

Paramétrisation de la dynamique de population de poches : formulation cinétique en rayons

JLJ - JYG 4 juin 2025

Première tentative d'écriture d'un modèle de dynamique de population de poches froides dans une formulation cinétique où la variable d'état des poches est le rayon (notée r) et non l'aire.

1 Modèle cinétique décrivant l'évolution de populations de poches actives et inactives

1.1 Principes

L'objet d'étude est une population de poches froides, caractérisées chacune par son rayon r .

variables

- grandeur d'intérêt : $\widehat{f}(r, t)$ = densité spatiale de poches ayant un rayon r à dr près. f est un nombre de poches par m^2 d'espace et par m de rayon.
- Les poches naissent avec un rayon r_0 ; comme elles ne peuvent que grandir, il s'agit de leur rayon minimum. Il n'y a pas de limite supérieure à leur taille. Le domaine de variation de r sera désigné par :

$$\widehat{\Omega} = [r_0, \infty[$$

- La densité totale de poches est donnée par :

$$D(t) = \int_{r_0}^{\infty} \widehat{f}(r, t) dr$$

- Les poches actives et inactives ont des densités $\widehat{f}_A(r, t)$ et $\widehat{f}_I(r, t)$ avec :

$$A(t) = \int_{r_0}^{\infty} \widehat{f}_A(r, t) dr \quad I(t) = \int_{r_0}^{\infty} \widehat{f}_I(r, t) dr$$

Equations générales

Équations de bilan d'un domaine $\widehat{\Omega}_R = [r_1, r_2]$, avec $r_1 \neq r_0$. Il s'agit là d'établir les équations valables dans l'intérieur de $]r_0, +\infty[$, à l'exclusion de la frontière. Le cas où $\widehat{\Omega}_R$ touche la frontière du domaine relève de la question des conditions à la limite.

$$N_A(t) = \int_{r_1}^{r_2} \widehat{f}_A(r, t) ds \quad (1)$$

$$N_I(t) = \int_{r_1}^{r_2} \widehat{f}_I(r, t) ds$$

Pour chacune des populations A et I, on écrit :

$$\frac{dN}{dt} = [\text{disparition}] + [\text{apparition}] + [\text{flux aux frontieres}]$$

$$\frac{dN_A}{dt} = \left(\frac{dN_A}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dN_A}{dt}\right)_2 + \left(\frac{dN_A}{dt}\right)_3 \quad (2)$$

$$\frac{dN_I}{dt} = \left(\frac{dN_I}{dt}\right)_1 + \left(\frac{dN_I}{dt}\right)_2 + \left(\frac{dN_I}{dt}\right)_3$$

– Disparitions, supposées linéaires en \widehat{f}_A et \widehat{f}_I :

$$\left(\frac{dN_A(t)}{dt}\right)_1 = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{1}{\widehat{\tau}_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) dr \quad (3)$$

$$\left(\frac{dN_I(t)}{dt}\right)_1 = \int_{r_1}^{r_2} -\frac{1}{\widehat{\tau}_I(r, t)} \widehat{f}_I(r, t) dr$$

Pour un intervalle de temps δt , $\frac{\delta t}{\widehat{\tau}_A(r, t)}$ peut s'interpréter comme la probabilité, pour une poche active de rayon r , de disparaître pendant cet intervalle de temps. Les équations (3) peuvent alors se lire comme :

[nbre de disparitions pendant δt]
 $= \int_{[r_1, r_2]} dr$ [probabilité individuelle de disparition] \times [nbre de poches dans $[r, r+dr]$].
 – Apparitions, représentées par des termes sources représentant l'effet des rencontres entre poches :

$$\left(\frac{dN_A(t)}{dt}\right)_2 = \int_{r_1}^{r_2} S_A(r, t) dr \quad (4)$$

$$\left(\frac{dN_I(t)}{dt}\right)_2 = \int_{r_1}^{r_2} S_I(r, t) dr$$

– Flux aux frontières, liés au taux de croissances des poches :

$$\left(\frac{dN_A(t)}{dt}\right)_3 = \widehat{f}_A(r_1, t)v_A(r_1, t) - \widehat{f}_A(r_2, t)v_A(r_2, t) \quad (5)$$

$$\left(\frac{dN_I(t)}{dt}\right)_3 = \widehat{f}_I(r_1, t)v_I(r_1, t) - \widehat{f}_I(r_2, t)v_I(r_2, t)$$

où $v_A(r, t)$ et $v_I(r, t)$ sont les vitesse d'accroissement des rayons r des poches actives et inactives à l'instant t . On peut remplacer les différences des seconds membres par des intégrales des dérivées :

$$\left(\frac{dN_A(t)}{dt}\right)_3 = \int_{r_1}^{r_2} -\partial_r(\widehat{f}_A(r, t)v_A(r, t)) dr \quad (6)$$

$$\left(\frac{dN_I(t)}{dt}\right)_3 = \int_{r_1}^{r_2} -\partial_r(\widehat{f}_I(r, t)v_I(r, t)) dr$$

où ∂_r désigne la dérivation partielle par rapport à r .

