

Le but de cette note est de modéliser sommairement les propriétés et l'évolution d'un champ de poches froides se développant dans des conditions analogues à celle rencontrées au Sahel pendant la saison de mousson. Le cas tiré de l'expérience Hapex92 et ayant servi à mettre au point le modèle des Wakes fournit un exemple d'un tel champ de poches. On voit, dans les simulations réalisées avec Méso-NH (thèse d'Aïda Diongue, CD-Rom de simulations Méso-NH), d'abord apparaître une multitude de petites poches froides qui grossissent, puis fusionnent, donnant peu à peu une ou deux très grosses poches dont les fronts de rafales se propagent accompagnés du système convectif. On va donc essayer de construire un modèle d'évolution d'une population de poches froides, dans lequel les poches grossissent par étalement et fusionnent dès qu'elles entrent en contact.

## 1 Elaboration du modèle

Dans un modèle un peu "complet" de ce processus les poches se répartissent en fonction du rayon  $r$ . Les rayons des poches croissent par étalement avec une vitesse  $C_*$ . La rencontre entre deux poches mène à une poche de surface égale à la somme des surfaces des deux poches initiales ; éventuellement, la poche résultant de la coalescence peut rencontrer, au moment même de la coalescence, une troisième poche ; autrement dit, il peut y avoir des interactions à plus de deux poches. Notons que, dans un tel modèle, la croissance des rayons se fait à une vitesse imposée et le processus de coalescence est discontinu. Ceci ne sera plus vrai dans le modèle simple que nous allons considérer à la sous-section (1.2).

### 1.1 Evolution initiale de la densité

Nous commençons par considérer la phase initiale de croissance, c'est-à-dire celle où les rayons des poches sont très petits devant l'espacement moyen (noter l'équivalence entre  $\sigma_w \ll 1$  et  $r \ll \delta \simeq 1/\sqrt{D}$ ). Pendant cette phase, les poches ayant connu une coalescence sont rares, ce qui permet de négliger les poches connaissant plusieurs coalescences. Dans ces conditions, on peut considérer que les coalescences ont lieu entre poches ayant toutes le même rayon  $r$ .

Nous considérons donc une population de poches circulaires identiques (elles ont toutes le même rayon  $r$  et croissent toutes à la même vitesse), réparties de façon statistiquement homogène dans un plan infini avec une densité  $D$ . Nous nous limitons à un grand domaine  $(\Sigma)$  d'aire  $\Sigma_t$  (grand veut dire que  $D \Sigma_t \gg 1$ ), dans lequel nous supposons qu'il y a initialement  $N$  poches (avec  $N \simeq D \Sigma_t$ ).

La couverture surfacique des poches est :

$$\sigma_w = \pi r^2 \frac{N}{\Sigma_t}$$

Supposons que le rayon des poches croisse de  $r$  à  $r + \delta r$ , induisant  $\delta N$  coalescences ; simultanément le nombre de poches décroît de  $N$  à  $N - \delta N$ . Chacune des coalescence concerne deux poches dont la distance des centres est comprise entre  $2r$  et  $2(r + \delta r)$  (n'oublions pas que le rayon des poches est petit devant l'espacement, ce qui permet de négliger les coalescences à trois poches). Pour estimer leur nombre, considérons l'ensemble  $\mathcal{E}$  des couronnes  $[2r, 2(r + \delta r)]$  centrées sur chaque poche. Tout centre situé dans  $\mathcal{E}$  est associé à une poche impliquée dans une coalescence et, réciproquement, toute coalescence concerne deux poches dont les centres sont dans  $\mathcal{E}$ . Comme il y a deux centres par coalescence, le nombre de coalescences est égal à la moitié du nombre de centres situés dans  $\mathcal{E}$ . La fraction surfacique  $\delta\sigma_c$  couverte par  $\mathcal{E}$  est donnée par :

$$\delta\sigma_c = \frac{8\pi r \delta r N}{\Sigma_t}$$

On peut comparer  $\delta\sigma_c$  et la variation de  $\sigma_w$  :

$$\delta\sigma_w = \frac{2\pi r \delta r N}{\Sigma_t} = \frac{\delta\sigma_c}{4}$$

