Paramétrisation de la dynamique de population de poches : modèle à deux rayons

JYG 2 mai 2025

Ce modèle décrit une population de wakes circulaires ayant tous la même hauteur, les mêmes profils de température et d'humidité et la même vitesse d'étalement, les rayons, quant à eux, pouvant prendre deux valeurs, selon que les poches sont alimentées par des colonnes convectives ou non (auquel cas, elles s'effondrent simplement). Il s'agit de représenter, à l'aide de ce schéma très simple, une population de poches d'âges et de tailles variées, dont certaines sont alimentées par des colonnes convectives pendant que d'autre sont simplement en train de s'effondrer. En outre ces poches peuvent entrer en collision ou fusionner. Il s'agit de la troisième version de ce modèle ; c'est une sophistication de la version précedente dans laquelle tous les wakes avaient la même taille.

0.1 Principes

- Les poches naissent à partir des CuNimb issus des cumulus $\longrightarrow$ taux de naissances B.
- Les poches meurent par effondrement lorsque la convection ne les alimente plus.
- Les poches disparaissent aussi à l'occasion des rencontres, soit que leur rencontre mène à une fusion ($\longrightarrow$ diminution du nombre de poches d'une unité) soit qu'elle mène à la création d'une nouvelle poche pendant que les deux autres meurent ($\longrightarrow$ diminution du nombre de poches d'une unité).
- Il y a **deux catégories de poches** : les poches actives (alimentées par des colonnes convectives) et les poches inactives, lesquelles s'effondrent. Chaque catégorie de poches est caractérisée par un rayon specifique : r_{A} pour les poches actives et r_{I} pour les poches inactives. Trois variables décrivent ces populations : D est la densité totale, A est la densité de poches actives et I la densité de poches inactives. On a évidemment $D = A + I$.
- Les processus de rencontre mènent à un changement de rayon des poches concernées. Comme le rayon des poches de notre modèle ne peut prendre que deux valeurs, ces changements discontinus locaux de rayons vont être représentés par une évolution continue des rayons moyens. Et, bien sûr, $\partial_t r_{\mathrm{A}}$ et $\partial_t r_{\mathrm{I}}$ seront différents de C_*.
- Il y a **trois types de rencontres** : entre deux poches inactives, entre deux poches actives et entre une poche active et une poche inactive. Les trois taux de rencontre par unité de surface seront désignés par $[I^2]_{col}$, $[A^2]_{col}$ et $[IA]_{col}$. Nous faisons l'hypothèse que les rencontres de type I^2 sont de nature collisionnelle : les deux poches entrant en collisions meurent alors qu'une nouvelle colonne convective apparaît engendrant une nouvelle poche active. Les rencontres de type A^2 et AI , au contraire, sont de nature fusionnelle, amenant à une nouvelle poche active à la place des deux poches incidentes.
- **La densite de poches actives** évolue sous l'effet des naissances, des morts (temps de vie τ_Aà paramétrer), des collisions I^2 (qui apportent chacune une nouvelle poche active) et des collisions A^2 (qui diminuent chacune le nombre de poches actives d'une

unité) :

$$\partial_t A \;=\; B \;-\; \frac{1}{\tau_A} A \;+\; [I^2]_{col} \;-\; [A^2]_{col} \tag{1}$$

– **La densité de poches inactives** évolue sous l'effet des morts des poches actives (lorsqu'une poche active meurt, elle devient une poche inactive), des morts des poches inactives (temps de vie τ_Ià paramétrer), des collisions I^2 (qui font chacune disparaître deux poches inactives) et des collisons IA (qui font chacune disparaître une poche inactive) :

$$\partial_t I \;=\; \frac{1}{\tau_A} A \;-\; \frac{1}{\tau_I} I \;-\; 2[I^2]_{col} \;-\; [IA]_{col} \tag{2}$$

– **La densité totale de poches** varie alors sous l'action des naissances, des effondrements de poches inactives et des collisions :

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{D-A}{\tau_I} \;-\left([A^2]_{col} + [I^2]_{col} + [IA]_{col}\right)$$

Mais $[A^2]_{col} + [I^2]_{col} + [IA]_{col}$ est égal au taux total de collisions, sans distinction du type de poche ; on l'écrira $[D^2]_{col}$:

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{D-A}{\tau_I} \;-[D^2]_{col} \tag{3}$$

