

Transfert radiatif dans un milieu Markovien par méthodes Monte Carlo

Stage de 4^{ème} année INSA Mathématiques Appliquées, juin - novembre 2024

Paola de Truchis, Najda Villefranque

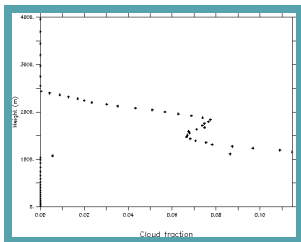


Simulated cloud field (ARM-Cumulus at 8 m resolution) rendered using a Monte Carlo path-tracing model (htrdr, Villefranque et al. 2019)

Motivation : Améliorer la compréhension et la modélisation de l'effet radiatif des nuages (Dephy)

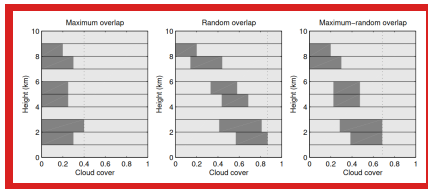
Focus : Impact de la “géométrie” des nuages sur le transfert radiatif

Entrées : profils verticaux décrivant
“en moyenne” les nuages (variables
d'état du GCM)



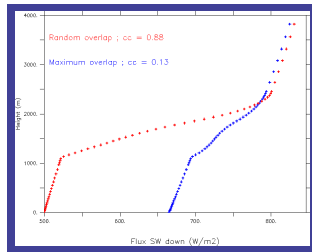
Profil de fraction nuageuse typique cumulus

Modèle “géométrie nuageuse”
+ Transfert Radiatif



Figures extraites de Hogan et al., 2000

Sorties : profils verticaux
“moyens” de flux $\uparrow/\downarrow$



Profil de flux SW down dans les cumulus

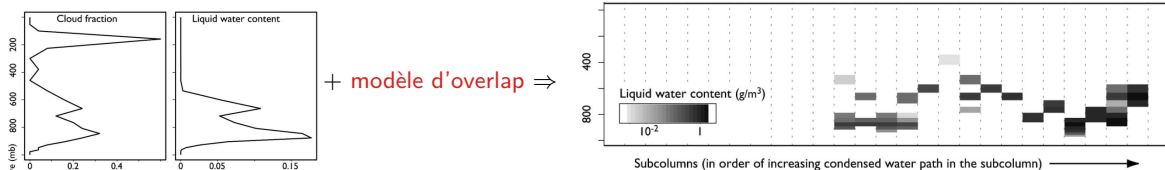
La couverture nuageuse totale contrôlée par
l'**overlap** impacte à l'ordre 1 le transfert radiatif

Objectif : Proposer un nouveau paradigme de modélisation
du rayonnement dans les nuages dans les modèles climatiques
par les méthodes de Monte Carlo.

Travail en collaboration avec **EDStar** dans
le cadre du projet ANR MCMET

Paradigme : couplage ETR / milieu stochastique

1. L'atmosphère nuageuse vue comme un milieu stochastique, à la MCICA (Barker, Pincus 2003)



Dans MCICA on échantillonne N profils ("subcolumns"), on calcule les flux pour chacun indépendamment, on renvoie le flux moyens

2. L'ETR avec collisions nulles est résolue par Monte Carlo, pas besoin de connaître le milieu *a priori*

$$\mathcal{L}(x, \vec{\omega}) = \int_0^{+\infty} \overbrace{\hat{k} e^{\hat{k} l}}^{\hat{k} \text{ est arbitraire !}} dl \left\{ \mathcal{L}_0 \mathbf{H}(x - l\vec{\omega} \notin \Omega) + \mathbf{H}(x - l\vec{\omega} \in \Omega) \right.$$

$$\left. \left[\underbrace{\left(1 - \frac{k_e(x - l\vec{\omega})}{\hat{k}} \right) \mathcal{L}(x - l\vec{\omega}) + \frac{k_e(x - l\vec{\omega})}{\hat{k}}}_{\text{il n'y a qu'ici qu'on a besoin de connaître le milieu}} \left[(1 - ssa) \mathcal{L}^* + ssa \int_0^{4\pi} \varphi(\vec{\omega}, \vec{\omega}') \mathcal{L}(x - l, \vec{\omega}') d\vec{\omega}' \right] \right\}$$

Paradigme : couplage ETR / milieu stochastique

1. **L'atmosphère nuageuse vue comme un milieu stochastique**, à la MCICA (Barker, Pincus 2003)

Un axe du travail : s'approprier les modèles stochastiques et en particulier Markoviens, hypothèses fondamentales, formalismes, réalisation d'un milieu Markovien, lien avec les modèles de recouvrement vertical de Hogan (2000), lien avec les travaux d'Alexandrov, Marshak et al. ...

