

Descentes précipitantes

By Nicolas Rochetin

Juillet 2007

Introduction

Ce rapport propose une redémonstration des équations bilan de Kerry Emanuel décrivant le comportement dynamique et thermique des courants de descente précipitantes, autrement surnommées "trous d'air". Ces trous d'air sont engendrés par l'évaporation de précipitations tombant dans hors du nuage d'orage (donc en zone insaturée); la vaporisation étant endothermique, les volumes d'air insaturés traversés par les pluies sont refroidis, ils gagnent donc en densité et chutent.

Dans son approche du phénomène, Emanuel présente la descente précipitante un peu comme un "tuyau d'air froid"; c'est à dire un panache froid de section constante dont la flottabilité vis à vis de l'environnement pourra changer de signe selon l'altitude. Le panache pourra donc selon sa flottabilité à telle ou telle altitude (ou géopotentiel $\Phi = gz$), entrainer ou détrainner de l'air environnant par ses parois latérales.

Toute cette étude (étalée sur 2 mois) prend pour base de travail le chapitre b. "Unsaturated downdrafts" de l'article de Kerry Emanuel paru en novembre 1991 intitulé "A scheme for representing cumulus convection in large scale model" et le chapitre 2 du cours de Physique des nuages de Jean-Yves Grandpeix et Rémy Roca intitulé "Les nuages dans les modèles d'atmosphère et de climat".

L'intérêt de cette analyse physique est double : d'une part la meilleure compréhension de l'article d'Emanuel, qui à aucun moment n'expose de façon exhaustive les démonstrations des résultats avancés ; d'autre part (apres correction d'éventuelles erreurs) l'amélioration du code de calcul réalisé en fortran 77 permettant de simuler ce processus. Le plan de ce compte rendu est construit autour des équations de bilan des descentes insaturées :

1. Bilan des précipitations
2. Bilan de la quantité de mouvement du panache froid
 - (a) Cas du panache entrainant
 - (b) Cas détrainant
3. Bilan de vapeur d'eau
 - (a) Cas entrainant
 - (b) Cas détrainant
4. Bilan d'énergie du panache froid

- (a) Cas entraînant
- (b) Cas détrainant
- 5. Récapitulatif des bilans
- 6. Schéma numérique proposé
- 7. Conclusion

1 Bilan des précipitations

Ce premier bilan n'est autre que la conservation de la masse d'eau appliquée à une maille du courant insaturé d'indice i .

La comptabilité des flux incidents et sortants de la maille proposée par Emanuel donne l'équation complète suivante :

$$\frac{d(\omega_T l_p \sigma_d)^i}{dp} = \frac{g}{\Delta p} \epsilon^i l_a^i M^i + \frac{g}{\Delta p} \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} [QENT^{ji} - q^{*i}] MENT^{ji} - \sigma_d \sigma_s^i E^i$$

ω_T = vitesse terminale de précipitation (Pa/s)

l_p = taux de précipitations (kg d'eau liq / kg de mélange) de la descente

σ_d = section supposée constante de la descente insaturée (m²)

ϵ = efficacité de précipitation (kg de précipitations / kg d'eau condensée)

E^i = vitesse d'évaporation ((kg/s) d'eau liquide évaporée / kg de mélange)

σ_s = portion de ciel clair (portion d'air insaturé dans laquelle les précipitations sont soumises à évaporation)

l_a = taux de précipitations de la source adiabatique (bulle d'air chaud ascendante)

M = débit masse d'air chaud ascendant (kg/s)

$QENT^{ji}$ = humidité spécifique des flux d'air entraîné des niveaux j au niveau i (kg de vap / kg de mélange)

$MENT^{ji}$ = débit masse de mélange entraîné des niveaux j au niveau i

q^* = humidité spécifique à la saturation (kg de vapeur d'eau à la saturation / kg de mélange)

Considérons un volume de contrôle de section supposée cylindrique σ_d et de hauteur dz situé à l'altitude i par rapport auquel tous les flux d'eau liquide entrants seront comptés positivement, ainsi que toutes les sources d'eau présentes dans ce volume.

Remarque:

Dans toute la suite du compte rendu les bilans seront tous réalisés dans ce même volume et obéiront à la même convention de signe : ceci ne sera donc plus précisé.

Le système que l'on considère étant bien entendu ouvert (puisque'il échange de la matière avec son environnement), le bilan d'eau liquide s'écrit de la façon suivante:

$$\Phi_{z+dz} + \Phi_{\text{sources}} = \Phi_z + \Phi_{\text{puits}}$$

1. Termes sources:

(a) Source due à l'ascendance adiabatique:

La descente précipitante est un mélange d'air insaturé et de précipitation. Le premier terme source provient de la formation de précipitation lors de l'épluchage de l'ascendance adiabatique dans la maille i . Cette eau captée se trouve déjà à l'état liquide en i et n'a pas été obtenue par condensation de vapeur; il n'y a donc aucun apport de chaleur au volume de contrôle. En désignant par ϵ^i l'efficacité de précipitation dans la maille i , ce terme source peut s'écrire :

$$\Phi_{\text{source adiabatique}} = \epsilon^i M^i l_a^i$$

(b) Source due aux flux mélangés:

Le second terme source provient de la formation de précipitation lors du déentraînement des flux ascendants mélangés. Si on désigne par j tous ces niveaux de condensation et qu'on les somme (en oubliant pas le coef ϵ à chaque niveau); on obtient au niveau de la maille i :

$$\Phi_{\text{source non adiabatique}} = \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} [QENT^{ji} - q^{*i}] MENT^{ji}$$

