

Description algorithmique d'un ensemble de
paramétrisation physique – **phylmd**

Zhaoxin Laurent LI

25 octobre 1998

Laboratoire de Météorologie Dynamique du CNRS

Ecole Normale Supérieure

24, rue Lhomond; 75231 Paris cedex 05

tél: (1) 44 32 22 34; fax: (1) 43 36 83 92

e-mail: li@lmd.ens.fr

Résumé

phylmd est un paquet complet de paramétrisation physique, destiné aux études numériques du climat terrestre. Le présent document fournit une description algorithmique des programmes.

Table des matières

1	Généralités	3
1.1	Fonctions thermodynamiques	3
1.2	Ensoleillement astronomique	4
2	Transfert radiatif	4
2.1	ozone	4
2.2	albédo du sol	4
2.3	Propriétés radiatives des nuages	5
2.4	Diagnostic des nuages	5
3	Couche limite planétaire	5
3.1	Calcul du coefficients de frottement au sol	6
3.2	Calcul des coefficients d'échange: méthode 1	7
3.3	Calcul des coefficients d'échange: méthode 2	7
3.4	Paramétrisation non-locale de la couche limite	7
4	Traitement du sol	8
5	Instabilité verticale et convection	8
5.1	Ajustement convectif humide	8
5.2	Convection liée à la convergence d'humidité à grande-échelle	10
5.3	D'autres schémas de convection	12
6	Condensation à grande échelle	12
6.1	Condensation partielle	12
6.2	Processus itératif de condensation	12
7	Précipitation	13
7.1	Taux de précipitation	13
7.2	Evaporation de la précipitation	13
7.3	Fonte de la neige	14
A	Algorithme pour la couche limite	14
A.1	Diffusion de chaleurs sensible et latente	14
A.2	Diffusion de la vitesse	17

1 Généralités

1.1 Fonctions thermodynamiques

La formule Tetens est utilisée pour calculer la pression partielle de la vapeur d'eau saturante $e_s(T)$ en fonction de la température T :

$$e_s(T) = r_2 \exp\left\{r_3 \frac{T - T_0}{T - r_4}\right\} \quad (1)$$

où T_0 est la température d'équilibre entre l'eau liquide et l'eau solide, soit 273.16 K. r_2 , r_3 et r_4 sont les constantes:

$$r_2 = 611.14$$

$$r_3 = 17.269 \text{ (liquide)}, 21.875 \text{ (solide)}$$

$$r_4 = 35.86 \text{ (liquide)}, 7.66 \text{ (solide)}$$

L'humidité spécifique (q_s) est définie comme le rapport entre la masse de vapeur m_v et la masse de l'air mélangé ($m_d + m_v$):

$$q_s = \frac{e_s/(R_v T)}{(p - e_s)/(R_d T) + e_s/(R_v T)} \quad (2)$$

où p est la pression totale, R_d est la constante de gaz pour l'air sec, R_v est la constante de gaz pour la vapeur d'eau. Avec la notation

$$\epsilon = \frac{R_d}{R_v} \quad (3)$$

$$q_s = \frac{\epsilon e_s}{p - (1 - \epsilon)e_s} \quad (4)$$

La dérivé de q_s par rapport à la température est donnée par la formule suivante:

$$\frac{dq_s}{dT} = \frac{d}{dT}(q_s) = \frac{r_3(t_0 - r_4)q_s(T, p)}{(T - r_4)^2(1 - (1 - \epsilon)e_s(T)/p)} \quad (5)$$

La formule utilisée dans l'ancien modèle du LMD est également conservée, mais son utilisation est déconseillée, car elle consomme beaucoup de temps et la différence avec la formule ci-dessus est très faible au niveau des résultats.

Equilibre vapeur - solide:

$$q_s = 622 \times 10^{2.07023 - 0.00320991T - 2484.896/T + 3.56654 \times \log_{10}^T} \quad (6)$$

$$\frac{dq_s}{dT} = q_s \left\{ \frac{3.56654}{T} + \frac{2484.896}{T^2} \times \ln 10 - 0.00320991 \times \ln 10 \right\} \quad (7)$$

Equilibre vapeur - liquide:

$$q_s = 622 \times 10^{23.8319 - 2948.964/T - 5.028 \times \log_{10}^T} \times 10^{-29810.16 \times \exp(-0.0699382T) + 25.21935 \times \exp(-2999.924/T)} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq_s}{dT} &= \ln 10 \times q_s \\ &\quad \left\{ \frac{2948.964}{T^2} + \frac{25.21935 \times 2999.924}{T^2} \exp^{-2999.924/T} \right. \\ &\quad \left. - \frac{5.028}{T \times \ln 10} + 29810.16 \times 0.0699382 \exp^{-0.0699382T} \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

1.2 Ensoleillement astronomique

Il s'agit de calculer la hauteur du soleil. D'abord, on donne la formule qui calcule le cosinus de l'angle zénithal (h) du soleil en connaissant la déclinaison du soleil (δ), la latitude (ϕ) et la longitude (l) du point sur la terre, et le temps universel (s).

Selon la géométrie sphérique, le cosinus de l'angle zénithal est donné par la formule suivante:

$$\cos(h) = \sin(\phi) \sin(\delta) + \cos(\phi) \cos(\delta) \cos(\omega) \quad (10)$$

où ω est l'angle du temps, qui est 0 à midi local.

Dans le programme, il faut savoir que la conversion de la longitude en temps local est de 240 secondes par 1 degré en longitude.

S'il n'y a pas de traitement sur le cycle diurne, il suffit de connaître la durée de l'ensoleillement et la valeur moyenne dans la journée du cosinus de l'angle zénithal.

Le cosinus de l'angle zénithal du soleil indique l'énergie disponible. Maintenant pour obtenir la radiance moyenne pendant la journée, il suffit de faire une intégration pour l'équation 10 de $-\omega_0$ à $+\omega_0$:

$$\overline{\cos(h)} = \sin(\phi) \sin(\delta) + \frac{\cos(\phi) \cos(\delta) \sin(\omega_0)}{\omega_0} \quad (11)$$

L'équation 10 nous permet également d'obtenir la longueur de la journée. Il suffit de calculer la valeur de ω correspondant à $h = 90^\circ$:

$$\cos(\omega_0) = -\tan(\phi) \tan(\delta) \quad (12)$$

La fraction d'ensoleillement est ω_0/π

2 Transfert radiatif

Le code radiatif (rayonnement solaire et rayonnement infrarouge) est celui fourni par Y. Fouquart et J.J Morcrette. On ne donne pas de description ici.