Noter que les vitesses $v_A(r, t)$ et $v_I(r, t)$ sont reliées aux vitesses d'étalement $c_A(r, t)$ et $c_I(r, t)$ par :

$$v_A(r, t) = c_A(r, t) \quad v_I(r, t) = c_I(r, t)$$

Au total, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{r_1}^{r_2} \partial_t(\widehat{f}_A(r, t))dr + \int_{r_1}^{r_2} \partial_r(\widehat{f}_A(r, t)v_A(r, t))dr &= \int_{r_1}^{r_2} -\frac{1}{\widehat{\tau}_A(r, t)}\widehat{f}_A(r, t)dr + \int_{r_1}^{r_2} S_A(r, t)dr \\ \int_{r_1}^{r_2} \partial_t(\widehat{f}_I(r, t))dr + \int_{r_1}^{r_2} \partial_r(\widehat{f}_I(r, t)v_I(r, t))dr &= \int_{r_1}^{r_2} -\frac{1}{\widehat{\tau}_I(r, t)}\widehat{f}_I(r, t)dr + \int_{r_1}^{r_2} S_I(r, t)dr \end{aligned} \quad (7)$$

et comme ceci est vrai quels que soient r_1 et r_2 , les équations d'évolution sur $]r_0, +\infty[$ s'écrivent :

$$\begin{aligned} \partial_t(\widehat{f}_A(r, t)) + \partial_r(\widehat{f}_A(r, t)v_A(r, t)) &= -\frac{1}{\widehat{\tau}_A(r, t)}\widehat{f}_A(r, t) + S_A(r, t) \\ \partial_t(\widehat{f}_I(r, t)) + \partial_r(\widehat{f}_I(r, t)v_I(r, t)) &= -\frac{1}{\widehat{\tau}_I(r, t)}\widehat{f}_I(r, t) + S_I(r, t) \end{aligned} \quad (8)$$

1.2 Modèles couplés d'évolution des populations de poches actives et inactives

Disparitions

Les poches disparaissent par deux processus : les rencontres avec d'autres poches et la mort spontanée. La mort des poches libres est représentée par les durées de vie $\widehat{\tau}'_A$ et $\widehat{\tau}'_I$.

Pour une poche active donnée de rayon r_1 , la probabilité de disparition pendant un intervalle de temps δt est égale au nombre de poches qui vont toucher le disque de la poche considérée pendant δt . Les poches actives de rayon r_2 qui vont rencontrer la poches de rayon r_1 sont celles dont le centre est dans la couronne de rayon $r_1 + r_2$ et d'épaisseur $(c_A(r_1, t) + c_A(r_2, t))\delta t$. L'aire δa_1 de cette couronne est :

$$\delta a_1(r_2) = 2\pi(r_1 + r_2) (c_A(r_1, t) + c_A(r_2, t))\delta t$$

Comme $\delta a_1(r_2)$ ne dépend que de r_2 , le nombre de rencontres de la poche de rayon r_1 avec des poches actives pendant δt (et donc, pour δt suffisamment petit, la probabilité de rencontre) s'écrit :

$$\delta n_1 = \int_{\widehat{\Omega}} dr_2 \delta a_1(r_2) \widehat{f}_A(r_2, t)$$

Le taux de disparition des poches actives par rencontre avec des poches actives s'écrit $\int_{\widehat{\Omega}} dr_2 \widehat{f}_A(r_2, t) (2\pi(r_1 + r_2) (c_A(r_1, t) + c_A(r_2, t)))$. Finalement, en faisant le même raisonnement pour les rencontres AI et II, on arrive aux taux de disparition des poches actives et