– Pour estimer les taux de rencontre $[A^2]_{col}$, $[I^2]_{col}$ et $[IA]_{col}$ (et, par conséquent, $[D^2]_{col}$) nous nous plaçons dans l'hypothèse diluée.
Pour commencer nous considérons le cas des rencontres [AI]. Pour une poche active $\mathcal{A}$ de centre C_{A} et de rayon r_{A}, les poches inactives (de rayon r_{I} et de centre C_{I}) qui vont rencontrer $\mathcal{A}$ pendant l'intervalle de temps δt sont celles vérifiant les deux conditions :

1. elles n'ont pas de point commun avec $\mathcal{A}$ à l'instant initial, c'est-à-dire :

$$||\vec{C_{\mathrm{A}}C_{\mathrm{I}}}|| \;>\; r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}}$$

2. elles presentent un recouvrement non vide avec $\mathcal{A}$ après que les rayons ont cru de $C_* \delta t$:

$$||\vec{C_{\mathrm{A}}C_{\mathrm{I}}}|| \;\leq\; (r_{\mathrm{A}} + C_*\delta t) + (r_{\mathrm{I}} + C_*\delta t)$$

L'ensemble des centres des poches inactives qui vont rencontrer $\mathcal{A}$ pendant δt est donc la couronne de centre C_{A}, de rayon interieur $r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}}$ et de rayon extérieur $r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}} + 2C_*\delta t$. L'aire de cette couronne est approximativement $2\pi(r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}})2C_*\delta t$. Dans l'hypothèse diluée, le nombre de centres de poches inactives situès dans cette couronne est $4I\pi(r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}})C_*\delta t$. Et comme il y a A poches actives par unité de surface, le nombre $[IA]_{col}$ de rencontres [IA] par unité de surface et par unité de temps est :

$$[IA]_{col} \;=\; 4IA\pi(r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}})C_* \tag{4}$$

Le dénombrement des rencontres [AA] se fait de la même façon que le dénombrement des rencontres [IA], à ceci près que les poches sont indiscernables : la rencontre de deux poches actives $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ va être comptée deux fois, une première fois lorsque, considerant les poches qui vont rencontrer $\mathcal{A}$, on trouve $\mathcal{B}$ puis, lorsque, considerant les poches qui