2. Termes puits:

La descente précipitante étant un courant insaturé, une grande part de liquide qu'il transporte se trouve évaporée, d'où un terme puits qu'on propose d'écrire sous la forme:

$$\Phi_{\text{puits}} = \rho_{\text{mélange}} \sigma_d \sigma_s^i E^i dz$$

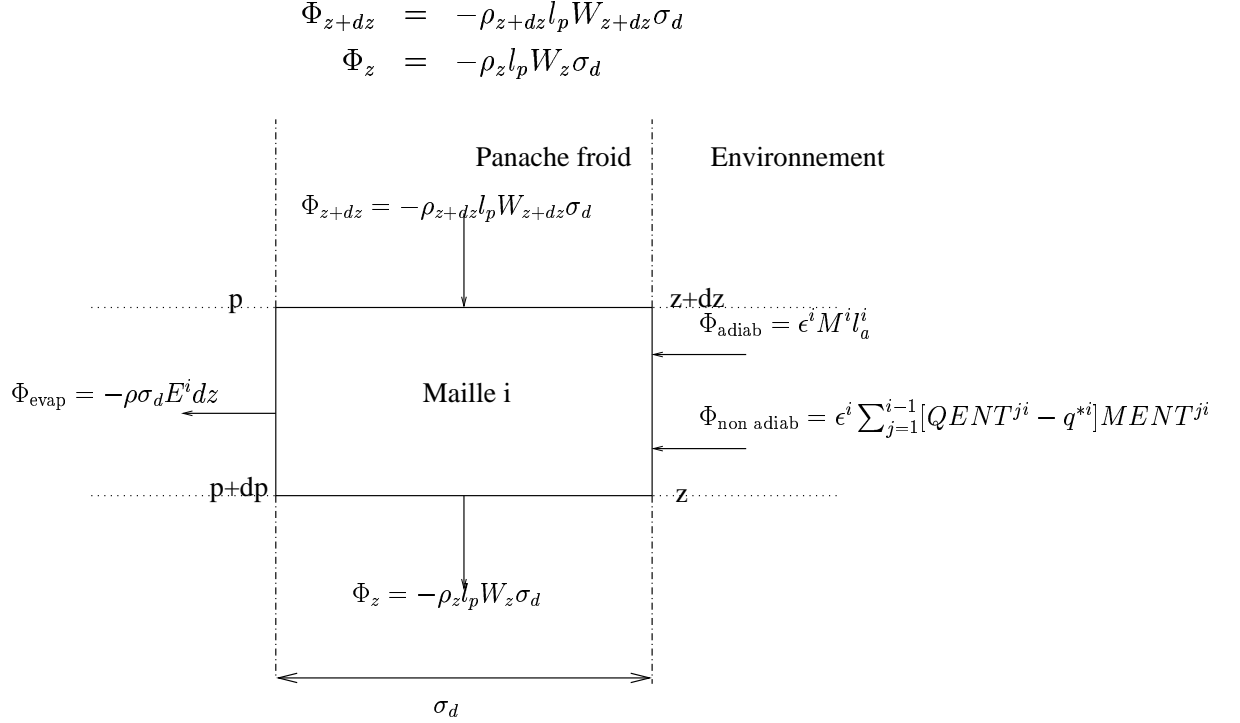
3. Termes de transport (entrée et sortie):

Le volume de contrôle reçoit en $z + dz$ un flux :

$$\begin{aligned} \Phi_{z+dz} &= -\rho_{\text{precipitations}} W_{z+dz} \sigma_d \\ \Phi_{z+dz} &= -\rho_{\text{mélange}} l_p W_{z+dz} \sigma_d \end{aligned}$$

Où W désigne la vitesse de chute comptée négative vers le bas.

On a donc en résumé :



Au final le bilan peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\epsilon^i M^i l_a^i + \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} [QENT^{ji} - q^{*i}] MENT^{ji} - \rho_{z+dz} l_p W_{z+dz} \sigma_d &= \rho \sigma_d \sigma_s^i E^i dz - \rho_z l_p W_z \sigma_d \\ -\frac{\partial(\rho W_T l_p \sigma_d)}{\partial z} dz + \epsilon^i M^i l_a^i + \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} [QENT^{ji} - q^{*i}] MENT^{ji} - \rho \sigma_d \sigma_s^i E^i dz &= 0\end{aligned}$$

Passage en coordonnées pression :

La variation de pression hydrostatique s'écrit $dp = -\rho g dz$, on a donc $dz = -\frac{dp}{\rho g}$.
On peut de plus faire l'approximation $\omega_T = -\rho g W_T$, d'où il vient $W_T = -\frac{\omega_T}{\rho g}$.
La chute étant supposée strictement verticale, donc unidimensionnelle, toutes les variables ne dépendent que de P (ou de z), par conséquent on peut remplacer les dérivées partielles par des dérivées droites et le bilan donne à présent :

$$-\frac{1}{g} \frac{d(\omega_T l_p \sigma_d)}{dp} \Delta p + \epsilon^i M^i l_a^i + \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} [QENT^{ji} - q^{*i}] MENT^{ji} - \frac{\Delta p}{g} \sigma_d \sigma_s^i E^i = 0$$

$$\frac{d(\omega_T l_p \sigma_d)^i}{dp} = \frac{g}{\Delta p} \epsilon^i M^i l_a^i + \frac{g}{\Delta p} \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} [QENT^{ji} - q^{*i}] MENT^{ji} - \sigma_d \sigma_s^i E^i$$

La comptabilité des flux telle qu'elle a été réalisée ici nous ramène donc à l'expression initiale de Kerry Emanuel, cette équation semble donc tout à fait valide.

2 Bilan de la quantité de mouvement du panache froid

Emanuel applique maintenant la relation fondamentale de la dynamique à un volume de contrôle du courant insaturé situé à un niveau arbitraire i , de section σ_d et de hauteur dz et obtient la formule suivante, indépendamment des cas de détrainement ou d'entraînement:

$$\left(\frac{dM_p^{2^i}}{dp}\right) = -\frac{\rho^i \sigma_d^2}{\theta^i}(\theta_p^i - \theta^i)$$

M_p = débit masse du panache (kg/s)

θ_p = température potentielle du panache (K)

θ = température potentielle de l'air environnant

ρ = masse volumique de l'air environnant (kg/m³)

Une hypothèse fondamentale doit ici être précisée qui pourrait remettre en question la validité de cette équation: cette dernière postule que tout courant d'air entraîné par la surface latérale du volume de contrôle l'est à vitesse nulle (et n'apporte par là aucun gain de quantité de mouvement à la descente), alors que toute masse d'air détrainée l'est à la vitesse du panache (on a donc cette fois une perte non nulle de QDM).

Partant de là, il paraît difficile à croire que dans les 2 cas on obtienne une même loi dynamique pour la descente (ou panache froid), comme le suggère Emanuel. Nous allons donc refaire ce bilan en différenciant bien les 2 cas de figure.

Choisissons des normales entrantes afin de conserver un signe positif pour les flux entrants.

