad (5.2)$$

5.2 Ecriture du bilan radiatif pour un gaz gris

On considère un gaz gris de coefficient d'absorption κ , enclos entre deux parois de températures T_1 et T_2 , espacées d'une distance D . L'absence de structure spectrale a deux conséquences : d'une part, les formules de bilan radiatif s'expriment directement en fonction de la luminance noire L_b ;

$$\begin{aligned}\frac{d\psi_{rg}}{dx} &= \pi \int_0^D dy (L_b(y) - L_b(x)) \tilde{\tau}''_{(|y-x|)} \\ \frac{d\psi_{r1}}{dx} &= \pi (L_{b1} - L_b(x)) |\tilde{\tau}'_{(x)}| \\ \frac{d\psi_{r2}}{dx} &= \pi (L_{b2} - L_b(x)) |\tilde{\tau}'_{(D-x)}|\end{aligned}\tag{5.3}$$

Dans ces conditions, le bilan radiatif local s'écrit (en passant de L_b à $e_b = \pi L_b$) :

$$\frac{d\psi_r}{dx} = \sigma(T_1^4 - T_{(x)}^4) |\tilde{\tau}'_{(x)}| + \sigma(T_2^4 - T_{(x)}^4) |\tilde{\tau}'_{(D-x)}| + \int_0^D dy \sigma(T_{(y)}^4 - T_{(x)}^4) \tilde{\tau}''_{(|y-x|)}\tag{5.4}$$

ce qui constitue la formule de base donnant le bilan radiatif local sous forme de somme d'échanges avec les 2 parois et avec le gaz.

Hypothèse : faibles écarts de température. Linéarisation

Maintenant on linéarise les émittances au voisinage d'une température de référence T_0 :

$$\sigma T^4 = \sigma T_0^4 + 4\sigma T_0^3 (T - T_0)$$

ce qui permet d'écrire le bilan radiatif local :

$$\frac{d\psi_r}{dx} = 4\sigma T_0^3 [(T_1 - T_{(x)}) |\tilde{\tau}'_{(x)}| + (T_2 - T_{(x)}) |\tilde{\tau}'_{(D-x)}| + \int_0^D dy (T_{(y)} - T_{(x)}) \tilde{\tau}''_{(|y-x|)}]\tag{5.5}$$

Introduction de la température d'équilibre radiatif local, température pour laquelle le bilan radiatif local s'annule.

Pour obtenir des formules plus explicites, nous allons exprimer les transmittances de couche $\tilde{\tau}$ à l'aide des fonctions exponentielles intégrales :

$$\begin{aligned}E_{n(x)} &= \int_0^1 \mu^{n-2} \exp\left(\frac{-x}{\mu}\right) d\mu \\ \tilde{\tau}_{(r)} &= 2E_{3(\kappa r)} \\ \tilde{\tau}'_{(r)} &= -2\kappa E_{2(\kappa r)} \\ \tilde{\tau}''_{(r)} &= 2\kappa^2 E_{1(\kappa r)}\end{aligned}\tag{5.6}$$

Le bilan s'écrit, à l'aide des fonctions exponentielles intégrales :

$$\frac{d\psi_r}{dx} = 8\kappa\sigma T_0^3 [(T_1 - T_{(x)}) E_{2(\kappa x)} + (T_2 - T_{(x)}) E_{2(\kappa[D-x])} + \kappa \int_0^L dy (T_{(y)} - T_{(x)}) E_{1(\kappa|y-x|)}]\tag{5.7}$$

La température d'équilibre radiatif local est donc donnée par :

$$0 = 8\kappa\sigma T_0^3 [(T_1 - T_{r(x)}) E_{2(\kappa x)} + (T_2 - T_{r(x)}) E_{2(\kappa[D-x])} + \kappa \int_0^L dy (T_{(y)} - T_{r(x)}) E_{1(\kappa|y-x|)}]\tag{5.8}$$

En résolvant cette dernière équation en T_r et en retranchant (5.8) de (5.7), on obtient les deux relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_r}{dx} = 8\kappa\sigma T_0^3 (T_{r(x)} - T_{(x)}) [E_{2(\kappa x)} + E_{2(\kappa[D-x])} + \kappa \int_0^D dy E_{1(\kappa|y-x|)}] \\ T_{r(x)} [E_{2(\kappa x)} + E_{2(\kappa[D-x])} + \kappa \int_0^D dy E_{1(\kappa|y-x|)}] = \\ T_1 E_{2(\kappa x)} + T_2 E_{2(\kappa[D-x])} + \kappa \int_0^D dy T_{(y)} E_{1(\kappa|y-x|)} \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Le facteur entre crochets qui figure dans le membre de droite de la première équation (5.9) et dans le membre de gauche de la seconde peut s'évaluer en découpant le domaine d'intégration en deux et en utilisant la relation $E'_{2(x)} = -E_{1(x)}$:

$$\begin{aligned} & E_{2(\kappa x)} + E_{2(\kappa[D-x])} + \int_0^D dy E_{1(\kappa|y-x|)} \\ &= E_{2(\kappa x)} + E_{2(\kappa[D-x])} + \kappa \int_0^x dy E_{1(\kappa[x-y])} + \kappa \int_x^D dy E_{1(\kappa[y-x])} \\ &= E_{2(\kappa x)} + E_{2(\kappa[D-x])} + E_{2(0)} - E_{2(\kappa x)} + E_{2(0)} - E_{2(\kappa[D-x])} \\ &= 2E_{2(0)} \\ &= 2 \end{aligned} \quad (5.10)$$

On obtient ainsi les deux relations fondamentales :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_r}{dx} &= 16\kappa\sigma T_0^3 (T_{r(x)} - T_{(x)}) \\ T_{r(x)} &= \frac{1}{2} [T_1 E_{2(\kappa x)} + T_2 E_{2(\kappa[D-x])} + \kappa \int_0^D dy T_{(y)} E_{1(\kappa|y-x|)}] \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nous avons donc obtenu la formule attendue donnant le bilan radiatif en fonction de la température d'équilibre radiatif T_r ainsi que l'expression de T_r en fonction des températures de paroi et du profil de température du gaz. Cette formulation à l'aide de T_r est particulièrement pertinente lorsque l'on peut considérer que la température T_r est indépendante du profil de température du gaz, c'est-à-dire lorsque l'on peut faire l'approximation des échanges faibles avec le gaz. Avant d'aller plus loin, nous allons détailler l'expression de cette approximation. Nous examinerons au cours des développements ultérieurs son applicabilité.

Approximation des échanges faibles avec le gaz

On repart des équations (5.9). Il faut en effet prendre garde que les mêmes échanges soient négligés dans l'expression du bilan (formule (5.7)) et dans celle de T_r (formule (5.8)). Dans le cas contraire, on obtient très rapidement des formules qui mènent à une violation du deuxième principe de la thermodynamique.

En négligeant les termes représentant les échanges avec le gaz, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_r}{dx} &= 8\kappa\sigma T_0^3 N_{(x)} (T_{r(x)} - T_{(x)}) \\ T_{r(x)} &= \frac{1}{N_{(x)}} [T_1 E_{2(\kappa x)} + T_2 E_{2(\kappa[D-x])}] \\ N_{(x)} &= E_{2(\kappa x)} + E_{2(\kappa[D-x])} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Note

En intégrant par parties l'intégrale figurant dans l'expression de T_r (en dérivant $T_{(y)}$ et en intégrant E_1) on obtient une seconde expression pour T_r :

$$T_{r(x)} = T_{(x)} + \int_0^D dy \partial_y T_{(y)} E_{2(\kappa|y-x|)}$$

Dans la première formulation, les contributions à T_r du rayonnement issu de chaque paroi et de chaque tranche de gaz est bien identifié ($\kappa \int_{y_1}^{y_2} dy T_{(y)} E_{1(\kappa|y-x|)}$ est la contribution de la tranche $[y_1, y_2]$). Dans la seconde formulation, on n'a plus de découpage spatial de ce genre. On voit bien un découpage dans le monde mathématique en contributions liées aux $\partial_y T$ dans chaque tranche ; mais il n'y correspond pas de découpage spatial dans le monde physique.