Le nombre de centres situés dans  $\mathcal{E}$  est, en moyenne,  $N \delta\sigma_c$ . Et donc le nombre de coalescences  $\delta N$  est donné par :

$$\delta N = \frac{1}{2} N \delta\sigma_c \quad (1)$$

d'où on tire :

$$\delta N = 2 N \delta\sigma_w$$

soit, sous forme différentielle :

$$dN = -2 N d\sigma_w$$

Ce qui s'intègre en :

$$N = N_0 e^{(-2\sigma_w)} \simeq N_0 (1 - 2\sigma_w) \quad (2)$$

ou, en terme de densités :

$$D = D_0 (1 - 2\sigma_w) \quad (3)$$

La densité de poches commencent donc par décroître en suivant une droite  $D = D_0 (1 - 2\sigma_w)$ . Ce résultat est valable en toute généralité au début du processus de croissance des poches. Mais les hypothèses ayant permis ce calcul deviennent rapidement fausses : (1) les poches présentent rapidement un spectre de rayons (ce qui mène aux formules plus générales  $\sigma_w = \pi N \langle r^2 \rangle / \Sigma_t$  et  $\delta\sigma_c = 8\pi N \langle r \rangle \delta r / \Sigma_t$ ) ; (2) Il va y avoir des interactions à plusieurs poches et on n'aura plus  $\delta N = 1/2 N \delta\sigma_c$ .

## 1.2 Evolution de la densité dans un modèle simple de poches toutes identiques

On considère une population de poches circulaires identiques (elles ont toutes le même rayon  $r$  et croissent toutes à la même vitesse), réparties de façon statistiquement homogène

dans un plan infini avec une densité  $D$ . On se limite à un grand domaine ( $\Sigma$ ) d'aire  $\Sigma_t$  (grand veut dire que  $D \Sigma_t \gg 1$ ), et on va considérer la limite  $\Sigma_t \rightarrow \infty$ .

On suppose que les poches s'étalent et que, dès qu'il y a contact entre deux poches, celles-ci fusionnent en une seule poche. Le nombre total de poches dans le domaine ( $\Sigma$ ) décroît alors d'une unité et toutes les poches voient leur rayon augmenter de façon que l'aire  $\Sigma_w$  couverte par les poches soit conservée. Comme il y a un grand nombre de poches, il y a des fusions en permanence, ce qui fait que le rayon des poches croît continuellement à la fois par étalement et par fusion : la vitesse de croissance  $dr/dt$  dépend alors de la densité de poches ; ce n'est plus un forçage comme dans le modèle plus complet. On suppose en outre qu'il n'y a que des interactions à deux poches.

On part donc de  $N$  poches réparties de façon homogène dans le domaine d'aire  $\Sigma_t$  ( $N \simeq D \Sigma_t$ ). Au cours de l'évolution de ce champ de poches les trois variables  $r$ ,  $N$  et  $\sigma_w$  subissent des variations reliées par deux relations. D'une part la variation du rayon  $\delta r$  et le nombre de coalescences  $\delta N$  sont reliés par l'Eq. (1) :

$$\delta N = \frac{1}{2} N \frac{8\pi r \delta r}{\Sigma_t} \quad (4)$$

D'autre part la différenciation de la relation  $\sigma_w = \pi r^2 N / \Sigma_t$  donne :

$$\delta \sigma_w = 2\pi r \delta r \frac{N}{\Sigma_t} - \pi r^2 \frac{\delta N}{\Sigma_t}$$