2.1 ozone

L'ozone est calculé d'une manière simple et un seul profil vertical est utilisé pour tout le globe. La formule utilisée est celle de Green (1964):

$$w = \frac{w_p}{h} \exp \frac{z - z_p}{h} / (1 + \exp \frac{z - z_p}{h})^2 \quad (13)$$

où $w_p=0.218$; $h=4.63$; $z_p=23.25$; l'unité de la hauteur z est en km, l'ozone ainsi obtenu (w) est en cm.atm km^{-1} .

Dans le modèle complet, cette formule n'est pas utilisée. Par contre, on utilise une formule empirique issue de l'ancien modèle de Météo-France pour prescrire l'ozone jour par jour.

2.2 albédo du sol

L'albédo du sol nu est prescrit selon des valeurs climatologiques. Il est mis à 0.6 en cas de glace de mer, glace continentale et neige (épaisseur > 15 mm). Une couverture partielle de la neige est diagnostiquée en fonction de son épaisseur par une équation linéaire entre 0 et 15 mm.

Sur l'océan, l'albédo dépend de l'angle zénithal du soleil (h):

$$\alpha = 0.03 + \frac{0.63}{1 + \{(1.47 - h)/0.15\}^2} \quad (14)$$

L'albédo moyen de la journée est obtenu par une intégration numérique.

2.3 Propriétés radiatives des nuages

Le modèle fournit la fraction nuageuse (f) et la quantité de l'eau liquide (q). On calcule l'épaisseur optique et l'émissivité des nuages à partir de ces deux variables:

$$\tau = \frac{3}{2} \frac{w}{r_e} \quad (15)$$

$$\epsilon = 1 - \exp^{-k\tau} \quad (16)$$

où w l'épaisseur (ou chemin intégral) de l'eau liquide (en g m^{-2}), r_e est le rayon effectif des gouttes en μm , k est le coefficient d'extinction.

Pour les nuages chauds, r_e est égal à $10 \mu\text{m}$ et k à 0.13 . Pour les nuages froids, r_e est égal à $30 \mu\text{m}$ et k à 0.10 .

2.4 Diagnostique des nuages

Malgré l'effort considérable dans la paramétrisation des nuages, certains types de nuages n'apparaissent pas. On est obligé de recourir à la paramétrisation qui n'est pas fondée sur la physique. C'est le cas pour les nuages convectifs et les stratus marins au bord est des océans subtropicaux. Les fonctions empiriques sont prises du modèle du Centre Européen.

3 Couche limite planétaire

Dans la couche limite, des mélanges turbulents peuvent transmettre de la chaleur, de l'humidité et du mouvement cinétique (la vitesse).

Le flux lié à la diffusion verticale peut sous forme générale s'écrire:

$$F = -\rho k \left(\frac{\partial x}{\partial z} + \gamma \right) \quad (17)$$

où ρ est la densité de l'air; x est la quantité à étudier dont l'unité est x/kg , il s'agit soit de l'humidité spécifique q (en kg/kg), soit de l'énergie sensible (enthalpie) $C_p T$ (en J/kg), soit de la quantité du mouvement (la vitesse) (en $kg \text{ m/s/kg}$); F est le flux de diffusion (en $xm^{-2}s^{-1}$); k est le coefficient de diffusion (en m^2/s); γ est le contre-gradient.

Le flux traversant le sol est:

$$F = \rho |\vec{V}| C_d \Delta x \quad (18)$$

L'équation d'évolution pour x est:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial F}{\partial z} \quad (19)$$

On doit maintenant discretiser les équations (17), (18) et (19), sachant que la variable x se trouve aux niveaux pleins du modèle (milieu de chaque couche: 1, 2, ..., n) et le flux F aux demi-niveaux (inter-couche: 0.5, 1.5, ..., $n+0.5$).

Au sommet de la couche limite, en général, le flux est nul:

$$F_{n+1/2} = 0 \quad (20)$$

A la surface:

$$F_{1/2} = \rho_{1/2} |\vec{V}| C_d (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_0) = \frac{K_{1/2}}{g \delta t} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_0) \quad (21)$$

avec

$$K_{1/2} = \rho_{1/2} |\vec{V}| C_d g \delta t \quad (22)$$

Pour tout le reste, c'est-à-dire, $l = 2, 3, \dots, n$:

$$F_{l-1/2} = \rho_{l-1/2}^2 k_{l-1/2} g \frac{x_l - x_{l-1} + \gamma \Delta z}{P_l - P_{l-1}} = \frac{K_{l-1/2}}{g \delta t} (x_l - x_{l-1} + \Gamma_{l-1/2}) \quad (23)$$

avec

$$K_{l-1/2} = \rho_{l-1/2}^2 k_{l-1/2} g^2 \delta t / (P_l - P_{l-1}) \quad (24)$$

Dans la suite du texte, pour simplifier l'écriture, on ajoute 1/2 aux indices de Γ , F et K . L'équation (19) devient:

$$x_n \Delta P_n = \{x_n\} \Delta P_n - [K_n (x_n - x_{n-1})] - K_n \Gamma_n \quad (25)$$

Pour $l = 2, 3, \dots, n-1$:

$$x_l \Delta P_l = \{x_l\} \Delta P_l + K_{l+1} (x_{l+1} - x_l) - K_l (x_l - x_{l-1}) + K_{l+1} \Gamma_{l+1} - K_l \Gamma_l \quad (26)$$

$$x_1 \Delta P_1 = \{x_1\} \Delta P_1 + K_2 (x_2 - x_1) - K_1 (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - x_0) + K_2 \Gamma_2 \quad (27)$$

3.1 Calcul des coefficients de frottement au sol

Le calcul des coefficients d'échange (k) entre les différentes couches atmosphériques et le coefficient de frottement au sol (C_d) se fait d'une manière explicite.