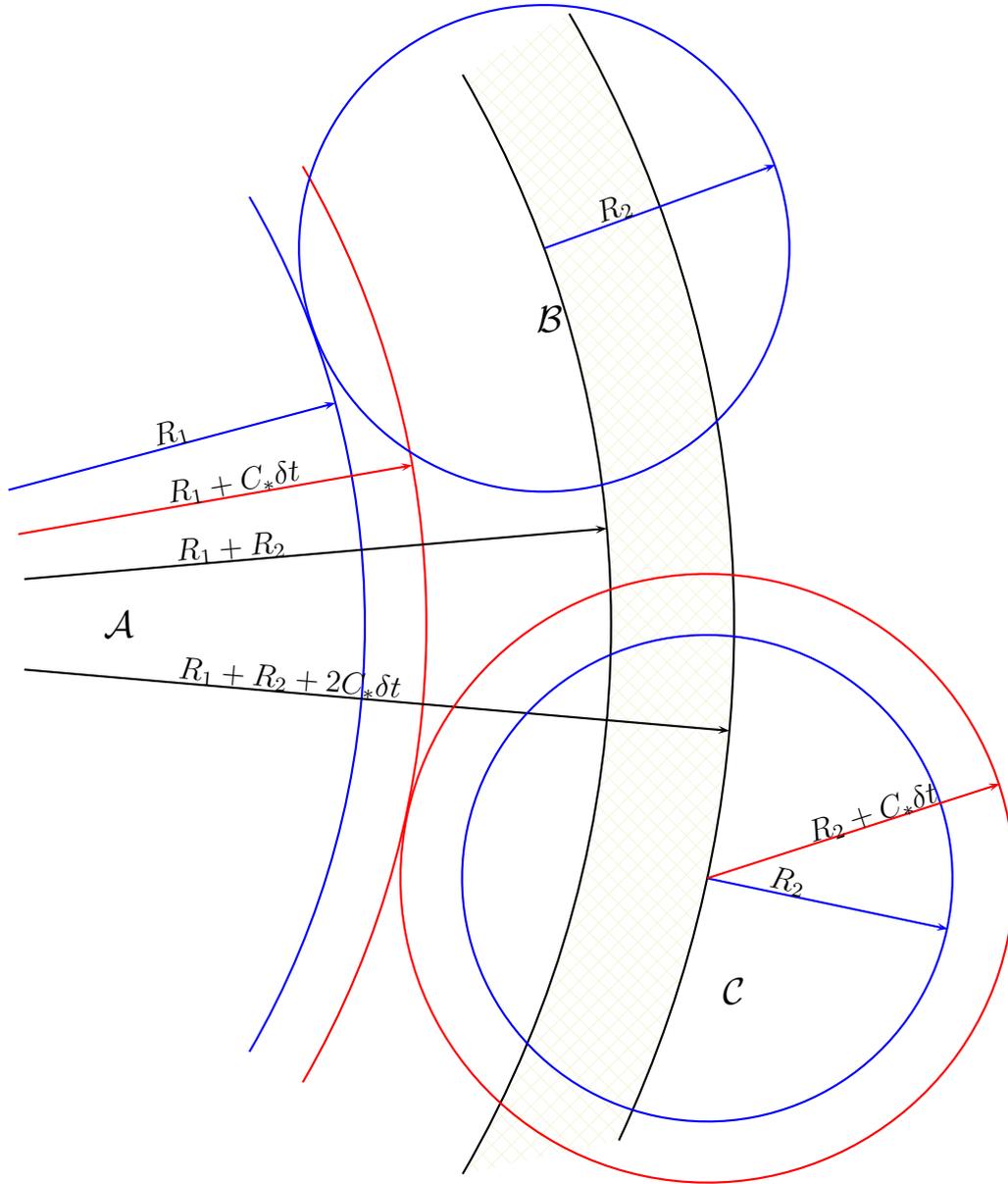


FIGURE 1 – Schéma de la couronne des centres des poches de rayon R_2 qui vont toucher la poche \mathcal{A} de rayon R_1 pendant un intervalle de temps δt . La poche \mathcal{A} est de rayon R_1 au début de l'intervalle temporel (bord de \mathcal{A} représenté en bleu) et de rayon $R_1 + C_* \delta t$ à la fin de l'intervalle (bord de \mathcal{A} représenté en rouge). Les poches \mathcal{B} et \mathcal{C} sont de rayon R_2 au début de l'intervalle temporel (bords dessinés en bleu) et de rayon $R_2 + C_* \delta t$ à la fin de l'intervalle (bords dessinés en rouge). \mathcal{B} est la poche la plus proche de \mathcal{A} rencontrant \mathcal{A} pendant l'intervalle temporel ; la distance entre les centres de \mathcal{A} et de \mathcal{B} est $R_1 + R_2$. \mathcal{C} est la poche la plus éloignée de \mathcal{A} rencontrant \mathcal{A} pendant l'intervalle temporel ; la distance entre les centres de \mathcal{A} et de \mathcal{C} est $R_1 + R_2 + 2C_* \delta t$. L'ensemble des centres des poches de rayon R_2 rencontrant \mathcal{A} pendant δt est la couronne hachurée comprise entre les cercles concentriques avec \mathcal{A} de rayons $R_1 + R_2$ et $R_1 + R_2 + 2C_* \delta t$. Son aire est $4\pi(R_1 + R_2)C_* \delta t$.