En substituant dans cette dernière équation l'expression de  $\delta r$  issue de l'Eq. (4) on obtient :

$$\delta \sigma_w = \frac{\delta N}{N} \left( \frac{1}{2} - \sigma_w \right)$$

soit, sous forme différentielle :

$$\frac{dN}{N} = - \frac{d\sigma_w}{\frac{1}{2} - \sigma_w} \quad (5)$$

ce qui s'intègre en :

$$N = N_0 (1 - 2\sigma_w) \quad (6)$$

On obtient donc le résultat remarquable que la couverture surfacique ne peut pas dépasser 0.5 et que le nombre de poches tend vers zéro lorsque  $\sigma_w \rightarrow 0.5$ . Comme  $N$  est supposé grand, ceci signifie que ce modèle n'est plus applicable au voisinage de  $\sigma_w = 0.5$ , c'est-à-dire que l'on ne peut pas supposer une répartition homogène de poches couvrant la moitié de la surface. Nous interpréterons ceci en disant qu'à ce moment là il y a un changement de phase dans lequel les poches à l'échelle considérée fusionnent, engendrant un champ de poches d'une échelle plus grande. Nous détaillerons et développerons ce point dans les sous-sections 1.4 et 1.5. Mais, avant d'aller plus loin, nous allons détailler un peu ce qui se passe au voisinage de  $\sigma_w = 0.5$ .

### Evolution de la vitesse de croissance des poches

Les propriétés que nous venons de mettre en évidence sont purement géométriques : tout champ homogène d'objet circulaires qui grossissent va coaguler complètement lorsque la couverture spatiale va approcher 0.5. Nous allons maintenant préciser les aspects dynamiques.

De l'Eq. (4) on déduit :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{\Sigma_t}{4N^2 \pi r} \frac{dN}{dt}$$

D'où, en utilisant l'équation (5) :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\Sigma_t}{4N \pi r} \frac{d\sigma_w/dt}{\sigma_w - 1/2}$$

Par ailleurs, comme on suppose que la couverture surfacique des poches ne croît que par étalement (les coalescences se faisant à surface constante), on a :

$$\frac{d\sigma_w}{dt} = 2\pi r C_* \frac{N}{\Sigma_t}$$

En substituant cette expression de  $d\sigma_w/dt$  dans l'expression précédente de  $dr/dt$ , on obtient finalement :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{C_*}{1 - 2\sigma_w} \quad (7)$$

On voit que, pour une vitesse  $C_*$  fixée la vitesse de croissance du rayon tend vers l'infini comme  $(1 - 2\sigma_w)^{-1}$  lorsque  $\sigma_w \rightarrow 1/2$ .

### Evolution de la couverture spatiale des poches $\sigma_w$

En substituant l'expression (3) de la densité  $D$  dans l'équation d'évolution de la fraction surfacique des poches ( $\partial_t \sigma_w = 2 C_* \sqrt{\pi D \sigma_w}$ ), on obtient une équation d'évolution ne contenant que  $\sigma_w$  :

$$\partial_t \sigma_w = 2 C_* \sqrt{\pi \sigma_w D_0 (1 - 2 \sigma_w)} \quad (8)$$

Cette équation différentielle s'intègre en :

$$\sigma_w(t) = \frac{1}{2} \sin^2[C_* \sqrt{2 \pi D_0} t + A \sin(\sqrt{2 \sigma_0})] \quad (9)$$

où  $\sigma_0$  désigne la fraction surfacique initiale.

En prenant  $\sigma_0 = 0$ , on obtient l'intervalle temporel maximal pendant lequel un ensemble de poches de surface initiale nulle peut évoluer :

$$t_{max} = \frac{1}{C_*} \sqrt{\frac{\pi}{8 D_0}} \quad (10)$$

ce qui permet d'écrire  $\sigma_w$  :

$$\sigma_w(t) = \frac{1}{2} \sin^2\left[\frac{\pi}{2} \frac{t}{t_{max}}\right] \quad (11)$$

le comportement de  $\sigma_w$  est représenté sur la figure 1. On notera les deux tangentes horizontales en 0 et en  $t_{max}$  : la fraction surfacique varie très lentement au démarrage et à la fin, pendant que la vitesse de variation du rayon croît de  $C_*$  à l'infini.