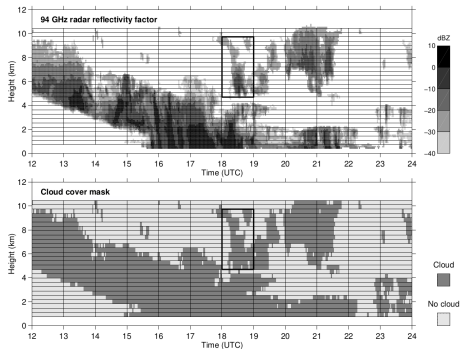
2. **L'ETR avec collisions nulles** est résolue par Monte Carlo, pas besoin de connaître le milieu *a priori*

Un autre axe du travail : dans la formulation couplée, k_e local est une variable aléatoire, pour l'échantillonner il faut écrire sa densité de probabilité — en fait k_e local conditionné par les points précédemment sondés dans le milieu lors des collisions précédentes. Des propositions dans la littérature, avec et sans diffusion. Rajouter l'idée que la fraction nuageuse varie dans l'espace (statistiques non uniformes). Passer en 3D ?

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β



From Hogan 2000, on cloud vertical overlap

Propriétés :

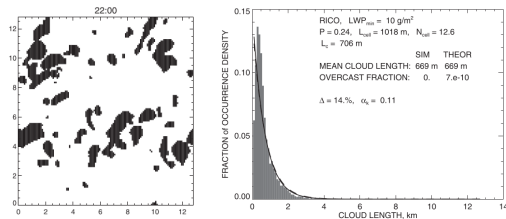
- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

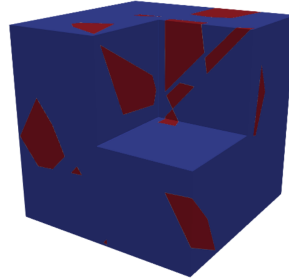
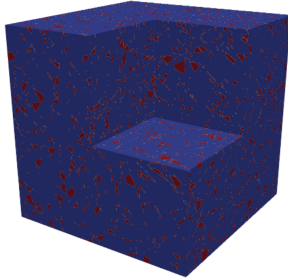
- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale



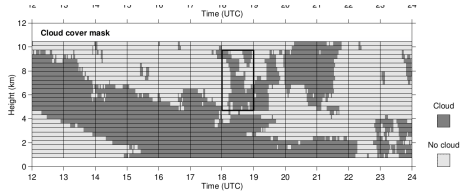
From Alexandrov et al 2010, on cloud optical depth

1. Milieux Markoviens

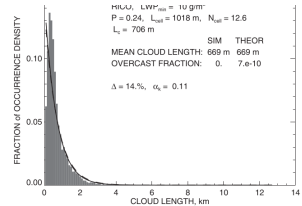
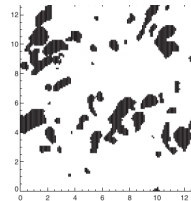
Propriétés :



From Liocce Olson and Prinja (in rev. JQSRT), on radiation transport in 3D stochastic media



From Hogan 2000, on cloud vertical overlap



From Alexandrov et al 2010, on cloud optical depth

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

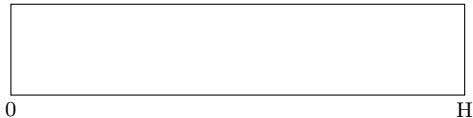
- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$ On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

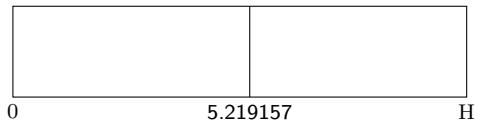
- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$ On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

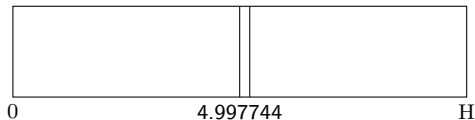
- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudos cellules avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$ On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

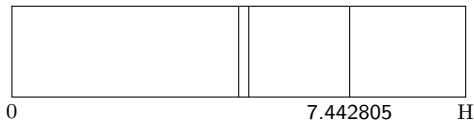
1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$$\lambda_\alpha = 0.9 \text{ et } \lambda_\beta = 1.7$$

On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

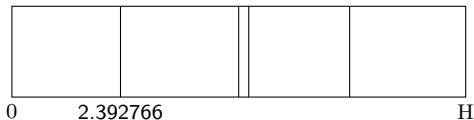
- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$ On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