Nota:

On désignera à partir de maintenant (et ce jusqu'à la fin de ce compte rendu) par l'indice e toutes les variables caractéristiques de l'air environnant et par p toutes celles relatives au panache froid.

Le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$m\vec{\Gamma} = \text{transport} + \sum F_{ext}$$

Soit

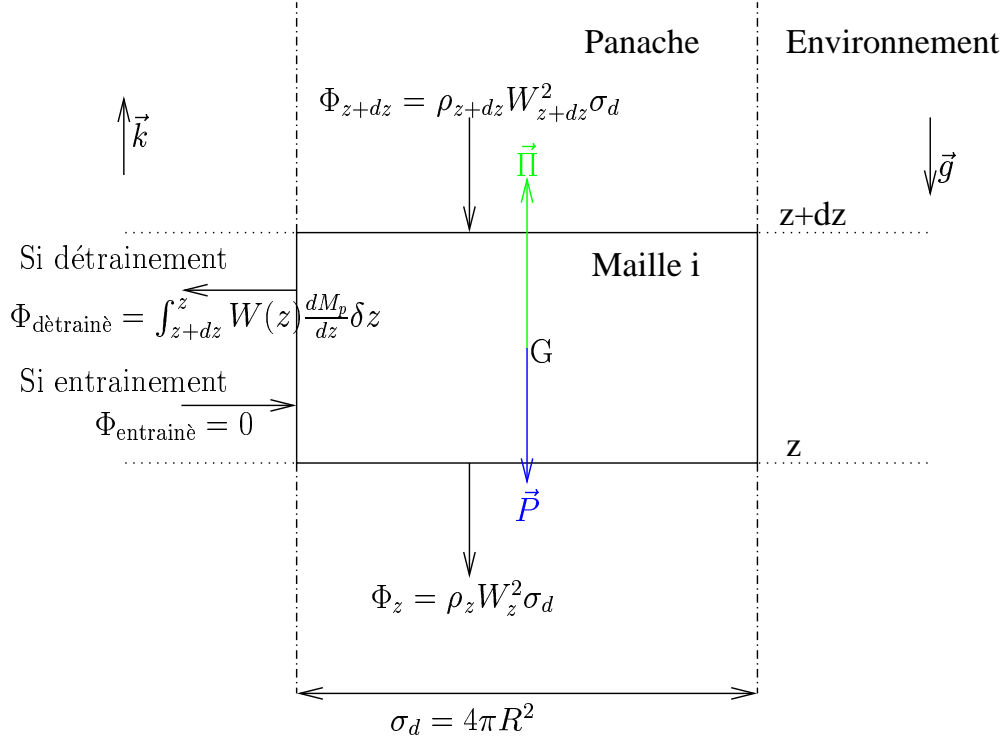
$$\frac{\partial \vec{p}}{\partial t} = \oint_s \rho \vec{v}(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \int_v \vec{f}_{ext} dv$$

Le vecteur \vec{p} désigne la quantité de mouvement et sa dérivée temporelle $\frac{\partial \vec{p}}{\partial t}$ est nulle sachant qu'on se place en régime permanent.

Les 3 seules forces agissant sur notre volume de contrôle sont :

- * le poids $\vec{P} = \rho_p \vec{g} dv$
- * le frottement \vec{f} aux parois qu'on néglige
- * les forces de pression, qui ramenées au cas hydrostatique, s'apparentent à la force d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho_e \vec{g} dv$

On choisit d'orienter le vecteur \vec{k} azimuth vers le haut.



La projection sur \vec{k} donne:

$$\begin{aligned}
 - \oint_s \rho W (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \int_v \vec{f}_{ext} \cdot \vec{k} dv &= 0 \\
 - \oint_s \rho W (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \int_v (\rho_e - \rho_p) g dv &= 0
 \end{aligned}$$

2.1 Cas entrainant

On rappelle que dans ce cas le flux de quantité de mouvement d'air entrant par les parois latérales est nul, on a:

$\int_{S_{lat}} \rho W (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0$ et le terme de transport s'écrit donc :

$$\begin{aligned}
 \oint_s \rho W (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds &= \rho_{z+dz} W_{z+dz}^2 \sigma_d - \rho_z W_z^2 \sigma_d \\
 \oint_s \rho W (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds &= \frac{\partial(\rho_p W^2)}{\partial z} \sigma_d dz
 \end{aligned}$$

Le bilan de quantité de mouvement donne alors :

$$\begin{aligned}
(\rho_e - \rho_p)g\sigma_d dz - \frac{\partial(\rho_p W^2)}{\partial z}\sigma_d dz &= 0 \\
(\rho_e - \rho_p)g - \frac{d(\rho_p W^2)}{dz} &= 0 \\
(\rho_e - \rho_p)g - \frac{1}{\sigma_d^2} \frac{d(\frac{M_p^2}{\rho_p})}{dz} &= 0 \\
(\rho_e - \rho_p)g - \frac{1}{\sigma_d^2} \left[\frac{1}{\rho_p} \frac{dM_p^2}{dz} - \frac{M_p^2}{\rho_p^2} \frac{d\rho_p}{dz} \right] &= 0 \\
(\rho_e - \rho_p)g - \frac{1}{\sigma_d^2 \rho_p} \left[\frac{dM_p^2}{dz} - \frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dz} \right] &= 0
\end{aligned}$$

Remarque :

Le passage des dérivées partielles aux dérivées droites s'explique par l'hypothèse que les variables caractéristiques et les variables d'état du panache froid dépendent uniquement de l'altitude z à laquelle on se place.