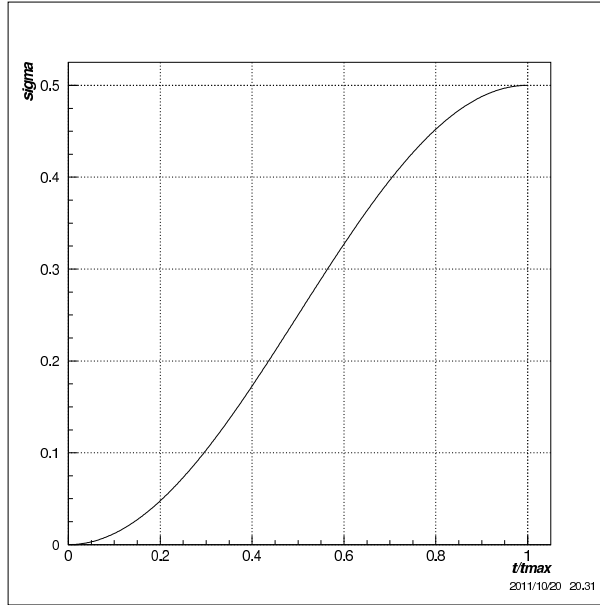


FIG. 1 – Comportement de la fraction surfacique  $\sigma_w$  en fonction du temps depuis la naissance de poches ponctuelles jusqu'à la coalescence complète pour  $\sigma_w = 0.5$

### 1.3 Evolution de la densité de poches dans un modèle de poches de rayons variés

Nous n'avons pas encore trouvé de façon de résoudre ce problème. Nous ne pouvons qu'encourager ceux qui se sentent motivés à partir à la recherche de la solution. En attendant, nous avons réalisé des simulations par Monte-Carlo pour voir comment évoluait la population de poches. Le résultat est que la densité  $D$  et la couverture surfacique continuent à obéir à l'Eq. (3), sauf au voisinage immédiat de  $\sigma_w = 0.5$  où la courbe  $(\sigma_w, D)$  s'infléchit et présente une petite queue au-delà de  $\sigma_w = 0.5$ .

La conclusion de cette étude par Monte-Carlo est que le modèle simple à poches identiques présente un comportement très proche du modèle complet, même si les raisons de cette qualité ne sont pas bien comprises. En conséquence, nous allons bâtir le modèle de dynamique de population de poches sur cette approximation des poches identiques.

### 1.4 Analyse des ordres de grandeur des tailles des objets considérés et de leurs densités spatiales

Lorsqu'il y a un changement d'échelle au voisinage de  $\sigma_w = 1/2$ , la nouvelle échelle est donnée par un ensemble de mécanismes étrangers au système de poches ; cette nouvelle échelle doit donc être considérée comme un forçage pour le système de poches. On notera qu'il peut s'agir non seulement d'un changement d'échelles mais aussi d'un changement de dimension : on peut passer d'une répartition homogène sur un plan à une répartition homogène sur une droite. Nous allons essayer de déterminer quelles sont les échelles pertinentes (et les dimensions associées) et quelle est la sensibilité du système à ces échelles.

Nous allons considérer que ces échelles sont déterminées par les tailles des objets impliqués dans les processus convectifs.

- Plus petite échelle spatiale (homogène 2D) = échelle des précipitations convectives = **100 m à 1 km**.
- Échelle suivante = échelle des colonnes convectives = **10 km** (peut être homogène 2D ou 1D).
- Échelle suivante = échelle des enclumes et des pluies stratiformes (et des lignes de grains et des MCS) = **100 km** (homogène 2D).
- Échelle suivante = échelle des amas de MCS (et des ondes d'Est) = **1000 km**. Peut être homogène 2D ou 1D (cas des ondes d'Est par exemple).

On constate que les tailles d'objets caractéristiques varient d'un facteur environ 10 d'une échelle à l'autre, ce qui correspond, pour une même couverture spatiale, à une variation de densité d'un facteur 100 (puisque  $\sigma_w = \pi r^2 D$ ).