inactives :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\hat{\tau}_A(r, t)} &= -\int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(r, r_2)} \widehat{f}_A(r_2, t) dr_2 - \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(r, r_2)} \widehat{f}_I(r_2, t) dr_2 - \frac{1}{\hat{\tau}'_A(r, t)} \\
-\frac{1}{\hat{\tau}_I(r, t)} &= -\int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(r, r_2)} \widehat{f}_A(r_2, t) dr_2 - \int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(r, r_2)} \widehat{f}_I(r_2, t) dr_2 - \frac{1}{\hat{\tau}'_I(r, t)}
\end{aligned} \tag{9}$$

Soit :

$$\frac{1}{\tilde{\tau}(r_1, r_2)} = \frac{1}{\tilde{\tau}_{AI}}(r_1, r_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{IA}}(r_1, r_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{AA}}(r_1, r_2) = \frac{1}{\tilde{\tau}_{II}}(r_1, r_2) \tag{10}$$

Si on fait l'hypothèse diluée et si on suppose que les vitesses d'étalement sont uniquement fonction de l'aire ($c_A(r, t) = c_I(r, t) = G(r)$), alors $\tilde{\tau}$ est donné par :

$$\frac{1}{\tilde{\tau}(r_1, r_2)} = 2\pi(r_1 + r_2)(G(r_1) + G(r_2)) \tag{11}$$

En particulier, pour une vitesse d'étalement uniforme (et égale à C_*) $G(r)$ s'écrit :

$$G(r) = C_*$$

Les équations (9) s'écrivent maintenant :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\hat{\tau}_A(r, t)} &= -\int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(r, r_2)} (\widehat{f}_A(r_2, t) + \widehat{f}_I(r_2, t)) dr_2 - \frac{1}{\hat{\tau}'_A(r, t)} \\
-\frac{1}{\hat{\tau}_I(r, t)} &= -\int_{r_0}^{+\infty} \frac{1}{\tilde{\tau}(r, r_2)} (\widehat{f}_A(r_2, t) + \widehat{f}_I(r_2, t)) dr_2 - \frac{1}{\hat{\tau}'_I(r, t)}
\end{aligned} \tag{12}$$

Sources

Les poches actives ont pour source les rencontres entre poches et les naissances de poches (liées aux naissances de cumulonimbus et aux collisions entre poches inactives). Les naissances se font toutes avec un rayon r_0 ; elles interviennent dans la condition à la limite en r_0 . Dans cette partie on ne considère que les sources internes au domaine, c'est-à-dire celles liées aux rencontres entre poches.

Source de poches actives. On a une fréquence de rencontre qui donne évidemment autant de disparitions que de poches entrant dans les rencontres. Et il y a autant d'apparitions que de rencontres (ne pas oublier que ces apparitions sont toutes des poches actives). Ces apparitions se répartissent dans un spectre d'aires de poches. On désigne par $W(r|r_1, r_2)$ la densité de probabilité du rayon r de la poche résultant de la rencontre entre deux poches de rayons r_1 et r_2 , cette densité étant normalisée à 1 :

$$\int_{\hat{\Omega}} dr W(r|r_1, r_2) = 1.$$

Soit $[\frac{dN_{col}}{dt}]$ le taux de rencontre. La source en r de poches actives s'écrit :

$$S_A(r, t) = \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 W(r|r_1, r_2) [\frac{dN_{col}}{dt}](r_1, r_2) \quad (13)$$

Il reste à évaluer $[\frac{dN_{col}}{dt}](r_1, r_2)$: on va exprimer ce taux de rencontre en fonction des taux de disparition en distinguant les deux types de rencontres AA et AI . Pour les rencontres AA , il y a deux disparitions de poches actives par rencontre ; pour les rencontres AI , il y a une disparition de poche active par rencontre :

$$\begin{aligned} [\frac{dN_{col}}{dt}](r_1, r_2) &= [\frac{dN_{colAA}}{dt}](r_1, r_2) + [\frac{dN_{colAI}}{dt}](r_1, r_2) \\ [\frac{dN_{colAA}}{dt}](r_1, r_2) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\ [\frac{dN_{colAI}}{dt}](r_1, r_2) &= \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \end{aligned} \quad (14)$$

