

Manipulation simulant une tornade : calcul des pressions

TIPE Cyclone 2 juillet 2019

Structure générale

Sur la figure 1 est représenté le circuit parcouru par le fluide. Le fluide émerge de l'extracteur à une pression p_1 . Dans la conduite, les pertes de charge et les changements de section amènent le fluide à une pression p_2 lorsqu'il arrive dans le volume cyclonique. Le fluide entre dans le volume avec une vitesse tangentielle v_2 ; ce jet induit un écoulement turbulent en rotation plus ou moins solide où la pression s'uniformise à la valeur p_3 . Sous la bouche d'entrée de l'extracteur (rayon 8 cm) se forme un écoulement ascendant dans lequel se développe un tourbillon. Les très grandes vitesses atteintes par le fluide dans le tourbillon, amènent à une pression p_4 . Finalement, l'extracteur fait passer le fluide de la pression p_4 à la pression $p_1 > p_4$.

Dans le tourbillon, l'extracteur et la conduite, le débit de masse est le même. On le dénotera D_M .

Le but de cette note est d'écrire les relations existants entre ces diverses pressions, d'en déduire le débit de masse D_M et la chute de pression $p_3 - p_4$ dans le tourbillon.

On désigne par S_1 et S_2 les sections de la conduite à ses deux extrémités et par S_4 la section de la bouche d'entrée dans l'extracteur.

Equations de la pression

Equation de l'extracteur (type CK de Unelvent)

L'équation de l'extracteur relie le débit massique D_M traversant l'extracteur et le différentiel de pression δp entre sortie et entrée de l'extracteur. Son graphe est approximativement un segment de droite, allant de $D_M = D_{M0}$ pour $\delta p = 0$ à $D_M = 0$ pour $\delta p = \delta p_0$:

$$\frac{D_M}{D_{M0}} + \frac{\delta p}{\delta p_0} = 1 \quad (1)$$

où D_{M0} et δp_0 sont les valeurs maximales du débit et du différentiel de pression.

On a :

$$p_1 - p_4 = \delta p \quad (2)$$

Equations de la conduite

Conservation du débit :

$$D_M = S_1 \rho v_1 = S_2 \rho v_2 \quad (3)$$

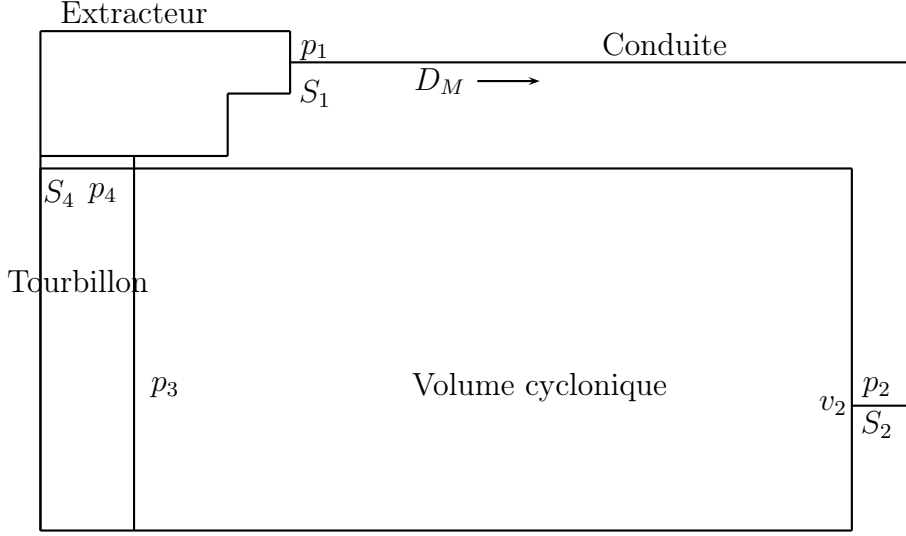


FIGURE 1 – Schéma de la boucle fluide

Equation de Bernouilli (en négligeant les pertes de charge) :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{1}{2}v_1^2 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{1}{2}v_2^2 \quad (4)$$

En substituant aux vitesses leurs expressions en fonction de D_M on obtient :

$$p_2 = p_1 + \frac{D_M^2}{2\rho} \left(\frac{1}{S_1^2} - \frac{1}{S_2^2} \right) \quad (5)$$