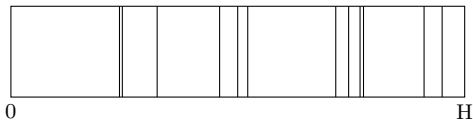
1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

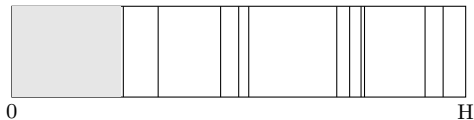
- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$ On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

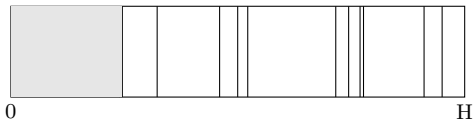
1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

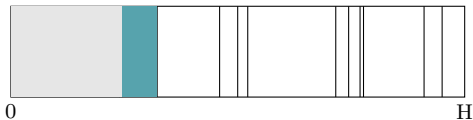
1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

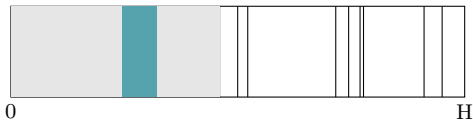
1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 12$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

1. Milieux Markoviens

Définition pour un milieu binaire :

- Deux matériaux, α (nuage) et β (non-nuage)
- Les longueurs de corde des matériaux sont distribuées en exponentielles de paramètres λ_α et λ_β

$\lambda_\alpha = 0.9$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 12$



$\lambda_\alpha = 0.2$ et $\lambda_\beta = 1.7$

On tire $n = 51$



Propriétés :

- λ_i est la longueur de corde moyenne du matériau i
- $\kappa_i = 1/\lambda_i$ est la fréquence de rencontrer une interface
- Les fractions linéiques des matériaux sont données par

$$\mathcal{P}_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda_\alpha + \lambda_\beta}, \mathcal{P}_\beta = 1 - \mathcal{P}_\alpha$$

- La longueur de décorrélation λ_c est définie par :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{1}{\lambda_\alpha} + \frac{1}{\lambda_\beta} \Leftrightarrow \kappa_c = \kappa_\alpha + \kappa_\beta$$

- $\lambda_c = 0$: bruit blanc ; $\lambda_c \rightarrow \infty$: corrélation maximale

Procédure d'échantillonnage :

- Tirer n le nombre de pseudo interfaces suivant une loi de Poisson de paramètre H/λ_c
- Tirer n variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $[0, H]$
- Tirer le matériau de chaque pseudo cellule avec un Bernoulli de paramètre $\mathcal{P}_\alpha$

2. Probabilité d'être dans un nuage en x ?

$$N \sim \text{Poisson}(r/\lambda_c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(N < 1 \mid r = r_1) = e^{-r_1/\lambda_c}$$

Milieu purement absorbant : les probas sont conditionnées uniquement par le point précédent (distance r_1)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\alpha, \alpha \mid r = r_1) &= \mathcal{P}_\alpha e^{-r_1/\lambda_c} && \text{proba d'être dans } \alpha \text{ et de ne pas rencontrer de pseudo interface} \\ &+ \mathcal{P}_\alpha (1 - e^{-r_1/\lambda_c}) \mathcal{P}_\alpha && \text{proba d'être dans } \alpha \text{ rencontrer au moins une pseudo interface le long de } r_1 \text{ et} \\ &&& \text{d'être à nouveau dans } \alpha \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\beta, \alpha \mid r = r_1) = \mathcal{P}_\beta (1 - e^{-r_1/\lambda_c}) \mathcal{P}_\alpha \quad \text{proba d'être dans } \beta \text{ rencontrer au moins une pseudo interface le long de } r_1 \text{ et d'être à nouveau dans } \alpha$$

On utilise Bayes pour obtenir
les probas conditionnelles

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha \mid \alpha, \kappa) = e_1 + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \quad \mathbb{P}(\beta, \alpha \mid \beta, \kappa) = (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha$$

2. Probabilité d'être dans un nuage en x ?

$$N \sim \text{Poisson}(r/\lambda_c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(N < 1 \mid r = r_1) = e^{-r_1/\lambda_c}$$