La forme en $\partial_y T$ (ou plutôt celle en $\partial_y L_b$) est celle utilisée en météorologie. Elle est très efficace numériquement. Mais elle présente l'inconvénient que l'on vient de mentionner, lequel mène au fait bien connu que les météorologues ne savent pas exprimer les échanges internes à l'atmosphère (du moins, pas facilement).

5.3 Couplage conduction-rayonnement (gaz gris compris entre deux faces noires)

On suppose le gaz à l'état stationnaire.

L'équation de l'énergie s'écrit :

$$\lambda \partial_x^2 T + \frac{d\psi_r}{dx} = 0 \quad (5.13)$$

soit :

$$\begin{aligned} \partial_x^2 T + 16\kappa\sigma T_0^3 (T_{r(x)} - T_{(x)}) &= 0 \\ T_{r(x)} &= \frac{1}{2} [T_1 E_{2(\kappa x)} + T_2 E_{2(\kappa[D-x])}] + \kappa \int_0^D dy T_{(y)} E_{1(\kappa|y-x|)} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Adimensionnalisation

On prend pour références :

- Unité de longueur : l (nous laissons libre cette unité, ce qui permettra d'essayer plusieurs adimensionnalisations) ; on pose $\hat{x} = \frac{x}{l}$.
- Unité de température : $T_1 - T_2$; on pose $\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_2}$, avec $T_0 = (T_1 + T_2)/2$.

Pour adimensionnaliser, on multiplie chaque paramètre par l'inverse de son équation aux dimensions. $\frac{16\kappa\sigma T_0^3}{\lambda}$ est de dimension l^{-2} ; il devient donc $\frac{16\kappa\sigma T_0^3 l^2}{\lambda}$. κ est de dimension l^{-1} ; il devient donc κl .

L'équation adimensionnelle de l'énergie s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{x}}^2 \hat{T} + \frac{16\kappa\sigma T_0^3 l^2}{\lambda} (\hat{T} - \hat{T}_r) &= 0 \\ \hat{T}_r(\hat{x}) &= \frac{1}{2} [E_{2([\kappa l]\hat{x})} - E_{2([\kappa l][\frac{D}{l} - \hat{x}])}] + [\kappa l] \int_0^{\frac{D}{l}} dy \hat{T}_{(y)} E_{1([\kappa l]|y - \hat{x}|)} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Première adimensionnalisation : $l = D$

L'équation adimensionnelle de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}\partial_{\hat{x}}^2 \hat{T} + R(\hat{T} - \hat{T}_r) &= 0 \\ \hat{T}_r(\hat{x}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (E_2(s\hat{x}) - E_2(s[1-\hat{x}])) + s \int_0^1 dy \hat{T}(y) E_1(s|y-\hat{x}|) \right] \\ R &= \frac{16\kappa\sigma T_0^3 D^2}{\lambda} \\ s &= \kappa D\end{aligned}\tag{5.16}$$

avec les conditions aux limites : $T(0) = \frac{1}{2}$ et $T(1) = -\frac{1}{2}$.

On voit apparaître deux groupement sans dimension. s est l'épaisseur optique. R est le paramètre de couplage conducto-radiatif. On peut en donner une interprétation en l'écrivant sous la forme :

$$R = \frac{16\kappa\sigma T_0^3 \Delta T D}{\Delta T \lambda / D}$$

R apparaît comme le rapport du flux radiatif net absorbé au flux conduit.

Exemple

Dans une pièce remplie d'air humide : $s = 0.1$, $D = 3m$, $\lambda = 10^{-2} W m^{-1} K^{-1}$, $T_0 = 300K$.

On trouve : $R = 750$.

Seconde adimensionnalisation : $l = 1/\kappa$

L'équation adimensionnelle de l'énergie devient :

$$\begin{aligned}\partial_{\hat{x}}^2 \hat{T} + \frac{4}{N}(\hat{T} - \hat{T}_r) &= 0 \\ N &= \frac{\kappa\lambda}{4\sigma T_0^3}\end{aligned}\tag{5.17}$$

avec les conditions aux limites : $T(0) = \frac{1}{2}$ et $T(\kappa D) = -\frac{1}{2}$.

(Noter que $N = 4s^2/R$)

N est le nombre de Stark. L'utilisation de ce paramètre comme paramètre de couplage est très perturbante parce que : (1) N grand correspond à peu d'effet radiatif; (2) N contient κ au numérateur. On aurait donc l'impression que plus le gaz est absorbant moins il y a d'effet radiatif. Ce comportement paradoxal tient au fait que changer κ , c'est aussi changer les dimensions du système. Cette adimensionnalisation est très inconvenue.

Nous allons utiliser la première adimensionnalisation, tout en proposant aux réflexions du lecteur la question : comment distingue-t-on une bonne d'une mauvaise adimensionnalisation ?

Remarques

- On a là le système complet d'équations que l'on veut analyser pour étudier le couplage conduction-rayonnement.
- Les développements ont eu lieu en $1D$, avec un gaz gris; mais on obtient le même paramètre R dans le cas général (cependant, la notion d'épaisseur optique unique disparaît).
- Comme on l'a annoncé, cette formulation en T_r est surtout pertinente lorsque l'approximation des échanges faibles avec le gaz est justifiée. Nous laissons de côté le cas $s \rightarrow \infty$, cas où les échanges radiatifs se font à très courte distance et où l'utilisation de T_r devient très inappropriée. Nous allons surtout nous intéresser au cas $s \rightarrow 0$ (cas optiquement mince). L'exemple de calcul de R a montré que le cas de la physique de l'habitat correspondait à s faible et R élevé.
- Pour aborder ce problème, on va étudier les comportements pour $s \rightarrow 0$, puis pour $R \rightarrow \infty$ et $R \rightarrow 0$. Et on dira que le cas réel est un mélange de toutes ces situations asymptotiques.

Etude du cas $s \rightarrow 0$

En développant l'expression de T_r au premier ordre, et en utilisant les développements connus des fonctions exponentielles intégrales ($E_2(x) \sim 1 + x \ln(x)$ et $E_1(x) \sim -\ln(x)$), il vient :

$$\hat{T}_r(x) = \frac{|s \ln(s)|}{2} \left(\frac{1}{2} - x - \int_0^1 dy \hat{T}(y) \right)$$

Comme on a centré les températures et comme le système admet le plan médian ($x = 1/2$) comme plan de symétrie, la fonction $\hat{T}(x)$ vérifie : $\hat{T}(1/2 - x) = -\hat{T}(x)$. L'intégrale de $\hat{T}(x)$ sur $[0, 1]$ est donc nulle.

On en déduit 2 propriétés :

- lorsque s tend vers 0, $\hat{T}_r$ tend vers 0 uniformément.
- la contribution des échanges avec le gaz devient négligeable devant celles des échanges avec les parois, ce qui justifie l'approximation des échanges faibles avec le gaz.

Etude du cas $R \rightarrow 0$

Nous considérons maintenant l'équation de l'énergie dans l'approximation des échanges faibles avec le gaz :

$$\begin{aligned}\partial_{\hat{x}}^2 \hat{T} + \frac{R\hat{N}_{(\hat{x})}}{2}(\hat{T} - \hat{T}_r) &= 0 \\ \hat{T}_r(\hat{x}) &= \frac{1}{2\hat{N}_{(\hat{x})}}(E_{2(s\hat{x})} - E_{2(s[1-\hat{x}])})\end{aligned}\tag{5.18}$$

$$\hat{N}_{(\hat{x})} = E_{2(s\hat{x})} + E_{2(s[1-\hat{x}])}$$

(noter que, comme s est petit devant 1, $\hat{N}$ est toujours voisin de 2)

On est ici dans une situation où l'équation étudiée ne comporte que deux termes (le terme conductif $\partial_{\hat{x}}^2 \hat{T}$ et le terme radiatif $R(\hat{T} - \hat{T}_r)$). Dans ces conditions, une analyse d'ordre de grandeur classique n'a pas de sens. En effet, le raisonnement suivant est absurde : l'équation est $A + B = 0$, A est négligeable devant B , il reste donc $B = 0$ (et on ne voit plus comment A pourrait être négligeable devant B). La méthode est de regarder quelle est l'équation limite. Puis de se demander si l'équation limite est du même ordre que l'équation initiale, c'est-à-dire si elle a une solution vérifiant les conditions aux frontières. Si oui, la limite est régulière, et on va avoir une convergence uniforme de la solution vers la solution de l'équation limite. Sinon, la limite est singulière : il y aura convergence vers la solution de l'équation limite dans le volume, et il y aura des zones près des parois où la solution dévierait fortement pour se raccorder aux conditions aux frontières.