Equations dans le volume cyclonique

On suppose que le fluide entre tangentiellement à la paroi circulaire externe avec la vitesse v_2 et que ce jet induit un écoulement turbulent en rotation plus ou moins solide où la pression s'uniformise à la valeur p_3 :

$$p_3 = p_2 + \alpha \frac{D_M^2}{\rho S_2^2} \quad (6)$$

Le paramètre α traduit l'effet de la dissipation dans l'écoulement turbulent : il est supérieur ou égal à 1/2 et vaut 1/2 en l'absence de turbulence (équation de Bernouilli). Noter que, du fait que la pression p_2 est inférieure à p_3 , les forces de pression vont exercer un couple négatif sur le fluide intérieur à la cavité (alors que le jet émergeant en S_2 apporte un moment cinétique positif).

Equation dans le tourbillon axial

On suppose que le tourbillon axial obéit au modèle du tourbillon stationnaire dans un fluide de vitesse verticale horizontalement homogène croissant linéairement en fonction de l'altitude. Alors la pression moyenne sur la bouche d'entrée de l'extracteur s'écrit (voir la démonstration dans l'appendice) :

$$p_4 = p_3 - \frac{\rho\pi L_{out}^2}{S_4 D_M^2} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{D_M}{4\pi\nu\rho h}\right) + \beta \right] \quad (7)$$

où β est un coefficient calculé numériquement en intégrant l'équation de la pression ($dp/dr = \frac{\rho v^2}{r}$) et en moyennant la pression sur le disque de rayon R_4 (lequel est supposé plus grand que la zone où les effets visqueux se font sentir) . On trouve : $\beta \simeq 0.19$.

Bilan de moment cinétique

Il s'agit d'exprimer le terme L_{out} figurant dans l'équation (7). Pour cela nous écrivons l'équation de bilan du moment cinétique total L_{tot} , par rapport à l'axe de la cavité, du fluide dans la cavité ;

$$\frac{dL_{tot}}{dt} = L_{in} + \Gamma_n + \Gamma_t - L_{out} \quad (8)$$

où :

- L_{in} est le moment cinétique apporté par le jet entrant dans la cavité (moment cinétique massique $R_c v_2$ transporté par le flux de masse D_M , R_c étant le rayon de la cavité). :

$$\begin{aligned} L_{in} &= D_M(R_c v_2) \\ &= \frac{D_M^2 R_c}{\rho S_2} \end{aligned} \quad (9)$$

- Γ_n est le couple exercé sur le fluide intérieur à la cavité par les forces normales aux parois. Nous supposons que ce couple est essentiellement dû à la dépression p_2 à l'entrée S_2 : la force est $(p_2 - p_3)S_2$; le couple exercé est :

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= (p_2 - p_3)S_2 R_c \\ &= -\alpha \frac{D_M^2 R_c}{\rho S_2} \end{aligned} \quad (10)$$

- Γ_t est le couple exercé par les forces de frottement à la paroi cylindrique de la cavité. Pour estimer les forces de frottement il est nécessaire d'estimer, d'une part, une vitesse caractéristique au voisinage de la paroi et, d'autre part, l'épaisseur de la couche limite, ce qui demande à son tour l'utilisation d'une longueur caractéristique. Ces deux paramètres sont un peu arbitraires. Nous avons choisi $v_2/2$ comme vitesse caractéristique et $2R_c$ comme longueur caractéristique. Afin de représenter le caractère arbitraire de ces grandeurs caractéristiques, nous avons introduit un coefficient multiplicatif C_{Γ_t} que nous ferons varier entre 0.5 et 1.5 lorsque nous calculerons le débit :

$$\Gamma_t = -C_{\Gamma_t} \pi h \sqrt{\frac{\nu}{4\rho} \left(\frac{D_M R_c}{S_2} \right)^3} \quad (11)$$

Nous supposons maintenant que le fluide de la cavité atteint un régime stationnaire. Alors :

$$\begin{aligned} L_{out} &= L_{in} + \Gamma_n + \Gamma_t \\ &= L_{in}(1 - \alpha) + \Gamma_t \end{aligned} \quad (12)$$