Milieu purement absorbant : les probas sont conditionnées uniquement par le point précédent (distance r_1)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\alpha, \alpha \mid r = r_1) &= \mathcal{P}_\alpha e^{-r_1/\lambda_c} && \text{proba d'être dans } \alpha \text{ et de ne pas rencontrer de pseudo interface} \\ &+ \mathcal{P}_\alpha (1 - e^{-r_1/\lambda_c}) \mathcal{P}_\alpha && \text{proba d'être dans } \alpha \text{ rencontrer au moins une pseudo interface le long de } r_1 \text{ et} \\ &&& \text{d'être à nouveau dans } \alpha \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\beta, \alpha \mid r = r_1) = \mathcal{P}_\beta (1 - e^{-r_1/\lambda_c}) \mathcal{P}_\alpha \quad \text{proba d'être dans } \beta \text{ rencontrer au moins une pseudo interface le long de } r_1 \text{ et d'être à nouveau dans } \alpha$$

On utilise Bayes pour obtenir
les probas conditionnelles

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha \mid \alpha, \kappa) = e_1 + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \quad \mathbb{P}(\beta, \alpha \mid \beta, \kappa) = (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha$$

Pour passer en diffusion, en 1D, il faut établir les probas conditionnées par 2 points

2. Probabilité d'être dans un nuage en x ?

$$N \sim \text{Poisson}(r/\lambda_c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(N < 1 \mid r = r_1) = e^{-r_1/\lambda_c}$$

Milieu diffusant, 1D : les probas sont conditionnées par les deux points qui entourent le lieu de la nouvelle collision, distance r_1 d'un côté et r_2 de l'autre. On note $e_1 = \exp(-r_1/\lambda_c)$, pareil pour e_2 et

$$e = e_1 e_2 = \exp(-(r_1 + r_2)/\lambda_c)$$

$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \alpha) = \mathcal{P}_\alpha e_1 e_2 + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha e_2 + \mathcal{P}_\alpha e_1 (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha$$

$$\mathbb{P}(\beta, \alpha, \alpha) = (1 - \mathcal{P}_\alpha) (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha e_2 + (1 - \mathcal{P}_\alpha) (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha$$

$$\mathbb{P}(\beta, \alpha, \beta) = (1 - \mathcal{P}_\alpha) (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) (1 - \mathcal{P}_\alpha)$$

+ Bayes

$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \alpha \mid \alpha, \kappa, \alpha) = \frac{\mathcal{P}_\alpha e_1 e_2 + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha e_2 + \mathcal{P}_\alpha e_1 (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}_\alpha e + \mathcal{P}_\alpha (1 - e) \mathcal{P}_\alpha}$$

2. Probabilité d'être dans un nuage en x ?

$$N \sim \text{Poisson}(r/\lambda_c) \Leftrightarrow \mathbb{P}(N < 1 \mid r = r_1) = e^{-r_1/\lambda_c}$$

Milieu diffusant, 1D : les probas sont conditionnées par les deux points qui entourent le lieu de la nouvelle collision, distance r_1 d'un côté et r_2 de l'autre. On note $e_1 = \exp(-r_1/\lambda_c)$, pareil pour e_2 et $e = e_1 e_2 = \exp(-(r_1 + r_2)/\lambda_c)$

$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \alpha) = \mathcal{P}_\alpha e_1 e_2 + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha e_2 + \mathcal{P}_\alpha e_1 (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha$$

$$\mathbb{P}(\beta, \alpha, \alpha) = (1 - \mathcal{P}_\alpha) (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha e_2 + (1 - \mathcal{P}_\alpha) (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha$$

$$\mathbb{P}(\beta, \alpha, \beta) = (1 - \mathcal{P}_\alpha) (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) (1 - \mathcal{P}_\alpha)$$

+ Bayes

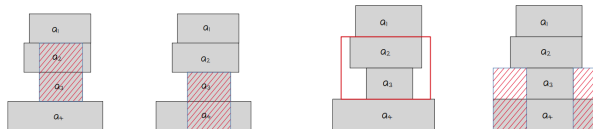
$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \alpha \mid \alpha, \kappa, \alpha) = \frac{\mathcal{P}_\alpha e_1 e_2 + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha e_2 + \mathcal{P}_\alpha e_1 (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha + \mathcal{P}_\alpha (1 - e_1) \mathcal{P}_\alpha (1 - e_2) \mathcal{P}_\alpha}{\mathcal{P}_\alpha e + \mathcal{P}_\alpha (1 - e) \mathcal{P}_\alpha}$$

Construction inspirée des papiers de Olson. Pas de formalisme posé pour les milieux markoviens à statistique non uniforme (fraction nuageuse variable)
 $\Rightarrow$ on essaie de faire le lien avec les modèles d'overlap

Probabilité d'être dans un nuage en x ? Dans un milieu à statistiques non uniformes

Modèle d'overlap exponentiel de Hogan : pondération de deux configurations extremes :

Maximalement empilé



Parfaitement décorrélé

Dans ce cas les événements sont
indépendant donc la proba de
l'intersection est le produit des probas

Graphiquement on voit que

$$\mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 1) = \min(a_k, a_{k-1})$$

$$\text{et } \mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 0) = \max(a_k, a_{k-1}) - a_{k-1}$$

$$\mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 1) = a_k \times a_{k-1}$$

$$\text{et } \mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 0) = a_k \times (1 - a_{k-1})$$

Pondération des deux configurations.