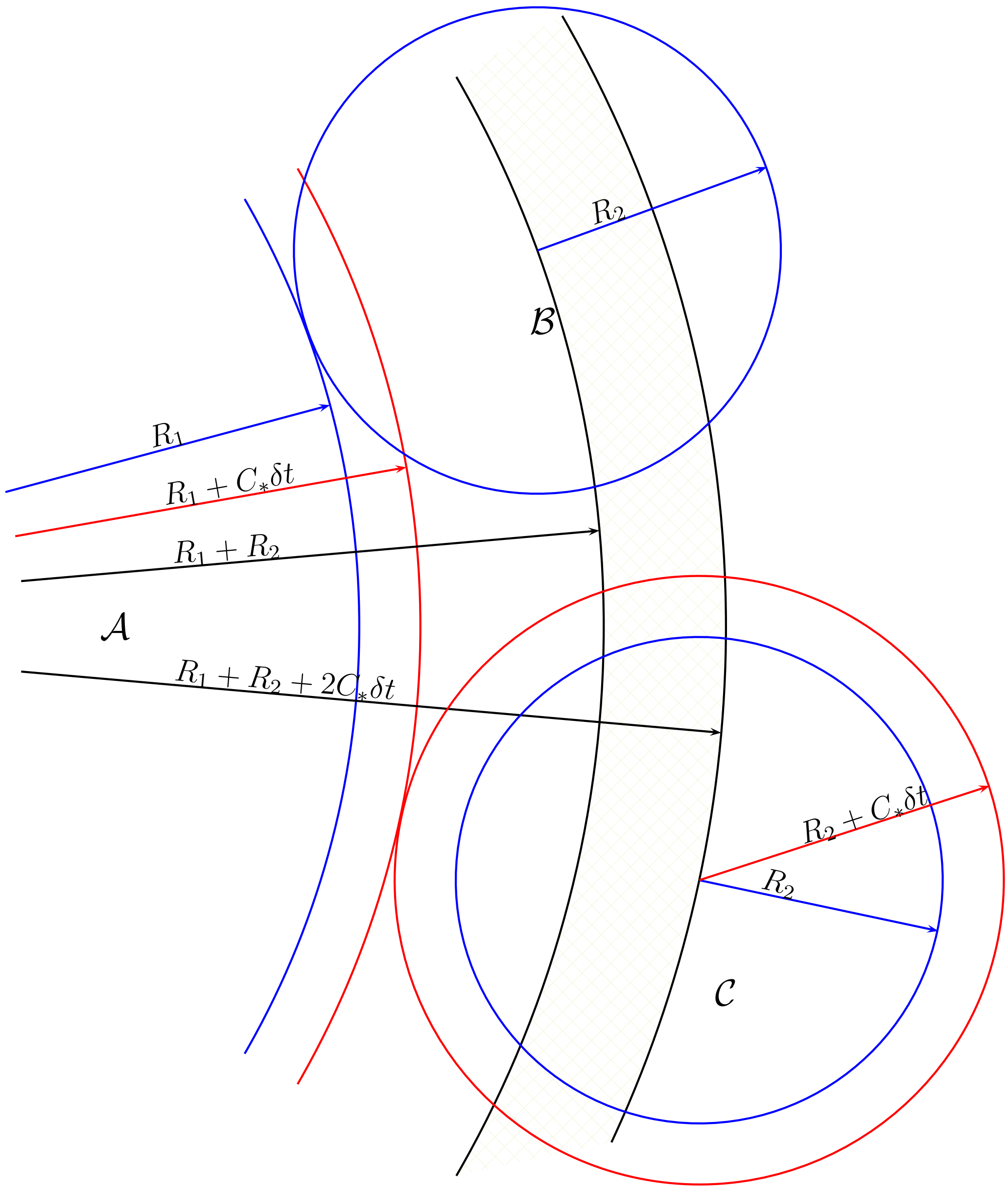

FIGURE 1 – Schéma de la couronne des centres des poches de rayon R_2 qui vont toucher la poche $\mathcal{A}$ de rayon R_1 pendant un intervalle de temps δt. La poche $\mathcal{A}$ est de rayon R_1 au debut de l'intervalle temporel (bord de $\mathcal{A}$ représenté en bleu) et de rayon $R_1 + C_*\delta t$ à la fin de l'intervalle (bord de $\mathcal{A}$ représenté en rouge). Les poches $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont de rayon R_2 au debut de l'intervalle temporel (bords dessinés en bleu) et de rayon $R_2 + C_*\delta t$ à la fin de l'intervalle (bords dessinés en rouge). $\mathcal{B}$ est la poche la plus proche de $\mathcal{A}$ rencontrant $\mathcal{A}$ pendant l'intervalle temporel ; la distance entre les centres de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{B}$ est $R_1 + R_2$. $\mathcal{C}$ est la poche la plus éloignée de $\mathcal{A}$ rencontrant $\mathcal{A}$ pendant l'intervalle temporel ; la distance entre les centres de $\mathcal{A}$ et de $\mathcal{C}$ est $R_1 + R_2 + 2C_*\delta t$. L'ensemble des centres des poches de rayon R_2 rencontrant $\mathcal{A}$ pendant δt est la couronne hachurée comprise entre les cercles concentriques avec $\mathcal{A}$ de rayons $R_1 + R_2$ et $R_1 + R_2 + 2C_*\delta t$. Son aire est $4\pi(R_1 + R_2)C_*\delta t$.

vont rencontrer $\mathcal{B}$, on trouve $\mathcal{A}$. Il faut donc diviser le résultat du dènombrement par deux :

$$[A^2]_{col} \;=\; 4A^2\pi r_{\mathrm{A}} C_* \tag{5}$$

De même :

$$[I^2]_{col} \;=\; 4I^2\pi r_{\mathrm{I}} C_* \tag{6}$$

Finalement le taux de rencontre $[D^2]_{col}$ s'écrit :

$$[D^2]_{col} \;=\; 4\pi C_*(r_{\mathrm{I}} I^2 + r_{\mathrm{A}} A^2 + (r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}})IA)$$

Mais $I^2 r_{\mathrm{I}} + A^2 r_{\mathrm{A}} + AI(r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}}) \;=\; (A+I)(Ar_{\mathrm{A}} + Ir_{\mathrm{I}})$. En notant que $A+I = D$ et que $Ar_{\mathrm{A}} + Ir_{\mathrm{I}} \;=\; D\overline{r}$, où $\overline{r}$ designe le rayon moyen, le terme général de collision s'ecrit :

$$[D^2]_{col} \;=\; 4\pi C_* D^2 \overline{r} \tag{7}$$

Les équation d'évolution de D et de A s'écrivent alors :

$$\partial_t D \;=\; B \;-\; \frac{I}{\tau_I} \;-\; 4\pi C_* D^2 \overline{r} \tag{8}$$

et :

$$\partial_t A \;=\; B \;-\; \frac{A}{\tau_A} \;+\; 4\pi C_*[I^2 r_{\mathrm{I}} - A^2 r_{\mathrm{A}}] \tag{9}$$