## 1.5 Récapitulation

Nous allons donc décrire une population de poches toutes identiques, dont la densité varie continuellement selon la loi  $D = D_0(1 - 2\sigma_w)$  tant que la fraction surfacique  $\sigma_w$  n'est pas trop proche de 1/2, puis qui subit une discontinuité (changement d'échelle) lorsque  $\sigma_w$  atteint une valeur seuil  $\sigma_1$  proche de 1/2 et plus petite que 1/2. Comme annoncé précédemment, la séquence des échelles doit être donnée. Nous choisissons de dire que l'échelle change d'un facteur 10 d'une période de coalescence continue à l'autre. Il faut aussi spécifier comment se fait la transition. Nous choisissons d'imposer que le rayon varie continuellement. L'image sous-jacente est esquissée dans la figure 2 où on a représenté deux échelles. L'idée est que, tant que les poches de l'échelle la plus fine n'ont pas fusionné, on peut les traiter comme si leur population occupait tout l'espace avec une densité statistiquement homogène  $D$ , puis que, quand leur couverture s'approche de 0.5, on considère que chaque petit paquet de poches a complètement fusionné, ce qui a engendré une nouvelle population de poches distribuées selon une densité  $D/100$ , chaque poche de la nouvelle population résultant de la coalescence d'un petit paquet de la population initiale. Les équations d'évolution pendant chaque phase régulière s'écrivent :

$$\begin{cases} \partial_t \sigma_w &= 2\pi r C_* D \\ D &= D_0(1 - 2\sigma_w) \\ \sigma_w &= \pi r^2 D \end{cases} \quad (12)$$

où la densité  $D_0$  caractérise l'échelle courante; la densité initiale (avant coalescence) est égale à  $D_0(1 - 2\sigma_0)$  et la densité finale (avant changement d'échelle) à  $D_0(1 - 2\sigma_1)$ .

### Détermination du saut de densité lors du changement d'échelle

Des deux dernières équations on tire une relation entre  $r$  et  $\sigma_w$  valable à chaque instant :

$$r^2 = \frac{\sigma_w}{\pi D_0 (1 - 2\sigma_w)} \quad (13)$$

Si on dit que chaque phase régulière commence avec  $\sigma_w = \sigma_0 (\simeq 0.05)$  et finit avec  $\sigma_w = \sigma_1 (\simeq 0.45)$  et que la transition de phase fait passer de  $D_0(1 - 2\sigma_1)$  à  $D'_0(1 - 2\sigma_0)$ , alors la

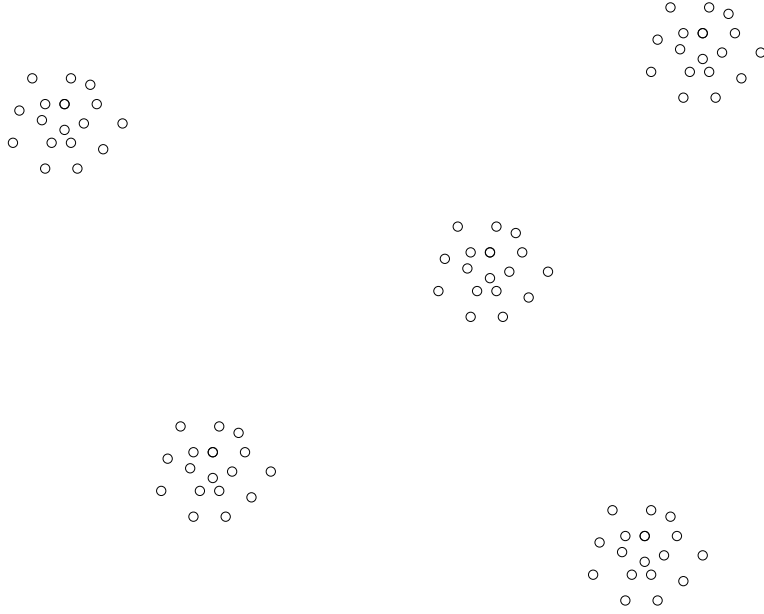


FIG. 2 – Esquisse d’une population de poches distribuée selon deux échelles spatiales, avec un facteur environ 100 entre les deux densités

continuité des rayons implique :

$$\frac{\sigma_1}{\pi D_0 (1 - 2\sigma_1)} = \frac{\sigma_0}{\pi D'_0 (1 - 2\sigma_0)} \quad (14)$$