Le passage en coordonnées pression nous donne $dp = -\rho_e g dz$, donc $\frac{1}{dz} = -\frac{\rho_e g}{dp}$:

$$\begin{aligned}
(\rho_e - \rho_p)g + \frac{g}{\sigma_d^2} \frac{\rho_e}{\rho_p} \frac{dM_p^2}{dp} - \frac{g}{\sigma_d^2} \frac{\rho_e}{\rho_p} \frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dp} &= 0 \\
\frac{\rho_e - \rho_p}{\rho_e} \rho_p \sigma_d^2 + \frac{dM_p^2}{dp} - \frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dp} &= 0 \\
\frac{\theta_p - \theta_e}{\theta_p} \rho_p \sigma_d^2 + \frac{dM_p^2}{dp} - \frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dp} &= 0
\end{aligned}$$

Ce qui donne finalement:

$$\boxed{\frac{d(M_p^2)^i}{dp} = -\rho_p^i \sigma_d^2 \left(\frac{\theta_p^i - \theta_e^i}{\theta_p^i} \right) + \left(\frac{M_p^2}{\rho_p} \right)^i \frac{d\rho_p^i}{dp}}$$

Au terme de cette démonstration, on remarque donc qu'il apparaît un terme $\frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dp}$ qui ne figure pas dans le bilan proposé par Emanuel. Les calculs ont été refaits plusieurs fois par plusieurs membres du LMD et retombent inmanquablement sur ce résultat, ce qui porte à croire que son bilan est ici erroné. D'autant plus erroné que ce terme de gradient vertical de densité est probablement loin d'être négligeable, donc qu'il aura un impact certain sur les résultats du modèle consacré aux descente précipitantes.

Développons cette expression dans l'idée d'y faire apparaître la variation d'énergie cinétique

de notre volume de contrôle.

$$\begin{aligned}\frac{d(W_p \sigma_d \rho_p)^2}{dp} &= -\rho_p \sigma_d^2 \left(\frac{\theta_p^i - \theta_e^i}{\theta_p^i} \right) + \rho_p \sigma_d^2 W_p^2 \frac{d\rho_p}{dp} \\ \frac{d(W_p \rho_p)^2}{dp} &= -\rho_p \left(\frac{\theta_p^i - \theta_e^i}{\theta_p^i} \right) + \rho_p W_p^2 \frac{d\rho_p}{dp} \\ \rho_p \frac{d(\rho_p W_p^2)}{dp} + \rho_p W_p^2 \frac{d\rho_p}{dp} &= -\rho_p \left(\frac{\theta_p^i - \theta_e^i}{\theta_p^i} \right) + \rho_p W_p^2 \frac{d\rho_p}{dp}\end{aligned}$$

Et la variation d'énergie cinétique vaut alors:

$$\boxed{\frac{d(\frac{1}{2}\rho_p W_p^2)^i}{dp} = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta_e^i - \theta_p^i}{\theta_p^i} \right)^i}$$

Validation du résultat:

Ce résultat indique d'emblée que la variation d'énergie cinétique vaut le travail (négatif ici) de la CAPE, (c'est à dire le travail des forces de flottabilité); ce qui est d'autant plus rassurant que la formule d'Emanuel ne permet pas de retrouver ce résultat.

D'autre part on remarque que si $\theta_p = \theta_e$ l'énergie cinétique est constante le long de la descente, ce qui paraît logique: il n'y a en effet aucune raison pour que le système gagne ou perde d'énergie si il est à la même température potentielle (donc à même flottabilité) que son environnement. Dans un tel cas de figure, la densification de la descente, occasionnée par l'augmentation de pression hydrostatique provoquerait un entrainement d'air environnant qui serait compensé par une diminution de la vitesse de chute, de manière à garder une énergie cinétique inchangée pendant la descente ($\frac{d(\frac{1}{2}\rho_p W_p^2)^i}{dp} = 0$).

Ces 2 remarques viennent définitivement confirmer la présence du terme manquant ($\frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dp}$) dans le bilan proposé par Emanuel, et lui donne désormais un sens physique.

2.2 Cas détrainant

Le flux de quantité de mouvement sortant par les parois latérales est cette fois non nul, l'air détrainé sort de la descente à la même vitesse que cette dernière.

Calcul du détrainement D

$$\begin{aligned}
D &= \int_{Slat} \rho_{paroi}(\vec{v} \cdot \vec{k})(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \\
D &= - \int_{Slat} \rho_{pa} W(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds \\
D &= - \int_{z+dz}^z \int_0^{2\pi} W \rho_{pa}(\vec{v} \cdot \vec{n}) R d\alpha dz \\
D &= - \int_{z+dz}^z W \left(\int_0^{2\pi} \rho_{pa}(\vec{v} \cdot \vec{n}) R d\alpha \right) dz
\end{aligned}$$

Plaçons-nous sur maintenant une tranche d'épaisseur δz de notre surface cylindrique latérale.

La conservation de la masse nous indique que le flux massique de détrainement sur cette tranche vaut la variation infinitésimale de M_p sur cette distance δz , ce qui s'écrit :

$$\int_0^{2\pi} \rho_{pa}(\vec{v} \cdot \vec{n}) R d\alpha = \frac{\partial M_p}{\partial z}$$

Remarque:

Il sera souvent fait référence à ce résultat important dans toute la suite de l'exposé.

Hypothèse supplémentaire

On suppose que $\rho_{pa} = \rho_p$ constante le long de dz pour simplifier le calcul et surtout le modèle, cette approximation est de plus tout à fait acceptable car les gradients horizontaux sont très faibles pour toutes les grandeurs considérées.

On a donc désormais pour D :

$$\begin{aligned}
D &= - \int_{z+dz}^z W \frac{\partial M_p}{\partial z} dz \\
D &= \int_z^{z+dz} W dM_p \\
D &= \int_z^{z+dz} \frac{M_p}{\rho_p \sigma_d} dM_p \\
D &= \frac{1}{2\rho_p \sigma_d} \frac{dM_p^2}{dz} dz
\end{aligned}$$

Le bilan de QDM peut donc s'écrire :

$$(\rho_e - \rho_p)g\sigma_d dz - \frac{\partial(\rho_p W^2)}{\partial z} \sigma_d dz + \frac{1}{2\rho_p \sigma_d} \frac{dM_p^2}{dz} dz = 0$$

Ce qui conduit selon les mêmes calculs que tout à l'heure à

$$(\rho_e - \rho_p)g\sigma_d - \frac{1}{\rho_p \sigma_d} \left[\frac{dM_p^2}{dz} - \frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dz} \right] + \frac{1}{2\rho_p \sigma_d} \frac{dM_p^2}{dz} = 0$$

$$(\rho_e - \rho_p)g\rho_p \sigma_d^2 - \frac{dM_p^2}{dz} + \frac{M_p^2}{\rho_p} \frac{d\rho_p}{dz} + \frac{1}{2} \frac{dM_p^2}{dz} = 0$$

On obtient après passage en coordonnées pression :

$$\boxed{\frac{d(M_p^2)^i}{dp} = -2\rho_p^i \sigma_d^2 \left(\frac{\theta_p^i - \theta_e^i}{\theta_p^i} \right) + \left(\frac{M_p^2}{\rho_p} \right)^i \frac{d\rho_p^i}{dp}}$$

On note donc que dans le cas du détrainement un facteur 2 apparaît, ce qui vient contredire à nouveau Emanuel, or ce résultat a également été retrouvé par plusieurs membres du LMD.