Résolution : équation en D_M

En sommant les équation de pression (2, 5, 6 et 7) on obtient une équation où tous les termes de pression ont disparu. Afin de manipuler des termes de dimension comparable, on pose $X = D_M/D_{M0}$ (X peut varier entre 0 et 1). L'équation s'écrit :

$$0 = \delta p_0(1 - X) + X^2 \frac{D_{M0}^2}{\rho} \left[\frac{1}{2S_1^2} + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{S_2^2} \right] - X^{-2} \frac{\rho\pi}{S_4} \frac{L_{out}^2}{D_{M0}^2} \left[\frac{1}{2} \ln\left(\frac{XD_{M0}}{4\pi\nu\rho h}\right) + \beta \right] \quad (13)$$

où on a utilisé l'expression de δp donnée par l'équation (1) et où :

$$L_{out} = L_{in}(1 - \alpha) + \Gamma_t \quad (14)$$

avec :

$$L_{in} = X^2 \frac{D_{M0}^2 R_c}{\rho S_2} \quad (15)$$

et :

$$\Gamma_t = -C_{\Gamma_t} X^{3/2} \pi h \sqrt{\frac{\nu}{4\rho} \left(\frac{D_{M0} R_c}{S_2}\right)^3} \quad (16)$$

Pour résoudre l'équation (13) nous l'écrivons sous la forme $0 = f(X)$ et nous traçons le graphe de la fonction $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et cherchons graphiquement les intersections avec 0.

Comparaison aux observations

Valeurs des paramètres :

Masse volumique	ρ	=	1.3 kg/m^3
Viscosité moléculaire	ν	=	$1.5 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$
Viscosité turbulente dans le tourbillon	ν_t	=	ν
Constante pour la dépression tourbillonnaire	β	=	0.19
Section à la sortie de l'extracteur	s_1	=	$\pi/4. \times 10^{-2} \text{ m}^2$
Section à l'entrée dans la cavité	s_2	=	$0.31 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
Section à l'entrée de l'extracteur	s_4	=	$\pi \times 0.64 \times 10^{-2} \text{ m}^2$
Hauteur de la cavité	h	=	0.5 m
Écart de pression maximum de l'extracteur	δp_0	=	$300. \text{ Pa}$
Débit maximum de l'extracteur	D_{M0}	=	0.1 kg/s
Rayon de la cavité	R_c	=	0.6 m

Les figures suivantes représentent la courbe $f(X)$ pour diverses valeurs de α (0.5, 0.6, 0.7) et de C_{Γ_t} (0.4, 0.6, 0.8, 1., 1.2, 1.4).

La valeur observée pour le débit est de l'ordre de $0.06 \text{ m}^3/\text{s}$, ce qui correspond à $X = 0.6$. On constate que pour $\alpha = 0.7$ et pour C_{Γ_t} voisin de l'unité les équations de notre modèle donnent un débit voisin de celui observé. Pour α plus faible, au contraire, le débit est trop faible et incompatible avec l'observation.

Appendice : détermination de la dépression moyenne à l'entrée de l'extracteur

Nous supposons que le tourbillon axial peut être décrit par le modèle de tourbillon stationnaire avec vitesse verticale horizontalement homogène et proportionnelle à l'altitude z . Nous supposons aussi que le débit sortant de moment cinétique L_{out} est donné. Nous supposons enfin que la partie rotationnelle du tourbillon est entièrement contenue dans le cylindre circulaire, parallèle à l'axe et ayant pour sommet l'entrée S_4 de l'extracteur.

0.0.1 Modèle de tourbillon

Le modèle dépend des paramètres ω_0 , qui est le tourbillon maximum (sur l'axe), et a , qui est le gradient vertical de vitesse verticale. Le tourbillon est donné par :

$$\omega = \omega_0 \exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right)$$

et le champ de vitesse tangentielle par :

$$v = \frac{4\nu\omega_0}{ar} \left(1 - \exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu}\right)\right)$$

Si on introduit le rayon R caractéristique de la partie rotationnelle du tourbillon, le champ de vitesse devient :

$$v = \frac{4\nu\omega_0}{ar} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right)$$

avec :

$$R = \sqrt{\frac{4\nu}{a}}$$

La vitesse verticale à l'entrée de l'extracteur s'exprime à l'aide du gradient a : $w = a h$, où h est la hauteur de la cavité. Ce qui permet de relier le paramètre a avec le flux de masse D_M (puisque $D_M = \rho w S_4$) :

$$a = \frac{D_M}{\rho h S_4}$$

Au lieu de paramétrer le modèle avec ω_0 , nous allons plutôt utiliser la circulation de la vitesse. La circulation de la vitesse sur un cercle de rayon donné r s'écrit :

$$\int v r d\theta = \frac{8\pi\nu\omega_0}{a} \left(1 - \exp\left(-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right)\right)$$