D’où :

$$\frac{D'_0}{D_0} = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \frac{1 - 2\sigma_1}{1 - 2\sigma_0} \quad (15)$$

On va désigner par  $\mu^2$  le facteur multiplicatif décrivant le saut de densité lors de chaque changement de phase. On voit que  $\mu^2$  est connu une fois que  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  sont donnés :

$$\mu^2 = \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \frac{1 - 2\sigma_1}{1 - 2\sigma_0}$$

Pour simplifier les calculs, nous allons faire le choix que  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  sont symétriques par rapport à 1/4 (Nous n’avons pas analysé le rôle du degré de liberté supplémentaire que représenterait une dissymétrie entre  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  et laissons cette question ouverte). Dans ces conditions on peut facilement démontrer les relations suivantes :

$$\begin{aligned} 1 - 2\sigma_0 &= 2\sigma_1 \quad \text{et} \quad 1 - 2\sigma_1 = 2\sigma_0 \\ \mu &= \frac{\sigma_0}{\sigma_1} \\ \sigma_0 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu} \\ \sigma_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \mu} \end{aligned} \quad (16)$$

Par exemple, pour  $\mu = 0.1$ , on a approximativement  $\sigma_0 = 0.045$  et  $\sigma_1 = 0.455$ . Le rapport entre les densités finales et initiales pour une même valeur de  $D_0$  est alors  $(1 - 2\sigma_1)/(1 -$

$2\sigma_0) = \sigma_0/\sigma_1 = \mu = 0.1$ . Il y a alors une décroissance de la densité d'un facteur  $1/\mu = 10$  par coalescence continue pendant que  $\sigma_w$  croît de  $\sigma_0$  à  $\sigma_1$ , puis une variation brutale encore d'un facteur  $1/\mu = 10$  lors du changement d'échelle quand  $\sigma_w$  retombe de  $\sigma_1$  à  $\sigma_0$ .

## Formulation mathématique

La description élémentaire du processus comporte d'abord une évolution régulière de  $\sigma_w$  (obéissant aux équations(12) et fonction de  $D_0$ ) tant que  $\sigma_w$  croît de  $\sigma_0$  à  $\sigma_1$ . Ensuite, lorsque la fraction surfacique  $\sigma_w$  atteint  $\sigma_1$ , elle saute brutalement à  $\sigma_0$ ; simultanément la densité de poches  $D_0$  est multipliée par  $\mu$ . On pourrait ainsi envisager de décrire le système de poches à l'aide de deux variables d'état  $\sigma_w(t)$  et  $D_0(t)$ ,  $\sigma_w$  et  $D_0$  suivant respectivement une évolution conforme à (12) et une évolution constante pendant les phases régulières, des discontinuités survenant lorsque  $\sigma_w = \sigma_1$ , auxquels cas,  $\sigma_w$  saute de  $\sigma_1$  à  $\sigma_0$  et  $D_0$  est multipliée par  $\mu^2$ . Cependant la formulation mathématique du comportement d'une fonction discontinue en chaque point où elle atteint sa borne supérieure n'est pas triviale. Pour obtenir une formulation assez simple, nous allons introduire, à la place des variables d'état  $\sigma_w$  et  $D_0$ , une nouvelle variable d'état  $\tilde{\sigma}$  croissant comme  $\sigma_w$  dans les phases régulières et ne présentant aucune discontinuité ( $\tilde{\sigma}$  est toujours croissante). Cette fonction, que nous allons appeler pseudo-fraction surfacique, obéit donc simplement à l'équation :

$$\partial_t \tilde{\sigma} = 2\pi r C_* D$$

Le point important est que la différence entre  $\tilde{\sigma}(t)$  et  $\sigma_w(t)$  est une fonction en escalier  $S(\tilde{\sigma})$  (voir Fig. 3) ne dépendant que de  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma} - \sigma_w &= (\sigma_1 - \sigma_0) S(\tilde{\sigma}) \\ S(\tilde{\sigma}) &= \sum_{i=1}^{\infty} \Upsilon[\tilde{\sigma} - \sigma_0 - i(\sigma_1 - \sigma_0)] \end{cases} \quad (17)$$

où  $\Upsilon$  désigne la fonction de Heavyside :  $\Upsilon(x) = 0$  pour  $x < 0$  et  $\Upsilon(x) = 1$  pour  $x > 0$ .