Selon le même développement que dans le cas précédent, la variation d'énergie cinétique vaut cette fois:

$$\boxed{\frac{d(\frac{1}{2}\rho_p W_p^2)^i}{dp} = \left(\frac{\theta_e^i - \theta_p^i}{\theta_p^i} \right)}$$

Il y a donc fort à parier que le comportement dynamique de la descente est différent selon qu'il y ait perte ou gain de QDM; la variation d'énergie cinétique par unité de masse gagnée ou perdue est 2 fois plus importante dans le cas du détrainement que dans le cas de l'entraînement.

Conclusion:

Nous retiendrons de ce deuxième calcul que le comportement dynamique de la descente insaturée semble avoir été décrit de manière incomplète par Kerry Emanuel au vu des 2 points de divergence soulevés ici. Les corrections qui y ont été apportées semblent quant à elles très crédibles.

Reste néanmoins à chiffrer l'impact probablement important de ces modifications en les insérant dans le code de calcul consacré aux descentes précipitantes.

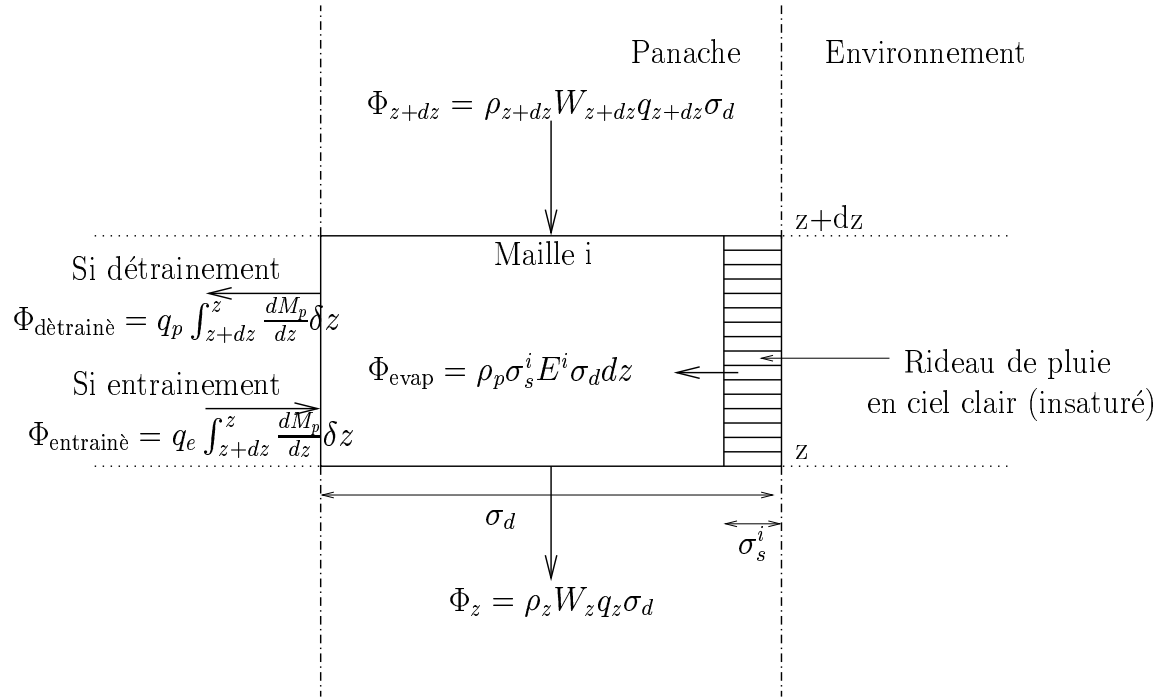
3 Bilan de vapeur d'eau

On cherche dans cette troisième section à formuler la conservation de la masse de vapeur d'eau dans le panache froid. On raisonne pour cela de la même manière que dans le bilan opéré sur les précipitations (partie 1) en réalisant une simple comptabilité des puits et des sources de vapeur d'eau dans la maille i de volume dv .

Dans le cas général la conservation de vapeur d'eau s'écrit:

$$\begin{aligned} \text{Vapeur d'eau stockée} &= \text{Vapeur transportée} + \text{Vapeur créée} \\ \frac{\partial(\int_v \rho_p q_p dv)}{\partial t} &= \oint_s \rho_{paroi} q(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \int_v \rho_p q_p E^i dv \end{aligned}$$

Sachant qu'on travaille en régime permanent et qu'il y a vaporisation (donc création de vapeur d'eau) uniquement dans la section σ_s^i de ciel clair (d'air insaturé en fait), on a:



Et on peut écrire:

$$0 = \oint_s \rho_{paroi} q(\vec{v} \cdot \vec{n}) ds + \rho_p q_p \sigma_s^i \sigma_d dz$$

3.1 Cas entrainant

Dans le cas de l'entrainement d'air, ce bilan s'écrit selon Emmanuel:

$$g M_p^i \left(\frac{dq_p}{dp} \right)^i = \sigma_d \sigma_s^i E^i + g(q^i - q_p^i) \frac{dM_p^i}{dp}$$

q_p = humidité spécifique du panache (kg vap / kg de mélange)

q = humidité spécifique de l'air environnant

Si on reprend tout depuis le départ, on a:

$$\begin{aligned}
M_{p(z+dz)}q_{p(z+dz)} + \int_{z+dz}^z \rho_{paroi} q_e \left[\int_0^{2\pi} R(\vec{v} \cdot \vec{n}) d\alpha \right] \delta z + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i dz &= M_{p(z)} q_{p(z)} \\
\frac{d(M_p q_p)}{dz} - q_e \frac{dM_p}{dz} + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0 \\
(q_p - q_e) \frac{dM_p}{dz} + M_p \frac{dq_p}{dz} + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0 \\
\text{Et en coordonnée pression} \\
-\rho_e g (q_p - q_e) \frac{dM_p}{dp} - \rho_e g M_p \frac{dq_p}{dp} + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0 \\
-\frac{\rho_e}{\rho_p} g (q_p - q_e) \frac{dM_p}{dp} - \frac{\rho_e}{\rho_p} g M_p \frac{dq_p}{dp} + \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0 \\
-\frac{\theta_p}{\theta_e} g (q_p - q_e) \frac{dM_p}{dp} - \frac{\theta_p}{\theta_e} g M_p \frac{dq_p}{dp} + \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0
\end{aligned}$$