Dans le cas de la limite $R \rightarrow 0$, l'équation limite est $\partial_{\hat{x}}^2 \hat{T} = 0$. Elle est d'ordre 2 ; elle admet une solution unique vérifiant les conditions aux frontières (qui est un profil linéaire de température allant de T_1 à T_2). La convergence va être uniforme vers ce profil linéaire.

Etude du cas $R \rightarrow \infty$

Ici, l'équation limite est $\hat{T} - \hat{T}_r = 0$. C'est une équation d'ordre 0 : sa solution ne vérifie pas en général les conditions aux frontières. La solution va converger vers $\hat{T}_r$ dans une grande partie du volume ; et il y aura des zones de raccord avec les températures des parois au voisinage des parois (il y aura des couches limites). On s'attend donc à une forme en S du profil de température.

5.4 Ecriture du bilan radiatif pour un gaz réel

Formellement, l'étude du couplage conduction-rayonnement dans le cas des gaz réels diffère peu de l'étude précédente. Cependant, le fait que le spectre des gaz réels est un spectre de raies (voir figures (5.1) et (5.2)) entraîne que les échanges radiatifs ont lieu sur des échelles spatiales très variées : distance très courtes pour les photons de fréquence proche du centre d'une raie ; distance très longue pour les photons de fréquence loin de tout centre (avant d'aller plus loin, le lecteur pourra se demander quelle épaisseur de gaz à la pression standard est nécessaire pour obtenir les absorptions voisines de 100% atteintes aux centres des raies dans les spectres usuels).

Passage gaz gris $\rightarrow$ gaz réel

Deux modifications successives vont être utilisées pour le passage des formules relatives aux gaz gris à celles relatives aux gaz réels.

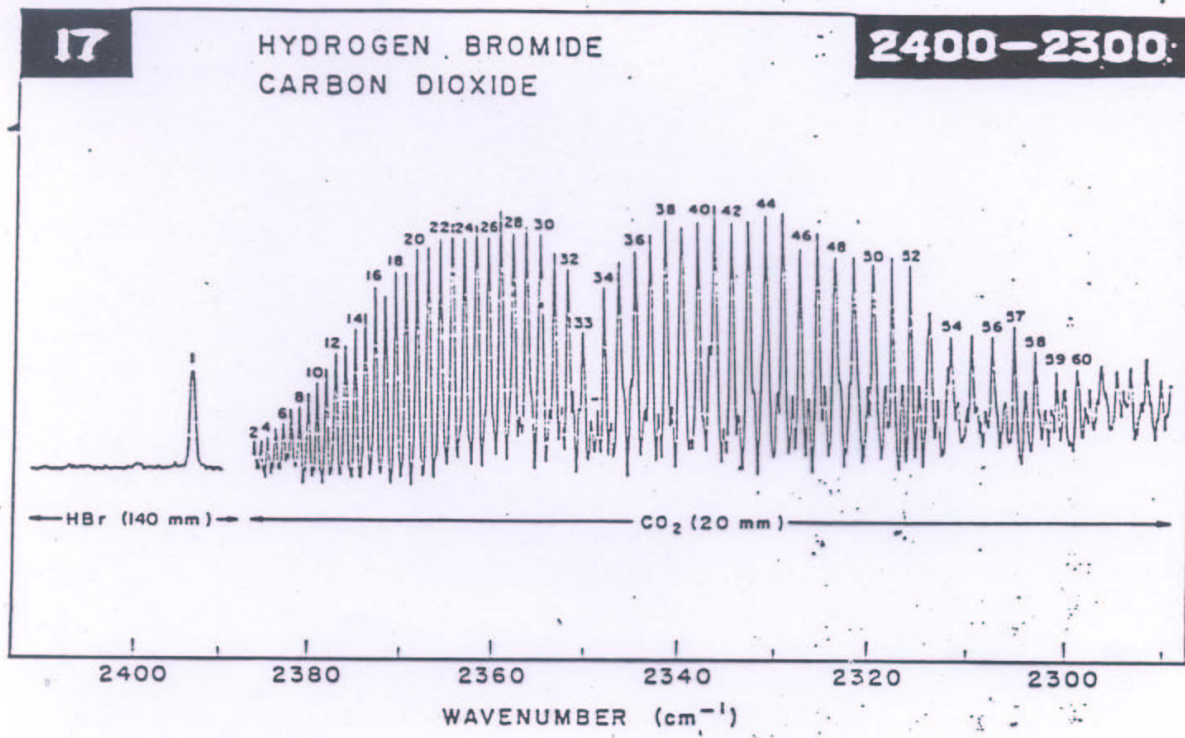


FIG. 5.1 – Spectre du CO_2 dans la bande $2400 - 2300 cm^{-1}$

- D'une part, la luminance noire L_b intégrée sur tout le spectre va faire place à la luminance spectrale $\frac{dL_b}{d\nu}$; d'autre part, les flux et bilans d'énergie vont s'obtenir en intégrant sur le spectre. Ainsi :

$$\frac{d\psi_{r1}}{dx} = \pi (L_{b1} - L_{b(x)}) |\tilde{\tau}'_{\nu(x)}|$$

va devenir :

$$\frac{d\psi_{r1}}{dx} = \pi \int_0^\infty d\nu (L_{b\nu,1} - L_{b\nu(x)}) |\tilde{\tau}'_{\nu(x)}|$$

- On ne va pas travailler avec les densités spectrales, mais découper le spectre en bandes de largeur finie, suffisamment étroites pour que l'on puisse considérer la luminance spectrale $L_{b\nu}$ comme constante sur chaque bande (modèles à bandes étroites). On introduit alors la luminance noire moyenne L_{bl} sur la bande étroite (l), donnée par :

$$\delta\nu \cdot L_{bl} = \int_{\nu_l}^{\nu_l + \delta\nu} L_{b\nu} d\nu$$

La formule donnant $\frac{d\psi_{r1}}{dx}$ devient alors :

$$\frac{d\psi_{r1}}{dx} = \pi \sum_l (L_{bl,1} - L_{bl(x)}) \int_{\nu_l}^{\nu_l + \delta\nu} d\nu |\tilde{\tau}'_{\nu(x)}|$$

Tout le jeu des modèles à bandes étroites consiste à fournir des estimations de l'intégrale figurant dans cette formule.