Ainsi l'évolution du système peut être décrite à l'aide de l'évolution régulière de la seule variable d'état  $\tilde{\sigma}$ , les discontinuités apparaissant dans les expressions de  $\sigma_w$  et  $D_0$  en fonction de  $\tilde{\sigma}$ .

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire le modèle de dynamique de population.

## 2 Le modèle

Les paramètres du modèle sont :

- $D_{00}$  = densité initiale (lors de l'apparition initiale des poches)
- $\mu$  = coefficient multiplicatif de changement d'échelle

d'où on tire :

- $\sigma_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\mu}{1 + \mu}$  = fraction surfacique initiale (lors de l'apparition initiale des poches et lors des changements d'échelle).



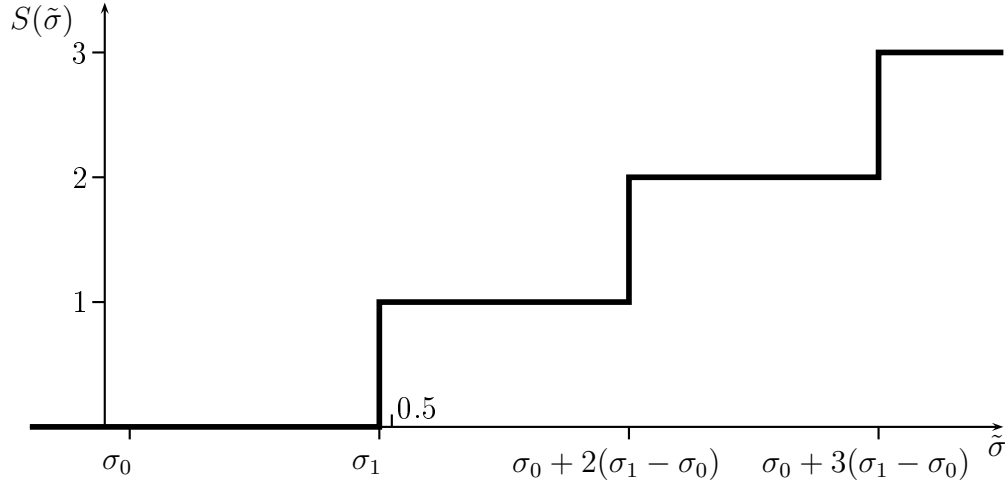


FIG. 3 – La fonction en escalier  $S(\tilde{\sigma})$

–  $\sigma_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\mu}$  = fraction surfacique maximale.

La variable d'état est la pseudo-fraction surfacique  $\tilde{\sigma}$ , qui croît continuellement au même rythme que  $\sigma_w$ , mais n'en suit pas les discontinuités.

## 2.1 Equations d'évolution

Conditions initiales :

$$\tilde{\sigma} = \sigma_0 \quad (18)$$

Equations d'évolution :

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\sigma} &= 2\pi r C_* D \\ \sigma_w &= \tilde{\sigma} + (\sigma_0 - \sigma_1) S(\tilde{\sigma}) \\ D_0 &= D_{00} \mu^{2S(\tilde{\sigma})} \\ D &= (1 - 2\sigma_w) D_0 \end{cases} \quad (19)$$

Avec cette formulation, le degré d'agrégation de la convection apparaît explicitement par la valeur de la fonction  $s = S(\tilde{\sigma})$ , laquelle donne le nombre de changements de phases qu'a connu le système convectif depuis sa naissance. Ainsi  $\tilde{\sigma}$  contient toute l'information sur le degré d'organisation de la convection.