Au final on obtient donc:

$$\boxed{g M_p^i \frac{dq_p^i}{dp} = \frac{\theta_e}{\theta_p} \sigma_s^i \sigma_d E^i + g (q_e^i - q_p^i) \frac{dM_p^i}{dp}}$$

On retrouve donc le résultat d'Emanuel à un facteur près $\frac{\theta_e}{\theta_p}$ sans grande incidence sur le résultat; on peut en effet supposer ce facteur très proche de l'unité compte tenu des hypothèses faites précédemment sur les faibles gradients existants entre l'environnement et le panache (par rapport aux gradients verticaux au sein même du panache).

3.2 Cas détrainant

Emanuel propose dans ce cas:

$$g M_p^i \left(\frac{dq_p}{dp} \right)^i = \sigma_d \sigma_s^i E^i$$

Le bilan peut cette fois s'écrire

$$\begin{aligned}
M_{p(z+dz)}q_{p(z+dz)} + \int_{z+dz}^z \rho_{paroi} q_p \left[\int_0^{2\pi} R(\vec{v} \cdot \vec{n}) d\alpha \right] \delta z + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i dz &= M_{p(z)} q_{p(z)} \\
\frac{d(M_p q_p)}{dz} - q_p \frac{dM_p}{dz} + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0 \\
M_p \frac{dq_p}{dz} + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0 \\
-\rho_e g M_p \frac{dq_p}{dp} + \rho_p \sigma_s^i \sigma_d E^i &= 0
\end{aligned}$$

Selon les mêmes calculs que tout à l'heure on obtient :

$$\boxed{g M_p^i \frac{dq_p^i}{dp} = \frac{\theta_e}{\theta_p} \sigma_s^i \sigma_d E^i}$$

Au meme facteur près que tout à l'heure on retrouve exactement le même résultat que Kerry Emanuel pour ce cas de figure.

Conclusion:

La conservation de la vapeur d'eau semble être justement décrite par les équations d'Emanuel dans son article, à un facteur correctif près déjà évoqué, qu'on peut supposer proche de l'unité pour simplifier la résolution numérique.

4 Bilan d'énergie du panache froid

Le volume de contrôle que l'on considère peut être divisée en 2 sous-systèmes formant un système fermé et adiabatique dont l'énergie statique humide se conserve:

- * un volume d'eau liquide de précipitations $\sigma_s^i dz$, couvrant la portion σ_s^i de ciel clair de la section σ_d et d'enthalpie massique h_l .
- * un volume d'air humide $(\sigma_d - \sigma_s^i) dz$, d'enthalpie massique h_w .

L'enthalpie totale de notre volume de contrôle s'écrit donc:

$$\begin{aligned} H_t &= H_{\text{liq}} + H_{\text{air humide}} = H_l + H_w \\ H_t &= \rho_{\text{liq}} \sigma_s^i h_l dz + \rho_{\text{air humide}} (\sigma_d - \sigma_s^i) h_w dz \end{aligned}$$

Typiquement on a $\sigma_s^i = 0.01 \sigma_d$, on peut donc considérer que $H_{\text{liq}} \ll H_{\text{air humide}}$ et à fortiori que $H_t \approx H_{\text{air humide}}$.

Les transformations étant supposées adiabatiques et la variation de pression étant uniquement hydrostatique, l'application du premier principe de la thermodynamique s'écrit en grandeurs massiques (où α est le volume massique).

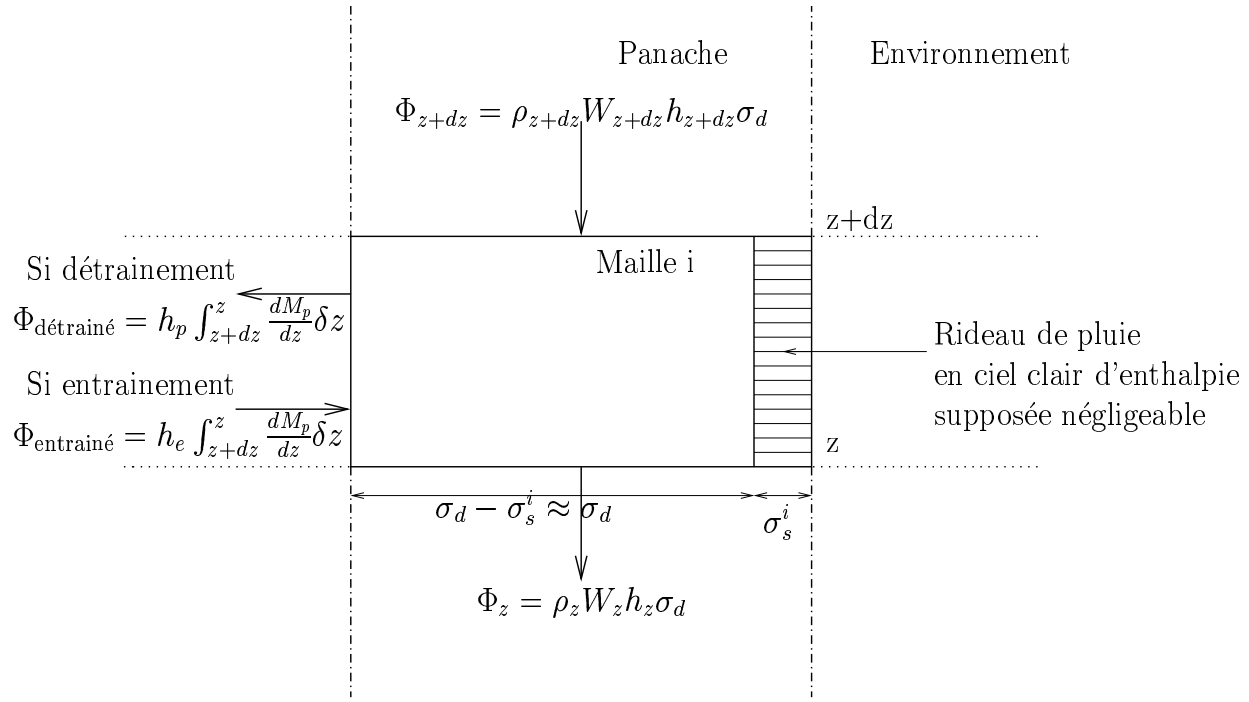
$$\begin{aligned} du &= \delta Q + \delta W = \delta W \\ d(h - p\alpha) &= -pd\alpha \\ d(C_p T_p + L_v q) - pd\alpha - \alpha dp &= -pd\alpha \\ d(C_p T_p + L_v q) - \alpha dp &= 0 \end{aligned}$$