$$C_d = C_d^n f(R_i) = \left(\frac{\kappa}{\ln(1 + z_1/z_0)} \right)^2 f(R_i) \quad (28)$$

où κ est la constante de Von Karmen (0.4), z_1 est la hauteur de la première couche du modèle, z_0 est la longueur de rugosité qui est calculée selon la formule de Charnock sur l'océan et prescrite selon un fichier climatologique sur la terre (deux parties: celle liée à l'orographie et celle liée à la variation saisonnière de la végétation), C_d^n est le coefficient en situation neutre, f est la fonction d'instabilité qui varie avec le nombre de Richardson (R_i) dont la définition est:

$$R_i = \frac{g \Delta z \Delta \theta_v}{\theta_v |\Delta u|^2} \quad (29)$$

Comme dans le modèle du Centre Européen, la fonction d'instabilité est donnée selon trois situations:

Situation stable:

$$f_m(R_i) = 1 \left\{ 1 + 2b R_i (1 + d |R_i|)^{-1/2} \right\}^{-1} \quad (30)$$

$$f_h(R_i) = 1 \left\{ 1 + 3b R_i (1 + d |R_i|)^{1/2} \right\}^{-1} \quad (31)$$

Situation instable sur terre

$$f_m(R_i) = 1 - 2b R_i \left\{ 1 + 3bc C_d^n \sqrt{|R_i| (1 + z_1/z_0)} \right\}^{-1} \quad (32)$$

$$f_h(R_i) = 1 - 3b R_i \left\{ 1 + 3bc C_d^n \sqrt{|R_i| (1 + z_1/z_0)} \right\}^{-1} \quad (33)$$

Situation instable sur océan

$$f_h(R_i) = \left\{ 1 + \frac{0.0016}{C_d^n |v_1|} |\delta \theta_v|^{1/3} \right\}^{1/1.25} \quad (34)$$

3.2 Calcul des coefficients d'échange: méthode 1

Les coefficients d'échange (k) sont calculés par:

$$k = h^2 \left| \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} \right| \sqrt{\epsilon} \quad (35)$$

où h est une fonction décroissante avec l'altitude,

$$h = 35.0 \max\left(0, \frac{z_2 - z}{z_2 - z_1}\right) \quad (36)$$

où z_1 est la hauteur de la première couche, z_2 est la hauteur de la dernière couche de la couche limite (ici la dernière couche de l'atmosphère).

L'énergie turbulente ϵ est donnée par:

$$\epsilon = \frac{R_i^c - R_i}{R_i^c} \quad (37)$$

où R_i^c est le nombre de Richardson critique (0.4). R_i prend en compte le contre-gradient (γ : -1 ou -2.5 K km^{-1}) introduit dans le modèle:

$$R_i = \frac{g \Delta z \Delta \theta_v + g \Delta z \Delta z \gamma}{\theta_v |\Delta u|^2} \quad (38)$$

Quand $R_i > R_i^c$ (situation stable), on utilise simplement la formule suivante:

$$k = 0.001 h^2 \quad (39)$$

Remarquons enfin que le nombre de Richardson humide doit être utilisé à la place de nombre de Richardson sec en présence de nuage, c'est-à-dire, quand la condensation a lieu.

3.3 Calcul des coefficients d'échange: méthode 2

On utilise les formules suivantes pour calculer les coefficients d'échange dans l'atmosphère (K_m et K_h):

$$K_m = l_m^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| f_m(R_i) \quad (40)$$

$$K_h = l_h^2 \left| \frac{\partial u}{\partial z} \right| f_h(R_i) \quad (41)$$

Les fonctions sont les mêmes que celles pour le coefficient de frottement, mais il faut remplacer, dans 32 et 33, le module $3bcC_d^n \sqrt{|R_i|(1 + z_1/z_0)}$ par son équivalent suivant:

$$3bc \frac{l^2}{(\Delta z)^{3/2} z^{1/2}} \left\{ \left(\frac{z + \Delta z}{z} \right)^{1/3} - 1 \right\}^{3/2} \quad (42)$$

l_m et l_h sont calculés par:

$$l_m = \frac{kz}{1 + kz/\lambda_m}; \quad l_h = \frac{kz}{1 + kz/\lambda_h} \quad (43)$$

$\lambda_m = 160m$, $\lambda_h = \lambda_m \sqrt{1.5d}$.

3.4 Paramétrisation non-locale de la couche limite

Cette paramétrisation est basée sur le travail de Holtslag. Elle est initialement implantée dans le modèle du CCM. On doit d'abord diagnostiquer une hauteur de la couche limite (soit la hauteur dynamique soit la hauteur convective). Ensuite le schéma est réduit à calculer des valeurs de contre-gradient et celles des coefficients d'échange.

4 Traitement du sol

Le sol est une couche homogène de 15 cm. Le calcul de la température du sol est intégré dans la couche limite en fonction du bilan d'énergie à la surface. Pour l'humidité du sol, un simple modèle de sseau d'eau est utilisé dont la capacité maximale est de 150 mm d'eau. Toute l'eau dépassant cette valeur maximale est considérée comme ruissellement et perdue.

La capacité thermique et sa valeur effective sont:

nature du sol	C (J m ⁻³ K ⁻¹)	C effective (J m ⁻² K ⁻¹)
terre	2.5578 × 10 ⁶	3.837 × 10 ⁵
neige	2.3867 × 10 ⁶	3.580 × 10 ⁵
glace	5.1444 × 10 ⁶	7.717 × 10 ⁵
océan	∞	∞

Pour la glace de mer, une diffusion de chaleur vers l'océan libre est prise en compte. Une procédure de relaxation vers la température de congélation est appliquée. L'échelle temporelle de relaxation est fixée artificiellement à un mois.

L'évaporation réelle est égale au taux de l'évapo-transpiration maximale, à un facteur β près, qui dépend de l'humidité du sol:

$$\beta = \min\left(1, \frac{2q}{150}\right) \quad (44)$$

L'accumulation de la neige dépend du taux d'enneigement, de la sublimation de la neige et de la fonte de la neige. En cas de fonte, la température du sol est modifiée, sachant que le rapport (r) entre la chaleur de fonte (3.334 × 10⁵ J kg⁻¹) et la capacité thermique effective du sol (3.580 × 10⁵ J m⁻² K⁻¹) peut déterminer la vitesse de fonte.