## 2.2 Propriétés

Le but de cette sous-section est de déterminer les caractéristiques des populations de poches décrites par un tel modèle et, en particulier, de donner des ordres de grandeurs. Pour commencer nous allons préciser l'image présentée dans la Fig. 2 et déterminer les nombres de poches par paquet et les tailles géométriques des paquets. Ensuite, nous déterminerons les temps caractéristiques impliqués par le modèle, ce qui permettra de fixer les contours de ce qui est pertinent pour un modèle de climat. Toutes ces analyses sont faites dans l'idée que le paramètre de changement d'échelle  $\mu$  est de l'ordre de  $1/10$ .

## Rayons minimal et maximal entre deux changements d'échelle

On considère donc une phase d'évolution régulière où  $S(\tilde{\sigma}) = s = \text{constante}$ . La densité initiale de poches est  $D_0 = D_{00}(1 - 2\sigma_0)\mu^{2s} \simeq D_{00}\mu^{2s}$  et la densité finale  $D_1 = D_{00}(1 - 2\sigma_1)\mu^{2s} \simeq D_{00}\mu^{(2s+1)}$ . Par conséquent, chaque poche à la fin de la phase considérée résulte, en moyenne, de la coalescence de  $D_0/D_1$  poches, c'est-à-dire de  $1/\mu$  poches, indépendant de  $s$ . Ainsi, dans la Fig. 2, chaque paquet est composé d'environ 10 poches.

La surface initiale  $\Sigma_0$  occupée par ce paquet de  $1/\mu$  poches est  $\Sigma_0 = \frac{1}{D_0(1 - 2\sigma_0)\mu}$ . A la fin de la phase d'évolution régulière, le paquet est devenu une seule poche de surface  $\Sigma_1 = \pi r_1^2 = \frac{\sigma_1}{\pi D_0(1 - 2\sigma_1)} = \frac{1}{\pi D_0\mu}$ . Le rapport des deux surfaces  $\frac{\Sigma_1}{\Sigma_0} = \frac{D_0\sigma_1\mu}{\pi D_0\mu} \simeq \frac{1}{2\pi}$  est indépendant de  $s$  et correspond à une contraction du rayon de l'espace occupé par les poches d'un facteur 0.4.

Dans le passage de la phase  $s$  à la phase  $s + 1$ , la densité  $D_0$  est multipliée par un facteur  $\mu^2$  et donc l'espacement moyen entre poches par un facteur  $1/\mu$ . Ainsi, dans la Fig. 2 l'espacement entre les paquets est environ 10 fois celui entre les poches d'un même paquet.

On constate que la répartition spatiale initiale des poches est très fortement contrainte par le modèle. Une fois le paramètre  $\mu$  et la densité  $D_{00}$  choisies, tous les espacements, rayons et dispositions spatiales sont fixées, à toutes les échelles. Cette rigidité traduit le caractère très caricatural du modèle. Heureusement, nous allons voir que seuls un ou deux changements d'échelle peuvent être pertinents.

## Durée entre deux changements d'échelle

L'Eq. (10) fournit une estimation de la durée d'une phase régulière. Exprimée en fonction de  $s = S(\tilde{\sigma})$  la durée  $\tau$  s'écrit :

$$\tau = \frac{1}{C_*} \sqrt{\frac{\pi}{8 D_{00}}} \mu^{-s} \quad (20)$$

Pour  $C_* = 15 \text{ m/s}$  et  $D_{00} = 10^{-8} \text{ m}^{-2}$ , on obtient  $\tau \simeq 420 \mu^{-s}$  soit environ 7 minutes, 1h15, 12h, pour  $s = 0, 1, 2$ , respectivement. On constate que la première phase peut être omise pour une paramétrisation de modèle de climat. On commencera donc avec une densité primitive  $D_{00}$  de l'ordre de  $10^{-10} \text{ m}^{-2}$  qui donnera une évolution continue pendant une ou deux heures et une transition vers une densité de l'ordre de  $10^{-12} \text{ m}^{-2}$  qui donnera une évolution régulière d'environ une demi-journée.