Sachant qu'on suppose l'hydrostatie, la variation de pression s'écrit $dp = -\rho g dz$ et on a:

$$\boxed{d(C_p T_p + L_v q + gz) = dh_w = 0}$$

Il y a donc conservation de la grandeur h_w appelée énergie statique humide. Intégré sur tout le volume de contrôle cela donne:

$$\oint_s \rho h_w (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = \oint_s \rho (C_p T + gz + L_v q) (\vec{v} \cdot \vec{n}) ds = 0$$



4.1 Cas entrainant

Dans le cas de l'entrainement Emanuel propose :

$$M_p^i \frac{g}{\theta^i} \left(\frac{d\theta_p}{dp} \right)^i = - \frac{\sigma_d \sigma_s^i L_v^i E^i}{C_p T^i} + \frac{g}{\theta^i} (\theta^i - \theta_p^i) \frac{dM_p^i}{dp}$$

σ_s = portion de ciel clair (portion d'air sec dans laquelle les précipitations s'évaporeront en partie)

L_v = chaleur latente de vaporisation de l'eau (J/kg)

T = température de l'air environnant (K)

C_p = capacité calorifique massique de l'air humide (supposée la même partout) (J/kg.K)

S'il y a entrainement, l'équation de conservation de l'enthalpie humide s'écrit:

$$\begin{aligned}
\int_{s(z+dz)} \rho_p h_p ds - \int_{s(z)} \rho_p h_p ds + \int_{z+dz}^z \int_0^{2\pi} \rho_p h_e (\vec{v} \cdot \vec{n}) R d\alpha dz &= 0 \\
\frac{\partial h_p M_p}{\partial z} - h_e \frac{\partial M_p}{\partial z} &= 0 \\
-\frac{\partial h_p M_p}{\partial p} + h_e \frac{\partial M_p}{\partial p} &= 0 \\
(h_e - h_p) \frac{\partial M_p}{\partial p} - M_p \frac{\partial h_p}{\partial p} &= 0 \\
C_p(T_e - T_p) \frac{\partial M_p}{\partial p} + L_v(q_e - q_p) \frac{\partial M_p}{\partial p} - M_p \left[C_p \frac{\partial T_p}{\partial p} - \frac{1}{\rho_e} + L_v \frac{\partial q_p}{\partial p} \right] &= 0 \\
C_p T_e \left(1 - \frac{\theta_p}{\theta_e} \right) \frac{\partial M_p}{\partial p} + L_v [(q_e - q_p) \frac{\partial M_p}{\partial p} - M_p \frac{\partial q_p}{\partial p}] - M_p \left[C_p \frac{\partial T_p}{\partial p} - \frac{1}{\rho_e} \right] &= 0
\end{aligned}$$

Calcul de $\frac{\partial T_p}{\partial p}$:

On sait que $\theta_p = T_p \left(\frac{p_{ref}}{p} \right)^\kappa$ où $\kappa = \frac{R}{C_p}$

En différenciant cette relation on obtient:

$$d\theta_p = \frac{\theta_p}{T_p} dT_p - \frac{\kappa \theta_p}{p} dp$$

D'où on déduit:

$$\frac{dT_p}{dP} = \frac{T_p}{\theta_p} \frac{d\theta_p}{dp} + \frac{\kappa T_p}{p} = \frac{T_p}{\theta_p} \frac{d\theta_p}{dp} + \frac{1}{\rho_p C_p}$$

Calcul de $(q_e - q_p) \frac{\partial M_p}{\partial p} - M_p \frac{\partial q_p}{\partial p}$:

L'équation de conservation de la vapeur d'eau nous donne directement :

$$(q_e - q_p) \frac{dM_p}{dp} - M_p \frac{dq_p}{dp} = -\frac{\sigma_d \sigma_s^i E^i}{g}$$

Par conséquent la conservation d'énergie statique humide nous donne:

$$C_p T_e \left(\frac{\theta_e - \theta_p}{\theta_e} \right) \frac{dM_p}{dp} - L_v \frac{\sigma_d \sigma_s^i E^i}{g} - M_p \left[C_p \frac{T_p}{\theta_p} \frac{d\theta_p}{dp} + \frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_e} \right] = 0$$

On peut négliger le terme $\frac{1}{\rho_p} - \frac{1}{\rho_e}$ et on a alors:

$$C_p T_e g \left(\frac{\theta_e - \theta_p}{\theta_e} \right) \frac{dM_p}{dp} - L_v \sigma_d \sigma_s^i E^i - M_p C_p g \frac{T_p}{\theta_p} \frac{d\theta_p}{dp} = 0$$

Et en divisant tout par $C_p T_e$, on obtient bien l'expression d'Emanuel :

$$\boxed{\frac{M_p^i g}{\theta_e^i} \frac{d\theta_p^i}{dp} = g \left(\frac{\theta_e^i - \theta_p^i}{\theta_e^i} \right) \frac{dM_p^i}{dp} + \frac{L_v \sigma_d \sigma_s^i E^i}{C_p T_e^i}}$$

4.2 Cas détrainant

Emmanuel propose ici:

$$M_p^i \frac{g}{\theta^i} \left(\frac{d\theta_p}{dp} \right)^i = - \frac{\sigma_d \sigma_s^i L_v^i E^i}{C_p T^i}$$

La conservation de l'énergie statique humide peut ici s'écrire:

$$\int_{s(z+dz)} \rho_p h_p ds - \int_{s(z)} \rho_p h_p ds + \int_{z+dz}^z \int_0^{2\pi} \rho_p h_p (\vec{v} \cdot \vec{n}) R d\alpha dz = 0$$

Et par le même calcul que tout à l'heure on retrouve bien le résultat d'Emanuel:

$$\boxed{\frac{M_p^i g}{\theta_e^i} \frac{d\theta_p^i}{dp} = \frac{L_v \sigma_d \sigma_s^i E^i}{C_p T_e^i}}$$

Conclusion:

En ce qui concerne la conservation de l'énergie nos calculs sont en parfait accord avec ceux de Kerry Emanuel, il n'y a à ce niveau aucune discussion autour de la validité de ce bilan et rien dans le code de calcul n'a de raison d'être modifié à cet endroit.