- **Modèle statistique à bandes étroites de Malkmus**

On désigne par $\bar{\tau}_l$ la transmittance moyenne sur la bande étroite l :

$$\bar{\tau}_{l(x)} = \frac{1}{\delta\nu} \int_{\nu_l}^{\nu_l + \delta\nu} d\nu |\tau_{\nu(x)}|$$

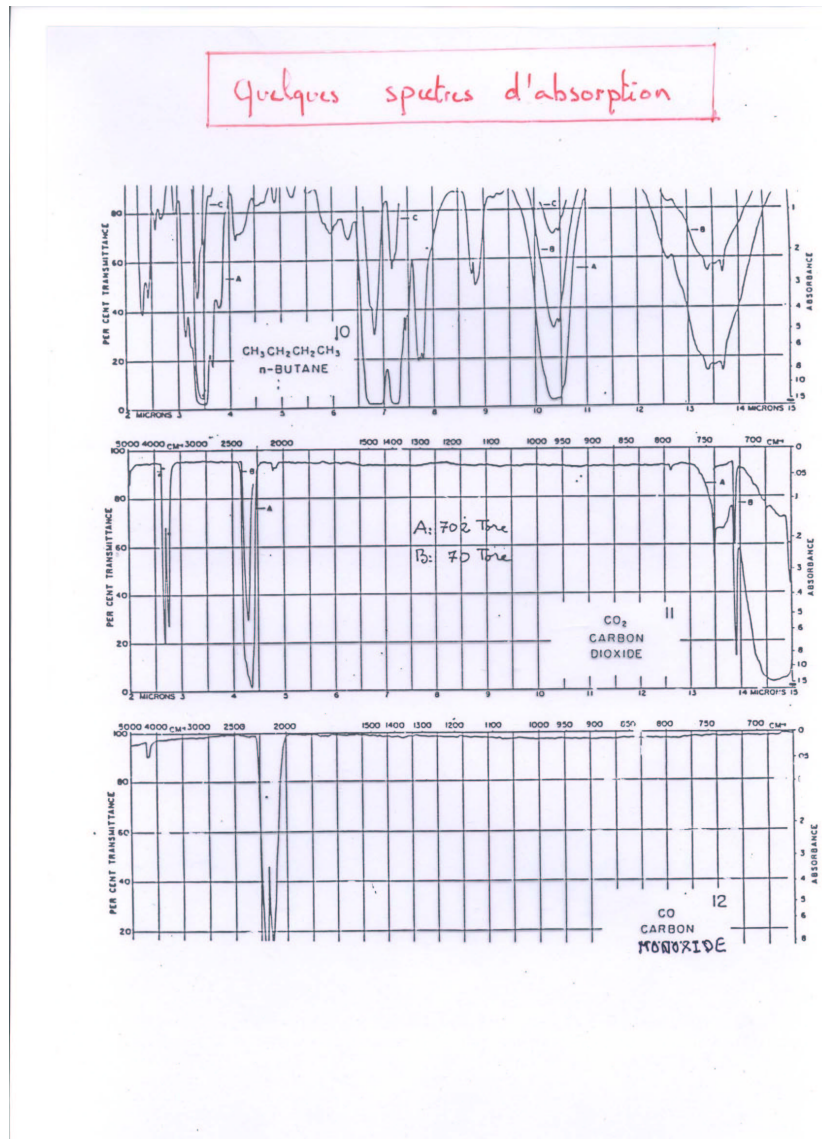


FIG. 5.2 – Exemples de structures en bandes des spectres des gaz

Le modèle donne pour expression de $\bar{\tau}_l$:

$$\begin{cases} \bar{\tau}_l(x) = \exp(-2\beta_l[\sqrt{1 + \frac{\bar{K}_l x}{\beta_l}} - 1]) \\ \beta_l = \frac{\gamma}{\delta_l} \end{cases} \quad (5.19)$$

où $\bar{K}_l$ est le coefficient d'absorption moyen sur la bande, γ est la largeur des raies et δ_l est l'espacement moyen entre les raies. Les tables publiées par exemple par Soufiani et Taine donnent pour chaque bande étroite (largeur : 25 cm^{-1}) les valeurs de $\bar{K}_l$ et δ_l pour le gaz pur à la pression standard ($p_s = 1 \text{ atm.}$). La largeur γ se calcule pratiquement par la formule :

$$\gamma = .066 \frac{P}{P_s} \left(7. X_{h2o} \frac{T_s}{T} + (1.2(X_{h2o} + X_{n2}) + .8 * X_{o2} + 1.6 * X_{co2}) * \sqrt{\frac{T_s}{T}} \right)$$

Exercice : Déterminer approximativement la largeur γ sachant que le temps moyen entre deux chocs sur une même molécule, dans les conditions normales de température et de pression dans l'air, est de 10^{-10} s .

– On a maintenant une transmittance de couche par bande spectrale :

$$\tilde{\tau}_{l(x)} = 2 \int_0^1 d\mu \cdot \mu \cdot \bar{\tau}_{l(\frac{x}{\mu})} \quad (5.20)$$

avec les propriétés : $\tilde{\tau}_{l(0)} = 1$ et $\tilde{\tau}'_{l(0)} = -2\bar{K}_l$.

Maintenant on dispose d'un outil raisonnable pour traduire les propriétés sur chaque bande étroite. Il reste à passer à l'ensemble des bandes. La très grande disparité existant entre les bandes ne va pas rendre la tâche facile (CO_2 : $\bar{K}_l$ varie de $10^{-6}m^{-1}$ à $40m^{-1}$), puisqu'elle entraîne la présence simultanée de multiples échelles spatiales. Et on sait (confère la turbulence en mécanique des fluides) que ceci est un facteur de complexité.

Les équations de bilan (5.3) deviennent :

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_r}{dx}^{gg} &= \pi\delta\nu \sum_l \int_0^D dy (L_{bl}(y) - L_{bl}(x)) \tilde{\tau}_{l(|y-x|)}'' \\ \frac{d\psi_{r1}}{dx}^{gp} &= \pi\delta\nu \sum_l (L_{bl1} - L_{bl}(x)) |\tilde{\tau}'_{l(x)}| \\ \frac{d\psi_{r2}}{dx}^{gp} &= \pi\delta\nu \sum_l (L_{bl2} - L_{bl}(x)) |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| \end{aligned} \quad (5.21)$$

Linéarisation

On linéarise les luminances de bande au voisinage d'une température T_0 :

$$L_{bl(T)} = L_{bl(T_0)} + L'_{bl(T_0)}(T - T_0)$$

On pose $\boxed{c_l = L'_{bl(T_0)}}$: le bilan radiatif local s'écrit alors :

$$\frac{d\psi_r}{dx} = \pi\delta\nu \sum_l c_l [(T_1 - T_{(x)}) |\tilde{\tau}'_{l(x)}| + (T_2 - T_{(x)}) |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy (T_{(y)} - T_{(x)}) \tilde{\tau}_{l(|y-x|)}''] \quad (5.22)$$

Là, on a tout pour calculer les échanges radiatifs, et c'est ce qui sera effectivement utilisé pour le couplage conduction rayonnement. Cependant, pour les cas où l'on peut faire l'approximation des échanges faibles avec le gaz, on va poursuivre et exprimer le bilan radiatif à l'aide de la température d'équilibre radiatif T_r .

Température d'équilibre radiatif local

Les développements sont très semblables à ceux effectués pour le gaz gris. On part de l'écriture du bilan radiatif local (5.22), dont on déduit l'équation donnant la température T_r :

$$0 = \pi\delta\nu \sum_l c_l [(T_1 - T_{r(x)}) |\tilde{\tau}'_{l(x)}| + (T_2 - T_{r(x)}) |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy (T_{(y)} - T_{r(x)}) \tilde{\tau}_{l(|y-x|)}''] \quad (5.23)$$

On obtient en résolvant cette dernière équation en T_r et par différence entre (5.22) et (5.23) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\psi_r}{dx} = \pi\delta\nu (T_{r(x)} - T_{(x)}) \sum_l c_l [|\tilde{\tau}'_{l(x)}| + |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy \tilde{\tau}''_{l(|y-x|)}] \\ T_{r(x)} \sum_l c_l [|\tilde{\tau}'_{l(x)}| + |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy \tilde{\tau}''_{l(|y-x|)}] = \\ T_1 \sum_l c_l |\tilde{\tau}'_{l(x)}| + T_2 \sum_l c_l |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy T_{(y)} \sum_l c_l \tilde{\tau}''_{l(|y-x|)} \end{array} \right. \quad (5.24)$$