Finalement, la source $S_A(r, t)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} S_A(r, t) &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \widehat{W}(r|r_1, r_2) \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\ &+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \widehat{W}(r|r_1, r_2) \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \end{aligned} \quad (15)$$

Les probabilités \widehat{W} sont données par :

$$\widehat{W}(r|r_1, r_2) = \delta(r - \sqrt{r_1^2 + r_2^2}) \quad (16)$$

Source de poches inactives. Les poches inactives ont pour source les morts des poches actives :

$$S_I(r, t) = \frac{1}{\widehat{\tau}'_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) \quad (17)$$

Flux aux frontières

Le débit d'apparition de poches en r_0 est la somme de deux termes : le taux de naissance de cumulonimbus issus des thermiques $B(t)$ (chaque nouveau cumulonimbus étant supposé donner une nouvelle poche de rayon r_0) et le taux de naissance de cumulonimbus issus des collisions de poches inactives. Ce débit d'apparition en r_0 se transforme en un flux de poches actives croissant à partir de r_0 :

$$G(r_0) \widehat{f}_A(r_0) = B(t) + \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_I(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \quad (18)$$

En revanche, le flux de poches inactives en r_0 est nul :

$$G(r_0) \widehat{f}_I(r_0) = 0 \quad (19)$$

Équations d'évolution sur $]r_0, +\infty[$

En regroupant tous les termes on obtient le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t(\widehat{f}_A(r, t)) + \partial_r(\widehat{f}_A(r, t)G(r)) \\ = -\left[\int_{\widehat{\Omega}} dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r, r_2)} (\widehat{f}_A(r_2, t) + \widehat{f}_I(r_2, t)) + \frac{1}{\widehat{\tau}'_A(r, t)} \right] \widehat{f}_A(r, t) \\ \quad + \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \widehat{W}(r|r_1, r_2) \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \left(\frac{1}{2} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) + \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \right) \\ \\ \partial_t(\widehat{f}_I(r, t)) + \partial_r(\widehat{f}_I(r, t)G(r)) \\ = -\left[\int_{\widehat{\Omega}} dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r, r_2)} (\widehat{f}_A(r_2, t) + \widehat{f}_I(r_2, t)) + \frac{1}{\widehat{\tau}'_I(r, t)} \right] \widehat{f}_I(r, t) \\ \quad + \frac{1}{\widehat{\tau}'_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) \end{array} \right. \quad (20)$$

avec les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} G(r_0) \widehat{f}_A(r_0) = B(t) + \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_I(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \\ G(r_0) \widehat{f}_I(r_0) = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

1.3 Et maintenant

Il reste à préciser des paramétrisations pour $\widehat{\tau}'_A$ et pour $\widehat{\tau}'_I$.

2 Premiers moments : équations d'évolution des populations de poches et de leurs longueurs de fronts de rafales

2.1 Premier moment : modèle macro des évolutions des populations totales A et I

Le principe est d'intégrer sur r les équations (20).

D'abord, on intègre (15) et on utilise la propriété :

$$\int_{\widehat{\Omega}} dr \widehat{W}(r|r_1, r_2) = 1.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\Omega}} dr S_A(r, t) &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\ &+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \end{aligned} \quad (22)$$

L'intégration de l'équation (20) donne alors, pour les poches actives :

$$\begin{aligned} \partial_t A + \int_{\widehat{\Omega}} dr \partial_r (\widehat{f}_A(r) C_*) \\ &= - \left[\int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} (\widehat{f}_A(r_2, t) + \widehat{f}_I(r_2, t)) \widehat{f}_A(r_1, t) + \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{1}{\widehat{\tau}'_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) \right] \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\ &+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \end{aligned} \quad (23)$$

Du coup, les termes en $\widehat{f}_A \widehat{f}_I$ se compensent et il reste :

$$\begin{aligned} \partial_t A + \int_{\widehat{\Omega}} dr \partial_r (\widehat{f}_A(r) C_*) \\ &= - \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{2} \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) - \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{1}{\widehat{\tau}'_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) \end{aligned} \quad (24)$$

et l'intégrale du premier membre peut s'exprimer en fonction des conditions aux limites.