5 Instabilité verticale et convection

Par rapport à la résolution des modèles climatiques utilisés, la convection est un phénomène de petite échelle et nécessite des paramétrisations physiques, car sa représentation explicite dans des modèles climatiques est pratiquement impossible.

5.1 Ajustement convectif humide

Γ_d et Γ_m représentent respectivement les valeurs critiques de la décroissance verticale de température atmosphérique dans le cas où il n'y a pas de condensation (atmosphère non saturée) et celui où il y a de la condensation (atmosphère saturée), c'est-à-dire:

$$\Gamma_d = \frac{g}{C_p} \approx 9.8(K/km) \quad (45)$$

et Γ_m dépend de la température et de la pression. En général, il varie entre 3 et 9 K/km

$$\Gamma_m \approx \frac{g}{C_p} \left(1 + \frac{Lq_s}{RT}\right) \left(1 + \frac{L^2 q_s}{C_p R_m T^2}\right)^{-1} = \frac{g}{C_p} \left(1 + \frac{Lq_s}{RT}\right) \left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_s}{\partial T}\right)^{-1} \quad (46)$$

Quand la décroissance verticale de la température atmosphérique ($-\partial T/\partial z$) est plus rapide (grande) que Γ_d , l'atmosphère est toujours instable. Quand la décroissance est entre Γ_d et Γ_m , l'atmosphère est conditionnellement instable (elle est instable quand elle est aussi saturée). Quand la décroissance est plus petite que Γ_m , l'atmosphère est toujours stable.

L'expérience nous montre que quand l'on trouve l'atmosphère dans une situation instable, on doit la ramener à une structure stable en conservant l'énergie. Ce processus est appelé "ajustement convectif". Quand il y a de la condensation, il est humide, sinon il est sec. Dans la suite, on va étudier l'ajustement convectif humide.

Considérons deux niveaux l_1 et l_2 , si pour tous les niveaux l entre l_1 et l_2 on a :

$$\delta T < \Gamma_c (= -\Gamma_m \times \delta z = \frac{\delta P}{PC_p} (RT + Lq_s) \left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_s}{\partial T}\right)^{-1}) \quad (47)$$

et aussi

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} (q(l) - q_{sat}(l)) \delta \sigma_l > 0 \quad (48)$$

alors le schéma d'ajustement convectif humide doit s'appliquer. Appelons $T(l)$, $q(l)$ la température et l'humidité spécifique avant l'ajustement, $T'(l)$ et $q'(l)$ leurs valeurs après, on doit avoir

$$\delta T' = \Gamma_c \quad (49)$$

$$q'(l) = q_{sat}(T'(l), P(l)) \quad (50)$$

La conservation de l'énergie nous impose

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} (C_p(T'(l) - T(l)) + L(q'(l) - q(l))) \delta \sigma_l = 0 \quad (51)$$

L'équation 50 doit se linéariser pour être soluble simplement:

$$q'(l) = q_{sat}(T(l), P(l)) + \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} |_{T(l), P(l)} (T'(l) - T(l)) \quad (52)$$

On combine les équations 52 et 51 en éliminant $q'(l)$ et on obtient:

$$\sum_{l=l_1}^{l_2} \left\{ (T'(l) - T(l)) \left(C_p + L \frac{\partial q_{sat}}{\partial T} |_{T(l), P(l)} \right) + L(q_{sat}(T(l), P(l)) - q(l)) \right\} \delta \sigma_l = 0 \quad (53)$$

Et l'équation 49 veut dire que pour l entre $l_1 + 1$ et l_2 :

$$T'(l) = T'(l_1) + \sum_{j=l_1+1}^l \Gamma_c(j, j-1) \quad (54)$$

Les équations 53 et 54 nous permettent d'avoir la valeur $T'(l_1)$:

$$A(l) = \sum_{j=l_1+1}^l \Gamma_c(j, j-1) \quad (55)$$

$$B = \sum_{l=l_1}^{l_2} \left\{ (C_p + L \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}) (T(l) - A(l)) - L(q_{sat} - q(l)) \right\} \delta \sigma_l \quad (56)$$

$$C = \sum_{l=l_1}^{l_2} (C_p + L \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}) \delta \sigma_l \quad (57)$$

$$T'(l_1) = \frac{B}{C} \quad (58)$$

L'équation 54 peut ensuite nous donner toutes les autres $T'(l)$.

La quantité totale de l'eau condensée Q_c (en kg/m^2 ou mm) est:

$$Q_c = \sum_{l=l_1}^{l_2} (q(l) - q'(l)) \frac{\delta\sigma_l P_s}{g} \quad (59)$$

Une partie de cette quantité ($(1 - \tau)Q_c$) est tombée de la convection sous forme de pluie ou de neige (bien entendu, la re-évaporation doit être prise en compte comme dans le programme traitant la condensation à grande échelle). Le reste (τQ_c) est distribué dans le nuage convectif sous forme de l'eau liquide nuageuse. La détermination de τ est paramétrée en fonction de l'épaisseur de la colonne convective. C'est une variable ajustable. Sa valeur est de 10 à 20%.

Le modèle nuageux utilisé ici est très simple et il suppose que la quantité de l'eau liquide est proportionnelle (γ) à la vapeur d'eau $q(l)$.

$$x(l) = \gamma q(l) \quad (60)$$

La valeur de γ peut être obtenue à partir de l'équation suivante:

$$\gamma = \tau Q_c \left\{ \sum_{l=l_1}^{l_2} (q(l) \frac{\delta\sigma_l P_s}{g}) \right\}^{-1} \quad (61)$$

Remarquons qu'il y a actuellement plusieurs "modèles nuageux" disponibles (au choix). Outre celui déjà décrit, on peut aussi supposer que la distribution est constante, ou progressive selon sa hauteur, etc. On peut aussi supposer que la distribution est proportionnelle à la quantité de la vapeur d'eau effectivement diminuée pendant l'ajustement.