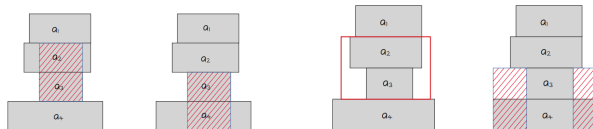
$$\mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 1) = e \times \min(a_k, a_{k-1}) + (1-e) \times a_k a_{k-1}$$

$$\mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 0) = e \times [\max(a_k, a_{k-1}) - a_{k-1}] + (1-e) \times a_k (1 - a_{k-1})$$

Probabilité d'être dans un nuage en x ? Dans un milieu à statistiques non uniformes

Modèle d'overlap exponentiel de Hogan : pondération de deux configurations extremes :

Maximalement empilé



Parfaitement décorrélé

Dans ce cas les événements sont
indépendant donc la proba de
l'intersection est le produit des probas

Graphiquement on voit que

$$\mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 1) = \min(a_k, a_{k-1})$$

$$\text{et } \mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 0) = \max(a_k, a_{k-1}) - a_{k-1}$$

$$\mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 1) = a_k \times a_{k-1}$$

$$\text{et } \mathbb{P}(C_k = 1 \cap C_{k-1} = 0) = a_k \times (1 - a_{k-1})$$

Pondération des deux configurations + Bayes

$$\mathbb{P}(C_k = 1 \mid C_{k-1} = 1) = e \times \min(a_k, a_{k-1}) / a_{k-1} + (1-e) \times a_k$$

$$\mathbb{P}(C_k = 1 \mid C_{k-1} = 0) = e \times [\max(a_k, a_{k-1}) - a_{k-1}] / (1 - a_{k-1}) + (1-e) \times a_k$$

**Si on prend la même fraction
nuageuse partout on retombe
sur les formules de Olson !**

Probabilités conditionnelles à 3 points : (Milieu markovien à statistique non homogène)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \alpha) &= [\min(a_{j-1}, a_j, a_{j+1})]e_1e_2 \\ &\quad + a_{j-1}(1 - e_1)a_j(1 - e_2)a_{j+1} \\ &\quad + \min(a_{j-1}, a_j)e_1(1 - e_2)a_{j+1} \\ &\quad + a_{j-1}(1 - e_1)\min(a_j, a_{j+1})e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \beta) &= [\max(a_{j+1}, \min(a_j, a_{j-1}) - a_{j+1})]e_1e_2 \\ &\quad + a_{j-1}(1 - e_1)a_j(1 - e_2)(1 - a_{j+1}) \\ &\quad + \min(a_{j-1}, a_j)e_1(1 - e_2)(1 - a_{j+1}) \\ &\quad + a_{j-1}(1 - e_1)\max(a_j, a_{j+1} - a_1)e_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\alpha, \beta, \alpha) &= [\max[a_{j-1}, a_j, a_{j+1} - \max(a_{j-1}, a_{j+1})]]e_1e_2 \\ &\quad + (1 - a_{j-1})(1 - e_1)(1 - a_j)(1 - e_2)(1 - a_{j+1}) \\ &\quad + [1 - \max(a_{j-1}, a_j) - a_{j-1}]e_1(1 - e_2)(1 - a_{j+1}) \\ &\quad + (1 - a_{j-1})(1 - e_1)[\max(a_j, a_{j+1}) - a_{j+1}]e_2\end{aligned}$$

Et grâce aux formules de Bayes suivantes, on abouti aux probas conditionnelles :

$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \alpha | \alpha, \nu, \alpha) = \frac{\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \alpha)}{\mathbb{P}(\alpha, \alpha | r = r_1 + r_2)}$$

$$\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \beta | \alpha, \nu, \beta) = \frac{\mathbb{P}(\alpha, \alpha, \beta)}{\mathbb{P}(\alpha, \beta | r = r_1 + r_2)}$$

$$\mathbb{P}(\beta, \alpha, \beta | \beta, \nu, \beta) = \frac{\mathbb{P}(\beta, \alpha, \beta)}{\mathbb{P}(\beta, \beta | r = r_1 + r_2)}$$