On a :

$$\begin{aligned} & |\tilde{\tau}'_{l(x)}| + |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy \tilde{\tau}''_{l(|y-x|)} \\ &= -\tilde{\tau}'_{l(x)} - \tilde{\tau}'_{l(D-x)} + \int_0^x dy \tilde{\tau}''_{l(x-y)} + \int_x^D dy \tilde{\tau}''_{l(y-x)} \\ &= -\tilde{\tau}'_{l(x)} - \tilde{\tau}'_{l(D-x)} + (-\tilde{\tau}'_l(0)) - (-\tilde{\tau}'_l(x) + \tilde{\tau}'_l(D-x) - \tilde{\tau}'_l(0)) \\ &= -2 \tilde{\tau}'_l(0) \\ &= 4 \bar{K}_l \end{aligned} \quad (5.25)$$

ce qui permet d'écrire l'équation de bilan radiatif local sous la forme :

$$\frac{d\psi_r}{dx} = 4\pi\delta\nu \left(\sum_l c_l \bar{K}_l \right) (T_{r(x)} - T_{(x)}) \quad (5.26)$$

et la température T_r est donnée par :

$$T_r(x) = \frac{1}{4(\sum_l c_l \bar{K}_l)} [T_1 \sum_l c_l |\tilde{\tau}'_{l(x)}| + T_2 \sum_l c_l |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy T_{(y)} \sum_l c_l \tilde{\tau}''_{l(|y-x|)}] \quad (5.27)$$

Déjà, ces formules donne une écriture simple du bilan radiatif local. Nous allons encore les simplifier en établissant une formule donnant $\sum c_l \bar{K}_l$, moyennant une approximation adaptée aux faibles écarts de température. Pour cela nous introduisons le **coefficient d'absorption de Planck** $\bar{K}$:

$$\bar{K} = \frac{\int_0^\infty d\nu \kappa_\nu L_{b\nu}(T)}{\int_0^\infty d\nu L_{b\nu}(T)} = \pi \frac{\int_0^\infty d\nu \kappa_\nu L_{b\nu}(T)}{\sigma T^4} = \pi\delta\nu \frac{(\sum_l \bar{K}_l L_{bl}(T))}{\sigma T^4} \quad (5.28)$$

Ce coefficient dépend du gaz considéré, de la pression (par l'intermédiaire des $\bar{K}_l$) et de la température. De (5.28), on tire, par dérivation par rapport à la température :

$$\partial_T (\pi\delta\nu \sum_l \bar{K}_l L_{bl}(T)) = \bar{K} \partial_T (\sigma T^4) + \sigma T^4 \partial_T \bar{K}$$

soit :

$$\pi\delta\nu \sum_l c_l \bar{K}_l = 4\bar{K} \sigma T^3 \left(1 + \frac{T}{4} \frac{\partial_T \bar{K}}{\bar{K}} \right) \quad (5.29)$$

Comme on le voit sur la figure (5.3), le coefficient $\bar{K}$ du CO_2 varie peu en fonction de la température (variation de 1% sur 10K), alors que celui de la vapeur d'eau varie nettement plus

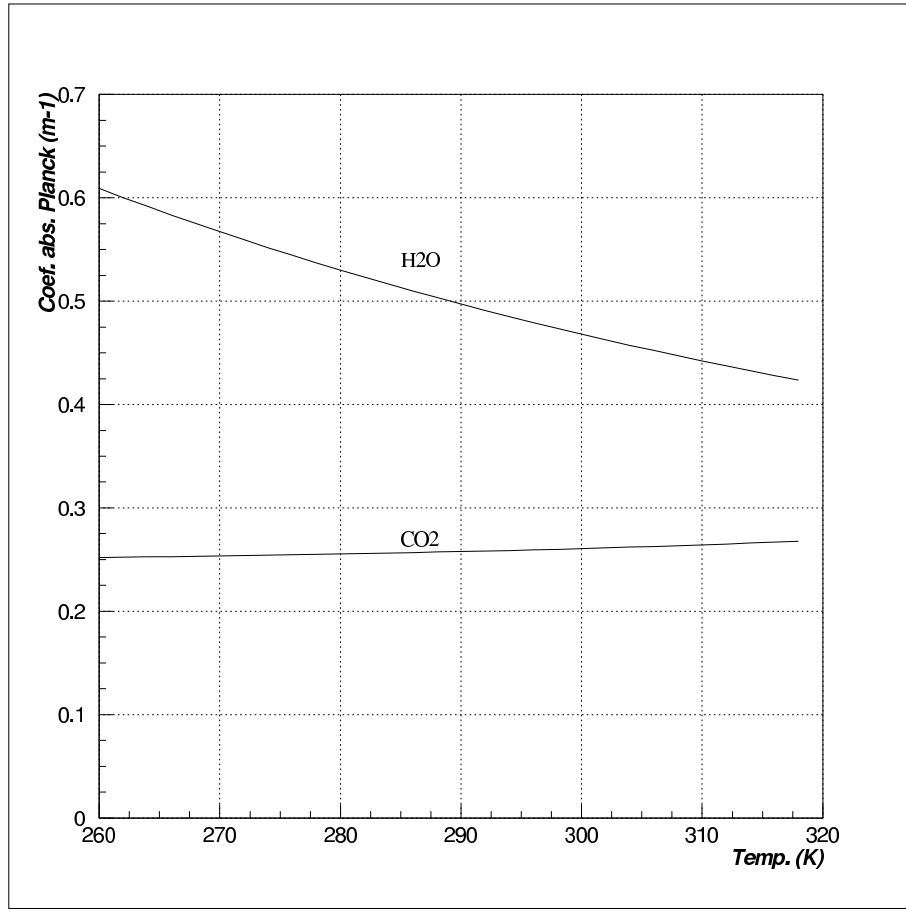


FIG. 5.3 – Variation du coefficient d'absorption de Planck avec la température pour le CO_2 (courbe inférieure) et la vapeur d'eau (courbe supérieure)

rapidement (variation de 10% sur 10K). Le terme correctif $\frac{T}{4} \frac{\partial_T \bar{K}}{\bar{K}}$ dans la formule (5.29) vaut ainsi environ 0.1 dans le cas du CO_2 et 0.7 dans le cas de H_2O . En introduisant le coefficient d'absorption de Planck effectif :

$$\bar{K}' = \bar{K} \left(1 + \frac{T}{4} \frac{\partial_T \bar{K}}{\bar{K}} \right)$$

(ce coefficient effectif différant au plus de 70% du coefficient de Planck) les formules de bilan s'écrivent :

$$\frac{d\psi_r}{dx} = 16 \bar{K}' \sigma T_0^3 (T_r(x) - T(x)) \quad (5.30)$$

avec :

$$T_r(x) = \frac{1}{4 \sum_l c_l \bar{K}_l} [T_1 \sum_l c_l |\tilde{\tau}'_{l(x)}| + T_2 \sum_l c_l |\tilde{\tau}'_{l(D-x)}| + \int_0^D dy T(y) \sum_l c_l \tilde{\tau}''_{l(|y-x|)}] \quad (5.31)$$

Remarque : L'intervention de $\bar{K}$ dans le coefficient devant $(T_r - T)$ dans le bilan radiatif $\frac{d\psi_r}{dx}$ est intuitivement satisfaisante : T_r et $\frac{d\psi_r}{dx}$ étant évalués au même point, c'est l'absorption à distance nulle qui intervient, laquelle est décrite par $\bar{K}$. En revanche, exprimer $\sum c_l \bar{K}_l$ en fonction de $\bar{K}$ dans le calcul de T_r ne présente aucun intérêt : (1) cela complique les formules ; (2) cela fait intervenir $\bar{K}$ dans des échanges à distance où $\bar{K}$ ne signifie rien.

Comme dans le cas du gaz gris, la température d'équilibre radiatif apparaît comme une moyenne pondérée des températures de paroi (T_1 et T_2) et des températures du gaz ($T(y)$). Les différences

avec le cas du gaz gris tiennent à la sommation sur les bandes étroites : dans le cas du gaz gris, il y avait compensation des facteurs en κ et en $\partial_T L_b$; ici aucune simplification n'est possible. Ceci traduit la complexité des échanges radiatifs dans les gaz réels, où les coefficients volumiques d'absorption couvrent un large spectre. Afin de faire mieux apparaître la façon dont ces coefficients interviennent, nous allons introduire une autre présentation des formules (5.30) et (5.31).