L'ensemble des équations pour les populations totales de poches actives et inactives s'écrit maintenant :

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t A - B(t) - \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_I(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \\ &= - \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{2} \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\ &- \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{1}{\widehat{\tau}'_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) \\ \partial_t I \\ &= - \left[\int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} (\widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) + \widehat{f}_I(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t)) \right. \\ &- \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{1}{\widehat{\tau}'_I(r, t)} \widehat{f}_I(r, t) + \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{1}{\widehat{\tau}'_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) \end{aligned} \right. \quad (25)$$

Diverses intégrales doubles relatives à des paires de poches apparaissent dans ces équations. En désignant par J_{XY} l'intégrale double relative à une paire de poches de catégories X et Y (X pouvant être A ou I , et de même pour Y), ces intégrales sont de la forme :

$$J_{XY} = \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_X(r_1, t) \widehat{f}_Y(r_2, t) \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} = 4\pi(r_1 + r_2)C_* \quad (26)$$

En tenant compte de l'égalité $\int_{\widehat{\Omega}} dr \widehat{f}_X(r) = X$, J_{XY} peut s'écrire :

$$J_{XY} = 4C_* \left[\left(\int_{\widehat{\Omega}} dr_1 \pi r_1 \widehat{f}_X(r_1) \right) Y + \left(\int_{\widehat{\Omega}} dr_2 \pi r_2 \widehat{f}_Y(r_2) \right) X \right]$$

Les rayons moyens pour les catégories X et Y s'écrivent :

$$\begin{aligned} \overline{r}_X &= \frac{1}{X} \int_{\widehat{\Omega}} dr r \widehat{f}_X(r) \\ \overline{r}_Y &= \frac{1}{Y} \int_{\widehat{\Omega}} dr r \widehat{f}_Y(r) \end{aligned} \quad (27)$$

Alors, J_{XY} s'écrit simplement :

$$J_{XY} = 4\pi C_* XY (\overline{r}_X + \overline{r}_Y) \quad (28)$$

Pour achever l'écriture des équations en termes de variables intégrales, il reste à introduire les temps de vie inverses moyens :

$$\frac{1}{\widehat{\tau}'_X} = \frac{1}{X} \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{1}{\tau'_X(r)} \widehat{f}_X(r) \quad (29)$$

Finalement, les équations (25) s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t A - B(t) - 4\pi C_* I^2 \overline{r}_I = -4\pi C_* A^2 \overline{r}_A - \frac{A}{\widehat{\tau}'_A} \\ \partial_t I = -4\pi C_* AI (\overline{r}_A + \overline{r}_I) - 4\pi C_* I^2 (2\overline{r}_I) - \frac{I}{\widehat{\tau}'_I} + \frac{A}{\widehat{\tau}'_A} \end{cases} \quad (30)$$

ou encore, en réarrangeant un peu les termes :

$$\begin{cases} \partial_t A = B(t) + 4\pi C_* (I^2 \overline{r}_I - A^2 \overline{r}_A) - \frac{A}{\widehat{\tau}'_A} \\ \partial_t I = -8\pi C_* \left(AI \frac{\overline{r}_A + \overline{r}_I}{2} + I^2 \overline{r}_I \right) + \frac{A}{\widehat{\tau}'_A} - \frac{I}{\widehat{\tau}'_I} \end{cases} \quad (31)$$

Correspondance avec le modèle macro

L'équation de D s'obtient en sommant les deux équations (31) :

$$\partial_t D = B - 4\pi C_* (I^2 \overline{r}_I + A^2 \overline{r}_A) + 2AI \frac{\overline{r}_A + \overline{r}_I}{2} - \frac{I}{\widehat{\tau}'_I} \quad (32)$$

Mais $I^2\bar{r}_I + A^2\bar{r}_A + AI(\bar{r}_A + \bar{r}_I) = (A + I)(A\bar{r}_A + I\bar{r}_I)$. En notant que $A + I = D$ et que $A\bar{r}_A + I\bar{r}_I = D\bar{r}$, où \bar{r} designe le rayon moyen, l'équation de D s'écrit :

$$\partial_t D = B - 4\pi C_* D^2 \bar{r} - \frac{I}{\hat{\tau}_I} \quad (33)$$

Cette équation correspond exactement à l'équation (5) de la note du modèle macro, réécrite ici :

$$\partial_t D = B - f D^2 - \frac{D - A}{\hat{\tau}_I} \quad \text{avec} \quad f = 4\pi C_* r \quad (34)$$

à condition d'y substituer \bar{r} à r et $\bar{\tau}_I$ à $\hat{\tau}_I$.