5 Récapitulatif:

Précipitations

$$\frac{d(\omega_T l_p \sigma_d)^i}{dp} = \frac{g}{\Delta p} \epsilon^i M^i l_a^i + \frac{g}{\Delta p} \epsilon^i \sum_{j=1}^{i-1} [QENT^{ji} - q^{*i}] MENT^{ji} - \sigma_d \sigma_s^i E^i$$

Quantité de mouvement

* Entrainement

$$\frac{d(M_p^2)^i}{dp} = -\rho_p^i \sigma_d^2 \left(\frac{\theta_p^i - \theta_e^i}{\theta_p^i} \right) + \left(\frac{M_p^2}{\rho_p} \right)^i \frac{d\rho_p^i}{dp}$$

* Détrainement

$$\frac{d(M_p^2)^i}{dp} = -2\rho_p^i \sigma_d^2 \left(\frac{\theta_p^i - \theta_e^i}{\theta_p^i} \right) + \left(\frac{M_p^2}{\rho_p} \right)^i \frac{d\rho_p^i}{dp}$$

Vapeur d'eau

* Entrainement

$$g M_p^i \frac{dq_p^i}{dp} = \frac{\theta_e^i}{\theta_p^i} \sigma_s^i \sigma_d E^i + g(q_e^i - q_p^i) \frac{dM_p^i}{dp}$$

* Détrainement

$$gM_p^i \frac{dq_p^i}{dp} = \frac{\theta_e^i}{\theta_p^i} \sigma_s^i \sigma_d E^i$$

Energie

* Entraînement

$$\frac{M_p^i g}{\theta_e^i} \frac{d\theta_p^i}{dp} = g \left(\frac{\theta_e^i - \theta_p^i}{\theta_e^i} \right) \frac{dM_p^i}{dp} + \frac{L_v \sigma_d \sigma_s^i E^i}{C_p T_e^i}$$

* Détrainement

$$\frac{M_p^i g}{\theta_e^i} \frac{d\theta_p^i}{dp} = \frac{L_v \sigma_d \sigma_s^i E^i}{C_p T_e^i}$$

6 Schéma numérique proposé

Remarque préliminaire:

On fera l'hypothèse $\rho'_p \approx \rho'_e$ et on ne s'occupera pas ici des conditions aux limites (en fait on conservera pour le moment les mêmes conditions aux limites qu'Emanuel dans son précédent modèle).

Etape 1: Calcul de $A(i)$

$$A(i) = (L_v - \epsilon C_p T_e(i)) \sigma_d \sigma_s(i) \rho_e(i) (z(i+1) - z(i)) E(i) + M_p(i+1) [C_p (T_{ve}(i) - T_{vp}(i+1)) + g(z(i) - z(i+1))]$$

Etape 2: Différenciation des cas entrainant et détrainant

* Si $A(i) < 0$: détrainement Calcul de T_{vp}^i :

$$T_{vp}(i) = T_{ve}(i) - \frac{A(i)}{M_p(i+1) C_p}$$

$$M_p(i) = \sqrt{M_p^2(i+1) \frac{\rho'_e(i)}{\rho'_e(i+1)} \left(2 - \frac{\rho'_e(i+1)}{\rho'_e(i)} \right) - 2\rho'_e(i) \sigma_d^2 \rho_e(i) g(z(i) - z(i+1)) \frac{T_{vp}(i) - T_{ve}(i)}{T_{vp}(i)}}$$

* Si $A(i) > 0$: entraînement

On définit:

$$\begin{aligned} p &= -\frac{\rho'_e(i)}{\rho'_e(i+1)} M_p^2(i+1) \\ q &= -\frac{\sigma_d^2 \rho_e(i) g(z(i) - z(i+1)) \rho'_e(i) A(i)}{C_p T_{ve}(i)} \\ \Delta &= 4p^3 + 27q^2 \end{aligned}$$

on doit résoudre l'équation du troisième degré $M_p^3(i) + pM_p(i) + q = 0$

- Si $\Delta > 0$ (càd E(i) faible):

$$M_p(i) = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3}{27} + q^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4p^3}{27} + q^2}}$$

$$T_{vp}(i) = T_{ve}(i) - \frac{A(i)}{M_p(i)C_p}$$

- Si $\Delta < 0$ (càd E(i) fort):

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + |\Delta|}$$

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{|q|}\right)$$

$$M_p(i) = 2\sqrt[3]{r} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)$$

$$T_{vp}(i) = T_{ve}(i) - \frac{A(i)}{M_p(i)C_p}$$

Etape 3: Incrémentation et passage à la maille inférieure

$$i = i - 1$$

7 Conclusion:

16 ans après la parution de l'article d'Emanuel nous pensons aujourd'hui être capables de redémontrer de manière rigoureuse les résultats qui y sont exposés mais aussi et surtout de discuter l'un d'entre-eux. Nous affirmons en effet que l'application de la seconde loi de Newton donne un résultat plus complet que celui d'Emanuel; notre résultat est plus cohérent physiquement et offre une interprétation plus lisible du phénomène d'entraînement et de déentraînement dynamique.

En définitive cette courte étude théorique du phénomène des descentes précipitantes consacrée à la réalisation de bilans à l'échelle mésoscopique et à la proposition d'un nouveau schéma numérique de résolution, nous a permis d'une part de mieux cerner ce phénomène jusque-là assez ignoré, et d'autre part nous l'espérons, de gagner en précision dans notre résolution numérique.