Introduction des fonctions intégrales angulaires

De façon semblable aux intégrales exponentielles, nous introduisons les intégrales angulaires $F_{n\beta}(r)$:

$$F_{n\beta}(r) = \int_0^1 d\mu \mu^{n-2} \bar{\tau}_{0(\frac{r}{\mu}, \beta)}^{(3-n)} \quad (5.32)$$

où l'on a posé :

$$\bar{\tau}_0(s, \beta) = \exp[-2\beta(\sqrt{1 + \frac{s}{\beta}} - 1)] \quad \text{ce qui implique } \bar{\tau}_1(x) = \bar{\tau}_0(\bar{K}_1 x, \beta_1)$$

et où $\bar{\tau}_0^{(j)}$ désigne la dérivée d'ordre j de $\bar{\tau}_0$.

Les transmittances de couche s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \tilde{\tau}_l(x) = 2 F_{3\beta_l}(\bar{K}_l x) \\ \tilde{\tau}'_l(x) = 2 \bar{K}_l F_{2\beta_l}(\bar{K}_l x) \\ \tilde{\tau}''_l(x) = 2 \bar{K}_l^2 F_{1\beta_l}(\bar{K}_l x) \end{cases} \quad (5.33)$$

La température d'équilibre radiatif local s'écrit maintenant :

$$\boxed{T_r(x) = \frac{1}{2 \sum_l c_l \bar{K}_l} [T_1 \sum_l c_l \bar{K}_l |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l x)| + T_2 \sum_l c_l \bar{K}_l |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l [D-x])| + \int_0^D dy T(y) \sum_l c_l \bar{K}_l^2 |F_{1\beta_l}(\bar{K}_l [|y-x])|]]} \quad (5.34)$$

Approximation des échanges faibles avec le gaz

Comme dans le cas du gaz gris, on repart des équations (5.24), dans lesquelles on néglige tous les termes d'échange gaz-gaz. On obtient :

$$\begin{cases} \frac{d\psi_r}{dx} = 16 \bar{K}' \sigma T_0^3 \frac{N(x)}{2} (T_r(x) - T(x)) \\ T_r(x) = \frac{1}{N(x) \sum_l c_l \bar{K}_l} [T_1 \sum_l c_l \bar{K}_l |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l x)| + T_2 \sum_l c_l \bar{K}_l |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l [D-x])|] \\ N(x) = \frac{\sum_l c_l \bar{K}_l [|F_{2\beta_l}(\bar{K}_l x)| + |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l [D-x])|]}{\sum_l c_l \bar{K}_l} \end{cases} \quad (5.35)$$

où le facteur $N(x)$ est proche de deux.

Note sur le calcul des intégrales angulaires $F_{2\beta}$

On peut exprimer ces intégrales à l'aide des intégrales exponentielles. Le calcul est fastidieux et sans grand intérêt ; aussi allons nous seulement en donner les grandes lignes. D'abord, si l'on remplace $\bar{\tau}'_{0(r,\beta)}$ par son expression explicite et si on pose $\mu = 1/t$ dans la définition de $F_{2\beta}$, il vient :

$$F_{2\beta(r)} = - \int_1^\infty \frac{dt}{t^2} \frac{\exp[-2\beta(\sqrt{1+\frac{rt}{\beta}} - 1)]}{\sqrt{1+\frac{rt}{\beta}}}$$

Maintenant, si l'on introduit une nouvelle variable d'intégration s telle que $s^2 = 1 + \frac{rt}{\beta}$, on arrive à :

$$F_{2\beta(r)} = - \frac{2r}{\beta} e^{2\beta} \int_{\sqrt{1+\frac{r}{\beta}}}^\infty \frac{ds}{(s^2-1)^2} e^{-2\beta s}$$

Ensuite, il suffit de décomposer la fraction rationnelle $\frac{1}{(s^2-1)^2}$ en élément simples et de faire quelques changements judicieux de variables d'intégration pour arriver à l'expression de $F_{2\beta}$:

$$F_{2\beta(r)} = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{1+\frac{r}{\beta}} + 1 \right) E_2(2\beta [\sqrt{1+r/\beta} - 1]) + \frac{r}{2\beta} E_1(2\beta [\sqrt{1+r/\beta} - 1]) \\ - \frac{r}{2\beta} e^{4\beta} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{r}{\beta}} + 1} E_2(2\beta [\sqrt{1+r/\beta} + 1]) + E_1(2\beta [\sqrt{1+r/\beta} + 1]) \right\} \quad (5.36)$$

Cette formule permet le calcul effectif des $F_{2\beta}$, puisque des sous-programmes évaluant les intégrales exponentielles figurent dans toutes les bibliothèques mathématiques.

Exercice : Dériver une formule analogue pour $F_{1\beta}$.

5.5 Couplage conduction-rayonnement (gaz réel compris entre deux faces noires)

L'équation de l'énergie pour un gaz à l'état stationnaire s'écrit :

$$\lambda \partial_x^2 T + 16 \bar{K}' \sigma T_0^3 (T_r(x) - T(x)) = 0 \\ T_r(x) = \frac{1}{2 \sum_l c_l \bar{K}_l} [T_1 \sum_l c_l \bar{K}_l |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l x)| + T_2 \sum_l c_l \bar{K}_l |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l [D-x])| \\ + \int_0^D dy T(y) \sum_l c_l \bar{K}_l^2 |F_{1\beta}(\bar{K}_l |y-x|)|] \quad (5.37)$$

Adimensionnalisation

On prend pour références :

- Unité de longueur : D (nous choisissons d'emblée l'adimensionnalisation apparue la plus pertinente dans le cas du gaz gris) ; on pose $\hat{x} = \frac{x}{D}$.
- Unité de température : $T_1 - T_2$; on pose $\hat{T} = \frac{T - T_0}{T_1 - T_2}$, avec $T_0 = (T_1 + T_2)/2$.

Pour adimensionnaliser, on multiplie chaque paramètre par l'inverse de son équation aux dimensions. $\frac{16\bar{K}'\sigma T_0^3}{\lambda}$ est de dimension l^{-2} ; il devient donc $\frac{16\kappa\sigma T_0^3 D^2}{\lambda}$. Le coefficient d'absorption volumique $\bar{K}_l$ est de dimension l^{-1} ; il devient donc l'épaisseur optique $\bar{s}_l = \bar{K}_l D$.

L'équation adimensionnelle de l'énergie s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \partial_{\hat{x}}^2 \hat{T} + \frac{16\bar{K}'\sigma T_0^3 D^2}{\lambda} (\hat{T} - \hat{T}_r) &= 0 \\ \hat{T}_{r(\hat{x})} &= \frac{1}{2 \sum_l c_l \bar{s}_l} \left[\frac{1}{2} \sum_l c_l \bar{s}_l |F_{2\beta_l}(\bar{s}_l \hat{x})| - \frac{1}{2} \sum_l c_l \bar{s}_l |F_{2\beta_l}(\bar{s}_l [1-\hat{x}])| \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 dy \hat{T}(y) \sum_l c_l \bar{s}_l^2 |F_{1\beta_l}(\bar{s}_l |y-\hat{x}|) | \right] \end{aligned} \quad (5.38)$$

Il apparaît que, si le modèle à bandes étroites utilise n bandes, le modèle couplé conduction-rayonnement présente $2n + 1$ paramètres adimensionnels :

- le paramètre de couplage conducto-radiatif :

$$R = \frac{16\bar{K}'\sigma T_0^3 D^2}{\lambda}$$

- les n épaisseurs optiques $\bar{s}_l$.
- les n rapports espacement/largeur des raies β_l .

L'analyse effectuée pour le cas du gaz gris portant sur les limites $R \rightarrow 0$ et $R \rightarrow \infty$ s'applique aussi au cas présent : On s'attend, pour R grand, à des formes en S des profils de température (voir la figure (5.4)).

En revanche, l'analyse portant sur la limite $s \rightarrow 0$ ne s'applique pas au cas des gaz réels : ici, sauf dans les cas de dilution extrême, on est en présence d'un large spectre d'épaisseurs optiques. Comme il existe toujours des bandes où l'épaisseur optique est grande, les échanges gaz-gaz ne peuvent plus être négligés.

Cependant, pour simplifier notre étude, nous allons quand même utiliser l'approximation des échanges faibles avec le gaz. Ceci nous permettra une analyse qualitativement correcte, mais quantitativement éloignée des observations.