L'équation de A est un peu différente du fait de la présence de deux rayons. Dans le modèle macro, elle s'écrit :

$$\partial_t A = B(t) + 4\pi C_*(I^2 r - A^2 r) - \frac{A}{\hat{\tau}_A} \quad (35)$$

Cette équation diffère de l'équation (31) relative à A par la substitution de $\hat{\tau}_A$ à $\bar{\tau}_A$ et par la substitution de r à \bar{r}_I (en facteur de I^2) et à \bar{r}_A (en facteur de A^2).

En conclusion, ce modèle cinétique redonne, après intégration sur le spectre de rayons, un modèle proche du modèle macro originel, à ceci près que les rayons moyens de chaque catégorie de poches interviennent séparément dans le nouveau modèle.

Prochaine étape : faire un modèle macro à deux rayons.

2.2 Deuxième moment : équations d'évolution des longueurs de fronts de rafales

2.2.1 Equation de $\partial_t L_{GA}$

Le principe est d'intégrer sur r les équations $r \times (20)$ en utilisant $L_{GA} = 2\pi \int_{\hat{\Omega}} dr r f_A(r)$. D'abord, on intègre $r \times (15)$, en utilisant la propriété :

$$\int_{\hat{\Omega}} dr r \widehat{W}(r|r_1, r_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{\Omega}} dr r \widehat{S}_A(r, t) &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\
&+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \frac{1}{\widehat{\tau}(r_1, r_2)} \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \\
&= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\
&+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t) \\
&= \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_* r_1 \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_A(r_2, t) \\
&+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t)
\end{aligned} \tag{36}$$

L'intégration de l'équation $r \times (20)$ donne alors, pour les poches actives :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(\overline{r}_A A) + \int_{\widehat{\Omega}} dr r \partial_r(\widehat{f}_A(r) C_*) \\
&= - \left[\int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) r_1 (\widehat{f}_A(r_2, t) + \widehat{f}_I(r_2, t)) \widehat{f}_A(r_1, t) + \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{r}{\tau'_A(r, t)} \widehat{f}_A(r, t) \right] \\
&+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_* \sqrt{r_1^2 + r_2^2} r_1 f_A(r_1, t) f_A(r_2, t) \\
&+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_* \sqrt{r_1^2 + r_2^2} (r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1, t) \widehat{f}_I(r_2, t)
\end{aligned} \tag{37}$$

L'intégrande dans le membre de gauche peut s'écrire

$$r \partial_r(\widehat{f}_A(r) C_*) = \partial_r(r \widehat{f}_A(r) C_*) - \widehat{f}_A(r) C_*$$

et l'intégrale du terme en ∂_r s'exprime en fonction des conditions aux limites :

$$\int_{\widehat{\Omega}} dr r \partial_r(\widehat{f}_A(r) C_*) = -r_0 B - \frac{1}{2} r_0 \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_I(r_1) \widehat{f}_I(r_2) - \int_{\widehat{\Omega}} \widehat{f}_A(r) C_*$$

D'où :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \partial_t L_{GA} - r_0 B - \frac{r_0}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_I(r_1) \widehat{f}_I(r_2) - AC_* \\
&= - \left[\int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) r_1 \widehat{f}_A(r_1) (\widehat{f}_A(r_2) + \widehat{f}_I(r_2)) + \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{r}{\widehat{\tau}'_A(r)} \widehat{f}_A(r) \right] \\
&+ \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_* r_1 \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2) + \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2)
\end{aligned} \tag{38}$$

Il y a six intégrales à calculer que nous dénotons $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \mathcal{T}_4, \mathcal{T}_5$ et \mathcal{T}_6 :

$$\frac{1}{2\pi} \partial_t L_{GA} - r_0 B - \mathcal{T}_1 - AC_* = -[\mathcal{T}_2 + \mathcal{T}_3 + \mathcal{T}_4] + \mathcal{T}_5 + \mathcal{T}_6 \quad (39)$$

$$\mathcal{T}_1 = \frac{r_0}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_I(r_1) \widehat{f}_I(r_2)$$

$$\mathcal{T}_2 = \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) r_1 \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2)$$

$$\mathcal{T}_3 = \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) r_1 \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2)$$

$$\mathcal{T}_4 = \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{r}{\widehat{\tau}'_A(r)} \widehat{f}_A(r)$$

$$\mathcal{T}_5 = \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_* r_1 \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2)$$

$$\mathcal{T}_6 = \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2)$$

(40)

Nous allons examiner ces divers termes en commençant par \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_4 et en poursuivant par les paires $[\mathcal{T}_2, \mathcal{T}_5]$ puis $[\mathcal{T}_3, \mathcal{T}_6]$.