- **La fraction surfacique** σ_A couverte par les poches actives augmente par la naissance des poches (chaque nouvelle poche a une aire $a_0 \;=\; \pi r_0^2$, où r_0 est un paramètre), par les rencontres de type $[I^2]$ (chaque collision entraîne la création d'une poche active d'aire a_0), par les rencontres de type AI (chaque rencontre ajoute πr_{I}^2 à l'aire des poches actives, où r_{I} est le rayon des poches inactives) et par étalement ; elle diminue par inactivation des poches (chaque inactivation fait disparaitre une aire πr_{A}^2 où r_{A} est le rayon des poches actives) :

$$\partial_t \sigma_A \;=\; Ba_0 \;+\; [I^2]_{col} a_0 \;+\; \pi r_{\mathrm{I}}^2 [IA]_{col} \;+\; 2\pi r_{\mathrm{A}} A C_* \;-\; \frac{1}{\tau_A} A\pi r_A^2$$

Soit :

$$\partial_t \sigma_A \;=\; Ba_0 \;+\; 4\pi C_*(r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}})\sigma_I A \;+\; 4\pi C_* r_{\mathrm{I}} I^2 a_0 \;+\; 2\pi C_* r_{\mathrm{A}} A \;-\; \frac{\sigma_A}{\tau_A} \tag{10}$$

- **La fraction surfacique** σ_I couverte par les poches inactives augmente par l'inactivation des poches actives (chaque inactivation apporte une aire πr_{A}^2 aux poches inactives) et par étalement ; elle diminue par mort des poches (chaque mort fait disparaître une aire πr_{I}^2), par les rencontres de type [IA] (chaque rencontre entraîne la disparition d'une aire πr_{I}^2) et par les rencontres de type $[I^2]$ (chaque collision entraîne la disparition d'une aire $2\pi r_{\mathrm{I}}^2$) :

$$\partial_t \sigma_I \;=\; \frac{1}{\tau_A} A\pi r_{\mathrm{A}}^2 \;+\; 2\pi C_* r_{\mathrm{I}} I \;-\; \frac{1}{\tau_I} I\pi r_{\mathrm{I}}^2 \;-\; 2\pi r_{\mathrm{I}}^2 [I^2]_{col} \;-\; \pi r_{\mathrm{I}}^2 [IA]_{col} \tag{11}$$

En utilisant $\sigma_I \;=\; \pi r_{\mathrm{I}}^2 I$, il vient :

$$\partial_t \sigma_I \;=\; \frac{1}{\tau_A}\sigma_A \;+\; 2\pi C_* r_{\mathrm{I}} I \;-\; \frac{1}{\tau_I}\sigma_I \;-\; 4\pi C_*[2r_I \sigma_I I \;+\; (r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}})\sigma_I A] \tag{12}$$

– **La fraction surfacique totale** σ des poches est affectée par les rencontres de type I^2 : chaque collision entraîne la création d'une aire a_0 pendant que les deux poches incidentes disparaissent (disparition d'une aire $2\pi r_{\mathrm{I}}^2$). Les rencontres de type A^2 et AI, qui sont de type fusionnel, laissent au contraire la fraction σ invariante.
L'équation d'évolution de σ s'écrit alors :

$$\partial_t \sigma \;=\; Ba_0 \;-\; \frac{\sigma_I}{\tau_I} \;+\; 2\pi\overline{r}DC_* \;-\; [I^2]_{col}(2\pi r_{\mathrm{I}}^2 - a_0)$$

soit :

$$\partial_t \sigma \;=\; Ba_0 \;-\; \frac{\sigma_I}{\tau_I} \;+\; 2\pi\overline{r}DC_* \;-\; 4\pi C_* r_{\mathrm{I}} I^2(2\pi r_{\mathrm{I}}^2 - a_0) \tag{13}$$