On pose :

$$\gamma = \frac{8\pi\nu\omega_0}{a}$$

Alors :

$$\int v r d\theta = \gamma(1 - \exp(-(\frac{r}{R})^2)) \quad (17)$$

On voit que la circulation tend rapidement vers γ lorsque $r \gg R$. Finalement, la vitesse s'écrit :

$$v = \frac{\gamma}{2\pi r}(1 - \exp(-(\frac{r}{R})^2))$$

0.0.2 Flux de moment cinétique

Le débit L_{out} de moment cinétique est l'intégrale sur le disque d'entrée de l'extracteur du produit du moment cinétique volumique $\rho r v$ par la densité de débit volumique w :

$$L_{out} = \int_{disque} r dr d\theta \rho r v w$$

w est uniforme sur le disque et égal à $D_M/(\rho S_4)$. En utilisant l'expression (17) on obtient pour L_{out} :

$$L_{out} = \frac{D_M}{S_4} \gamma \int_0^{R_4} (1 - \exp(-(\frac{r}{R})^2)) r dr$$

ce qui s'intègre en :

$$L_{out} = \frac{\gamma D_M}{2\pi} [1 - (\frac{R}{R_4})^2 (1 - \exp(-(\frac{R_4}{R})^2))]$$

En supposant $R \ll R_4$, nous allons faire l'approximation :

$$L_{out} = \frac{\gamma D_M}{2\pi} \quad (18)$$

Nous utiliserons cette équation pour exprimer le paramètre γ en fonction du débit D_M et du débit de moment cinétique L_{out} qui aura été déterminé grace au bilan de moment cinétique :

$$\gamma = \frac{2\pi L_{out}}{D_M} \quad (19)$$

0.0.3 Pression moyenne

Le champ de pression s'obtient en intégrant l'équation :

$$\frac{dp}{dr} = \rho \frac{v^2}{r}$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} p_3 - p(r) = \rho (\frac{\gamma}{2\pi R})^2 g(\frac{r}{R}) \\ \text{avec : } g(x) = \int_x^\infty \frac{1}{x^3} [1 - \exp(-x^2)]^2 dx \end{cases} \quad (20)$$

Ensuite, la dépression moyenne sur la bouche d'entrée de l'extracteur s'écrit :

$$p_3 - p_4 = \frac{1}{S_4} \int_0^{R_4} (p_3 - p(r)) 2\pi r dr$$

soit :

$$p_3 - p_4 = \rho \frac{\gamma^2}{2\pi S_4} \int_0^{\frac{R_4}{R}} x g(x) dx$$

On peut montrer que, pour $R_4/R \gg 1$, cette expression s'écrit :

$$p_3 - p_4 = \rho \frac{\gamma^2}{2\pi S_4} \left[\int_0^{\frac{R_4}{R}} dx \frac{1}{2x} [1 - \exp(-x^2)]^2 + \frac{1}{4} \right]$$

Finalement, en coupant la dernière intégrale en deux (une première partie contenant le noyaux rotationnel et une seconde où $\exp(-x^2) \ll 1$) on arrive à :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_3 - p_4 = \rho \frac{\gamma^2}{2\pi S_4} \left[\ln\left(\frac{R_4}{R}\right) + \beta' + \frac{1}{4} \right] \\ \text{avec : } \beta' = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^n \frac{dx}{x} [1 - \exp(-x^2)]^2 - \ln(n) \right\} \end{array} \right. \quad (21)$$

Une intégration numérique donne $\beta' \simeq -0.06$.

En mettant tout ensemble, on obtient finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_3 - p_4 = \pi \rho \frac{L_{out}^2}{D_M^2 S_4} \left[\ln\left(\frac{R_4}{R}\right) + \beta \right] \\ \text{avec : } \beta \simeq 0.19 \end{array} \right. \quad (22)$$

le passage à l'équation (7) se fait simplement en remplaçant R par son expression en fonction de a , puis a en fonction de D_M .