– Le premier terme s'exprime directement en fonction du rayon moyen \overline{r}_I :

$$\mathcal{T}_1 = 4\pi C_* I^2 \overline{r}_I r_0 \quad (41)$$

– Le quatrième terme amène l'introduction d'un nouveau temps d'atténuation :

$$\frac{1}{\widehat{\tau}'_A} = \frac{1}{\overline{r}_A A} \int_{\widehat{\Omega}} dr \frac{r}{\widehat{\tau}'_A(r)} \widehat{f}_A(r)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_4 &= \frac{\overline{r}_A A}{\widehat{\tau}'_A} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{L_{GA}}{\widehat{\tau}'_A} \end{aligned}$$

$\overline{\widehat{\tau}'_A}$ est le temps d'atténuation moyen de L_{GA} .

– Le deuxième terme \mathcal{T}_2 représente le puits lié aux rencontres $A-A$ alors que le cinquième \mathcal{T}_5 représente la source liée à ces mêmes rencontres. La différence entre ces deux termes représente donc l'effet net des rencontres $A-A$ sur l'évolution de L_{GA} . Pour écrire cet effet net nous allons récrire \mathcal{T}_2 et \mathcal{T}_5 sous leur forme symétrique en r_1 et r_2 :

$$\mathcal{T}_2 = \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 (r_1 + r_2) 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2)$$

$$\mathcal{T}_5 = \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2)$$

(42)

Il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_5 - \mathcal{T}_2 &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) [\sqrt{r_1^2 + r_2^2} - (r_1 + r_2)] \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_*(r_1 + r_2) \frac{-2r_1 r_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2} + (r_1 + r_2)} \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2)\end{aligned}\quad (43)$$

Finalement,

$$\mathcal{T}_5 - \mathcal{T}_2 = - \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_* \frac{r_1 r_2}{1 + \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2}} \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2) \quad (44)$$

- Le troisième terme \mathcal{T}_3 représente le puits lié aux rencontre $A - I$ alors que le sixieme \mathcal{T}_6 represente la source liée à ces mêmes rencontres. La différence entre ces deux termes représente donc l'effet net des rencontres $A - I$ sur l'évolution de L_{GA} . Pour écrire cet effet, nous allons ajouter un terme à \mathcal{T}_3 pour lui donner une forme symétrique (semblable à celle de \mathcal{T}_6) et nous retrancherons ce terme ensuite :

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_3 &= \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 (r_1 + r_2) 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 (r_1 + r_2) 4\pi C_* r_2 \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2)\end{aligned}\quad (45)$$

$$\mathcal{T}_6 = \frac{1}{2} \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 \sqrt{r_1^2 + r_2^2} 4\pi C_*(r_1 + r_2) \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2)$$

Il vient :

$$\mathcal{T}_6 - \mathcal{T}_3 = - \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_* \frac{r_1 r_2}{1 + \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2}} \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2) + 2\pi C_* AI [\overline{r_A} \overline{r_I} + \overline{r_I^2}] \quad (46)$$

Au total :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \partial_t L_{GA} &= r_0 B + 4\pi C_* I^2 \overline{r_I} r_0 + AC_* - \frac{1}{2\pi} \frac{L_{GA}}{\widehat{r}_A} - \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_* \frac{r_1 r_2}{1 + \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2}} \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_A(r_2) \\ &\quad - \int_{\widehat{\Omega}^2} dr_1 dr_2 4\pi C_* \frac{r_1 r_2}{1 + \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2}} \widehat{f}_A(r_1) \widehat{f}_I(r_2) \\ &\quad + 2\pi C_* AI [\overline{r_A} \overline{r_I} + \overline{r_I^2}]\end{aligned}\quad (47)$$

Notes On peut montrer que, pour r_1 et r_2 positifs :

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2} \leq 1 \quad (48)$$

On en déduit :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2}} \leq 2(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \simeq 0.586 \quad (49)$$

Si on fait l'approximation :

$$\frac{1}{1 + \frac{\sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{r_1 + r_2}} \simeq \frac{1}{2} \quad (50)$$

l'équation d'évolution de L_{GA} devient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \partial_t L_{GA} = r_0 B + 4\pi C_* I^2 \overline{r_I} r_0 + AC_* - \frac{1}{2\pi} \frac{L_{GA}}{\overline{r_A}} - 2\pi C_* A^2 \overline{r_A}^2 \\ + 2\pi C_* A I \overline{r_I}^2 \end{aligned} \quad (51)$$

2.2.2 Equation de $\partial_t L_{GI}$