Au niveau de la mise en oeuvre informatique, la recherche de la colonne à ajuster se fait du bas vers le haut. Le bas de la colonne est trouvé quand la sur-saturation et l'instabilité sont réunies pour la première fois. On alors continue la recherche pour trouver le sommet de la colonne à ajuster. Bien sûr, le sommet est la première couche où la sur-saturation n'est pas atteinte ou l'instabilité n'est pas présente. Après l'ajustement de la colonne, on doit vérifier s'il ne provoque, en haut et en bas de la colonne, de nouvelles couches nécessitant l'ajustement à leur tour. Remarquons tout de suite que cet ajustement secondaire ou, le cas échéant, à l'ordre plus élevé est très important car il schématise un peu le développement réel d'un cumulus et permet la convection de se développer relativement haut dans la verticale. Enfin, il faut également prendre en compte des blocks discontinus de convection dans une colonne verticale. On part du sommet de la convection plus basse pour chercher d'autres convections plus hautes.

5.2 Convection liée à la convergence d'humidité à grande-échelle

Supposons que h représente l'énergie statique humide de saturation, c'est-à-dire,

$$h = C_p T + gz + Lq_s \quad (62)$$

et que h_b représente la valeur de h au niveau du bas de la convection. Alors les deux conditions nécessaires pour que la convection se déclenche sont les suivantes:

(1) il existe un niveau l supérieur dont l'énergie statique humide de saturation est inférieure à celle du niveau b , la base de la convection.

$$h_l < h_b \quad (63)$$

La dernière couche (couche t) dont h_t est inférieure à h_b est considérée le sommet de la convection.

(2) la convergence de l'humidité dans la colonne est positive, c'est-à-dire,

$$\Delta \equiv \sum_{l=l_b}^{l=l_t} \delta_l d\sigma_l > 0 \quad (64)$$

On doit maintenant déterminer la fraction f de la surface de la maille où se développe un cumulus. Cette fraction est calculée comme le rapport de la quantité de vapeur d'eau effectivement rentrée dans la colonne à la quantité de vapeur d'eau nécessaire pour que l'ensemble de la colonne devienne nuageux. Cette dernière quantité se décompose en deux parties: une quantité de vapeur d'eau nécessaire pour amener la colonne à saturation et une quantité de vapeur d'eau permettant de faire passer h_l à la valeur h_b , c'est-à-dire,

$$\Delta_t = \sum_{l=l_b}^{l=l_t} (q_s(l) - q(l)) d\sigma_l + \sum_{l=l_b}^{l=l_t} \frac{h(l) - h(b)}{L} d\sigma_l \quad (65)$$

On a donc finalement:

$$f = \frac{\Delta}{\Delta_t} \quad (66)$$

Sur cette fraction de la maille, il se forme un nuage à l'intérieur duquel $h(l) = h(b)$. On suppose alors que le nuage se disperse dans l'atmosphère, qui prend les valeurs $T'(l)$ et $q'(l)$ données par:

$$T'(l) = T(l) + f\delta T \quad (67)$$

où

$$\delta T = \frac{1}{C_p} \frac{h(b) - h(l)}{1 + L/C_p \partial q_s / \partial T} \quad (68)$$

et

$$q'(l) = q(l) + f[\delta T \frac{\partial q_s}{\partial T} + q_s(l) - q(l)] \quad (69)$$

La quantité de l'eau condensée, qui correspond à la chaleur latente dégagée, est donc:

$$Q_c = f \sum_{l=l_b}^{l=l_t} \frac{C_p \delta T}{L} \frac{dP_l}{g} \quad (70)$$

Dans le modèle traditionnel du LMD, on utilise la variable H ($= C_p T / P^\kappa$), il y a donc la relation suivante:

$$dH = \frac{C_p}{P^\kappa} dT - \kappa C_p T \frac{dP}{P^{\kappa+1}} = \left(C_p dT - RT \frac{dP}{P} \right) / P^\kappa \quad (71)$$

c'est-à-dire,

$$P^\kappa dH = C_p dT + d\Phi \quad (72)$$

Par conséquent,

$$dh = C_p dT + d\Phi + L dq_s = P^\kappa dH + L dq_s \quad (73)$$

Dans la programmation, on utilise cette equation pour evaluer la différence de l'énergie totale entre deux couches.

Si la variable thermodynamique est la température et la coordonnée verticale est en pression, on peut également utiliser la relations suivante pour calculer dh :

$$d\Phi = -\frac{dP}{\rho} = -\frac{RT}{P} dP \quad (74)$$

5.3 D'autres schémas de convection

Plusieurs schémas de convection développés par la communauté scientifique sont également disponibles. Il s'agit du schéma de Tiedtke (utilisé dans le modèle du Centre Européen), ou schéma de Hack (utilisé dans CCM), ou encore schéma d'Emmanuel (fortement modifié au LMD).

6 Condensation à grande échelle

Il s'agit du processus qui traite le dégagement de chaleur latente à grande échelle et les nuages stratiformes.

6.1 Condensation partielle

La condensation est la source principale de l'eau liquide nuageuse et des flux de précipitation. La condensation partielle à l'intérieur d'une maille est prévue. La température (T) est considérée constante, mais la vapeur d'eau (q) respecte une distribution uniforme entre $(q - \Delta q)$ et $(q + \Delta q)$. Alors la fraction saturée de la maille est

$$f = \frac{q + \Delta q - q_s}{2\Delta q} \quad \text{si } q_s \in (q - \Delta q, q + \Delta q) \quad (75)$$

$f = 0$ si $q_s > q + \Delta q$, $f = 1$ si $q_s < q - \Delta q$

Ainsi la vapeur d'eau dans la partie claire (q^c) est

$$q^c = \frac{q_s + q - \Delta q}{2} \quad (76)$$

et la vapeur d'eau dans la partie nuageuse est

$$q^n = \frac{q_s + q + \Delta q}{2} \quad (77)$$

La détermination de Δq est très simple: $\Delta q = \alpha q$ ou α est une constante (0.1).