– **Récapitulation.** Il faut chosir deux variables d'état parmis les densités A, I et D, et deux variables d'état parmis les fractions surfaciques σ_A, σ_I et σ. Nous choisissons A et D pour les densités et σ_A et σ pour les fractions surfaciques.
Les équations s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t D \;=\; B \;-\; \dfrac{I}{\tau_I} \;-\; 4\pi C_* D^2 \overline{r} \\[2ex] \partial_t A \;=\; B \;-\; \dfrac{A}{\tau_A} \;+\; 4\pi C_*[I^2 r_{\mathrm{I}} - A^2 r_{\mathrm{A}}] \\[2ex] \partial_t \sigma \;=\; Ba_0 \;-\; \dfrac{\sigma_I}{\tau_I} \;+\; 2\pi\overline{r}DC_* \;-\; 4\pi C_* r_{\mathrm{I}} I^2(2\pi r_{\mathrm{I}}^2 - a_0) \\[2ex] \partial_t \sigma_A \;=\; Ba_0 \;+\; 4\pi C_*(r_{\mathrm{A}} + r_{\mathrm{I}})\sigma_I A \;+\; 4\pi C_* r_{\mathrm{I}} I^2 a_0 \;+\; 2\pi C_* r_{\mathrm{A}} A \;-\; \dfrac{\sigma_A}{\tau_A} \end{cases} \tag{14}$$

et

$$\begin{cases} I \;=\; D \;-\; A \\[2ex] \sigma_I \;=\; \sigma \;-\; \sigma_A \\[2ex] \sigma_I \;=\; \pi r_{\mathrm{I}}^2 I \\[2ex] \sigma_A \;=\; \pi r_{\mathrm{A}}^2 A \end{cases} \tag{15}$$

– Les poches qui disparaissent par mort ou par collision contribuent au **détraînement**. Les naissances créent des zones (w) prises sur (x) : elles contribuent à **l'entraînement**.

0.2 Aspects techniques

0.2.1 Paramétrisation de τ_A

[A FAIRE]

0.2.2 Paramétrisation de τ_I

Considérons une poche inactive ayant pour rayon et hauteur initiales r_0 et h_0. En supposant que la poche s'effondre adiabatiquement en gardant un volume constant (en négligeant la variation de la masse volumique et en supposant la masse constante) on obtient (V est le volume de la poche) :

$$\left.\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{rcl} r & = & \sqrt{\dfrac{V}{\pi h}} \\ \\ \partial_t h & = & -2C_*\sqrt{\dfrac{\pi h^3}{V}} \end{array}\right. \\ \\ \left\{\begin{array}{rcl} \text{Wape} & = & \dfrac{1}{2}h\delta\theta_{surf} \\ \\ C_* & = & \sqrt{\text{Wape}} \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{C_*}{C_{*0}} = \sqrt{\dfrac{h}{h_0}} \end{array}\right\} \Longrightarrow \partial_t h \;=\; -2h^2\sqrt{\frac{\pi}{Vh_0}}C_{*0} \tag{16}$$

La formule de $\partial_t h$ s'intègre facilement. En exprimant tout en fonction de C_* on obtient :

$$(\frac{C_{*0}}{C_*})^2 \;=\; 1 \;+\; 2\frac{C_{*0}}{r_0}t \tag{17}$$

Je fais l'hypothèse que la poche est morte lorsque la vitesse d'expansion devient inférieure à une vitesse seuil C_{*t}. Cette vitesse seuil est atteinte au bout d'un temps t_l donné par :

$$(\frac{C_{*0}}{C_{*t}})^2 \;=\; 1 \;+\; 2\frac{C_{*0}}{r_0}t_l$$

ce qui donne :

$$t_l \;=\; \frac{r_0}{2C_{*0}}[(\frac{C_{*0}}{C_{*t}})^2 \;-\; 1] \tag{18}$$

Application : A chaque instant nous connaisons le rayon r et la vitesse d'expansion C_* de la poche représentative. Nous connaissons donc la durée t_l qu'il lui reste à vivre :

$$t_l \;=\; \frac{r}{2C_*}[(\frac{C_*}{C_{*t}})^2 \;-\; 1]$$

Supposant un régime permanent ($D-A$, r et C_* constants), le nombre de poches qui meurent dans l'intervalle [t, t+δt] est égal au nombre de poches inactives ayant un age compris entre t$_l$-δt et t$_l$, doit $(D \;-\; A)\frac{\delta t}{t_l}$. En prenant $\tau_I \;=\; t_l$ nous retrouvons le terme de mortalité de l'équation 8.