On constate sur les formules (5.38) que lorsque l'on utilise l'approximation des échanges faibles, le spectre du gaz n'intervient plus qu'à travers le paramètre de couplage conducto-radiatif R et la seule fonction $\hat{\Phi}$ définie par :

$$\hat{\Phi}(\hat{x}) = \frac{\sum_l c_l \bar{s}_l |F_{2\beta_l}(\bar{s}_l \hat{x})|}{\sum_l c_l \bar{s}_l} \quad (5.39)$$

En effet, on peut alors écrire :

$$\hat{T}_{r(\hat{x})} = \frac{\hat{\Phi}(\hat{x}) - \hat{\Phi}(1 - \hat{x})}{N(\hat{x})} \quad (5.40)$$

$$N(\hat{x}) = \hat{\Phi}(\hat{x}) + \hat{\Phi}(1 - \hat{x})$$

Il n'est donc pas nécessaire de garder $2n + 1$ paramètres adimensionnels : il suffit de représenter assez finement la fonction $\hat{\Phi}$, ce qui peut ne demander qu'une dizaine de fonctions de base (alors que n est de l'ordre de la centaine).

Exercice : Trouver s'il est possible d'obtenir une similitude conducto-radiative pour un mélange d'air et de CO_2 , en variant seulement la concentration du gaz absorbant, la pression totale étant gardée constante. On désignera par D et D^* les dimensions respectives du système étudié (pièce d'habitation, $D = 3m$, et maquette, $D^* = 75cm$).

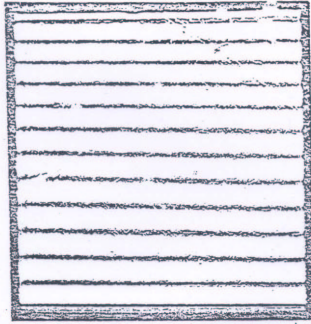


figure III.4 franges d'interférence obtenus par interférométrie holographique. Azote pur. $\Delta T=10K$

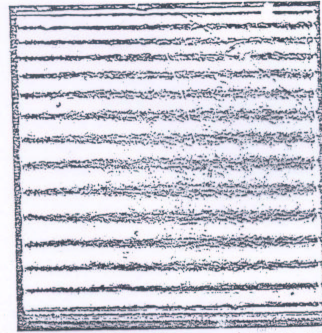


figure III.6 franges d'interférence obtenus par interférométrie holographique. Dioxide de carbone pur. $\Delta T=10K$

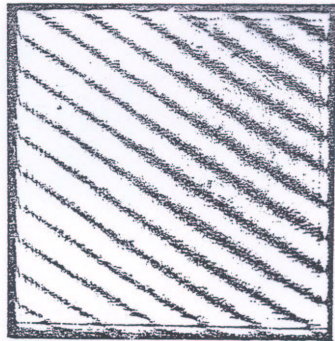


figure III.5 franges d'interférence. Méthode des franges auxiliaires. Azote pur. $\Delta T=10K$

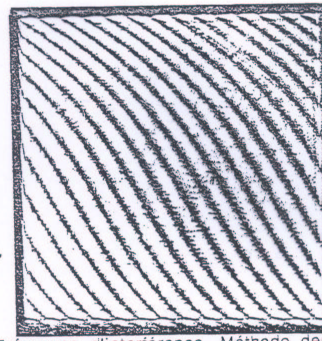


figure III.7 franges d'interférence. Méthode des franges auxiliaires. Dioxide de carbone pur. $\Delta T=10K$

FIG. 5.4 – Carte de température obtenue par interférométrie holographique dans une expérience à plafond chaud avec de l'azote pure (à gauche) et du dioxyde de carbone pure (à droite) (interférogramme direct en haut : les franges sont des isothermes ; franges auxiliaires en bas : les franges dessinent le profil vertical de température)

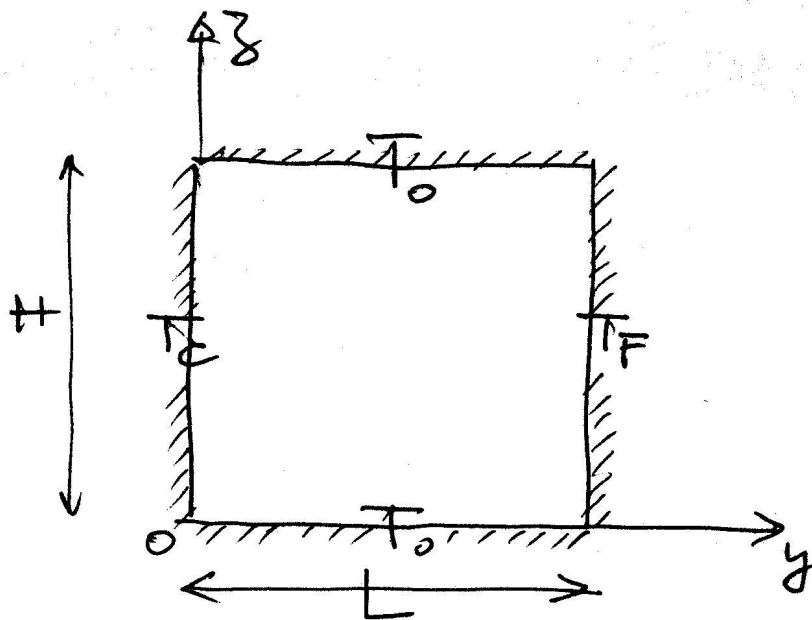
Chapitre 6

Couplage du processus d'échange radiatif avec la convection

(par Jean-Louis Breton)

Noter que la rédaction de ce chapitre est très préliminaire et n'intègre pas les derniers développements du chapitre précédent.

Equations de Boussinesq - 2D - Instationnaire - avec rayonnement - Approximation des échanges faibles avec le gaz.



$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_y v + \partial_z w = 0 \\ \partial_t v + \partial_y(v^2) + \partial_z(vw) = -\frac{1}{\rho} \partial_y p + \nu(\partial_y^2 v + \partial_z^2 v) \\ \partial_t w + \partial_y(vw) + \partial_z(w^2) = -\frac{1}{\rho} \partial_z p + \nu(\partial_y^2 w + \partial_z^2 w) + g\beta(T - T_0) \\ \partial_t T + \partial_y(Tv) + \partial_z(Tw) = \alpha(\partial_y^2 T + \partial_z^2 T) + \frac{16\bar{K}\sigma T_0^3}{\rho C_p}(T_r - T) \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Justification de l'approximation des échanges faibles avec le gaz :

On va comparer les ordres de grandeur des bilans radiatif et conductif dans la couche limite, pour un ΔT de 10 K et une couche limite épaisse de 1 cm.

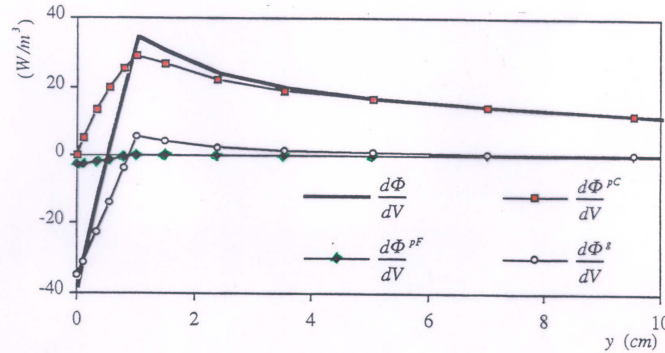
– Terme radiatif :

$$\mathcal{O}(16\bar{K}\sigma T_0^3(T_r - T)) \simeq 16\bar{K}\sigma T_0^3 \Delta T \simeq 60 \text{ W/m}^3$$

– Terme conductif :

$$\mathcal{O}(\lambda(\partial_y^2 T + \partial_z^2 T)) \simeq \lambda \frac{\Delta T}{\delta^2} \simeq 10^3 \text{ W/m}^3$$

On voit que dans les couches limites, les puissances radiatives sont dominées largement par les puissances convectives. On peut donc se permettre d'y faire des estimations fausses des termes de rayonnement. L'utilisation de l'approximation des échanges faibles, qui est correcte en dehors des couches limite, est ainsi justifiée. Ceci est confirmé par l'estimation des bilans radiatifs présentée dans la figure (6.1) et qui a été obtenue par un calcul précis des échanges radiatifs par une méthode de Monte-Carlo, dans le cas d'une couche limite idéalisée : on voit que la puissance radiative culmine à 40 W/m³.