La quantité de l'eau condensée est obtenue en linéarisant l'équation de vapeur d'eau saturante. La méthode itérative dite Newton-Raphson n'est pas appliquée ici.

$$C = f(q^n - q_s) \left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_s}{\partial T} \right)^{-1} \quad (78)$$

6.2 Processus itératif de condensation

Pour augmenter la précision du calcul, on peut utiliser un processus itératif pour réaliser la condensation. Pour un point donné, si $q > q_{sat}(T, P)$, alors, on doit ramener q et T vers les valeurs q' et T' qui sont satisfaites aux conditions suivantes:

$$q' = q_{sat}(T', P) \quad (79)$$

$$C_p T' + Lq' = C_p T + Lq \quad (80)$$

La deuxième équation est due à la conservation de l'énergie. Et la quantité d'eau condensée est

$$\frac{(q - q')\delta\sigma_l P_s}{g} \quad (81)$$

L'équation 79 est non-linéaire, on utilise une méthode itérative dite *Newton-Raphson* pour résoudre ce système.

Supposons une valeur approchée q' :

$$q' = q_{sat}|_{T,P} + \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}|_{T,P}(T' - T) \quad (82)$$

En introduisant l'équation 82 dans 80 on obtient:

$$\left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}\right) T' = \frac{L}{C_p} (q - q_{sat}) + \left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}\right) T \quad (83)$$

C'est-à-dire:

$$T' = T + \frac{L}{C_p} (q - q_{sat}) \left(1 + \frac{L}{C_p} \frac{\partial q_{sat}}{\partial T}\right)^{-1} \quad (84)$$

Dès que l'on a T' , on peut avoir q' en utilisant l'équation 82, ainsi suite ce processus est itéré jusqu'à ce que q' et $q_{sat}(T', P)$ soient très proches l'une et l'autre.

7 Précipitation

L'eau condensée est ensuite partagée en 2 parties dont l'une précipite sous forme de neige ou pluie et l'autre est gardée dans l'atmosphère et considérée comme l'eau liquide nuageuse qui entre interactivement dans le calcul du transfert radiatif. La méthode décrite ici s'applique en principe seulement à la condensation à grande échelle. Mais on peut également appliquer cette méthode à l'eau condensée issue de la convection s'il n'y a pas de traitement spécial pour la précipitation dans la convection.

7.1 Taux de précipitation

Le taux de précipitation pour les nuages chauds est calculé par:

$$P = \frac{l}{C_t} \{1 - \exp[-(l/C_l)^2]\} \quad (85)$$

où C_l est un seuil et C_t une échelle caractéristique du temps de la précipitation. C_l prend la valeur de $2 \times 10^{-4} \text{ kg kg}^{-1}$. C_t est égal au pas physique du modèle.

Pour les nuages froids, on prend explicitement la vitesse de chute finale des cristaux de glace:

$$P = \frac{l}{\Delta z} v = \frac{l}{\Delta z} \times 3.29(\rho l)^{0.16} \quad (86)$$

P étant une fonction fortement non-linéaire de l , on divise, pendant l'intégration temporelle, le pas physique en plusieurs sous intervalles pour augmenter la précision du calcul. Actuellement, chaque sous intervalle représente 6 minutes.

Les régimes des nuages sont distingués par leur température.

$$g = \min\left(1, \max\left(0, \frac{T - 263^\circ\text{K}}{273^\circ\text{K} - 263^\circ\text{K}}\right)\right) \quad (87)$$

où g est le pourcentage de glace.

7.2 Evaporation de la précipitation

L'évaporation de la précipitation est un processus très compliqué, mais on le prend en compte d'une manière simple en supposant que le tau d'évaporation est:

$$e = 1.5 \times 10^{-5} (1 - r) \sqrt{P} \quad (88)$$

où r est l'humidité relative et P est le flux de précipitation.

7.3 Fonte de la neige

Un autre processus qui change les flux de précipitation est la fonte de la neige tombant de la couche supérieure. On suppose que la neige est fondu dans les couches dont la température est supérieures à 2°C. La fonte est limitée, d'une part, par la quantité de neige et d'autre part, par le fait que la température de la couche ne peut pas être inférieure à 2°C après la fonte.

A Algorithme pour la couche limite

A.1 Diffusion de chaleurs sensible et latente

Le fait que l'évaporation dépend de l'énergie disponible à la surface nous oblige de calculer ensemble la diffusion de l'humidité q et de l'enthalpie potentielle H ($= C_p T (P_r/P)^\kappa$). P_r est la pression de reference (ou plus simplement, la pression au sol).

Un schéma implicite est utilisé pour résoudre ce système de diffusion. Supposons que l'atmosphère est divisée en n couches. La première est celle juste au dessus du sol et la n^e est la dernière couche au sommet. Les problèmes pour q et H sont liés par le terme d'évaporation qui intervient dans les bilans d'eau et d'énergie au sol (les variables entre les crochets $\{ \}$ sont les variables du pas précédent):

Pour la n^e couche, on a:

$$q_n \delta P_n = \{q_n\} \delta P_n - K_n^q (q_n - q_{n-1}) - K_n^q \Gamma_n^q \quad (89)$$

$$H_n \delta P_n = \{H_n\} \delta P_n - K_n^h (H_n - H_{n-1}) - K_n^h \Gamma_n^h \quad (90)$$

Pour la couche l qui est entre 1 et n :

$$q_l \delta P_l = \{q_l\} \delta P_l + K_{l+1}^q (q_{l+1} - q_l) - K_l^q (q_l - q_{l-1}) + K_{l+1}^q \Gamma_{l+1}^q - K_l^q \Gamma_l^q \quad (91)$$

$$H_l \delta P_l = \{H_l\} \delta P_l + K_{l+1}^h (H_{l+1} - H_l) - K_l^h (H_l - H_{l-1}) + K_{l+1}^h \Gamma_{l+1}^h - K_l^h \Gamma_l^h \quad (92)$$

Pour la première couche, on a:

$$q_1 \delta P_1 = \{q_1\} \delta P_1 + K_2^q (q_2 - q_1) - K_1^q (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 - q_0) \beta + K_2^q \Gamma_2^q \quad (93)$$

$$H_1 \delta P_1 = \{H_1\} \delta P_1 + K_2^h (H_2 - H_1) - K_1^h (\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 - H_0) + K_2^h \Gamma_2^h \quad (94)$$

où H_0 représente la température du sol T_s , c'est-à-dire, $H_0 = C_p T_s (P_r/P_s)^\kappa$; q_0 est la vapeur d'eau de saturation correspondant à H_0 ; β est le coefficient d'évaporation qui représente le rapport entre l'évaporation réelle et l'évaporation potentielle.

La température du sol est contrôlée par l'équation suivante:

$$C_0 \frac{\delta T_s}{\delta t} = F - k_g C_p (P_r/P_s)^\kappa (T_s - T_g) C_0 / \delta t \quad (95)$$

où F représente la somme du rayonnement net au sol, de la chaleur sensible et de la chaleur latente. Le dernier terme représente le transfert de chaleur des couches profondes vers la surface. Il peut être aussi considéré comme une relaxation de la température du sol vers la température profonde. Il est seulement utilisé pour calculer la température de la glace de la mer où une relaxation vers la température de congélation est considérée. Le coefficient k_g est $\delta t / \tau$ ou τ est le temps de relaxation (30 jours pour la glace de mer).

Cette équation peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{\delta H_0}{\delta t} = C_{al} F (P_r/P_s)^\kappa - k_g (H_0 - H_g) \quad (96)$$

avec

$$C_{al} = C_p/C_0 \quad (97)$$

c'est-à-dire:

$$H_0 = \{H_0\} + C_{al}\delta t(P_r/P_s)^\kappa F - k_g\delta t(H_0 - H_g) \quad (98)$$

F est composé de 3 parties:

$$\begin{aligned} F &= F_{rad} \\ &+ \frac{K_1^h}{g\delta t(P_r/P_s)^\kappa}(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 - H_0) \\ &+ \frac{\beta K_1^q L}{\delta t g}(\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 - q_0) \end{aligned} \quad (99)$$

L'équation de Clausius-Clapeyrons peut lier q_0 et H_0 :

$$q_0 = q_{sat}(H_0) \quad (100)$$

Cette dernière équation est non-linéaire, on doit la linéariser:

$$q_0 = q_{sat}(\{H_0\}) + \frac{\partial q_{sat}}{\partial H}|_{\{H_0\}}(H_0 - \{H_0\}) = C_0^q + D_0^q H_0 \quad (101)$$

avec

$$C_0^q = q_{sat}(\{H_0\}) - \{H_0\} \frac{\partial q_{sat}}{\partial H}|_{\{H_0\}}; D_0^q = \frac{\partial q_{sat}}{\partial H}|_{\{H_0\}} \quad (102)$$

Maintenant, on a un système linéaire de $2n + 2$ équations et de $2n + 2$ variables ($q_0, q_1, \dots, q_n, H_0, H_1, \dots, H_n$). On peut le résoudre par une méthode d'itération en posant les équations suivantes:

$$\begin{cases} q_n = C_n^q + D_n^q q_{n-1} \\ \dots \\ q_1 = C_1^q + D_1^q q_0 \end{cases} \quad (103)$$

$$\begin{cases} H_n = C_n^h + D_n^h H_{n-1} \\ \dots \\ H_1 = C_1^h + D_1^h H_0 \end{cases} \quad (104)$$

En changeant la forme des équations, on peut obtenir les formules intermédiaires:

$$C_n^q = \frac{\{q_n\}\delta P_n - K_n^q \Gamma_n^q}{\delta P_n + K_n^q} \quad (105)$$

$$D_n^q = \frac{K_n^q}{\delta P_n + K_n^q} \quad (106)$$

$$C_l^q = \frac{\{q_l\}\delta P_l + K_{l+1}^q C_{l+1}^q + K_{l+1}^q \Gamma_{l+1}^q - K_l^q \Gamma_l^q}{\delta P_l + K_l^q + K_{l+1}^q(1 - D_{l+1}^q)} \quad (1 < l < n) \quad (107)$$

$$D_l^q = \frac{K_l^q}{\delta P_l + K_l^q + K_{l+1}^q(1 - D_{l+1}^q)} \quad (1 < l < n) \quad (108)$$

$$C_1^q = \frac{\{q_1\}\delta P_1 + (K_2^q - \beta K_1^q \alpha_2)C_2^q + K_2^q \Gamma_2^q}{\delta P_1 + \beta K_1^q(\alpha_1 + \alpha_2 D_2^q) + K_2^q(1 - D_2^q)} \quad (109)$$

$$D_1^q = \frac{\beta K_1^q}{\delta P_1 + \beta K_1^q(\alpha_1 + \alpha_2 D_2^q) + K_2^q(1 - D_2^q)} \quad (110)$$

$$C_n^h = \frac{\{H_n\}\delta P_n - K_n^h \Gamma_n^h}{\delta P_n + K_n^h} \quad (111)$$

$$D_n^h = \frac{K_n^h}{\delta P_n + K_n^h} \quad (112)$$

$$C_l^h = \frac{\{H_l\}\delta P_l + K_{l+1}^h C_{l+1}^h + K_{l+1}^h \Gamma_{l+1}^h - K_l^h \Gamma_l^h}{\delta P_l + K_l^h + K_{l+1}^h (1 - D_{l+1}^h)} \quad (1 < l < n) \quad (113)$$

$$D_l^h = \frac{K_l^h}{\delta P_l + K_l^h + K_{l+1}^h (1 - D_{l+1}^h)} \quad (1 < l < n) \quad (114)$$

$$C_1^h = \frac{\{H_1\}\delta P_1 + (K_2^h - K_1^h \alpha_2) C_2^h + K_2^h \Gamma_2^h}{\delta P_1 + K_1^h (\alpha_1 + \alpha_2 D_2^h) + K_2^h (1 - D_2^h)} \quad (115)$$

$$D_1^h = \frac{K_1^h}{\delta P_1 + K_1^h (\alpha_1 + \alpha_2 D_2^h) + K_2^h (1 - D_2^h)} \quad (116)$$