Graphique II-1-13 : Bilan radiatif volumique et décomposition en échanges partiels. Couche limite schématisée : $L = 1 \text{ m}$; $l = 1 \text{ cm}$; $T_u = 300 \text{ K}$; $\Delta T = 10 \text{ K}$. Pression atmosphérique. 50% HR(300 K) $\varepsilon_s = \varepsilon_r = 1$.

FIG. 6.1 – Bilan radiatif volumique dans une couche limite idéalisée

Il reste à écrire T_r . La difficulté réside dans le fait que nous n'avons raisonné jusqu'à présent qu'en configuration unidimensionnelle. Nous allons utiliser une approximation relativement arbitraire : pour un volume gazeux élémentaire, nous supposons que le bilan des échanges avec les quatre parois est approximativement égal à la moyenne des échanges qu'aurait ce volume élémentaire avec chaque paroi si elle s'étendait à l'infini, les échanges étant pondérés par l'angle sous lequel est vue chaque

paroi (voir figure (6.2)). Il vient alors :

$$T_r = \frac{1}{2\pi} \left\{ (\alpha_1 + \alpha_3) \frac{\Phi(y) T_1 + \Phi(L-y) T_3}{N_{13}(y)} + (\alpha_2 + \alpha_4) \frac{\Phi(z) T_2 + \Phi(H-z) T_4}{N_{24}(z)} \right\}$$

les fonctions Φ et N étant données, comme dans le chapitre précédent, par :

$$\Phi(x) = \frac{\sum_l c_l \bar{K}_l |F_{2\beta_l}(\bar{K}_l x)|}{\sum_l c_l \bar{K}_l}$$

$$N_{13}(x) = \Phi(y) + \Phi(L-y)$$

$$N_{24}(z) = \Phi(z) + \Phi(H-z)$$

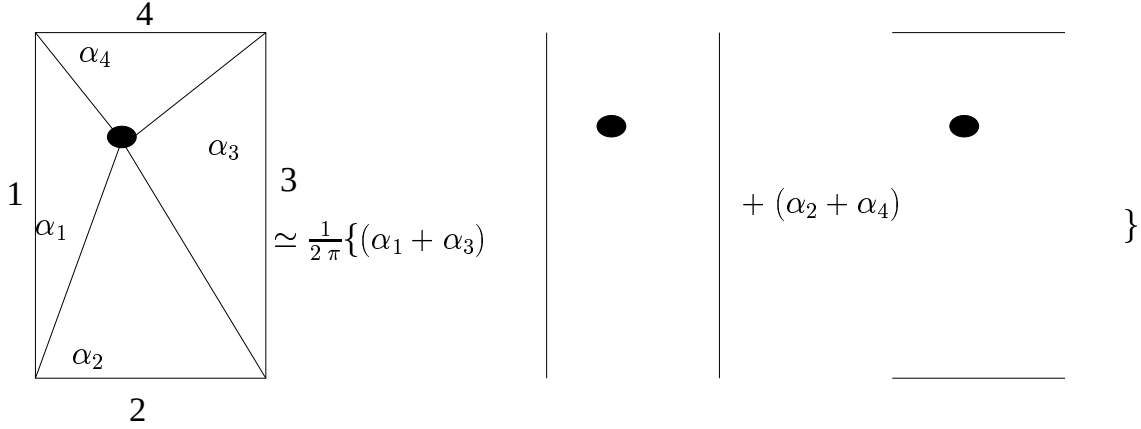


FIG. 6.2 – Représentation des échanges avec les 4 parois : pondération des échanges avec des parois supposées infinies par les angles sous lesquels sont vues les parois.

Adimensionnalisation

On adimensionnalise avec :

- Unité de longueur : H (on pose $\hat{y} = y/H$).
- Unité de vitesse : $V_0 = \sqrt{g \beta \Delta T H}$ (on pose $\hat{t} = t V_0/H$).
- Unité de température : ΔT (avec centrage des températures à $T_0 = (T_C + T_F)/2$). On pose : $\theta = \frac{T - T_0}{\Delta T}$.
- Unité de masse volumique : ρ (on pose : $\hat{p} = p/(\rho V_0^2)$).

On obtient alors ;

$$\begin{aligned} \theta_r &= \frac{T_r - T_0}{\Delta T} \\ Pr &= \frac{\nu}{\alpha} \\ Gr &= \frac{g \beta \Delta T H^3}{\nu^2} \\ R &= \frac{16 \bar{K}' \sigma T_0^3 H^2}{\lambda} \end{aligned} \tag{6.2}$$

ce qui donne pour θ_r :

$$\theta_r(\hat{y}, \hat{z}) = \frac{\alpha_1(\hat{y}, \hat{z}) + \alpha_3(\hat{y}, \hat{z})}{4\pi} \frac{\hat{\Phi}(\hat{y}) - \hat{\Phi}(A - \hat{y})}{\hat{\Phi}(\hat{y}) + \hat{\Phi}(A - \hat{y})}$$

Le système adimensionnel dépend donc de deux fonctions adimensionnelles ($\hat{\Phi}$, qui ne dépend que du fluide, et $\alpha_1 + \alpha_3$, qui ne dépend que de la géométrie de la cavité), et de quatre paramètres adimensionnels (Pr , Gr , R et le facteur de forme $A = L/H$).

Noter que $Gr = \frac{V_0^2 H^2}{\nu^2}$ (c'est un Reynolds au carré) et que $R = \frac{16 \bar{K}' H \sigma T_0^3 \Delta T}{\frac{\lambda \Delta T}{H}}$, c'est-à-dire le rapport du flux radiatif émis au flux conduit.

Les équations s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \partial_{\hat{y}} \hat{v} + \partial_{\hat{z}} \hat{w} & = & 0 \\ \partial_{\hat{t}} \hat{v} + \partial_{\hat{y}}(\hat{v}^2) + \partial_{\hat{z}}(\hat{v} \hat{w}) & = & -\partial_{\hat{y}} \hat{p} + Gr^{-1/2}(\partial_{\hat{y}}^2 \hat{v} + \partial_{\hat{z}}^2 \hat{v}) \\ \partial_{\hat{t}} \hat{w} + \partial_{\hat{y}}(\hat{v} \hat{w}) + \partial_{\hat{z}}(\hat{w}^2) & = & -\partial_{\hat{z}} \hat{p} + Gr^{-1/2}(\partial_{\hat{y}}^2 \hat{w} + \partial_{\hat{z}}^2 \hat{w}) + \theta \\ \partial_{\hat{t}} \theta + \partial_{\hat{y}}(\theta \hat{v}) + \partial_{\hat{z}}(\theta \hat{w}) & = & \frac{Gr^{-1/2}}{Pr} [\partial_{\hat{y}}^2 \theta + \partial_{\hat{z}}^2 \theta + R(\theta_r - \theta)] \end{array} \right. \quad (6.3)$$

Les conditions de similitude sont alors :

- $Pr_1 = Pr_2$; ce qui implique l'usage d'un gaz.
- $Gr_1 = Gr_2$; d'où : $S = \frac{H_1}{H_2} = \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{2/3}$.
- $R_1 = R_2$; d'où : $S = \left(\frac{\bar{K}'_2 \lambda_1}{\bar{K}'_1 \lambda_2}\right)^{1/2}$.
- $A_1 = A_2$ (ce qui entraîne $(\alpha_1 + \alpha_3)_1 = (\alpha_1 + \alpha_3)_2$).
- $\hat{\Phi}_1(\hat{x}) = \hat{\Phi}_2(\hat{x})$, sur l'intervalle $[0, \sup(1, A_1)]$;