Ainsi en utilisant l'équation (99) et les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 - q_0 &= \alpha_1 C_1^q + \alpha_2 C_1^q D_2^q + \alpha_2 C_2^q \\ &\quad + C_0^q (\alpha_1 D_1^q + \alpha_2 D_1^q D_2^q - 1) \\ &\quad + D_0^q H_0 (\alpha_1 D_1^q + \alpha_2 D_1^q D_2^q - 1) \end{aligned} \quad (117)$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 - H_0 &= \alpha_1 C_1^H + \alpha_2 C_1^H D_2^H + \alpha_2 C_2^H \\ &\quad + H_0 (\alpha_1 D_1^h + \alpha_2 D_1^h D_2^h - 1) \end{aligned} \quad (118)$$

on peut d'abord obtenir la valeur de H_0 :

$$H_0 = \frac{A}{B} \quad (119)$$

avec

$$\begin{aligned} A = & \{H_0\} + \delta t k_g H_g + \delta t C_{al} (P_r/P_s)^\kappa F_{rad} \\ & + \delta t C_{al} (P_r/P_s)^\kappa \left(\frac{\beta L K_1^q}{g \delta t} (\alpha_1 C_1^q + \alpha_2 C_1^q D_2^q + \alpha_2 C_2^q) \right) \\ & + \delta t C_{al} (P_r/P_s)^\kappa \left(\frac{\beta L K_1^q}{g \delta t} C_0^q (\alpha_1 D_1^q + \alpha_1 D_1^q D_2^q - 1) \right) \\ & + \delta t C_{al} (P_r/P_s)^\kappa \left(\frac{K_1^h}{g \delta t (P_r/P_s)^\kappa} (\alpha_1 C_1^H + \alpha_2 C_1^H D_2^H + \alpha_2 C_2^H) \right) \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} B = & 1 + \delta t k_g \\ & + \delta t C_{al} (P_r/P_s)^\kappa \left(\frac{K_1^h}{g \delta t (P_r/P_s)^\kappa} (1 - D_1^h (\alpha_1 + \alpha_2 D_2^h)) \right) \\ & + \delta t C_{al} (P_r/P_s)^\kappa \left(\frac{\beta L K_1^q}{g \delta t} (1 - D_1^q (\alpha_1 + \alpha_2 D_2^q)) \right) \end{aligned} \quad (121)$$

Une fois qu'on a H_0 on peut ensuite obtenir $q_0, q_1, \dots, q_n, H_1, H_2, \dots, H_n$ en utilisant les relations itératives.

Les flux sur chaque niveau σ sont:

$$F_q(1) = \frac{\beta K_1^q}{g \delta t} (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2 - q_0) \quad (122)$$

$$F_h(1) = \frac{K_1^h}{g\delta t(P_r/P_s)^\kappa}(\alpha_1 H_1 + \alpha_2 H_2 - H_0) \quad (123)$$

$$F_q(l) = \frac{K_l^q}{g\delta t}(q_l - q_{l-1} + \Gamma_l^q) \quad (2 < l < n) \quad (124)$$

$$F_h(l) = \frac{K_l^h}{g\delta t(P_r/P)^\kappa}(H_l - H_{l-1} + \Gamma_l^h) \quad (2 < l < n) \quad (125)$$

Pour certaines utilisations (par exemple, forcer un modèle océanique), nous avons besoin de calculer la dérivée des flux sensible et latent:

$$\frac{dF_h(1)}{dT_s} = \frac{K_1^h C_p}{g\delta t(P_r/P_s)^\kappa}(\alpha_1 D_1^h + \alpha_2 D_1^h D_2^h - 1) \quad (126)$$

$$L \frac{dF_q(1)}{dT_s} = \frac{L\beta C_p K_1^q}{g\delta t} D_0^q (\alpha_1 D_1^q + \alpha_2 D_1^q D_2^q - 1) \quad (127)$$

A.2 Diffusion de la vitesse

Pour la diffusion de la vitesse horizontale, on peut également utiliser le schéma implicite. Pour simplifier le calcul, on suppose qu'il y a 4 couches.

$$u_4 \delta \sigma_4 = \{u_4\} \delta \sigma_4 - K_4(u_4 - u_3) \quad (128)$$

$$u_3 \delta \sigma_3 = \{u_3\} \delta \sigma_3 + K_4(u_4 - u_3) - K_3(u_3 - u_2) \quad (129)$$

$$u_2 \delta \sigma_2 = \{u_2\} \delta \sigma_2 + K_3(u_3 - u_2) - K_2(u_2 - u_1) \quad (130)$$

$$u_1 \delta \sigma_1 = \{u_1\} \delta \sigma_1 + K_2(u_2 - u_1) - K_1(u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2) \quad (131)$$

C'est un système linéaire et triangulaire, on peut le résoudre par une méthode d'itération en supposant:

$$u_3 = C_4 + D_4 u_4 \quad (132)$$

$$u_2 = C_3 + D_3 u_3 \quad (133)$$

$$u_1 = C_2 + D_2 u_2 \quad (134)$$

On change légèrement la forme de l'équation 131 et la compare avec l'équation 134:

$$C_2 = \frac{\{u_1\} \delta \sigma_1}{\delta \sigma_1 + \alpha_1 K_1 + K_2} \quad (135)$$

$$D_2 = \frac{K_2 - \alpha_2 K_1}{\delta \sigma_1 + \alpha_1 K_1 + K_2} \quad (136)$$

Introduire l'équation 134 dans 130 et comparer avec l'équation 133:

$$C_3 = \frac{\{u_2\} \delta \sigma_2 + K_2 C_2}{\delta \sigma_2 + K_3 + K_2(1 - D_2)} \quad (137)$$

$$D_3 = \frac{K_3}{\delta \sigma_2 + K_3 + K_2(1 - D_2)} \quad (138)$$

Introduire l'équation 133 dans 129 et comparer avec l'équation 132:

$$C_4 = \frac{\{u_3\} \delta \sigma_3 + K_3 C_3}{\delta \sigma_3 + K_4 + K_3(1 - D_3)} \quad (139)$$

$$D_4 = \frac{K_4}{\delta \sigma_3 + K_4 + K_3(1 - D_3)} \quad (140)$$

Introduire l'équation 132 dans l'équation 128:

$$u_4 = \frac{\{u_4\}\delta\sigma_4 + K_4C_4}{\delta\sigma_4 + K_4(1 - D_4)} \quad (141)$$

Une fois qu'on a u_4 , on peut ensuite utiliser les équations 132, 133 et 134 pour obtenir u_3 , u_2 et u_1 .